МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Д.Е. Шапошников

ВЫБОР ВАРИАНТОВ В ПРОЕКТИРОВАНИИ АППАРАТНО-ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
02.03.00 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,
09.03.04 «Программная инженерия»

Нижний Новгород

2020

УДК 681.3

ББК 32.81

Ш 24

Шапошников Д.Е. ВЫБОР ВАРИАНТОВ В ПРОЕКТИРОВАНИИ АППАРАТНО-ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 82 с.

Рецензент: д.ф.м.н., доцент **Н.Ю. Золотых**

В пособии рассматривается построение и использования человеко-машинных процедур решения задач многокритериального выбора. Основное внимание уделено анализу и использованию качественной информации об относительной предпочтительности частных критериев оптимальности при принятии решений при проектировании аппаратно-программных комплексов. Приводятся примеры использования точной и экспертной информации.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов института информационных технологий, математики и механики для использования при изучении курсов «Управление системами телекоммуникаций» и «Управление ИТ компанией».

УДК 681.3

ББК 32.81

Содержание

ВВЕДЕНИЕ 5

1. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА ВАРИАНТОВ И ПОДХОДЫ К ЕЕ РЕШЕНИЮ 7

1.1. Модель принятия решения и ее компоненты 7

1.1.1. Исходное множество вариантов 7

1.1.2. Частные критерии оптимальности 8

1.1.3. Лицо, принимающее решение 9

1.1.4. Общие принципы решения задачи выбора 10

1.2. Бинарные отношения и их свойства 11

1.2.1. Понятие бинарного отношения 11

1.2.2. Определение и способы задания бинарного отношения 12

1.2.3. Операции над отношениями 14

1.2.4. Свойства отношений 16

1.2.5. Некоторые разновидности отношений 18

1.3. Бинарные отношения вариантов выбора 19

1.3.1. Отношения предпочтения векторов 19

1.3.2. Наилучшие, эффективные и слабо эффективные решения 21

1.4. Практические выводы 26

2. МЕТОДЫ ЭКСПЕРТНОЙ ОЦЕНКИ 27

2.1. Экспертиза и методы ее проведения 27

2.1.1. Методика проведения экспертизы 28

2.1.2. Результат экспертизы 29

2.1.3. Работа с экспертом 30

2.1.4. Взаимодействие экспертов и обратная связь 31

2.2. Индивидуальная экспертная оценка 32

2.2.1. Использование попарных сравнений объектов 33

2.2.2. Метод Черчмена-Акоффа 35

2.3. Определение коллективного мнения экспертов 38

2.3.1. Определение коллективного мнения путем усреднения..........................39
2.3.2. Определение коллективного мнения по выбранной схеме компромисса39

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА 47

3.1. Формирование таблицы многокритериального выбора 47
3.1.1. Формирование множества альтернатив 47
3.1.2. Формирование множества частных критериев задачи 47
3.1.3. Пример постановки задачи и формирования таблицы многокритериального выбора 52
3.2. Анализ эффективности вариантов 54
3.3. Метод главного критерия и его модификации 55
3.3.1. Метод главного критерия 55
3.3.2. Метод лексикографического упорядочения 57
3.3.3. Метод последовательных уступок 59
3.4. Использование аддитивного обобщенного критерия 60

4. НАЗНАЧЕНИЕ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВАЖНОСТИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО КРИТЕРИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ 65

4.1. Использование информации об относительном разбросе 65
4.2. Использование качественной информации об относительной важности частных критериев 66
4.2.1. Принципы использования качественной информации 67
4.2.2. Представление информации в виде графа и ее анализ.............................69
4.2.3. Вычисление весовых коэффициентов важности при различных видах качественной информации 72

ЛИТЕРАТУРА 81

Введение

Жизнь общества в последние десятилетия характеризуется стремительным развитием телекоммуникаций. Это развитие в значительной степени основано на развитии как электроники (современных материалов и технологий), так и научных достижений, связанных с методами передачи и обработки данных. В отрасли телекоммуникаций, как и в жизни вообще, важной составляющей деятельности является принятие решений. С этим сталкиваются все категории людей – и профессионалы (провайдеры), и пользователи. При этом основной задачей, как показывает практика, является задача выбора, то есть выбор «лучшего» из одного из относительно немногочисленных вариантов, имеющих разные свойства и потребительские качества. В частности, такой задачей является выбор конкретного типа приобретаемого оборудования, выбор оптимального режима его функционирования, выбор способов взаимосвязи и взаимодействия различных типов оборудования и т.д.

Если у всех вариантов есть единственная характеристика (критерий), определяющая их качество, то задача принятия решения является простой – достаточно найти вариант с наилучшей характеристикой и выбрать его. Но задача, как правило, является более сложной и для оценки качества и свойств вариантов выбора одной характеристики (критерия) недостаточно – имеется несколько характеристик (критериев) и все они должны учитываться для правильного выбора оптимального решения. Сложность такой задачи обусловливается в первую очередь противоречивостью критериев и необходимостью использования некоторой схемы разумного компромисса, позволяющего гармонично повышать качество решения по всем частным критериям.

Можно отметить следующие жизненные ситуации, приводящие в задаче многокритериального принятия решений.

1. Когда решение определяет совместные действия нескольких объектов, эффективность каждого из которых оценивается отдельным критерием (например, совместная работа подразделений фирмы, или нескольких единиц оборудования).

2. Когда качество решения необходимо оценивать для нескольких вариантов условий и для каждого варианта вводится отдельная оценка.

3. Когда решение оценивается в динамике или поэтапно, и для оценки качества решения на каждом этапе вводится самостоятельный критерий.

4. Когда качество решения необходимо оценивать с нескольких точек зрения – по отдельным компонентам качества. Например, оценка качества выбранной учрежденческой АТС проводится по стоимости, емкости, наличию определенных технических возможностей и т.д.

Такие ситуации задачи могут быть правильно (корректно) разрешены только на основе многокритериального (векторного) подхода к принятию решений.

В данном учебном пособии рассмотрены методы многокритериального анализа и принятия решений, способы выработки компромиссных решений, приведены примеры решения задач принятия решений в отрасли телекоммуникаций.

1. Многокритериальная задача выбора вариантов и подходы к ее решению

В самом общем виде, задача многокритериального выбора может быть сформулирована следующим образом.

Лицо, принимающее решение (ЛПР), сформировал набор некоторого числа вариантов, из которых ему (ЛПР) требуется произвести единственный и окончательный выбор. Выбор осуществляется как выделение некоторого подмножества вариантов (в частном случае – один вариант) таких, что ЛПР считает их лучшими.

Это – слишком общая постановка задачи. Для применения математических методов требуется более формальный подход к постановке задачи. Такой формальный подход предполагает построение математической модели.

1.1. Модель принятия решения и ее компоненты

Таким образом, задача принятия решения (выбора одного из вариантов) состоит из следующих трех компонент:

- исходного множества вариантов, из которых производится выбор;
- принципа оптимальности, на основании которого выбирается наилучший вариант (или наилучшие варианты);
- лица, принимающего решение (ЛПР), который определяет процесс поиска решения, а также экспертов и консультантов, оказывающих ему в этом помощь.

1.1.1. Исходное множество вариантов

Исходное множество вариантов – это основа принятия решения. Будем считать, что это множество (называемое также множеством допустимых решений, set of feasible solutions) представляет собой дискретный конечный набор альтернатив, которые мы будем обозначать номерами:

$$D = \{1,2, \dots, m\} \tag{1.1}$$

На практике количество таких вариантов не очень велико (уже маловероятно, чтобы их число было больше ста). Если речь идет, например, о выборе типа приобретаемого оборудования, особенно дорогостоящего, то речь может идти о десятке наименований. Хотя, естественно, количество вариантов m не ограничивается и может быть любым. Вообще, задача выбора, методы решения которой здесь и рассматриваются, корректна и имеет смысл тогда, когда количество вариантов не менее двух.

Задача выбора заключается в выборе варианта $x^* \in D = \{1,2, \dots, m\}$, который является наилучшим (оптимальным) с точки зрения ЛПР. Поскольку понятие оптимальности при многих критериях достаточно сложно, то в литературе утвердился термин «*рациональное решение*», под которым понимается наличие рациональных, понятных другим людям причин, приведших к выбору данного решения из множества допустимых.

1.1.2. Частные критерии оптимальности

Каждый из вариантов характеризуется некоторым набором свойств, при этом каждое свойство может быть выражено в числовом виде и значения этих чисел характеризуют качество варианта с точки зрения этого свойства (чем больше, тем лучше, или, чем меньше, тем лучше). В этой ситуации каждое свойство представляет собой оценку относительной предпочтительности одного варианта по сравнению с другим в контексте этого свойства. Например, если свойство – это цена, то можно сказать, что вариант x предпочтительнее варианта y, если вариант x дешевле.

Такое свойство каждого варианта, выраженное в некоторой числовой шкале, называется *частным критерием оптимальности*. Частные критерии должны характеризовать каждый из вариантов таким образом, чтобы было любые два варианта сравнить между собой по данному частному критерию, выразив либо предпочтение одного из них (например, вариант x предпочтительнее варианта y), либо эквивалентность обоих в смысле данного частного критерия оптимальности.

В дальнейшем будем считать, что шкалы измерений частных критериев оптимальности определены и численное значение оценки по варианту может быть получено для каждого варианта и каждого критерия. Получение таких численных оценок может оказаться отдельной и не всегда простой задачей.

Если частный критерий оптимальности представляет собой объективную величину, которая характеризует предпочтительность варианта (например, цену оборудования, выраженную в денежных единицах), то задача упрощается. А вот если частный критерий оптимальности носит качественный характер, то необходимо применять другие методы.

В частности, если критерий характеризует наличие у варианта некоторого свойства, шкала частного критерия является бинарной: величина 1 или 0 характеризует наличие или отсутствие свойства соответственно.

Если частный критерий характеризует свойство варианта, которое может иметь несколько разновидностей (например, способ подключения, способ организации системы безопасности и т.д.), то для формирования численных оценок целесообразно привлекать методы экспертной оценки, о чем подобно описано в параграфе 1.2.

Процесс построения множества частных критериев оптимальности для задачи выбора более подробно рассмотрен в параграфе 1.3.

1.1.3. Лицо, принимающее решение

Слово *частный* появляется только тогда, когда критериев несколько и подчеркивает сложность ситуации.

В самом деле, если бы критерий оптимальности был один, тогда для решения задачи просто необходимо выбрать вариант, который, с точки зрения этого критерия, наилучший: то есть такой, который обеспечивает максимальное (минимальное) значение частного критерия оптимальности (в зависимости от его типа). Но жизнь сложна, и ЛПР требует оптимальности одновременно по всем частным критериям. Очевидно, что найти такой вариант (оптимальный по всем критериям одновременно) – практически невыполнимая задача. В подавляющем большинстве случаев частные критерии оптимальности являются противоречивыми, и улучшение по одному частному критерию означает ухудшение по другому. Поэтому ясно, что должен быть достигнут некоторый компромисс.

И здесь главную роль играет ЛПР. Именно он, исходя из своих предпочтений и целей, задает способ, по которому этот компромисс находится. Именно субъективное мнение ЛПР о предпочтениях и позволяет найти оптимально-компромиссное решение.

1.1.4. Общие принципы решения задачи выбора

Задачу выбора удобнее рассматривать и решать, если все исходные данные сведены в таблицу следующего вида.

Табл. 1.1. Исходные данные задачи выбора вариантов.

Варианты (альтернативы)	Частные критерии оптимальности			
	Q_1	Q_2	…	Q_n
1	q_{11}	q_{12}	…	q_{1n}
…	…	…	…	…
m	q_{m1}	q_{m2}	…	q_{mn}

В этой таблице строка содержит наименование и численные значения частных критериев для одного варианта, а один столбец содержит значения частного критерия оптимальности у всех вариантов.

При этом, как уже было отмечено, полагаем, что каждый частный критерий оптимальности численно выражен в некоторой шкале и является (по смыслу) характеристикой каждого варианта, в смысле лучше или хуже один вариант другого.

Вообще, для решения такой задачи выбора наилучшего варианта, требуется варианты упорядочить по качеству, то есть построить на множестве вариантов отношение порядка (подробнее об этом написано в параграфах 1.2 и 1.3). Такое отношение легче всего построить, если у каждого варианта существует интегральная числовая характеристика $Q(x)$, отражающая взгляд ЛПР на данную предметную область.

Если таблица многокритериального выбора содержит только один столбец (то есть один критерий), то этот критерий и является такой характеристикой. В этом случае для решения задачи требуется упорядочить варианты по ухудшению данной характеристики (то есть по убыванию или возрастанию частного критерия в зависимости от его типа) и тогда первый вариант и будет решением задачи (если несколько первых вариантов имеют одинаковое значение частного критерия, то все они являются решением задачи в данной постановке).

Если критериев несколько, то для формирования такой интегральной характеристики часто используют обобщенный критерий оптимальности, который может строиться, например, следующим образом:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i Q_i(x), \tag{1.2}$$

где весовые коэффициенты $w_i, i = 1, \dots, n$, отражают взгляд ЛПР на важность частных критериев оптимальности. Подробнее методы назначения весовых коэффициентов важности будут рассмотрены в параграфе 1.4. Там же будут рассмотрены и другие способы учета предпочтений ЛПР в данной предметной области.

1.2. Бинарные отношения и их свойства

Как уже было отмечено, простая и, вместе с тем, идеальная ситуация, которая позволяет сделать обоснованный выбор из нескольких объектов, возникает, когда задан один четкий критерий качества, позволяющий сравнить любые два объекта между собой и затем выбрать тот объект, который лучше всех. Но, чаще всего, выделить такой критерий очень трудно, если вообще возможно. И, тем не менее, для некоторых пар объектов можно указать, какой из объектов пары лучше (предпочтительнее) другого. В таких случаях говорят, что эти два объекта находятся в бинарном отношении. Понятие бинарного отношения позволяет формализовать попарное сравнение объектов. Рассмотрим это понятие подробнее.

1.2.1. Понятие бинарного отношения

Рассмотрим ситуацию, при котором два объекта из множества можно сравнить между собой в каком-то смысле. Это сравнение может быть совершенно разным. Например, «Крым южнее Архангельска», «Иван – родственник Петра», «Компьютер фирмы «Рога» лучше компьютера фирмы «Копыта»» и так далее. Принципиально важными здесь являются следующие моменты.

1. В каждой из этих фраз присутствуют два объекта (обозначаемые именем объекта) и само отношение («южнее», «является родственником»). При этом объекты являются элементами некоторого множества, относительно которого эти суждения

имеют смысл: в первом случае – это географические объекты, во втором – люди. Это множество назовем *исходным множеством бинарного отношения*.

2. Для любых двух объектов исходного множества можно сказать, что данное бинарное отношение либо выполняется, либо не выполняется. Например, исходное множество представляет собой множество целых чисел от 0 до 10, и на этом множестве задано отношение «больше». Очевидно, что для пары чисел <7,6> данное отношение выполняется, а для пары <6,7> – не выполняется.

3. Вышеприведенные два отношения являются отношениями разного типа: первое отношение («южнее») задает некоторый порядок объектов (в данном случае – географический), а второе отношение («являться родственником») – принадлежность объектов некоторому классу (родственников).

4. Отношение может быть определено не только для пар, но и для троек, четверок и т.д. Мы в дальнейшем будем рассматривать только бинарные отношения, то есть отношения между двумя объектами. Поэтому, в дальнейшем будем говорить «отношение», подразумевая, что это отношение является бинарным.

1.2.2. Определение и способы задания бинарного отношения

Бинарным отношением R на множестве S называется подмножество R декартового произведения $S \times S$, то есть

$$R \subseteq S \times S. \qquad (1.3)$$

Содержательный смысл такого определения состоит в том, что декартово произведение $S \times S$ представляет собой множество всевозможных пар объектов, а задание его подмножества определяет, какие именно пары входят в это отношение. Это обычно обозначается следующим образом: если пара $< x, y >$ входит в отношение R, то есть $< x, y > \in R$, то пишут xRy, то есть x находится в отношении R с y.

Способ задания отношения определяет, каким образом мы будем указывать это множество пар. Существует два основных способа задания отношения: матрицей и графом.

Задание матрицей подразумевает построение квадратной матрицы, количество строк и столбцов в которой равно количеству элементов исходного множества S. На пересечении i-ой строки и j-го столбца матрицы ставится единица, если выполняется $x_i R x_j$, и ноль – в противном случае. Здесь через x_i и x_j обозначены элементы исходного множества, пронумерованные в каком-то порядке. Очевидно, что матрица содержит всю необходимую информацию от этом отношении.

В качестве примера рассмотрим множество из пяти персональных компьютеров, которые обозначим буквами: $\{A, B, C, D, E\}$. Предположим, что стоимость компьютеров следующая:

Компьютер	Стоимость (условных единиц)
A	900
B	1000
C	1000
D	1100
E	1200

На этом множестве зададим отношение «компьютер x стоит дороже, чем компьютер y». Тогда матрица, характеризующая это отношение, будет выглядеть следующим образом:

Компьютеры	A	B	C	D	E
A	0	0	0	0	0
B	1	0	0	0	0
C	1	0	0	0	0
D	1	1	1	0	0
E	1	1	1	1	0

Задание графом более наглядно, так как граф $G(R)$ является геометрическим представлением бинарного отношения R.

Элементам исходного множества ставятся во взаимно однозначное соответствие вершины графа $x_1, \dots, x_n$. Дуги в графе рисуются тогда, когда между соответствующими элементами исходного множества выполняется отношение R. То есть, дуга, соединяющая вершины x_i и x_j рисуется тогда и только тогда, когда выполняется $x_i R x_j$.

Приведенное в предыдущем примере отношение можно представить следующим графом:

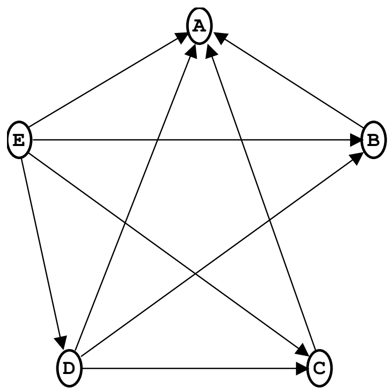

Рис. 1.1. Пример задания отношения.

Такое представление особенно удобно, когда количество вершин невелико и сам по себе граф достаточно прост. Наоборот, изучать и описывать сложные графы с большим количеством вершин гораздо удобнее в терминах отношений. Отношения в этом случае, чаще всего, описываются в терминах математических аналитических выражений.

1.2.3. Операции над отношениями

Рассмотрим основные операции над отношениями. Везде будем считать, что отношения заданы на одном и том же множестве S.

Необходимо заметить, что поскольку отношение по определению является множеством (подмножеством пар произведения исходного множества на себя), то для отношения можно определить все операции, которые определены для множеств – объединение, пересечение и т.д.

Однако некоторые операции имеют особенный смысл, связанный именно с бинарными отношениями.

Дополнение отношения. Отношение $\bar{R}$ называется дополнением отношения R, если оно выполняется для тех и только тех пар, для которых не выполняется отношение R. Очевидно, что $\bar{R} = (S \times S) \backslash R$.

Легко видеть, что в матричной записи:

$$a_{ij}(\bar{R}) = 1 - a_{ij}(R), \qquad i, j = 1,2, \dots, n. \tag{1.4}$$

А в графе $G(\bar{R})$ присутствуют те и только те дуги, которые отсутствуют в графе $G(R)$.

Обратное отношение. Отношение R^{-1} называется обратным к отношению R, если для любых элементов x и y исходного множества выполняется условие:

$$xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x. \tag{1.5}$$

Нетрудно видеть, что для матричной записи выполняется:

$$a_{ij}(R^{-1}) = 1 - a_{ji}(R), \;\; i,j = 1,2,\dots,n. \tag{1.6}$$

Граф $G(R^{-1})$ получается из графа $G(R)$ изменением направления всех дуг на противоположные.

Для операции обращения справедливы следующие две теоремы, которые приводятся без доказательства (доказательства приведены, например, в [13]).

Теорема 1. $(R^{-1})^{-1} = R$.

То есть дважды выполненное обращение отношения возвращает к первоначальному состоянию.

Теорема 2. Результат последовательного выполнения операций дополнения и обращения не зависит от порядка, в котором они выполняются: $\overline{R^{-1}} = (\bar{R})^{-1}$.

Есть еще одна интересная операция, которая играет важную роль в теории выбора. Операция перехода к двойственному отношению строится на основе операций обращения и дополнения.

Двойственное отношение. Двойственное отношение – это отношение дополнительное к обратному (или обратное к дополнительному, что одно и то же в силу теоремы 2). Двойственное отношение определяется формулой:

$$R^d = \overline{R^{-1}} = (\bar{R})^{-1}. \tag{1.7}$$

Можно показать, что для того, чтобы осуществить переход от графа $G(R)$ к графу $G(R^d)$, требуется выполнить следующие действия:

1) удалить из графа все пары противоположных дуг и все петли;
2) присоединить новые противоположные дуги (i,j) и (i,j), соответствующие парам вершин, не связанным в графе $G(R)$ дугой;
3) добавить петли (i,j), которые отсутствовали в графе $G(R)$.

Самый наглядный пример двойственного отношения можно привести на множестве натуральных чисел. Если исходное отношение R – это отношение «больше», то двойственное к нему отношение R^d представляет собой отношение «больше или равно». И наоборот – двойственным к отношению «больше или равно» является отношение «больше». А если исходным отношением будет отношение «равно», то двойственным – отношение «не равно».

1.2.4. Свойства отношений

Отношение R называется *рефлексивным*, если для любого элемента x исходного множества выполняется xRx. В матрице рефлексивного отношения на главной диагонали везде стоят единицы, а в графе отношения $G(R)$ около каждой вершины есть петля.

Отношение R называется *антирефлексивным* (или *иррефлексивным*), если это отношение выполняется только для несовпадающих объектов, иначе говоря, из xRy следует, что $x \neq y$. В матрице антирефлексивного отношения на главной диагонали везде стоят нули, а в графе $G(R)$ отсутствуют петли.

Если вернуться к примеру с компьютерами, то можно заметить, что отношения «компьютер x стоит дороже, чем компьютер y» и «компьютер x стоит дешевле, чем компьютер y» являются антирефлексивными, а отношения «компьютер x стоит не дешевле, чем компьютер y» и «компьютер x стоит не дороже, чем компьютер y» являются рефлексивными.

Отношение R называется *симметричным*, если справедливо выражение: $xRy \Longrightarrow yRx$. Матрица такого отношения симметрична относительно главной диагонали $\left(a_{ij} = a_{ji},\ \ i,j = 1,2,\dots,n\right)$, а в графе $G(R)$ вместе с дугой (i,j) также присутствует и дуга (j,i).

Отношение R называется *асимметричным*, если из выражений xRy и yRx по крайней мере одно несправедливо. В матрице асимметричного отношения симметричные относительно главной диагонали элементы имеют различные значения $\left(a_{ij} \cdot a_{ji} = 0,\ \ i,j = 1,2,\dots,n\right)$, а сами элементы главной диагонали равны нулю. Граф $G(R)$ не может содержать одновременно дуги вида (i,j) и (j,i).

Продолжаем пример с компьютерами.

Очевидно, что отношение «стоимость компьютеров x и y одинакова» является симметричным. Отношение «стоит дороже» и отношения «стоит дешевле» являются асимметричными. Но существуют отношения, которые не являются ни симметричными, ни асимметричными.

Рассмотрим отношение «компьютер x стоит не дороже, чем компьютер y» на приведенном выше множестве компьютеров. Очевидно, что это отношение не является ни симметричным, ни асимметричным. На самом деле, если два компьютера B и C стоят одинаково, то в графе отношения присутствуют обе дуги (от B к C и от C к B), что противоречит определению асимметричного отношения. А если компьютер A стоит меньше, чем компьютер B, то для $< A, B >$ отношение выполняется, а для пары $< B, A >$ – не выполняется, что противоречит определению симметричного отношения.

Отношение R называется *антисимметричным*, если выражения xRy и yRx одновременно справедливы только тогда, когда $x = y$. В матрице антисимметричного отношения симметричные относительно главной диагонали элементы имеют различные значения, если не располагаются на главной диагонали $\left(a_{ij} \cdot a_{ji} = 0,\ \ i, j = 1,2, \dots, n\right)$, а граф $G(R)$ не может содержать одновременно дуги вида (i, j) и (j, i), но, в то же время, может содержать петли.

Отношение «x меньше или равно y» на множестве натуральных чисел является антисимметричным, так как выражение $x \leq x$ является справедливым. А вот отношение «компьютер x стоит не дороже, чем компьютер y» не является антисимметричным.

Отношение называется *тразитивным*, если из справедливости xRy и yRz следует справедливость xRz. Отношение R называется *отрицательно транзитивным*, если его дополнение $\bar{R}$ также транзитивно. Отношение называется *сильно транзитивным*, если оно одновременно транзитивно и отрицательно транзитивно.

Отношение называется *ацикличным*, если из $xRz_1, z_1Rz_2, \dots, z_kRy$ следует справедливость $x \neq y$.

Ацикличность и транзитивность отношений играют важную роль в теории выбора и принятия решений, так как эти свойства выражают некоторые естественные взаимосвязи между объектами. Действительно, если x в каком-то смысле лучше, чем y, а y в том же смысле лучше, чем z, то естественно предположить, что в этом смысле x лучше, чем z (транзитивность), и z не лучше, чем x (ацикличность).

Если компьютер B стоит не больше, чем компьютер C, и, в свою очередь, компьютер C стоит не дороже, чем компьютер D, то компьютер B стоит не дороже, чем компьютер D. Поэтому отношение «компьютер x стоит не дороже, чем компьютер y» является транзитивным. А вот с ацикличностью сложнее. К двум вышеприведенным высказываниям можно добавить выражение «компьютер D стоит не дороже, чем компьютер B» в случае, если стоимость компьютера D составляет 1000 условных единиц и, следовательно, все три компьютера стоят одинаково. Поэтому данное отношение ацикличным не является.

А вот отношение «компьютер A стоит дешевле, чем компьютер B» является ацикличным, так как из выражений «компьютер A стоит дешевле, чем компьютер B» и «компьютер B стоит дешевле, чем компьютер D» следует, что компьютер D никак не может стоить дешевле, чем компьютер A.

1.2.5. Некоторые разновидности отношений

Некоторые комбинации рассмотренных свойств позволяют определить бинарные отношения, представляющие интерес с точки зрения теории выбора и принятия решений. К таким отношениям относятся отношения эквивалентности, порядка и доминирования.

Отношение R называется *отношением эквивалентности* (или просто *эквивалентностью*), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Отношение эквивалентности разделяет исходное множество на *классы* – то есть непересекающиеся подмножества, объединение которых образует исходное множество.

Примером такого разбиения, например, является бинарное отношение вида «числа x и y имеют одинаковый остаток от деления на 10», определенное на множестве натуральных чисел. В один класс попадают числа с нулем на конце (остаток их деления на 10 равен нулю), в другой класс числа с единицей на конце и так далее.

Другой пример можно привести с вышеописанным примером с компьютерами. Введем на множестве компьютеров отношение «компьютер x и компьютер y являются компьютерами одного производителя». Тогда исходный набор компьютеров разделится на классы – в зависимости от производителя.

Отношение R называется *отношением нестрогого порядка* (или просто *отношением порядка*), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Отношение R называется *отношением строгого порядка*, если оно антирефлексивно, асимметрично и транзитивно.

Отношения порядков (строго и нестрогого) позволяет упорядочивать исходное множество вариантов выбора и сравнивать варианты с целью выбора лучшего (в каком-то смысле). Здесь важными являются понятия максимума (минимума) и мажоранты (миноранты).

Наилучшим (наибольшим) элементом по отношению R, заданному на множестве S, называется элемент $x \in S$, такой, что для всех элементов $y \in S$ выполняется xRy. Соответственно, *наихудшим (наименьшим) элементом* по отношению R, заданному на множестве S, называется элемент $x \in S$, такой, что для всех элементов $y \in S$ выполняется yRx. Наилучший и наихудший элементы могут существовать или не существовать. Если бинарное отношение является отношением строгого порядка то максимум обязательно существует и является единственным.

Максимумом по отношению R, заданному на множестве S, называется элемент $x \in S$, такой, что не существует элементов $y \in S$ таких, что выполняется yRx. *Минимумом* по отношению R, заданному на множестве S, называется элемент $x \in S$, такой, что не существует элементов $y \in S$ таких, что выполняется xRy. То есть, максимум – это лучший элемент в том смысле, что нет элемента, лучше его, а минимум – худший элемент в смысле, что нет ни одного элемента хуже его.

1.3. Бинарные отношения вариантов выбора

1.3.1. Отношения предпочтения векторов

Итак, в нашем случае исходное множество вариантов представляет собой некоторое конечное множество, в котором каждый элемент соответствует исходному варианту и имеет свой номер (табл. 1.1). Каждый вариант при этом характеризуется набором численных значений (вектором) оценок. Необходимо выбрать наилучший, в каком-то смысле, вариант.

Если на исходном множестве вариантов построить бинарное отношение предпочтения вида «вариант x предпочтительнее варианта y» (обозначается $x \succ y$), то все будет зависеть от того, каким именно это отношение будет по его свойствам. Если отношение предпочтительности будет представлять собой строгий порядок, то исходную задачу выбора можно считать решенной. В этом случае, в качестве решения нужно просто взять наилучший (по отношению предпочтения) элемент. Ясно, что это и будет искомое решение, так как лучшего элемента просто не существует в принципе. Но чаще всего, такое отношение (строгий порядок) в силу разных причин построить не удается. Либо некоторые варианты невозможно сравнить между собой, либо они эквивалентные по предпочтительности. Но, все-таки, для решения исходной задачи выбора, построить такое отношение рано или поздно придется. Для этого есть единственный способ – построить бинарное отношение на основе сравнения численных значений оценок частных критериев.

В дальнейшем, для простоты изложения будем полагать, что все частные критерии оптимальности требуется максимизировать.

Построим следующие бинарные отношения для вариантов x и y на основании значений частных критериев оптимальности $Q(x)$ и $Q(y)$ $(x, y \in D)$.

1. Отношение эквивалентности «$\sim$»:

$$x \sim y \Leftrightarrow Q(x) = Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) = Q_i(y), i = 1,2, \dots, n. \qquad (1.8)$$

То есть варианты x и y эквивалентны, если значения соответствующих частных критериев равны между собой.

2. Отношение нестрогого порядка «$\underline{\succ}$»:

$$x \underline{\succ} y \Leftrightarrow Q(x) \geq Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) \geq Q_i(y), i = 1,2, \dots, n. \qquad (1.9)$$

То есть считаем, что вариант x не хуже варианта y, если каждая компонента вектора $Q(x)$ не меньше, чем соответствующая компонента вектора $Q(y)$.

3. Отношение строгого порядка «$\succcurlyeq$»:

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow Q(x) \geq Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) \geq Q_i(y), i = 1,2, \dots, n; Q(x) \neq Q(y). \qquad (1.10)$$

Считаем, что вариант x лучше варианта y, если у вектора $Q(x)$ найдется хотя бы одна компонента, которая строго больше соответствующей компоненты вектора $Q(y)$, а все остальные компоненты – не меньше.

4. Отношение абсолютно строгого порядка «$\succ$»:

$$x \succ y \Leftrightarrow Q(x) > Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) > Q_i(y), i = 1,2, \dots, n. \qquad (1.11)$$

То есть вариант x абсолютно лучше варианта y, если каждая компонента вектора $Q(x)$ строго больше, чем соответствующая компонента вектора $Q(y)$.

Если все частные критерии в задаче представляют собой критерии минимизации, то введенные ранее отношения формулируются следующим образом:

- отношение эквивалентности остается прежним:

$$x \sim y \Leftrightarrow Q(x) = Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) = Q_i(y), i = 1,2, \dots, n. \qquad (1.11)$$

- отношение нестрогого порядка:

$$x \gtrsim y \Leftrightarrow Q(x) \leq Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) \leq Q_i(y), i = 1,2, \dots, n. \qquad (1.12)$$

- отношение строго порядка:

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow Q(x) \leq Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) \leq Q_i(y), i = 1,2, \dots, n; Q(x) \neq Q(y). \qquad (1.13)$$

- отношение абсолютно строгого порядка:

$$x \succ y \Leftrightarrow Q(x) < Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) < Q_i(y), i = 1,2, \dots, n. \qquad (1.14)$$

1.3.2. Наилучшие, эффективные и слабо эффективные решения

Предположим, что все частные критерии представляют собой критерии максимизации (или приведены к ним).

Наилучшему по отношению «$\succ$» варианту среди множества решений соответствует наилучший по отношению «$>$» вектор на множестве векторов. Этот вариант безусловно можно считать оптимальным решением задачи выбора. Действительно, построение данного отношения и определение наилучшего элемента по отношению означает, что наилучший по отношению $\geqslant$ вариант x^* является лучшим, чем все остальные, так как по каждому частному критерию строго их превосходит:

$$Q(x^*) > Q(y^*), \qquad y \in D, y \neq x. \tag{1.15}$$

Иначе говоря, вариант x^* в этой ситуации радикально превосходит все остальные варианты по всем характеристикам.

Но это – идеальный случай. На практике, такой оптимум существует крайне редко. То же самое можно сказать о наилучших вариантах по отношениям «$\geqslant$» и «$\underline{\geqslant}$». На первый план выходит понятия максимума. Именно с помощью этого термина вводятся понятия эффективного и слабо-эффективного решений.

Максимум по отношению «$\geqslant$» называют *эффективным решением*, а также *решением, оптимальным по Парето*; *Парето-оптимальным решением*; *оптимумом по Парето*.

Иными словами, эффективным решением (эффективным вариантом) называют решение (вариант), для которого не существует решения (варианта), лучшего по отношению «$\geqslant$».

Множество всех эффективных решений называется *эффективным множеством* или *множеством Парето*.

Поясним сказанное.

Из всего исходного множества вариантов рассмотрим два любых, а векторы значений критериев сравнимы по отношению $\geq$. При этом может оказаться один из следующих случаев.

1) Выполняется соотношение $x \geq y$. Так как считаем, что все частные критерии требуется максимизировать, то очевидно, что вариант y можно в дальнейшем не рассматривать, так как вариант x не хуже варианта y, более того, хотя бы по одному частному критерию превосходит y. В этом случае говорят, что «x доминирует y».

2) Выполняется соотношение $y \geq x$. Аналогично, y доминирует x и вариант x можно в дальнейшем не рассматривать.

3) Варианты x и y не сравнимы между собой по отношению ≥. Это случится тогда, когда по некоторым частным критериям оптимальности вариант x лучше, чем вариант y, а по другим критериям – наоборот: вариант y лучше варианта x.

Таким образом, *эффективное множество представляет собой множество недоминируемых вариантов*, то есть вариантов, для которых не существует ни одного варианта, который был бы лучше в смысле отношения ≥.

Максимум по отношению «$\gtrsim$» называют *слабо-эффективным решением*, а также *решением, оптимальным по Слейтеру*.

То есть, слабо-эффективным решением (слабо-эффективным вариантом) называют решение (вариант), для которого не существует решения (варианта), лучшего по отношению «$\gtrsim$».

Множество всех слабо-эффективных решений называется *слабо-эффективным множеством* или *множеством Слейтера*.

Все вышеперечисленные понятия можно проиллюстрировать графически.

Предположим, что имеются два частных критерия оптимальности (Q_1 и Q_2), которые требуется максимизировать, и несколько вариантов. Рассмотрим вариант x' и построим следующую диаграмму.

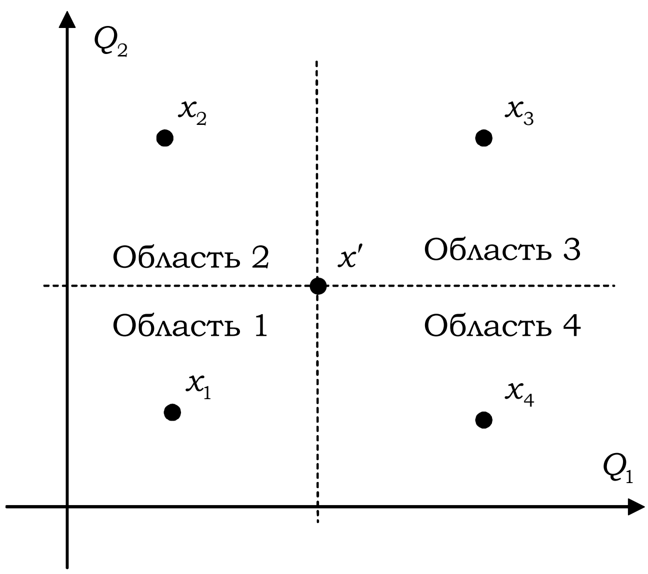

Рис. 1.2. Доминируемые и недоминируемые варианты.

Допускаем, что точки x_1, x_2, x_3, x_4 не располагаются на границах зон.

Тогда можно сформулировать следующие утверждения.

1) Все варианты в зоне 1 доминируются вариантом x' и могут быть удалены из рассмотрения как неэффективные. Иными словами, решение x_1 хуже решения x' по обоим критериям: $Q(x') > Q(x')$.

2) Все варианты в зоне 2 являются «компромиссными», то есть в чем-то лучше, а в чем-то хуже. В данном примере, решение x_2 по критерию Q_2 лучше, а по критерию Q_1 – хуже, чем решение x_1.

3) Все решения в зоне 3 являются доминирущими для данного решения x', то есть лучше по всем критериям. Если в зоне 3 есть хотя бы одно решение, то данное решение x' может быть исключено, так как $Q(x_1) > Q(x')$.

4) Все варианты в зоне 4 (как и в зоне 2) являются «компромиссными». В данном примере, решение x_4 лучше, чем решение x', по критерию Q_1, зато хуже по критерию Q_2.

Если для данного решения x' отсутствуют доминирующие его решения, то данное решение является эффективным или Парето-оптимальным.

Если варианты (то есть, возможные решения) располагаются на границах интервалов, то они могут характеризоваться по-другому. Рассмотрим эту ситуацию на примере.

В данном случае, варианты x_5 и x_6 равноценны с вариантом x' по одному из частных критериев и предпочтительнее по другому критерию. А с вариантами x_7 и x_8 ситуация обратная: решение x' является более предпочтительным, чем решения x_7 и x_8 по одному из критериев и равноценным по другому.

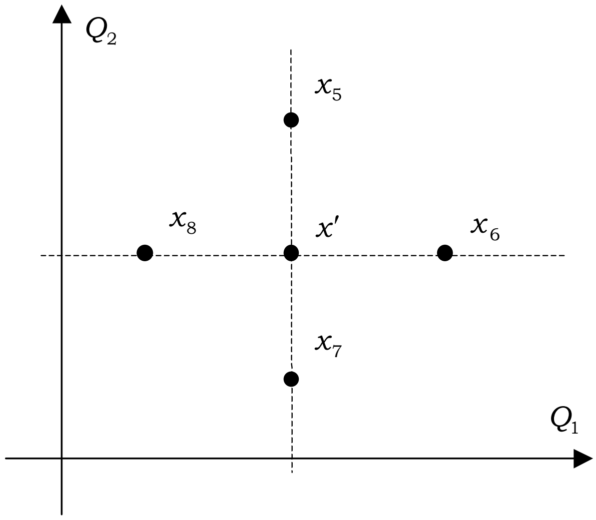

Рис. 1.3. Равенство значений частных критериев.

Этот пример иллюстрирует слабую эффективность: при отсутствии вариантов x_5 и x_6, оставшиеся варианты x_7 и x_8 вместе с вариантом x' являются слабо эффективными. Нетрудно показать, что любой эффективный (оптимальный по Парето) вариант является также и слабо-эффективным (оптимальным по Слейтеру).

Понятие эффективного и слабо-эффективного решения можно проиллюстрировать на следующем примере (рис. 1-4). В данном примере, варианты x_2, x_3 и x_4 являются эффективными, а варианты x_1 и x_5 – слабо-эффективными.

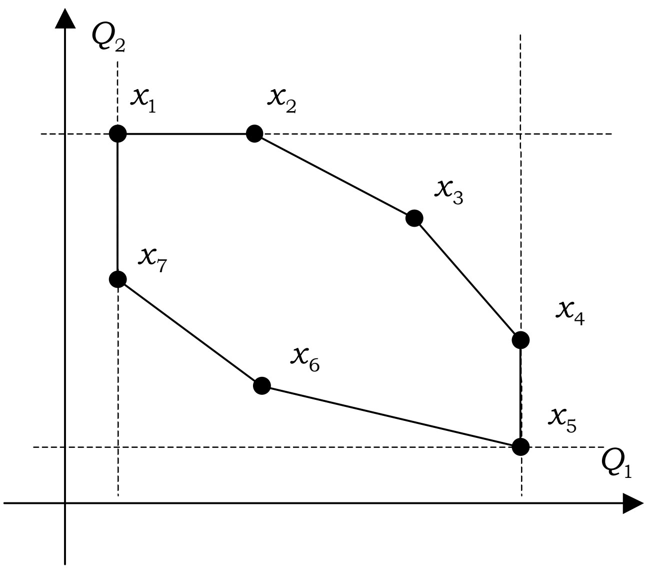

Рис. 1.4. Эффективные и слабо-эффективные решения.

1.4. Практические выводы

На основании приведенных теоретических положений можно сделать практические выводы по применению теории бинарных отношений к вопросу выбора вариантов.

1. Решение задачи выбора лучшего варианта из нескольких возможных предполагает построение (в том или ином виде) бинарного отношения предпочтения, которое бы позволило сравнивать варианты между собой и впоследствии выбрать среди вариантов лучший (или лучшие).

2. Если построенное бинарное отношение является отношением порядка, то это позволит ранжировать (упорядочить) варианты в порядке предпочтительности. Если при этом есть наилучший вариант – то задача решена.

3. Если максимум отсутствует, то теория рекомендует использовать максимумы бинарного отношения (то есть эффективные варианты). Вышеописанное отношение предпочтения на множестве векторных оценок строится таким образом, что неэффективный вариант (то есть не мажоранту) вообще не стоит в дальнейшем рассматривать, так как существует вариант, лучший данного по всем частным критериям.

2. Методы экспертной оценки

2.1. Экспертиза и методы ее проведения

Наличие информации и правильность ее использования в значительной степени предопределяют рациональность (оптимальность) выбранного решения. При формировании модели принятия решения (в данном случае – при формировании таблицы многокритериального выбора), ЛПР сталкивается с рядом трудностей, вызванных неполнотой или недостоверностью данных. Эти трудности можно подразделить на следующие группы [6].

1. Исходные данные зачастую бывают недостаточно достоверными. Однако, даже если данные о прошлом достоверны, они не всегда могут служить надежной базой для принятия решений, направленных в будущее, поскольку существующие условия и обстоятельства могут в дальнейшем измениться.

Примером могут служить данные о нагрузке на телефонную сеть. В связи с миграцией населения меняются во времени потребности в телефонизации и поэтому можно только прогнозировать будущие потребности, применяя различные математические методы.

2. Информация может иметь качественный характер и не поддаваться количественной оценке. Но эти факторы должны быть учтены, поскольку оказывают существенное влияние на принятие решений.

Так, например, сложно учесть надежность производителя приобретаемого оборудования, хотя понятно, что на практике это очень важный фактор. Сюда же можно отнести и показатели надежности оборудования, удобство управления им.

3. Часто возникают ситуации, когда, в принципе, необходимую информацию получить можно, однако, в момент принятия решения она отсутствует, поскольку это связано с большими затратами времени или средств.

Например, технические параметры оборудования могут быть получены от производителя, с которым в данный момент по тем или иным причинам невозможно установить контакт. Или такие технические параметры просто в принципе отсутствуют, как, например, влияние различных внешних факторов на работу оборудования.

4. Существуют факторы, которые могут повлиять на реализацию решения в будущем, но их нельзя точно предсказать.

К таким факторам можно отнести, например, будущие потребности в номерной емкости различных географических районов. Поскольку такие данные можно получить только комплексным демографическим и социально-экономическим прогнозированием, то мнение экспертов в данной ситуации, скорее всего, являются единственно возможным способом учета данного фактора.

5. Одна из наиболее существенных трудностей при выборе решений состоит в том, что принятое решение в связи с множественностью возможных исходов может оказать значительное влияние на принятие решений в будущем. Сюда же можно отнести и ситуацию, что принятие одного варианта всегда связано с отказом от других (нередко достаточно эффективных) решений.

Например, выбор АТС данного типа может привести к тому, что в дальнейшем (может быть даже в очень далекой перспективе) придется приобретать определенную линию оборудования только этого производителя, потому что оборудование других производителей работает с данным оборудованием не очень эффективно.

Подводя итог, можно сказать, что применение расчетов при принятии решений всегда переплетается с использованием суждений руководителей, ученых, специалистов. Они, как никто другой, способны оценить перспективы той области, в которой работают, и предвидеть характеристики тех систем, в создании которых непосредственно участвуют. Поэтому учет мнения экспертов в данной предметной области был и будет важнейшей составляющей процесса принятия решения.

2.1.1. Методика проведения экспертизы

Сформулируем задачу проведения экспертизы следующим образом. Предположим, что экспертам для высказывания своего мнения, предлагается одна и та же проблема – сформулировать численную оценку каждого объекта из некоторого их набора, при этом набор объектов одинаков для всех экспертов. Каждый эксперт формирует свой набор (вектор) оценок этих объектов; лицо, принимающее решение, должно эти вектора сравнить и на их основе выработать общее мнение группы экспертов.

В дальнейшем будем полагать, что в поставленной перед m экспертами задаче оценки присутствуют n оцениваемых объектов, которые каждый из экспертов оценивает различным способом. Обозначим через e_{ij} оценку (estimation) i-го показателя, выставленную j-м экспертом. Тогда можно сказать, что каждый эксперт формирует n-мерный вектор-столбец оценок объектов:

$$e^j = \left(e_{1j}, \dots, e_{nj}\right),\ \ j = 1, \dots, m. \tag{2.1}$$

При проведении экспертиз можно выделить следующие этапы [13].

1. ЛПР (или консультант) формулирует множество допустимых оценок D_E, которое использует каждый эксперт.

2. Каждый эксперт формирует свой набор оценок (2.1), то есть решает задачу назначения объектам наиболее адекватных, с его точки зрения, оценок. При этом эксперты могут взаимодействовать между собой.

3. По заранее разработанному алгоритму (или формуле) ЛПР производит обработку полученной от экспертов информации и находит результирующую оценку $e = (e_1, \dots, e_n)$.

4. Если полученная итоговая оценка (и, возможно, полученное на ее основе решение) не устраивает ЛПР, то он может предоставить экспертам дополнительную информацию, то есть организовать обратную связь, после чего эксперты вновь решают задачу оценивания.

Рассмотрим подробнее все аспекты подготовки и проведения экспертизы.

2.1.2. Результат экспертизы

В дальнейшем будем считать, что результатом проведения экспертизы является набор оценок $e = (e_1, \dots, e_n)$. В данную формулировку укладываются практически все задачи, которые могут быть сформулированы в задачах принятия решений.

1. *Задача ранжирования*. Смысл такой экспертизы заключается в том, что каждому из n объектов приписывается порядковый номер (ранг) объекта при упорядочении их в порядке убывания (или возрастания) предпочтительности. Ранжирование при этом может быть строгое или нестрогое.

В случае *строгого ранжирования* результатом экспертизы является одна из перестановок множества из n номеров $\{1, \dots, n\}$:

$$e_j \in \{1, \dots, n\};\ e_i \neq e_k, \qquad i, k \in \{1, \dots, n\}. \qquad (2.2)$$

В случае *нестрогого ранжирования* различные объекты могут иметь одинаковый ранг.

2. *Задача оценивания*. В этом случае каждому объекту присваивается некоторое число, являющееся характеристикой (оценкой) качества этого объекта. Оценка выставляется в некоторой шкале, которая устанавливается ЛПР. В частности, при оценивании предпочтительности частных критериев оптимальности необходимо, чтобы коэффициенты важности были неотрицательны, а их сумма равнялась единице.

2.1.3. Работа с экспертом

Важную роль с точки зрения качества экспертизы играет выбранная форма опроса экспертов.

Аналитическая форма опроса предполагает самостоятельную длительную работу эксперта. Такой метод еще называют *методом докладной записки*. Эксперт в свободной форме излагает свое мнение. Такая форма опроса является плохо формализуемой и трудоемкой для эксперта, зато позволяет наиболее точно выяснить его мнение.

Опрос типа интервью предполагает беседу ЛПР с экспертом, в ходе которой эксперт отвечает на заранее подготовленные вопросы. К недостаткам этого метода можно отнести сложность формализации и высокие требования, предъявляемые к ЛПР и эксперту в плане установления взаимопонимания между собеседниками.

Наиболее часто применяемой формой опроса является *анкетирование*. Анкета – это набор вопросов, на которые предлагается ответить эксперту. Сформулированные вопросы не должны допускать неоднозначного толкования. В литературе отмечается, что эксперт лучше отвечает на качественные вопросы (типа лучше-хуже), чем на количественные. Поэтому таким качественным вопросам и нужно отдавать предпочтение по возможности.

2.1.4. Взаимодействие экспертов и обратная связь

Различают три уровня взаимодействия экспертов во время проведения экспертизы:

- эксперты могут свободно обмениваться информацией друг с другом;
- обмен информацией между экспертами регламентирован;
- эксперты изолированы друг от друга.

Когда эксперты изолированы, то каждый из них высказывает свое мнение абсолютно независимо от других экспертов, что, вообще говоря, повышает объективность итоговой оценки.

Свободный обмен информацией реализуется в *схеме типа круглого стола*. При этом вырабатывается общее мнение после обсуждения поставленных вопросов. Но эта схема предъявляет высокие требования к экспертам – умение высказывать собственное мнение и отстаивать его независимо от мнения и давления других.

В *схеме мозговой атаки* вводится некоторая регламентация обмена информацией в схему круглого стола. Схема состоит в том, что в течение определенного промежутка времени любое высказанное мнение не подлежит обсуждению и не может быть отвергнуто. В этой ситуации эксперт имеет возможность хорошо обдумать все высказанные мнения и потом группа принимает какое-то решение (формулирует общее мнение).

Более серьезная регламентация вводится в *методе Дельфы*, который представляет собой ряд последовательно осуществляемых процедур, направленных на формирование группового мнения. Процедуры, используемые в методе Дельфы, характеризуются тремя основными чертами: анонимностью, регулируемой обратной связью и групповым ответом. Анонимность достигается применением специальных вопросников или другими способами индивидуального опроса, например индивидуальной работой экспертов с компьютером. Регулируемая обратная связь осуществляется за счет проведения нескольких туров опроса, причем результаты каждого тура обрабатываются с помощью статистических методов и сообщаются экспертам.

Проведение опроса в несколько туров, в течение которых осуществляется ряд последовательных итераций (экспертов информируют о результатах предыдущих этапов опроса и предлагают в ряде случаев обосновать свое мнение), позволяет уменьшить колебания в индивидуальных ответах и ограничивает внутригрупповые колебания.

В основу метода Дельфы положены следующие предпосылки:

- поставленные вопросы должны допускать возможность выражения ответа в виде числа;
- эксперты должны располагать достаточной информацией для того, чтобы дать оценку;
- ответ на каждый из вопросов (оценка) должен быть обоснован экспертом.

Рассмотрим метод Дельфы на примере назначения весовых коэффициентов важности частных критериев оптимальности.

Первый тур опроса. Эксперты заполняют анкету, где их просят указать численные оценки (в баллах) важности весовых коэффициентов. Эксперты заполняют анкеты абсолютно независимо друг от друга, высказывая, таким образом, свое индивидуальное мнение о значениях весовых коэффициентов.

После заполнения анкет ЛПР производит объединение индивидуальных мнений, сформировав таблицу заполненных значений у разных экспертов. Таблица составляется на условиях полной анонимности.

Второй тур опроса. Экспертам предъявляют итоговую таблицу с просьбой откорректировать ее и снова высказать свое мнение, уточнив его при необходимости. Поскольку таблица составлена анонимно, то эксперт может сравнить свое мнение по данной проблеме с мнением других экспертов и принять для себя решение – прав он или не прав, высказывая именно такое мнение по поставленной проблеме.

Далее туры опросов повторяются до тех пор, пока не будет получено коллективное мнение, удовлетворяющее ЛПР.

Подробнее метод Дельфы изложен в [6].

2.2. Индивидуальная экспертная оценка

Рассмотрим подробнее второй этап проведения экспертизы – назначение экспертом индивидуальных оценок объектов.

Эксперт оценивает их в соответствии со своими задачами и своими представлениями. Оценка может быть осуществлена различными способами. Наиболее удачный и вариант – эксперт в состоянии задать готовый набор численных значений, в котором все его (эксперта) суждения уже интегрально учтены. Но сделать это непросто. Эксперт должен учесть много дополнительной информации, в частности групповые предпочтения (когда одна группа объектов является более предпочтительной, чем другая – это особенно актуально при назначении весовых коэффициентов важности частных критериев). В этой ситуации на помощь приходят методы проведения индивидуальной экспертизы, цель которых – помочь эксперту в формулировании предпочтений и формировании на их основе численных значений оценок объектов.

2.2.1. Использование попарных сравнений объектов

Одним из вариантов проведения индивидуальной экспертизы является попарное сравнение объектов и определение относительной предпочтительности одного объекта (варианта) по сравнению с другим. При этом итоговые численные оценки могут быть получены следующим образом [2].

Эксперт рассматривает все возможные пары объектов и сравнивает их по предпочтительности. Таким образом, эксперт должен высказать свое суждение о соотношениях $C_n^2 = n(n-1)/2$ пар. Эксперт, рассматривая каждую пару (i,j), ставит на первое место в паре лучший (более предпочтительный) объект и назначает оценку сравнения, выраженную в виде рациональной дроби, в числителе которой – число, большее или равное единице, а в знаменателе всегда стоит единица. Если дробь равна 1/1, то эти два частных критерия эквивалентны по важности. По результатам сравнения строится матрица M размерности $(n \times n)$, каждый элемент v_{ij} которой строится следующим образом: v_{ij} равна числителю оценки пары объектов (i,j), а в элемент v_{ij} ставится единица. Например, если результат сравнения пары $(2{,}3)$ равен $7/1$, то $v_{23} = 7$, а $v_{32} = 1$. Очевидно, что сумма элементов строки матрицы характеризует относительную предпочтительность соответствующего объекта, оценка которого может быть получена по следующей формуле:

$$e_j = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \Bigg/ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}\,, \quad i = 1, \dots, n. \qquad (2.3)$$

То есть сумма по строке матрицы нормируется относительно общей суммы полученных оценок.

Пример. Пусть имеется набор из четырех объектов. Эксперт указал приемлемый для него дискретный ряд балльных оценок, которые он собирается использовать для попарного сравнения объектов, и по этой шкале построил шкалу сравнительной важности:

$v_{ij} = 10/1$ – означает подавляющую преимущество по качеству объекта i по сравнению с объектом j;

$v_{ij} = 5/1$ – означает значительно большее преимущество объекта i по сравнению с объектом j;

$v_{ij} = 2/1$ – означает большее преимущество объекта i по сравнению с объектом j;

$v_{ij} = 1/1$ – означает эквивалентность объекта i по сравнению с объектом j.

Пользуясь этой шкалой, эксперт указал следующие попарные оценки относительной предпочтительности: $v_{12} = 10/1$; $v_{13} = 2/1$; $v_{14} = 1/1$; $v_{23} = 1/1$; $v_{24} = 5/1$; $v_{34} = 10/1$. Тогда матрица оценок имеет вид:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	10	2	1
x_2	1	0	1	5
x_3	1	1	0	10
x_4	1	1	1	0

В результате получаем следующие значения сумм и итоговых оценок:

	1	2	3	4
Суммарная оценка	13	7	12	3
Итоговая оценка e_i	0.371	0.200	0.343	0.086

Данный метод достаточно точен, так как фактически заставляет эксперта сравнить по качеству все возможные пары объектов. Однако это только попарное сравнение, и эксперту нужно постараться, чтобы учесть групповые предпочтения, то есть ситуацию, при которой, например, первый объект более предпочтителен не только второго, но также и второго и третьего вместе взятых. Трудность при этом заключается в том, что эксперт должен непрерывно проверять свои суждения на непротиворечивость с уже сказанным ранее. Этого недостатка в значительной степени лишен метод Черчмена-Акоффа.

2.2.2. Метод Черчмена-Акоффа

Данный метод предназначен для формирования суждения о предпочтительности объектов и их групп у эксперта. Метод известен как метод (или алгоритм) Черчмена-Акоффа и подробно описан в [2]. Алгоритм заключается в проведении серии проверок суждений об отношениях предпочтения для объектов $x_1, x_2, \dots, x_n$ и состоит из следующих этапов.

1. Эксперт осуществляет линейное упорядочение объектов в порядке убывания их предпочтительности и перенумеровывает объекты таким образом, чтобы индекс 1 соответствовал критерию с наибольшей важностью, а индекс n – с наименьшей.

2. Объекту x_n присваивается оценка $v_n = 1$. После этого эксперт, используя нелинейную шкалу порядков, приписывает разные числа оценкам v_i, которые отражают его суждения об относительной предпочтительности объектов. Данные оценки на следующем этапе эксперту не показываются.

3. Строится таблица вариантов логического выбора следующего вида.

1	2	...	n-2
$x_1 \nabla x_2 + x_3 + \cdots + x_n$	$x_2 \nabla x_3 + x_4 + \cdots + x_n$	...	$x_{n-2} \nabla x_{n-1} + x_n$
$x_1 \nabla x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1}$	$x_2 \nabla x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-1}$	...	Конец работы
$x_1 \nabla x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-2}$	$x_2 \nabla x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-2}$	...	
$x_1 \nabla x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-3}$	…	...	
…	$x_2 \nabla x_3 + x_4$		
$x_1 \nabla x_2 + x_3$	Переход к следующему столбцу таблицы		
Переход к следующему столбцу таблицы			

Лицу, принимающему решение, предлагается рассмотреть столбцы с первого по $(n-2)$-й сверху вниз и зафиксировать свои суждения при помощи отношений предпочтения ($\prec, \succ$ или $\sim$), устанавливая один из этих знаков вместо знака ∇ между левой и правой частями отношений:

- $x \succ y \Rightarrow x$ предпочтительнее y;
- $x \prec y \Rightarrow y$ предпочтительнее x;
- $x \sim y \Rightarrow x$ эквивалентен по важности y.

Просмотр начинается в левого верхнего угла таблицы, то есть с первого соотношения в первом столбце. Если при просмотре оказывается, что левая часть (x) предпочтительнее или эквивалентна правой части (y), то осуществляется переход к первой строке следующего столбца. В противном случае, продолжаем просмотр данного столбца до конца.

4. Эксперту предлагается проставить оценки v_i, полученные на этапе 2, в отношения логического выбора, зафиксированные на этапе 3. Если обнаруживается несоответствие, то оценки v_i изменяются в минимально возможной степени так, чтобы достигнуть соответствия с решениями эксперта, проставленными в отношениях таблицы вариантов логического выбора. Проверка значений проводится с нижней строки $(n-2)$ -го столбца.

5. По уточненным значениям оценок v_i вычисляются оценки объектов:

$$e_i = v_i / \sum_{j=1}^{n} v_j , \quad i = 1, \dots, n. \qquad (2.4)$$

Рассмотрим пример применения этого метода на примере оценки пяти объектов.

В результате выполнения этапов 1 и 2 данного алгоритма, объекты перенумерованы в порядке убывания предпочтительности $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5$ и им приписаны оценки:

$v_1 = 10; v_2 = 5; v_3 = 4; v_5 = 2.$

На третьем этапе эксперт строит таблицу и высказывает свои суждения о предпочтениях. Тогда результаты работы могут выглядеть следующим образом:

1	2	3
$x_1 \prec x_2 + x_3 + x_4 + x_5$	$x_2 \prec x_3 + x_4 + x_5$	$x_3 \succ x_4 + x_5$
$x_1 \prec x_2 + x_3 + x_4$	$x_2 \succ x_3 + x_4$	
$x_1 \succ x_2 + x_3$		

После этого (четвертый этап) эксперт начинает сравнение полученных соотношений (начиная с самого последнего) с численными значениями оценок v_i, полученными на втором этапе.

$v_3 > v_4 + v_5$?

Нет, так как введенные численные оценки противоречат этому $(4 > 3 + 2)$. В связи с этим принимаем $v_3 = 6$.

$v_2 > v_3 + v_4$?

Нет, так как численные оценки также этому противоречат $(5 > 6 + 3)$. Для корректировки принимаем $v_2 = 10$.

$v_2 < v_3 + v_4 + v_5$?

Численные оценки удовлетворяют этому $(10 < 6 + 3 + 2)$.

$$v_1 > v_2 + v_3?$$

Обнаруживаем очередное противоречие $(10 > 10 + 6)$. Для корректировки принимаем $v_1 = 17$.

$v_1 < v_2 + v_3 + v_4$?

Данное соотношение удовлетворяется $(17 < 10 + 6 + 3)$.

$v_1 < v_2 + v_3 + v_4 + v_5$?

Данное соотношение также удовлетворяется $(17 < 10 + 6 + 3 + 2)$.

В результате получаем следующие уточненные оценки v_i и итоговые оценки x_i:

	1	2	3	4	5
Уточненные оценки v_i	17	10	6	3	2
Итоговые оценки e_i	0.447	0.263	0.158	0.079	0.053

Метод Черчмена-Акоффа надежен в том смысле, что эксперт вынужден достаточно полно формулировать свои суждения и предпочтения. Метод является выигрышным также при реализации его в диалоговом режиме на компьютере, что дает дополнительные возможности для эффективной работы. Однако, следует заметить, что этот метод даже теоретически неприменим, если число объектов меньше трех, и вряд ли даст эффект, если число оцениваемых объектов, например, пять. Зато, если число объектов относительно большое, то данный метод в некотором смысле гарантирует, что информация об относительной предпочтительности объектов будет непротиворечивой с точки зрения эксперта.

2.3. Определение коллективного мнения экспертов

Групповая экспертиза предполагает независимую или совместную работу нескольких экспертов, формирующих свои собственные мнения, объединяющиеся затем в общее мнение группы экспертов. Рассмотрим некоторые методы такого объединения.

Будем полагать, что в поставленной перед m экспертами задаче присутствуют n объектов, которые каждый из экспертов оценивает различным способом. Обозначим через e_{ij} оценку -го объекта, выставленную j-м экспертом. Тогда можно сказать, что каждый эксперт формирует -мерный вектор-столбец оценок объектов $e^j = \left(e_{1j}, \dots, e_{nj}\right), j = 1, \dots, m.$

Сформируем матрицу $E_{n\times n}$ оценок размерности $n\times m$:

$$E = \begin{Vmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nm} \end{Vmatrix}. \tag{2.5}$$

В данной матрице по столбцу представлены мнения одного эксперта по всем объектам, а по строкам – мнения разных экспертов об одном объекте.

Пусть ЛПР перед тремя экспертами ставит задачу, в которой имеются четыре объекта (то есть, $n = 4$) и требуется сформулировать нормированную оценку (то есть, все оценки неотрицательны и их сумма равна единице). Мнение экспертов в виде матрицы оценок представлено в следующей таблице:

	Эксперт 1	Эксперт 2	Эксперт 3
Объект 1	0.210	0.600	0.600
Объект 2	0.200	0.110	0.200
Объект 3	0.250	0.190	0.100
Объект 4	0.340	0.100	0.100

Очевидно, что мнение первого эксперта значительно отличается от мнения остальных экспертов. Проблему формирования итогового мнения группы экспертов можно решить несколькими способами.

Далее приводится некоторые из наиболее характерных методов получения обобщенных оценок весовых коэффициентов важности от различных экспертов.

Описаны три основных подхода к получению коллективного мнения экспертов: усреднение (это самый простой способ, и как часто бывает, наиболее распространенный на практике – п. 2.3.1); получение компромиссного коллективного мнения (п. 2.3.2); определение и использование весовых коэффициентов компетентности экспертов (п. 2.3.2.1).

2.3.1. Определение коллективного мнения путем усреднения

Самый простой способ получения групповой оценки при условии, что все эксперты равноправны, является вычисление средних оценок для каждого частного критерия:

$$\overline{e_i} = {}^{1}\!/_{e} \sum_{j=1}^{m} e_{ij}\,, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{2.6}$$

Для вышеприведенного примера, расчет обобщенного мнения представлен в следующей таблице:

Объект i	Итоговые оценки e_i
1	0.470
2	0.170
3	0.180
4	0.180

2.3.2. Определение коллективного мнения по выбранной схеме компромисса

Данный подход предполагает, что требуется найти (вычислить) такой набор оценок, который был бы наиболее близок (в определенном смысле) к оценкам, установленным всеми экспертами. Для того, чтобы определить, какой именно набор оценок является наиболее близким ко всем остальным, требуется ввести меру близости $F(E, e)$. Мера близости определяет, насколько далек итоговый набор весовых коэффициентов e от всех остальных. Следовательно, требуется найти такой набор оценок e^*, мера близости которого была минимальной:

$$e^* = \arg\min_{e \in D_e} F(E, e) \tag{2.7}$$

Этот набор и будем считать наиболее близким по выбранной схеме компромисса. Теоретически этот вопрос разработан в книге [3]. Приведем (без доказательства) две теоремы из этой книги, которые говорят о том, как нужно вычислять итоговые оценки, являющиеся компромиссными, при различных мерах близости.

Теорема 3. Если мерой близости является $F(E, e)$ является функция

$$F(E, e) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(e_{ij} - e_i\right)^2, \tag{2.8}$$

то оптимальным решением задачи (2.7) является вектор средних значений по строкам матрицы.

То есть, если мерой близости является Евклидово расстояние, то средние значения (2.6) наилучшим образом подходят для компромиссного набора весовых коэффициентов.

Можно рассмотреть и другую меру близости, стремящуюся найти такой набор оценок, который бы как можно меньше отличался от индивидуальных значений каждой из оценок e_{ij}:

$$F(E, e) = \max_{1 \le i \le n} \max_{1 \le j \le m} \left|e_{ij} - e_i\right|. \tag{2.9}$$

То есть требуется найти такой вектор оценок, чтобы максимальное (по всем его компонентам) отклонение от каждого из векторов разных экспертов, было как можно меньше. Эту задачу можно решить при помощи следующего алгоритма.

Теорема 4. Если мерой близости $F(E, e)$ является функция (2.9), то оптимальным решением задачи (2.7) является вектор, построенный при помощи нижеописанного алгоритма.

Алгоритм вычисление итоговых оценок.

1. Для каждой -й строки матрицы оценок объектов вычисляем следующие параметры:

$$e_i^- = \min_{1 \le j \le m} e_{ij}\,; e_i^+ = \max_{1 \le j \le m} e_{ij}\,; \overline{e_\iota} = (e_i^+ + e_i^-)/2$$

$$\Delta_i = \frac{e_i^+ - e_i^-}{2};\ \bar{\Delta} = \max_{1 \le i \le m} \Delta_i\,;$$

$$a_i = \max\{0, \overline{e_\iota} - \bar{\Delta} + \Delta_i);$$

$$b_i = \min\{1, \overline{e_\iota} + \bar{\Delta} - \Delta_i).$$

2. Из матрицы E исключаем все строки, для которых выполняется

   $\bar{\Delta}= \Delta_i$.

   Пусть это выполняется для всех строк с номерами

   $i = r + 1, \dots, n$.

   Для этих строк принимаем:

   $e_i^* = \bar{e}_i,\ i = r + 1, \dots, n$;

   а остальные строки, для которых выполняется соотношение $\bar{\Delta}> \Delta_i$, перенумеровываем в порядке возрастания a_j: $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_r$.
3. Если выполняется $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1$, то переходим к пункту 4. Иначе переходим к пункту 9.
4. Если выполняется $\sum_{i=1}^{n} b_i \geq 1$, то, приняв $z = r$ и $R_z = 1 - \sum_{i=r+1}^{n} \bar{e}_i$, переходим к пункту 5. Иначе переходим к пункту 12.
5. Если $R_z/z \geq a_z$, то $e_i^* = R_z/z,\ i = 1, \dots, z$ и переходим к пункту 7. Иначе переходим к пункту 6.
6. Принимаем $e_r^* = a_r; R_r = a_r; r = r - 1$ и повторяем все вычисления с пункта 5.
7. Если $R_z/r \leq \min\limits_{1 \leq i \leq r}\{b_i\}$, а t – это значение индекса i, в котором достигается этот минимум, то итоговые оценки рассчитаны и задача решена. Иначе переходим к пункту 8.
8. Принимаем $e_t^* = b_t; R_z = R_z - b_t; z = z - 1$. Затем исключаем t-ю строку из рассмотрения, вновь перенумеровываем строки по возрастанию нижних граничных значений a_i и повторяем все вычисления с пункта 5.
9. Принимаем $k = r$ и $R_k = 1 - \sum_{i=1}^{m} a_i$.
10. Если $R_k/k \leq a_k$, то $e_i^* = a_i - R_k/k,\ i = 1, \dots, k$ и итоговые оценки получены. Иначе переходим к пункту 11.
11. Принимаем $e_k^* = 0; R_k = R_k - a_k; k = k - 1$ и повторяем все вычисления с пункта 10.
12. Упорядочиваем строки матрицы E размерности $(r \times m)$ в порядке убывания b_i: $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_r \geq 0$ и принимаем $k = r; R_k = 1 - \sum_{i=1}^{n} b_i$.
13. Если $R_k/k \leq 1 - b_k$, то $e_i^* = b_i + R_k/k,\ i = 1, \dots, k$ и итоговые оценки получены. Иначе переходим к пункту 14.

14. Принимаем $e_k^* = 0; R_k = R_k - (1 - b_k), k = k - 1$ и повторяем все вычисления с пункта 13.

Конец алгоритма.

Рассмотрим пример работы данного алгоритма на примере той же задачи:

	Эксперт 1	Эксперт 2	Эксперт 3
Объект 1	0.210	0.600	0.600
Объект 2	0.200	0.110	0.200
Объект 3	0.250	0.190	0.100
Объект 4	0.340	0.100	0.100

Шаг 1. Рассчитываем все необходимые величины:

	Δ_i	a_i	b_i
Объект 1	0.195	0.405	0.405
Объект 2	0.045	0.005	0.305
Объект 3	0.075	0.055	0.295
Объект 4	0.120	0.145	0.295

При этом $\bar{\Delta} = 0.195$.

Шаг 2. Исключаем первую строку, принимаем $e_t^* = 0.405$; остальные строки переупорядочиваем по возрастанию a_i:

	Δ_i	a_i	b_i
Объект 2	0.045	0.005	0.305
Объект 3	0.075	0.055	0.295
Объект 4	0.120	0.145	0.295

Шаг 3. Условие выполняется, переходим к шагу 4.

Шаг 4. Условие выполняется, полагаем $z = 3$ и $R_z = 0.595$.

Шаг 5. Условие выполняется, поэтому в дальнейшем на шаге 7 заканчиваем работу, получив следующие итоговые оценки:

Объект i	Итоговые оценки e_i
1	0.405
2	0.198
3	0.198
4	0.198

2.3.2.1. Учет компетентности экспертов.

Для учета компетентности экспертов можно ввести коэффициенты компетентности (*competence*) c_j, $j = 1, \dots, m$, используемые как весовые при формировании итоговой групповой оценки. Тогда итоговую оценку объектов можно получить как

$$\bar{e}_i = \sum_{j=1}^{m} c_j e_{ij}, i = 1, \dots, n. \tag{2.10}$$

В монографии [9] приводится итерационная процедура, позволяющая получить оценки c_j по информации о том, насколько оценки -го эксперта согласованы с оценками других экспертов.

Начальное значение вектора-столбца компетентности c^0 выбирается из условия, что все эксперты одинаково компетентны:

$$c^0 = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right).$$

Последующие итерации ($r = 1,2,3, \dots$) осуществляются по формулам:

$$\begin{gathered} e^r = E \cdot c^{r-1}; \\ (c^r)^T = \frac{1}{z^r}(e^r)^T \cdot E; \\ z^r = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} e_i^r e_{ij}. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Итерационный процесс останавливается, когда

$$\max_{1 \le i \le n} |e_i^r - e_i^{r-1}| \le \varepsilon,$$

то есть по достижении заданной точности. При этом получается групповое решение о значениях оценок объектов.

В качестве примера рассмотрим получение группового решения по матрице, приведенной выше:

	Эксперт 1	Эксперт 2	Эксперт 3
Объект 1	0.210	0.600	0.600
Объект 2	0.200	0.110	0.200
Объект 3	0.250	0.190	0.100
Объект 4	0.340	0.100	0.100

Предварительный этап (шаг 0).

При первоначальном предположении равноправности всех экспертов полагаем все оценки компетентности c^0 равными между собой:

$r = 0$	Эксперт 1	Эксперт 2	Эксперт 3
Оценка c_j	0.333	0.333	0.333

Шаг 1.

Согласно алгоритму, перемножаем матрицу оценок E на вектор-столбец оценок компетентности c^0 и получаем следующие оценки для весовых коэффициентов:

$r = 1$	Объект 1	Объект 2	Объект 3	Объект 4
e_i	0.4700	0.1700	0.1800	0.1800

Легко убедиться, что эти значения на первом шаге равны средним значениям оценок объектов.

Рассчитываем значение z^1 (оно равно 0.9438) и, используя его, находим новые значения оценок компетентности экспертов:

$r = 1$	Эксперт 1	Эксперт 2	Эксперт 3
Оценка c_j	0.2531	0.3739	0.3730

Эти оценки будут использованы для вычисления оценок объектов на шаге 2.

Шаг 2.

Новые (уточненные) значения оценок объектов уже на втором шаге будут иметь следующие значения:

$r = 2$	Объект 1	Объект 2	Объект 3	Объект 4
e_i	0.4988	0.1838	0.1567	0.1607

Продолжаем вычисления. Рассчитываем значение z^2 (оно равно 0.9663) и, используя его, находим новые значения оценок компетентности экспертов:

$r = 2$	Эксперт 1	Эксперт 2	Эксперт 3
Оценка c_j	0.2403	0.3792	0.3805

Шаг 3.

Вычисляем новые оценок объектов на третьем шаге:

$r = 3$	Объект 1	Объект 2	Объект 3	Объект 4
e_i	0.5039	0.1834	0.1550	0.1577

Сравнивая значения оценок объектов, полученные на этом шаге, со значениями с предыдущего шага, находим, что оценка погрешности составляет 0.0102. Продолжаем вычисления. Рассчитываем значение z^3 (оно равно 0.9708) и, используя его, находим новые значения оценок компетентности экспертов:

$r = 3$	Эксперт 1	Эксперт 2	Эксперт 3
Оценка c_j	0.2386	0.3799	0.3815

Шаг 4.

Вычисляем значения оценок объектов на четвертом шаге:

$r = 4$	Объект 1	Объект 2	Объект 3	Объект 4
e_i	0.5045	0.1834	0.1548	0.1573

Сравнивая значения оценок, полученные на этом шаге со значениями предыдущего шага, находим, что оценка погрешности составляет 0.00131. Видим, что с точностью 0.01 получена групповая оценка e для объектов; при этом компетентность экспертов оценивается как (0.2386, 0.3799, 0.3815).

В данном случае, очевидно, что компетентность первого эксперта оценивается ниже остальных по причине существенных отличий его оценок от оценок, выставленных другими экспертами. Можно с определенностью сказать, что данный метод целесообразно применять в ситуации, когда число экспертов достаточно большое (во всяком случае, не менее трех).

3. Решение задачи многокритериального выбора

3.1. Формирование таблицы многокритериального выбора

Первым этапом решения задачи многокритериального выбора является построение таблицы многокритериального выбора такой, что все характеристики в ней являются числовыми, их величина по смыслу означает характеристику качества (лучше или хуже), кроме того, численные величины приведены к виду, допускающему математические действия (то есть к безразмерному виду и к единой шкале измерения).

Процесс построения таблицы можно разделить на два этапа – формирование множества альтернатив и формирование множества частных критериев.

3.1.1. Формирование множества альтернатив

Как ни странно, а формирование множества альтернатив – самостоятельный этап решения задачи выбора. Задачи просто не будет, если возможный вариант только один.

Задача ЛПР на данном этапе – предусмотреть анализ всех возможных вариантов, ничего не упустив из виду. Но на данном этапе могут быть исключены из рассмотрения варианты, которые заведомо не подходят целям ЛПР. Поскольку на практике всегда очень вероятно участие экспертов в процессе принятия решения, то их анализ будет более качественный, если варианты будут близки по характеристикам и их число будет относительно невелико.

3.1.2. Формирование множества частных критериев задачи

При превращении характеристик объекта в частные критерии, часто можно столкнуться с проблемой трудности численного оценивания. Это может случиться и потому, что (1) характеристика является качественной, и потому, что (2) данная характеристика является слишком общей, описывающей целый комплекс отдельных свойств объектов. В первом случае для численного выражения применяется метод экспертных оценок, во втором случае – метод декомпозиции цели.

Сущность метода декомпозиции цели заключается в том, что на каждом этапе рассмотрения, в случае трудности или невозможности для данной сформулированной подцели назначить критерий, способный быть оцененным численно, данная подцель разбивается на более конкретные подцели. Процесс разбиения заканчивается, когда для всех подцелей возможно указать соответствующую численную оценку.

С точки зрения возможности численного оценивания, все характеристики можно разделить на три группы.

1. *Количественные характеристики (показатели)*. Про количественный характер показателя говорят тогда, когда его значение имеет смысл сравнивать численно – на сколько больше или во сколько раз больше одно значение другого. Численные значения количественных характеристик носят объективный характер и могут быть точно измерены для всех объектов.

Для приведения численных значений показателей к безразмерному виду и единой шкале измерения $[\alpha, \beta], 0 \leq \alpha \leq \beta$, можно воспользоваться положительным линейным преобразованием, не изменяющим смысла предпочтения. Такими преобразованиями могут быть:

– преобразование в *шкалу отношений*:

$$\bar{Q}_i = \varphi(Q_i(x)) = \frac{Q_i(x)}{Q_i^+}(\beta - \alpha) + \alpha, \qquad i = 1, \dots, n; \tag{3.1}$$

– преобразование в *шкалу интервалов*:

$$\tilde{Q}_i = \psi(Q_i(x)) = \frac{Q_i(x) - Q_i^-}{Q_i^+ - Q_i^-}(\beta - \alpha) + \alpha, \qquad i = 1, \dots, n; \tag{3.2}$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$Q_i^+ = \max_{x \in D} Q_i(x)\, , Q_i^- = \min_{x \in D} Q_i(x) \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.3}$$

Наиболее удобно использовать приведение к единичному интервалу [0,1]. В этом случае Формулы преобразования значительно упрощаются и имеют вид:

- преобразование в шкалу отношений:

$$\bar{Q}_i = \varphi_i\big(Q_i(x)\big) = \frac{Q_i(x)}{Q_i^+}, i = 1, \dots, n; \tag{3.4}$$

- преобразование в шкалу интервалов:

$$\tilde{Q}_i = \psi_i\left(Q_i(x)\right) = \frac{Q_i(x) - Q_i^-}{Q_i^+ - Q_i^-}, i = 1, \dots, n. \tag{3.5}$$

Эти две шкалы отличаются тем, что шкала отношений сохраняет отношение типа «во сколько раз». То есть, если по данной характеристике первый объект лучше второго в два раза, то после преобразования в шкалу интервалов это соотношение может и не сохраниться, при том, что шкала отношений всегда это соотношение сохранит.

Предположим, что рассматриваются четыре объекта и их характеристика «вес». Применим преобразования в шкалу отношений и в шкалу интервалов. Результаты преобразования приведены в таблице:

	Исходные значения характеристики «Вес» (граммов)	Приведение к шкале отношений	Приведение к шкале интервалов
1	100	1.0	1.0
2	70	0.7	0.625
3	50	0.5	0.375
4	20	0.2	0

В данной таблице видно, что третий вариант легче первого в два раза, что сохранилось в шкале отношений, но не сохранилось в шкале интервалов.

2. *Характеристики (показатели) наличия свойств*. Характеристики наличия показывают наличие у объектов того или иного характерного признака, влияющего на качество объектов с точки зрения ЛПР. Такая характеристика может быть достаточно легко преобразована в числовой критерий – 1 в случае наличия признака и 0 – в случае отсутствия. Можно заметить, что такая оценка уже приведена к нужному виду – интервалу [0,1].

Например, в портативном компьютере (notebook) одной из характеристик является наличие flash-memory. Можно принять, что допустимыми значениями данной характеристики являются 1 (если в данной модели notebook присутствует flash-memory) и 0 (если отсутствует).

3. *Ранговые оценки*. Ранговые оценки характеристик можно только сравнивать на больше-меньше (лучше-хуже) и не имеет смысл сравнивать интервалы оценок. Ранговые оценки получаются, если объекты ранжировать (упорядочить) по убыванию или возрастанию характеристики, тогда порядковый номер объекта и будет ранговой оценкой.

В подавляющем большинстве случаев, ранговые оценки выражают субъективное мнение и применяются тогда, когда высказать численное значение очень затруднительно.

Примеров ранговых оценок можно привести достаточно много: оценка качества дизайна или внешнего вида устройства; качество гастрономических блюд; качество деятельности человека (в частности спортивной) и так далее.

Во всех этих случаях не только нет общепринятых эталонов, но сомнительно даже наличие объективного критерия, по которому объекты можно было бы сравнить с соотношениями типа «на сколько больше» или «во сколько раз больше».

Ранговые могут быть получены путем проведения экспертизы, методами, описанными в 1.2.

Дальнейшее использование ранговых оценок ничем не отличается от использования количественных оценок, то есть они должны быть приведены к единому интервалу измерения. Следует учитывать, что поскольку количественное сравнение отношений в ранговых оценках бессмысленно, то нужно, по возможности, их избегать.

4. *Балльные оценки*. Балльные оценки также выражают субъективное мнение, но выражаются в числовой шкале и имеет смысл сравнивать их количественные отношения.

Самый распространенный и известный пример – школьные оценки, выставляемые учителем по четырехбалльной шкале (2, 3, 4, 5). Можно вспомнить также спортивные соревнования по гимнастике, фигурному катанию и прыжкам в воду.

Для получения балльных оценок также применяются методы проведения экспертизы (параграф 1.2). Балльные оценки в дальнейшем обрабатываются и используются, как и оценки по количественным характеристикам.

Ранговые и балльные оценки могут быть получены двумя принципиальными способами.

Первый способ предполагает оценку экспертами самих вариантов выбора. Таким образом, пользуясь терминологией, используемой в параграфе 1.2, объектами экспертной оценки являются сами варианты.

Например, требуется оценить внешний дизайн и удобство мобильного телефона. ЛПР предлагается несколько моделей телефонов, и эксперты формируют свое мнение о них в ранговой или балльной шкале. Полученные оценки затем обрабатываются – приводятся к единой шкале измерения.

Второй способ предполагает оценку допустимых значений данной характеристики. В этом случае объектами экспертизы являются допустимые значения данной характеристики.

Пример. В портативном компьютере одной из важнейших характеристик является модель привода компакт-дисков. Пусть ЛПР считает, что на портативные компьютеры могут ставиться три типа CD устройств: CD, DVD и DVD-CDRW. Перед экспертами ставится задача численной оценки данных устройств. Эксперты сформулировали свое мнение и ЛПР вычислил оценки и свел всю информацию в таблицу:

Тип привода	Оценка в ранговой шкале		Оценка в балльной шкале	
	Исходная (место)	Приведенная	Исходная (баллы)	Приведенная
CD	3	1.0	2	0.2
DVD	2	0.66	8	0.8
DVD-CDRW	1	0.33	10	1.0

Заметим, что дальнейшее использование ранговой оценки приведет к тому, что данный частный критерий необходимо минимизировать, а при использовании балльной оценки – максимизировать.

В любом случае видно, что балльная оценка более точно отражает качество разновидностей данного устройства, чем ранговая.

3.1.3. Пример постановки задачи и формирования таблицы многокритериального выбора

Рассмотрим пример постановки задачи и формирования таблицы многокритериального выбора. Пусть требуется выбрать модель портативного компьютера. Фирма-продавец предлагает 13 различных моделей. Исходные данные для решения задачи приведены в табл. 1-1.

В данной таблице введены следующие обозначения характеристик:

«+» означает наличие данного устройства, «-» - отсутствие;

HDD – hard disk drive (винчестер);

процессор: Pentium III – P3; Pentium IV – P4; Celeron – C.

Названия фирм и моделей – условные.

Табл. 3.1. Исходные данные задачи выбора.

№ варианта	Фирма	модель	Процессор	Тактовая частота	Размер экрана	Память, Mb	HDD, Gb	CD	Цена, у.е.
1	A	1	C	1133	13.3	128	10	CD	1392
2	A	2	P3	1000	13.3	128	20	CD	1610
3	B	1	P3	1000	13.3	128	20	CD	1488
4	D	1	C	1200	14.1	128	20	DVD	1511
5	D	2	P4	1700	15.1	256	30	DVD-CDRW	2031
6	FS	1	P4	1400	15.0	128	20	DVD	1404
7	RB	1	P3	866	14.0	128	15	CD	1381
8	RB	2	P4	1500	14.1	128	20	CD	1319
9	RB	3	P4	2000	15.1	256	40	DVD	1726
10	RB	4	C	1200	14.1	128	20	CD	1110
11	RB	5	C	1800	14.1	256	20	DVD	1440
12	T	1	C	1333	14.1	256	20	DVD	1571
13	T	2	C	1800	14.1	256	30	DVD-CDRW	1827

В данной таблице сразу можно выделить количественные характеристики – тактовая частота, размер экрана, объем оперативной памяти, объем винчестера (HDD) и цена. Каждый из этих параметров может быть использован как числовая характеристика качества компьютера. Для превращения этих характеристик в частные критерии оптимальности применим преобразование их к безразмерному виду и единичному интервалу при помощи шкалы интервалов (для размера экрана и цены) и шкалы отношений (для остальных критериев).

Тип CD-устройства является качественной характеристикой, поэтому применим к нему экспертное балльное оценивание, которое, например, может быть следующим:

Тип	Оценка
CD	0.1
DVD	0.8
DVD-CDRW	1.0

После преобразования к безразмерному виду и единичному интервалу получаем данные, приведенные в таблице 3.2.

Табл. 3.2. Приведенные значения характеристик вариантов.

Вариант	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена
1	0.567	0	0.5	0.25	0.1	0.306
2	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.543
3	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.41
4	0.6	0.444	0.5	0.5	0.8	0.435
5	0.850	1.000	1.0	0.750	1.0	1.000
6	0.7	0.944	0.5	0.5	0.8	0.319
7	0.433	0.389	0.5	0.375	0.1	0.294
8	0.750	0.444	0.5	0.5	0.1	0.227
9	1.0	1.0	1.0	1.0	0.8	0.669
10	0.6	0.444	0.5	0.5	0.1	0.000
11	0.9	0.444	1.0	0.5	0.8	0.358
12	0.667	0.444	1.0	0.5	0.8	0.501
13	0.9	0.444	1.0	0.750	1.0	0.779

Последняя проблема, которую осталось решить – приведение частных критериев к одному типу. В данном случае, наверное, удобнее все привести к типу максимизации (так как критерий минимизации только один – цена). Для преобразования критерия цены к типу максимизации вычтем соответствующее значение из единицы. Итоговая таблица многокритериального выбора приведена в таблице 3.3.

Табл. 3.3. Итоговая таблица многокритериального выбора.

Вариант	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена
1	0.567	0	0.5	0.25	0.1	0.694
2	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.457

3	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.59
4	0.6	0.444	0.5	0.5	0.8	0.565
5	0.850	1.000	1.0	0.750	1.0	0
6	0.7	0.944	0.5	0.5	0.8	0.681
7	0.433	0.389	0.5	0.375	0.1	0.706
8	0.750	0.444	0.5	0.5	0.1	0.773
9	1.0	1.0	1.0	1.0	0.8	0.331
10	0.6	0.444	0.5	0.5	0.1	1
11	0.9	0.444	1.0	0.5	0.8	0.642
12	0.667	0.444	1.0	0.5	0.8	0.499
13	0.9	0.444	1.0	0.750	1.0	0.221

В дальнейшем, применяя различные методы решения задачи многокритериального выбора, будем в качестве примера рассматривать эту таблицу многокритериального выбора.

3.2. Анализ эффективности вариантов

Построение множества эффективных (Парето-оптимальных) решений, вообще говоря, необязательный шаг. Большинство методов решения многокритериальной задачи выбора (в частности, описанные ниже метод главного критерия, метод лексикографического упорядочения, метод использования обобщенного критерия) гарантируют, что полученное при их использовании оптимальное (в смысле выбранного принципа оптимальности) решение является, как минимум, слабо-эффективным.

Для чего же целесообразно проводить анализ эффективности? Можно назвать две основные причины.

Во-первых, может оказаться так, что среди большого количества вариантов выбора эффективных решений немного. И отсев заведомо неэффективных (а, значит, и неинтересных для ЛПР) решений может облегчить анализ предметной области и более качественно осуществить выбор.

Во-вторых, некоторые методы (например метод использования обобщенного критерия) не могут гарантировать, что все эффективные допустимые варианты могут стать оптимальными, то есть могут существовать эффективные варианты, которые при использовании данного метода в принципе не могут стать оптимальными. Поэтому ЛПР полезно ознакомиться со всеми эффективными вариантами, чтобы иметь возможность проанализировать обоснованность применения того или иного метода.

Вообще говоря, для поиска эффективных решений требуется сравнить каждый вариант с каждым, определить, является ли один из них доминирующим по отношению к другому и, если это так, доминируемый вариант исключить из рассмотрения. Таким образом, всего потребуется $C_m^2 = m(m-1)/2$ сравнений (m – количество вариантов). Но это – в самом худшем случае.

Это число можно уменьшить, воспользовавшись тем, что если вариант x доминируется вариантом y, то вариант x в дальнейшем можно не рассматривать, так как он точно не является эффективным (что нельзя сказать про y – для варианта y сравнения необходимо продолжать). Таким образом, теоретически минимальное количество сравнений, которое необходимо выполнить, будет $(m-1)$. Этого числа можно достигнуть, например, если мы сразу обнаружим вариант, который доминирует все остальные варианты. Но вероятность такого развития событий мала, и поэтому реально число сравнений будет больше.

3.3. Метод главного критерия и его модификации

3.3.1. Метод главного критерия

Основная идея метода главного критерия заключается в оптимизации наиболее важного частного критерия при условии, что значения других частных критериев не хуже заданных пороговых значений.

Пусть среди n частных критериев можно выделить один критерий, который, как считает ЛПР, является намного предпочтительнее остальных (назовем его *главным критерием*). Тогда можно сформулировать принцип оптимальности, при котором лучшим вариантом считается вариант, обеспечивающий наилучшее значение главного критерия. При этом на остальные частные критерии накладываются дополнительные ограничения по принципу «не хуже».

Пусть, для определенности, самым важным (предпочтительным) частным критерием является первый критерий Q_1. Тогда задачу принятия решения (при условии, что все частные критерии приведены к типу максимизации) можно сформулировать так:

$$x = \arg\max_{x \in \widetilde{D}} Q_1(x), \tag{3.6}$$

где

$$\widetilde{D} = D \cap D'; \;\; D' = \{x | Q_i(x) \geq Q_i^0, i = 2,3, \dots, n\}. \tag{3.7}$$

Этот метод позволяет решить исходную задачу достаточно быстро и понятно. Но очевидны и недостатки этого метода.

Во-первых, все-таки выделение единственного главного критерия – это серьезное ограничение. Не во всех практических задачах это возможно и резонно. Во-вторых, возникает вопрос, как назначать пороговые значения Q_i^0. В книге [2] приводятся две теоремы, которые устанавливают правила назначения данных пороговых значений (там же приведены доказательства теорем).

Теорема 5. Для равноценных частных критериев $Q_i(x), i = 1,2, \dots, n$, пороговые значения Q_i^0 должны выбираться из условия:

$$\frac{Q_i^0 - Q_i^-}{Q_i^+ - Q_i^-} = k_0, \qquad i = 1,2, \dots, n; \tag{3.8}$$

где

$$0 < k_0 \leq 1; Q_i^+ = \max_{x \in D} Q_i(x); \;\; Q_i^- = \min_{x \in D} Q_i(x).$$

То есть, иными словами, все пороговые значения должны вычисляться по следующей формуле:

$$Q_i^0 = k_0(Q_i^+ - Q_i^-) + Q_i^-, \qquad i = 2,3, \dots, n. \tag{3.9}$$

Теорема 6. Для неравноценных критериев $Q_i(x), i = 1,2, \dots, n$, предпочтение между которыми задано с помощью коэффициентов w_i:

$$w_i > 0, i = 2,3, \dots, n; \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

пороговые значения Q_i^0 должны выбираться из условия:

$$w_i \cdot \left(\frac{Q_i^0 - Q_i^-}{Q_i^+ - Q_i^-} \right) = k_0, \qquad i = 1,2, \dots, n; \tag{3.10}$$

где

$$0 < k_0 \leq 1; \; Q_i^+ = \max_{x \in D} Q_i(x); \;\; Q_i^- = \min_{x \in D} Q_i(x)$$

То есть, формула для вычисления пороговых значений теперь выглядит так:

$$Q_i^0 = \frac{k_0}{w_i}(Q_i^+ - Q_i^-) + Q_i^-, \qquad i = 2,3,\dots,n. \tag{3.11}$$

Рассмотрим пример. Решим задачу выбора компьютера методом главного критерия – стоимости. Для этого вычислим пороги при $k_0 = 0.3$. Результат решения задачи приведен в таблице 3.4.

Табл. 3.4. Решение задачи методом главного критерия.

Вариант	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена
Миним.	0.433	0	0.5	0.25	0.1	
Максим.	1	1	1	1	1	
Порог	0.6031	0.3	0.65	0.475	0.37	
1	0.567	0	0.5	0.25	0.1	0.694
2	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.457
3	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.59
4	0.6	0.444	0.5	0.5	0.8	0.565
5	0.850	1.000	1.0	0.750	1.0	0
6	0.7	0.944	0.5	0.5	0.8	0.681
7	0.433	0.389	0.5	0.375	0.1	0.706
8	0.750	0.444	0.5	0.5	0.1	0.773
9	1.0	1.0	1.0	1.0	0.8	0.331
10	0.6	0.444	0.5	0.5	0.1	1
11	0.9	0.444	1.0	0.5	0.8	0.642
12	0.667	0.444	1.0	0.5	0.8	0.499
13	0.9	0.444	1.0	0.750	1.0	0.221

В таблице выделены элементы, удовлетворяющие пороговым значениям. Среди них выбираем вариант, с наибольшим значением частного критерия «цена». Таким вариантом является вариант 11.

3.3.2. Метод лексикографического упорядочения

Данный метод является, в некотором смысле, развитием метода главного критерия. Метод лексикографического упорядочения [2, 11] решает проблему выбора в случае, когда в результате решения задачи выбора оптимальным получается не один вариант, а множество вариантов с одинаковым значением главного частного критерия.

Предположим, что для всех частных критериев оптимальности задано предпочтение по важности, указывающее качественное отношение предпочтения:

$$Q_1 \succcurlyeq Q_2 \succcurlyeq \dots \succcurlyeq Q_n, \tag{3.12}$$

то есть первый критерий важнее второго, второй третьего и так далее. Это отношение называют лексикографическим упорядочением частных критериев. При предположении, что все частные критерии приведены к типу максимизации и вариант i предпочтительнее варианта j, можно записать следующую последовательность соотношений:

$$\begin{cases} Q_1(i) > Q_1(j) \\ Q_1(i) = Q_1(j); Q_2(i) > Q_2(j) \\ \ldots \\ Q_1(i) = Q_1(j); \ldots; Q_{n-1}(i) = Q_{n-1}(j); Q_n(i) > Q_n(j) \end{cases} \quad (3.13)$$

То есть сначала используется первый частный критерий и лучшим считается то решение, для которого этот критерий максимален; если это максимальное значение достигается в обоих вариантах, то предпочтение отдается тому варианту, для которого значение второго критерия больше и так далее.

Метод лексикографического упорядочения предполагает решение последовательности задач минимизации относительно каждого частного критерия оптимальности:

$$\begin{gathered} \tilde{x}^1 = \arg\max_{x \in D_1} Q_1(x); \\ \tilde{x}^2 = \arg\max_{x \in D_2} Q_2(x); \\ \ldots \\ \tilde{x}^n = \arg\max_{x \in D_n} Q_n(x); \end{gathered} \quad (3.14)$$

где

$$\begin{gathered} D_1 = D; \\ D_k = D \cap \left\{x \middle| Q_j(x) = Q_j(\tilde{x}^j)\right\}, j = 1,2, \ldots, k-1. \end{gathered} \quad (3.15)$$

В качестве решения исходной задачи принимается вариант, полученный из решения задачи на шаге n. Но реально процесс заканчивается, как только в результате решения одной из задач оптимизации получаем единственный вариант. Это получается из-за того, что множества решений задач (3.13) удовлетворяют соотношению $D = D_1 \supseteq D_2 \supseteq \cdots \supseteq D_n$.

Для метода лексикографического упорядочения справедлива следующая теорема (доказательство теоремы приводится в [2]).

Теорема 7. Для того, чтобы вариант x^* был эффективным вариантом, необходимо и достаточно, чтобы он являлся решением одной из задач оптимизации (3.14)-(3.15).

Иными словами, данный метод гарантирует эффективность полученного этим методом решения.

Рассмотрим пример применения этого метода.

В приводимом ранее примере установим следующее упорядочение частных критериев по важности: объем оперативной памяти – HDD – цена. Решение задачи представлено в таблице 3.5.

Табл. 3.5. Решение задачи методом лексикографического упорядочения.

Вариант	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена
9	1.0	1.0	1.0	1.0	0.8	0.331
5	0.850	1.000	1.0	0.750	1.0	0
13	0.9	0.444	1.0	0.750	1.0	0.221
11	0.9	0.444	1.0	0.5	0.8	0.642
12	0.667	0.444	1.0	0.5	0.8	0.499
2	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.457
3	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.59
4	0.6	0.444	0.5	0.5	0.8	0.565
6	0.7	0.944	0.5	0.5	0.8	0.681
8	0.750	0.444	0.5	0.5	0.1	0.773
10	0.6	0.444	0.5	0.5	0.1	1
7	0.433	0.389	0.5	0.375	0.1	0.706
1	0.567	0	0.5	0.25	0.1	0.694

3.3.3. Метод последовательных уступок

Метод лексикографического упорядочения на практике приводит к единственному решению уже на первых шагах. Метод последовательных уступок в некоторой мере устраняет этот недостаток [2].

Идея метода заключается в том, что на каждом i-м шаге последовательной оптимизации вводится уступка, определяющая допустимое отклонение (i-1)-го частного критерия от его максимального значения:

$$\begin{gathered} \tilde{x}^1 = \arg\max_{x \in D_1} Q_1(x)\,; \\ \tilde{x}^2 = \arg\max_{x \in D_2} Q_2(x)\,; \\ \dots \\ \tilde{x}^n = \arg\max_{x \in D_n} Q_n(x)\,; \end{gathered} \tag{3.16}$$

где

$$\begin{gathered} D_1 = D; \\ D_k = D \cap \left\{x \middle| Q_j(x) \geq Q_j(\tilde{x}^j) - \Delta Q_j\right\}, j = 1,2, \dots, k-1. \end{gathered} \tag{3.17}$$

В качестве решения исходной задачи принимается вариант, полученный из решения на шаге n.

Введение уступки по $(i-1)$-му частному критерию позволяет улучшить значение i-го частного критерия (менее важного), но, зачастую, на значительную величину.

В качестве недостатков метода в литературе отмечаются следующие.

1) Каждая уступка назначается по одному частному критерию, что не позволяет учесть влияние уступок друг на друга.

2) Окончательное решение зависит от величин всех уступок. При одних и тех же значениях уступок оптимальное решение получается различным при изменении порядка предпочтения частных критериев.

Однако, несмотря на эти недостатки, зачастую метод последовательных уступок оказывается очень эффективным и часто применяемым на практике.

3.4. Использование аддитивного обобщенного критерия

Пожалуй, можно сказать, что этот метод является наиболее распространенным в прикладных задачах. Широкая распространенность определяется, с одной стороны, простотой и понятностью, с другой стороны – возможностями по учету дополнительной информации о предпочтениях.

Общая идея заключается в построении скалярной функции $F(Q(x))$, которая обладает свойством упорядочения исходных вариантов по их предпочтительности. Процедура построения такой функции называется *свертыванием* или *объединением* векторного критерия оптимальности (как вариант – *свертыванием* или *объединением* частных критериев).

То есть, исходная многокритериальная задача выбора

$$\begin{aligned} &\max_{x \in D} Q_1(x)\,; \\ &\max_{x \in D} Q_2(x)\,; \\ &\qquad \ldots \\ &\max_{x \in D} Q_n(x)\,; \end{aligned} \tag{3.18}$$

где

$$D = \{1,2,\ldots,N_D\}; \tag{3.19}$$

сводится к однокритериальной (скалярной) задаче

$$\max_{x \in D} \{F(Q_1(x),\ldots,Q_n(x))\}. \tag{3.20}$$

Функция F называется *обобщенным критерием оптимальности* задачи. В качестве такого критерия может быть, например, выбрана сумма значений частных критериев:

$$\max_{x \in D} \{F(Q_1(x),\ldots,Q_n(x))\} = \sum_{i=1}^{n} Q_i(x). \tag{3.21}$$

Для учета относительной важности частных критериев (а в выражении (3.21) частные критерии абсолютно равноправны) вводятся весовые коэффициенты относительной важности

$$w = (w_1,\ldots,w_n). \tag{3.22}$$

При этом, чем важнее частный критерий, тем больший коэффициент ему должен быть назначен. Тогда в качестве обобщенного критерия можно использовать следующую функцию:

$$\max_{x \in D} \{F(Q_1(x),\ldots,Q_n(x))\} = \sum_{i=1}^{n} (w_i \cdot Q_i(x)). \tag{3.23}$$

Такой обобщенный критерий называется аддитивным обобщенным критерием оптимальности.

Весовые коэффициенты w, входящие в обобщенный критерий отражают относительную важность частных критериев. Здесь важность понимается в смысле аксиоматической теории важности [11], что позволяет считать: если известна дополнительная информация вида «i-й критерии не менее важен, чем j-й критерий $\left(Q_i \succcurlyeq Q_j\right)$, то для соответствующих весовых коэффициентов выполняется соотношение:

$$\left(Q_i \succcurlyeq Q_j\right) \Leftrightarrow \left(w_i \geq w_j\right). \qquad (3.24)$$

Для решения исходной задачи выбора требуется назначение весовых коэффициентов важности в численном виде. При этом, обычно, предполагается, что весовые коэффициенты важности принадлежат области допустимых значений следующего вида (в дальнейшем будем упоминать ее как область допустимых значений весовых коэффициентов):

$$D_w = \{w \in E^n | w_i \geq w_0 \geq 0, i = 1,2, \dots, n;\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i = 1\}. \qquad (3.25)$$

То есть весовые коэффициенты неотрицательны и их значение, в общем случае, не может быть меньше некоторой неотрицательной величины w_0.

Использование аддитивного критерия оптимальности является хорошо изученной темой в литературе. Приведем лишь одно, важнейшее свойство аддитивного критерия, которое и ставит его на одно из первых мест.

Теорема 8. Для того, чтобы вариант $x^0 \in D$ являлся эффективным вариантом, достаточно, чтобы существовали такие весовые коэффициенты

$$w_i > 0, i = 1,2, \dots, n;\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

при которых x^0 является решением задачи

$$x^0 = \arg\max_{x \in D} \sum_{i=1}^{n} \left(w_i Q_i(x)\right).$$

Иными словами, использование аддитивного обобщенного критерия оптимальности приводит к тому, что вариант, выбранный этим критерием, всегда является эффективным. То есть анализ эффективности можно вообще не делать – он будет сделан автоматически.

Но это только достаточное условие. То есть не все точки могут быть найдены аддитивным критерием и может существовать вариант, который, хотя и является эффективным, но никогда не станет оптимальным при использовании аддитивного обобщенного критерия оптимальности, какие бы весовые коэффициенты важности ни назначались. Это показано в [11].

Далее будут подробно рассмотрены способы назначения весовых коэффициентов важности для задачи многокритериального выбора вариантов.

Рассмотрим выбор компьютера в нашем примере при использовании аддитивного обобщенного критерия оптимальности. Предположим, что ЛПР сформулировал свои предпочтения среди частных критериев оптимальности в виде балльных оценок в произвольной шкале (таблица 3.6).

Табл. 3.6. Значения весовых коэффициентов важности.

	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена
Исходные оценки	2	3	4	3	3	10
Весовые коэффициенты	0.08	0.12	0.16	0.12	0.12	0.4

Результат решения задачи приведен в таблице 3.7.

Табл. 3.7. Использование аддитивного критерия оптимальности.

Вариант	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена	Итоговое значение
Весовые коэффиц.	0.08	0.12	0.16	0.12	0.12	0.4	
1	0.567	0	0.5	0.25	0.1	0.694	0.4448
2	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.457	0.3748
3	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.59	0.4278
4	0.6	0.444	0.5	0.5	0.8	0.565	0.5632
5	0.850	1.000	1.0	0.750	1.0	0	0.5580
6	0.7	0.944	0.5	0.5	0.8	0.681	0.6776
7	0.433	0.389	0.5	0.375	0.1	0.706	0.5006
8	0.750	0.444	0.5	0.5	0.1	0.773	0.5746
9	1.0	1.0	1.0	1.0	0.8	0.331	0.7085
10	0.6	0.444	0.5	0.5	0.1	1	0.6533
11	0.9	0.444	1.0	0.5	0.8	0.642	0.6980
12	0.667	0.444	1.0	0.5	0.8	0.499	0.6224
13	0.9	0.444	1.0	0.750	1.0	0.221	0.5839

4. Назначение весовых коэффициентов важности для обобщенного критерия оптимальности

4.1. Использование информации об относительном разбросе

Фактически этот способ позволяет автоматически вычислять весовые коэффициенты важности, исходя из простого и понятного принципа: если разброс значений частного критерия оптимальности среди вариантов невелик, то такой критерий должен быть не очень важным с точки зрения лица, принимающего решение.

На самом деле, например, в таблице выбора присутствуют три варианта передатчика и два частных критерия – цена и мощность. По цене эти варианты отличаются абсолютно незначительно (в пределах 20 долларов при стоимости порядка десятков тысяч), а вот по мощности – отличаются серьезно (наихудший от наилучшего отличается в 2 раза). Естественная реакция ЛПР – назначить цене меньший весовой коэффициент важности, так как колебание 0.1% – это незначительно, по сравнению с выигрышем по мощности в 2 раза.

Для вычисления весовых коэффициентов важности по этому методу, для каждого частного критерия $Q_i, i = 1, \dots, n,$ при предположении, что все частные критерии требуется минимизировать, вычисляются коэффициенты относительного разброса

$$d_i = \frac{Q_i^+ - Q_i^-}{Q_i^+} = 1 - \frac{Q_i^-}{Q_i^+}, \qquad (4.1)$$

где

$$Q_i^- = \min_{x \in D} Q_i(x),$$
$$Q_i^+ = \max_{x \in D} Q_i(x).$$

Коэффициенты разброса определяют максимальное относительное отклонение по i-му частному критерию в области решений D. Весовые коэффициенты получают наибольшее значение для тех критериев, относительный разброс которых среди множества вариантов наиболее значителен:

$$w_i = \frac{d_i}{\sum_{k=1}^{n} d_k}, i = 1,2, \dots, n. \qquad (4.2)$$

В качестве примера рассмотрим решение задачи выбора компьютера. Результат расчета весовых коэффициентов приведен в таблице 4.1.

Табл. 4.1. Информация о разбросе и расчет весовых коэффициентов.

	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена
Миним. значение	0.433	0	0.5	0.25	0.1	0
Максим. значение	1	1	1	1	1	1
Оценка разброса	0.567	1	0.5	0.75	0.9	1
Весовой коэффиц.	0.1202	0.2120	0.106	0.1590	0.1908	0.2120

Решение исходной задачи приведено в таблице 4.2.

Табл. 4.2. Решение задачи по информации об относительом разбросе.

Вариант	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена	Итоговое значение
Весовые коэффиц.	0.1202	0.2120	0.106	0.1590	0.1908	0.2120	
1	0.567	0	0.5	0.25	0.1	0.694	0.3270
2	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.457	0.3086
3	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.59	0.3367
4	0.6	0.444	0.5	0.5	0.8	0.565	0.5712
5	0.850	1.000	1.0	0.750	1.0	0	0.7302
6	0.7	0.944	0.5	0.5	0.8	0.681	0.7138
7	0.433	0.389	0.5	0.375	0.1	0.706	0.4158
8	0.750	0.444	0.5	0.5	0.1	0.773	0.4998
9	1.0	1.0	1.0	1.0	0.8	0.331	0.8200
10	0.6	0.444	0.5	0.5	0.1	1	0.5299
11	0.9	0.444	1.0	0.5	0.8	0.642	0.6766
12	0.667	0.444	1.0	0.5	0.8	0.499	0.6184
13	0.9	0.444	1.0	0.750	1.0	0.221	0.6654

Оптимальным вариантом стал девятый вариант, несмотря на то, что он является достаточно дорогим.

4.2. Использование качественной информации об относительной важности частных критериев

Часто ЛПР может сформулировать свои предпочтения на множестве частных критериев оптимальности в виде некоторого набора пар критериев. Каждая пара представляет собой констатацию факта, что один критерий важнее (или, по крайней мере, не менее предпочтительнее) другого. И такие пары эксперт формулирует в меру своего представления, то есть не для всех возможных пар. И если определенная пара критериев не указана, то это не означает, что эти два критерия эквивалентны по важности. Это означает, что эксперт затрудняется их сравнить. Естественно, что чем больше эксперт назовет таких пар, тем лучше. Но математические модели должны учесть любую ситуацию, в том числе и случай, когда эксперт вообще не назвал ни одной пары.

4.2.1. Принципы использования качественной информации

Говоря более строгим языком, эксперт устанавливает взаимное предпочтение для некоторых L пар частных критериев (необязательно для всех C_n^2 возможных пар) предпочтение i-го частного критерия над j-м на всем множестве D допустимых решений:

$$e_l = \{Q_i \succcurlyeq Q_j\}, l = 1,2, \dots, L \leq \frac{n(n-1)}{2} \tag{4.3}$$

Информация (4.3) является качественной, так как из нее следует, что критерий i важнее критерия j, но нельзя сказать на сколько или во сколько раз. Тогда, учитывая соотношение (4.3), область допустимых значений весовых коэффициентов важности D_w, определенная, как (3.25), сужается в соответствии с введенными экспертом соотношениями:

$$D_w^2 = \{w | w_i \geq w_0 \geq 0, i = 1, \dots, n; \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i = 1\,; \langle w_i \geq w_j \rangle_{e_l}, l = 1, \dots, L\}. \tag{4.4}$$

Как видно из этого определения, качественной информации, введенной экспертом, соответствует область допустимых значений весовых коэффициентов, каждая точка которой соответствует ограничениям (4.4), то есть соответствует введенной экспертом качественной информации о его предпочтениях. Для выбора из этой области конкретного вектора весовых коэффициентов будем учитывать зависимость весовых коэффициентов от значений частных критериев у каждого исходного варианта.

Заметим, что непротиворечивой информация, введенная экспертом, является тогда, когда область D_w^2 непуста.

Вернемся к примеру с передатчиками и двумя критериями (цена и мощность). Напомним, что по условию, по цене эти варианты отличаются незначительно, а по мощности – отличаются серьезно: первый мощнее второго в 2 раза, зато немного дороже. Добавим еще, что у второго значительно меньшие габариты и это важно. Вполне уместны следующие рассуждения: если у первого передатчика высокая мощность по сравнению с другим (другими), то это в нем – самое главное. Аналогично, второй передатчик миниатюрный, и в нем главными являются размеры, а остальное уже не так важно.

При предположении, что весовые коэффициенты зависят от конкретного варианта, можно рассматривать их как неконтролируемые факторы и сформулировать следующий принцип: *для каждого исходного варианта вычисляется такой набор весовых коэффициентов важности, что значение обобщенного критерия оптимальности является наихудшим среди всех возможных значений обобщенного критерия при всех возможных наборах весовых коэффициентов.*

Предположим, что мы используем аддитивный критерий оптимальности и исходная задача сведена к задаче максимизации. Тогда для каждого варианта x вычисляется свой набор весовых коэффициентов и затем решается исходная задача:

$$x^* = \arg\max_{x \in D} \left\{ \min_{w \in D_w} \sum_{i=1}^{n} w_i Q_i(x) \right\}. \qquad (4.3)$$

То есть для каждого исходного варианта, численные значения весовых коэффициентов определяются из решения экстремальной задачи

$$w(x) = \arg\min_{w \in D_w} \sum_{i=1}^{n} w_i Q_i(x). \qquad (4.6)$$

Определение экспертом дополнительной качественной информации (4.3) приводит нас к области допустимых значений весовых коэффициентов вида (4.4) в соответствии с введенной информацией. Таким образом предпочтения эксперта могут быть учтены.

4.2.2. Представление информации в виде графа и ее анализ

Качественная информация о предпочтениях эксперта может быть представлена в виде ориентированного графа $G(V, E)$, где V – множество вершин, соответствующих частным критериям, E – множество ребер, соединяющих i-ю вершину с j-й тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $Q_i \succcurlyeq Q_j$. В дальнейшем будем считать, что информационные сообщения (4.3) удовлетворяют условию транзитивности, то есть в графе $G(V, E)$ отсутствуют замкнутые циклы.

Разобьем множество I вершин графа на слои следующим образом:
к первому слою $(s = 1)$ отнесем все вершины, в которые не входит ни одна дуга;
ко второму слою $(s = 2)$ – те и только те вершины, в которые входят дуги из вершин первого слоя;
к третьему слою $(s = 3)$ – те и только те вершины, в которые входят дуги из вершин первого и второго слоев и т.д.

При этом у вершин последнего слоя $(s = S \leq N)$ не будет ни одной исходящей дуги.

В частном случае отсутствия качественной информации (4.3) граф $G(V, E)$ будет представлять собой совокупность из N изолированных вершин. А в частном случае линейной упорядоченности частных критериев, граф $G(V, E)$ будет иметь число слоев, равное числу вершин ($S = N$).

Пример. Пусть для набора из 6 частных критериев оптимальности (в нашем примере), ЛПР сформулировал следующие предпочтения: $e_1 = \{Q_6 \succcurlyeq Q_4\}, e_2 = \{Q_6 \succcurlyeq Q_3\}, e_3 = \{Q_4 \succcurlyeq Q_1\}, e_4 = \{Q_3 \succcurlyeq Q_1\}, e_5 = \{Q_3 \succcurlyeq Q_2\}, e_6 = \{Q_1 \succcurlyeq Q_5\}$.

Граф предпочтений $G(I, \Omega)$ для этой информации приведен на рис. 4.1.

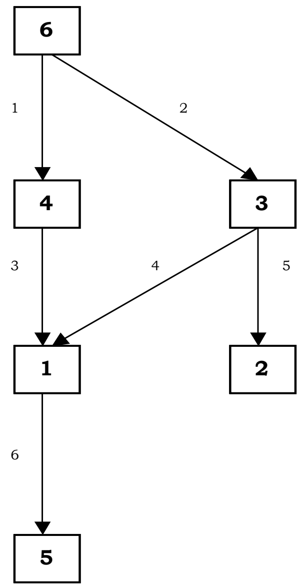

Рис. 4.1. Граф предпочтений.

Для каждой вершины графа $i \in \{1,2,\dots,n\}$, соответствующей частному критерию Q_i, введем следующие обозначения: V_i – множество вершин графа) $G(V,E)$, из которых имеется путь в вершину i, включая ее саму; n_i – мощность множества V_i.

Тогда, в частном случае отсутствия качественной информации (4.3) получим:

$$V_i = \{i\}, n_i = 1, i = 1,\dots,n, \tag{4.7}$$

а в частном случае линейной упорядоченности по важности частных критериев:

$$V_i = \{1,\dots,i\}, n_i, i = 1,\dots,n. \tag{4.8}$$

В некоторых случаях эксперт имеет возможность уточнить информацию о взаимосвязях весовых коэффициентов w_i и w_j, связанных отношением предпочтения $\{Q_i \succcurlyeq Q_j\}$, с помощью уточняющего коэффициента:

$$e_l = \{Q_i \succcurlyeq Q_j\} \Longrightarrow \langle w_i \geq g_l w_j \rangle_{e_l}, g_l \geq 1, l = 1,\dots,L. \tag{4.9}$$

В этом случае получаем область допустимых значений весовых коэффициентов вида

$$D_w^3 = \left\{ w \middle| \begin{array}{l} w_i \geq w_0 > 0, i = 1,\dots,n; \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1; \\ \langle w_i \geq g_l w_j \rangle_{e_l}, g_l \geq 1, l = 1,\dots,L \end{array} \right\}. \tag{4.10}$$

Введем следующие обозначения.

Пусть p – произвольный путь в графе $G(V,E)$: $p = \{l_1,\dots,l_{n(p)}\}$, где $l_i \in E$ – дуга, входящая в путь p; $n(p)$ – число дуг в пути p. Обозначим через P_i^k множество всех путей из вершины i в вершину k. Тогда введем величины $\bar{g}_i^k$ и $\bar{\bar{g}}_i$ следующим образом:

$$\bar{g}_i^k = \begin{cases} \max\limits_{p \in P_i^k} \prod\limits_{l \in p} g_l\,, & P_i^k \neq \emptyset; \\ 1, \quad P_i^k = \emptyset; \end{cases} . \tag{4.11}$$

для всех $i, k \in E$;

$$\bar{\bar{g}}_i = \max_{k \in E, k \neq i} \bar{g}_i^k. \tag{4.12}$$

Очевидно, что $\bar{\bar{g}}_i$ является обобщенной оценкой относительной важности частного критерия i в условиях качественной информации (4.3).

Приведем пример вычисления этих величин для графа, изображенного на рис. 4-1. Для всех дуг графа введем уточняющие коэффициенты $g_l, l = 1, \dots, 6$ (таблица 4.3).

Табл. 4.3. Пример уточняющих коэффициентов.

Номер дуги l	Коэффициент g_l
1	1.2
2	1.3
3	1.0
4	1.5
5	1.3
6	2.0

Вычисление величин (4.11) и (4.12) для всех вершин графа приведено в таблице 4.4.

Табл. 4.4. Пример вычисления характеристик предпочтений.

Вершина i	Величины $\bar{g}_i^k$ $(P_i^k \neq \emptyset)$	$\bar{\bar{g}}_i$
1	$\bar{g}_1^5 = 2.0$	2.0
2	—	1
3	$\bar{g}_3^5 = 2.0 \times 1.5;\ \bar{g}_3^2 = 1.3$	3.0
4	$\bar{g}_4^5 = 1.5 \times 1.0$	1.5
5	—	1
6	$\bar{g}_6^5 = \max\{1.2 \times 1.0 \times 2.0; 1.3 \times 1.5 \times 2.0\} = 3.9;\ \bar{g}_6^2 = 2.0 \times 1.3 = 2.6$	3.9

Величины $\bar{g}_i^k$ и $\bar{\bar{g}}_i$ могут быть рассчитаны при помощи следующего алгоритма.

1. Полагаем $s = S$; $\bar{g}_i^k = 0, k, i \in \{1, \dots, n\}$.
2. Для вершин i, принадлежащих слою s, полагаем $\bar{\bar{g}}_i = 1$.
3. Полагаем $s = s - 1$. Если $s = 0$ (то есть все слои пройдены), то переходим к пункту 5, иначе – к пункту 4.
4. Для каждой вершины k, принадлежащей слою s, выполняем следующие действия. Пусть J_k – множество вершин слоя $(s + 1)$, в которые есть дуга из вершины k. Тогда, для каждой вершины $j \in J_k$, полагаем:

   $\bar{g}_i^k = g_l$, где l – номер дуги $(k\ , j)$ в графе $G(V, E)$;

   $\bar{g}_k^i = \max\limits_{j \in J^k}\{\bar{g}_k^j, \bar{g}_j^i\}, i \neq j$;

   $\bar{\bar{g}}_k = \max\limits_{j \in J^k}\{\bar{g}_k^j, \bar{\bar{g}}_k\}$

   и повторяем все вычисления с пункта 3.
5. Для всех $\bar{g}_i^k$, для которых выполняется условие $\bar{\bar{g}}_k = 0, k, i \in \{1, \dots, n\}$, полагаем $\bar{g}_i^k = 1$. Все величины $\bar{g}_i^k$ и $\bar{\bar{g}}_i$ вычислены.

4.2.3. Вычисление весовых коэффициентов важности при различных видах качественной информации

Оптимизационная задача (4.6), при помощи которой вычисляются весовые коэффициенты важности для каждого варианта, является задачей линейного программирования, которая может быть решена любым из известных методов при помощи какого-либо пакета или системы (например, MS Excel). Но, поскольку эта задача специального вида, то для ее решения существуют аналитические выражения, позволяющие менее трудоемко рассчитать оптимальное значение весовых коэффициентов важности. Приведенные ниже выражения приводятся в книге [5] в виде теорем. Доказательства приведены там же.

4.2.3.1. Отсутствие информации

При отсутствии качественной информации (граф предпочтений не имеет дуг) получаем область допустимых значений вида

$$D_w = \{w | w_i \geq w_0 \geq 0, i = 1, \dots, n;\ \textstyle\sum_{i=1}^n w_i = 1\}. \tag{4.13}$$

В этом случае оптимальным решением задачи (4.6) является вектор w^* со следующими компонентами:

$$w_i^* = \begin{cases} 1-(n-1)w_0, & i = r; \\ w_0, & i \neq r; \end{cases} \tag{4.14}$$

где индекс r определяется из соотношения

$$q_r = \max_{1 \le k \le n} Q_k(x). \tag{4.15}$$

Рассмотрим пример решения задачи при этих условиях. Вычисленные значения весовых коэффициентов важности для нашего примера приведены в таблице 4.5.

Табл. 4.5. Рассчитанные коэффициенты при отсутствии информации.

Вариант	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена
1	0.01	0.95	0.01	0.01	0.01	0.01
2	0.01	0.95	0.01	0.01	0.01	0.01
3	0.01	0.95	0.01	0.01	0.01	0.01
4	0.01	0.95	0.01	0.01	0.01	0.01
5	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.95
6	0.01	0.01	0.48	0.48	0.01	0.01
7	0.01	0.01	0.01	0.01	0.95	0.01
8	0.01	0.01	0.01	0.01	0.95	0.01
9	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.95
10	0.01	0.01	0.01	0.01	0.95	0.01
11	0.01	0.95	0.01	0.01	0.01	0.01
12	0.01	0.95	0.01	0.01	0.01	0.01
13	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.95

В таблице 4.6 приведено решение исходной задачи с использованием вычисленных коэффициентов.

Табл. 4.6. Решение задачи при отсутствии дополнительной информации.

Вариант	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена	Итоговое значение
1	0.567	0	0.5	0.25	0.1	0.694	0.0211
2	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.457	0.0206
3	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.59	0.0219
4	0.6	0.444	0.5	0.5	0.8	0.565	0.4519
5	0.850	1.000	1.0	0.750	1.0	0	0.0460
6	0.7	0.944	0.5	0.5	0.8	0.681	0.5113
7	0.433	0.389	0.5	0.375	0.1	0.706	0.1190
8	0.750	0.444	0.5	0.5	0.1	0.773	0.1247
9	1.0	1.0	1.0	1.0	0.8	0.331	0.3626
10	0.6	0.444	0.5	0.5	0.1	1	0.1254
11	0.9	0.444	1.0	0.5	0.8	0.642	0.4606
12	0.667	0.444	1.0	0.5	0.8	0.499	0.4659
13	0.9	0.444	1.0	0.750	1.0	0.221	0.2514

4.2.3.2. Линейное упорядочивание критериев

В частном случае линейной упорядоченности по важности частных критериев оптимальности область допустимых значений весовых коэффициентов имеет вид:

$$D_w^4 = \left\{ w \middle| \begin{array}{l} w_i \geq w_0 > 0, i = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1; \\ \langle w_i \geq g_l w_{i+1} \rangle_{e_i}, g_l \geq 1, i = 1, \dots, n-1 \end{array} \right\}. \qquad (4.16)$$

В этом случае решением задачи (4.6) является вектор w^* с компонентами:

$$w_i^* = \begin{cases} (R' \cdot \bar{g}_i^r) \Big/ \sum\limits_{k \in I_r} \bar{g}_k^r + \bar{\bar{g}}_i \cdot w_0 \,, & i = 1, \dots, r; \\ w_0, & i = r+1, \dots, n; \end{cases} \qquad (4.17)$$

где

$$R' = 1 - w_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \bar{g}_k^n \geq 0; \qquad (4.18)$$

при этом величины $\bar{g}_i^k$ вычисляются с помощью (4.11), а индекс r определяется из соотношения

$$q_r = \max_{1 \leq k \leq n} q_k,$$

где

$$q_k = \sum_{i=1}^{k}\left[Q_i(x)\cdot\left(R'\cdot \bar{g}_i^k\Big/\sum_{j=1}^{k}\bar{g}_j^k + \bar{\bar{g}}_i w_0\right)\right] + \sum_{j=k+1}^{n}\left(Q_j(x)\cdot \bar{\bar{g}}_j w_0\right). \qquad (4.19)$$

Приведем пример вычисления весовых коэффициентов важности при этих условиях.

Предположим, что частные критерии оптимальности линейно упорядочены по важности: $Q_1 \geqslant Q_2 \geqslant Q_3 \geqslant Q_4 \geqslant Q_5 \geqslant Q_6$. При этом, все уточняющие коэффициенты этих попарных предпочтений равны 1.1. Вычисленные значения весовых коэффициентов важности для нашего примера приведены в таблице 4.7.

Табл. 4.7. Весовые коэффициенты при линейной упорядоченности.

Вариант	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена
1	0.2374	0.2158	0.1962	0.1784	0.1622	0.0100
2	0.4995	0.4541	0.0133	0.0121	0.0110	0.0100
3	0.4995	0.4541	0.0133	0.0121	0.0110	0.0100
4	0.2808	0.2552	0.2320	0.2109	0.0110	0.0100
5	0.2087	0.1898	0.1725	0.1568	0.1426	0.1296
6	0.2808	0.2552	0.2320	0.2109	0.0110	0.0100
7	0.2374	0.2158	0.1962	0.1784	0.1622	0.0100
8	0.2374	0.2158	0.1962	0.1784	0.1622	0.0100
9	0.2087	0.1898	0.1725	0.1568	0.1426	0.1296
10	0.2374	0.2158	0.1962	0.1784	0.1622	0.0100
11	0.4995	0.4541	0.0133	0.0121	0.0110	0.0100
12	0.4995	0.4541	0.0133	0.0121	0.0110	0.0100
13	0.4995	0.4541	0.0133	0.0121	0.0110	0.0100

В таблице 4.8 приведено решение исходной задачи с использованием вычисленных коэффициентов.

Табл. 4.8. Решение задачи при линейной упорядоченности.

Вариант	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена	Итоговое значение
1	0.567	0	0.5	0.25	0.1	0.694	0.3004
2	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.457	0.2681
3	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.59	0.2695
4	0.6	0.444	0.5	0.5	0.8	0.565	0.5178
5	0.850	1.000	1.0	0.750	1.0	0	0.7999
6	0.7	0.944	0.5	0.5	0.8	0.681	0.6747
7	0.433	0.389	0.5	0.375	0.1	0.706	0.3750
8	0.750	0.444	0.5	0.5	0.1	0.773	0.4852
9	1.0	1.0	1.0	1.0	0.8	0.331	0.8848
10	0.6	0.444	0.5	0.5	0.1	1	0.4519
11	0.9	0.444	1.0	0.5	0.8	0.642	0.6859
12	0.667	0.444	1.0	0.5	0.8	0.499	0.5679
13	0.9	0.444	1.0	0.750	1.0	0.221	0.6870

В случае линейной упорядоченности по важности частных критериев и отсутствии уточняющей информации g_l, имеем область допустимых значений весовых коэффициентов вида

$$D_w^5 = \left\{ w \left| \begin{array}{l} w_i \geq w_0 > 0, i = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1; \\ \langle w_i \geq w_{i+1} \rangle_{e_i}, i = 1, \dots, n-1 \end{array} \right. \right\}. \qquad (4.20)$$

В этом случае оптимальным решением задачи является вектор w^* со следующими компонентами:

$$w_i^* = \begin{cases} \dfrac{1 - (n - n_r) w_0}{n_r}, & i = 1, \dots, r; \\ w_0, & i = r + 1, \dots, n; \end{cases} \qquad (4.21)$$

при этом индекс r определяется из соотношения:

$$q_r = \max_{1 \leq k \leq n} q_k,$$

где

$$q_k = \frac{1 - (n - k) w_0}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} Q_i(x) + w_0 \cdot \sum_{j=k+1}^{n} Q_j(x). \qquad (4.22)$$

Приведем пример расчета. Пусть частные критерии оптимальности также линейно упорядочены по важности: $Q_1 \geqslant Q_2 \geqslant Q_3 \geqslant Q_4 \geqslant Q_5 \geqslant Q_6$. При этом все уточняющие коэффициенты для всех этих попарных предпочтений отсутствуют (равны 1). Вычисленные значения весовых коэффициентов важности для нашего примера приведены в таблице 4.9.

Табл. 4.9. Весовые коэффициенты при линейной упорядоченности.

Вариант	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена
1	0.48	0.48	0.01	0.01	0.01	0.01
2	0.48	0.48	0.01	0.01	0.01	0.01
3	0.48	0.48	0.01	0.01	0.01	0.01
4	0.245	0.245	0.245	0.245	0.01	0.01
5	0.166667	0.166667	0.166667	0.166667	0.166667	0.166667
6	0.245	0.245	0.245	0.245	0.01	0.01
7	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.01
8	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.01
9	0.166667	0.166667	0.166667	0.166667	0.166667	0.166667
10	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.01
11	0.48	0.48	0.01	0.01	0.01	0.01
12	0.48	0.48	0.01	0.01	0.01	0.01
13	0.48	0.48	0.01	0.01	0.01	0.01

В табл. 4.10 приведено решение исходной задачи с использованием вычисленных коэффициентов.

Табл. 4.10. Решение задачи при линейной упорядоченности.

Вариант	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена	Итоговое значение
1	0.567	0	0.5	0.25	0.1	0.694	0.2874
2	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.457	0.2556
3	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.59	0.2569
4	0.6	0.444	0.5	0.5	0.8	0.565	0.5145
5	0.850	1.000	1.0	0.750	1.0	0	0.7667
6	0.7	0.944	0.5	0.5	0.8	0.681	0.6627
7	0.433	0.389	0.5	0.375	0.1	0.706	0.3628
8	0.750	0.444	0.5	0.5	0.1	0.773	0.4620
9	1.0	1.0	1.0	1.0	0.8	0.331	0.8552
10	0.6	0.444	0.5	0.5	0.1	1	0.4346
11	0.9	0.444	1.0	0.5	0.8	0.642	0.6748
12	0.667	0.444	1.0	0.5	0.8	0.499	0.5612
13	0.9	0.444	1.0	0.750	1.0	0.221	0.6750

4.2.3.3. Информация общего вида

Оптимальным решением задачи (4.6) является вектор w^* с компонентами:

$$w_i^* = \begin{cases} (R'\bar{g}_i^r) \Big/ \sum\limits_{k \in I_r} \bar{g}_k^r + \bar{\bar{g}}_i w_0, & i \in I_r; \\ w_0, & i \notin I_r; \end{cases}. \tag{4.23}$$

где

$$R' = 1 - w_0 \sum_{i \notin I_r} \bar{\bar{g}}_i, \tag{4.24}$$

при этом величины $\bar{g}_i^k$ и $\bar{\bar{g}}_i$ вычисляются с помощью выражений (4.11) и (4.12) соответственно, а индекс r определяется из соотношения

$$q_r = \max_{1 \le k \le n} q_k,$$

где

$$q_r = \sum_{i \in I_k} \left[Q_i(x) \cdot \left(\left(R' \cdot \bar{g}_i^k \right) \Big/ \sum_{i \in I_k} \bar{g}_i^k + \bar{\bar{g}}_i w_0 \right) \right] + \sum_{j \in I \setminus I_k} \left(Q_j(x) \cdot w_0 \cdot \bar{\bar{g}}_j \right). \qquad (4.18)$$

Приведем пример решения задачи вычисления значений весовых коэффициентов. Рассчитаем весовые коэффициенты и решим задачу для примера информации, представленного в параграфе 4.2.2. При указанных там предпочтениях и коэффициентах, расчет приводит к данным, помещенным в таблице 4.11.

Табл. 4.11. Весовые коэффициенты при информации общего вида.

Вариант	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена
1	0.02	0.179685	0.233591	0.253056	0.01	0.303668
2	0.02	0.238095	0.309524	0.02	0.01	0.402381
3	0.02	0.238095	0.309524	0.02	0.01	0.402381
4	0.02	0.179685	0.233591	0.253057	0.01	0.303668
5	0.02	0.01	0.03	0.02	0.01	0.91
6	0.02	0.01	0.283744	0.307389	0.01	0.368867
7	0.129385	0.149291	0.194078	0.210251	0.064693	0.252302
8	0.129385	0.149291	0.194078	0.210251	0.064693	0.252302
9	0.02	0.01	0.03	0.02	0.01	0.91
10	0.129385	0.149291	0.194078	0.210251	0.064693	0.252302
11	0.02	0.023077	0.03	0.416783	0.01	0.50014
12	0.02	0.023077	0.03	0.416783	0.01	0.50014
13	0.02	0.01	0.03	0.02	0.01	0.91

В таблице 4.12 приведено решение исходной задачи с использованием вычисленных коэффициентов.

Табл. 4.12. Решение задачи при информации общего вида.

Вариант	Тактовая частота	Размер экрана	Память	HDD	CD	Цена	Итоговое значение
1	0.567	0	0.5	0.25	0.1	0.694	0.4031
2	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.457	0.3597
3	0.5	0	0.5	0.5	0.1	0.59	0.4130
4	0.6	0.444	0.5	0.5	0.8	0.565	0.5146
5	0.850	1.000	1.0	0.750	1.0	0	0.0820
6	0.7	0.944	0.5	0.5	0.8	0.681	0.5781
7	0.433	0.389	0.5	0.375	0.1	0.706	0.4745
8	0.750	0.444	0.5	0.5	0.1	0.773	0.5671
9	1.0	1.0	1.0	1.0	0.8	0.331	0.3894
10	0.6	0.444	0.5	0.5	0.1	1	0.6049
11	0.9	0.444	1.0	0.5	0.8	0.642	0.5956
12	0.667	0.444	1.0	0.5	0.8	0.499	0.5198
13	0.9	0.444	1.0	0.750	1.0	0.221	0.2790

Литература

1. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов: основы теории. – М.: Наука, 1990.
2. Батищев Д.И. Задачи и методы векторной оптимизации: Уч. пособие. – Горький: Горьк. госун-т, 1979.
3. Батищев Д.И. Принятие оптимальных решений в экономических исследованиях. – Горький: Горьк. госун-т, 1982.
4. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования. – М: Радио и связь, 1984.
5. Батищев Д.И., Шапошников Д.Е. Многокритериальный выбор с учетом индивидуальных предпочтений. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1994.
6. Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г. Математико-статистические методы экспертных оценок. М.: Статистика, 1980.
7. Гарнаев А.Ю. Excel, VBA, Internet в экономике и финансах. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
8. Исследование операций: методологические аспекты. – М.: Наука, 1972.
9. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974.
10. Подиновский В.В., Гаврилов Б.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Сов. радио, 1975.
11. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.
12. Таха Х.А. Введение в исследование операций, 6-е изд. : Пер. с англ. – М.: «Вильямс», 2001.
13. Макаров И.М., Виноградская Т.М., Рубчинский А.А., Соколов В.Б. Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие. – М.: Наука, 1982.

Дмитрий Евгеньевич Шапошников

ВЫБОР ВАРИАНТОВ В ПРОЕКТИРОВАНИИ АППАРАТНО-ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ

Учебно-методическое пособие

Компьютерная верстка – Д.Е. Шапошников

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950б Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23