

**Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского**

**Национально исследовательский университет**

**Учебно-научный и инновационный комплекс  
"Модели, методы и программные средства"**

**Основная образовательная программа  
010100 "Математика", общий профиль, квалификация  
(степень) бакалавр**

**Основная образовательная программа  
010200 "Математика и компьютерные науки", общий  
профиль, квалификация (степень) бакалавр**

**Учебно-методический комплекс по дисциплине  
"Математические методы нелинейной динамики"**

**А.Д. Морозов**

## **ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ**

Электронное учебно-методическое пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

**Нижний Новгород  
2012**

**ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ.** Морозов А.Д. Электронное учебно-методическое пособие.-Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012.– 98 с.

В учебном пособии излагаются методы и приемы исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым приводят задачи теории колебаний. Это методы качественной теории и теории бифуркаций двумерных динамических систем, метод малого параметра Пуанкаре, методы усреднения. Основным приемом исследования систем, которые малыми возмущениями отличаются от интегрируемых – это разделение переменных на "быстрые" и "медленные" с последующим усреднением по быстрой переменной. В качестве таких переменных используются канонические переменные действие-угол.

В настоящем учебном пособии наряду с традиционным в теории колебаний рассмотрением квазилинейных систем также проводится исследование и существенно нелинейных систем, которые более адекватно описывают исходный процесс или явление.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010100 "Математика" и 010200 "Математика и компьютерные науки", изучающих курс "Математические методы нелинейной динамики". Пособие может быть полезным также для студентов старших курсов физико-математических факультетов университетов.



## Оглавление

Предисловие	5
Глава 1. Введение. Динамические системы, основные понятия	7
1.1. Исторический экскурс	7
1.2. Понятие и классификация динамических систем	9
1.3. Устойчивость состояния равновесия. Второй метод Ляпунова	14
Глава 2. Методы качественной теории и бифуркации двумерных динамических систем	19
2.1. Качественные методы двумерных динамических систем	19
2.2. Бифуркации двумерных динамических систем	28
Глава 3. Консервативные интегрируемые системы	31
3.1. Системы с одной степенью свободы	31
3.2. Приложение к задаче о стационарных волновых решениях в уравнении Кортевега - де Вриза (КДВ)	37
3.3. Приложение к задаче Кеплера.	39
3.4. Трехмерные консервативные системы	41
3.5. Многомерные гамильтоновы системы	49
Глава 4. Неконсервативны автономные системы, близкие к интегрируемым	59
4.1. Метод малого параметра Пуанкаре	59
4.2. Метод усреднения	62
4.3. Применение метода усреднения для квазилинейных уравнений	64
4.4. Метод усреднения для двумерных квазигамильтоновых систем	67
Глава 5. Другие автономные системы	73
5.1. Разрывные колебания	73
5.2. Нерегулярные колебания. Странные аттракторы	75
5.3. Метод точечных отображений на примере двумерных систем	76

Глава 6. Периодические по времени линейные системы	79
6.1. Вынужденные колебания в системах с одной степенью свободы	79
6.2. Параметрические колебания	80
Глава 7. Периодические по времени возмущения	85
7.1. Периодические по времени возмущения линейного осциллятора	85
7.2. Периодические по времени возмущения двумерных нелинейных гамильтоновых систем	90
Литература	97

## Предисловие

Тема математических методов нелинейной динамики является необозримой. Начиная с А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова и А.А. Андронова ей посвящено огромное число работ. Из последних отметим книги Л.П. Шильникова с соавторами [11]. В данном пособии мы ограничимся рассмотрением методов исследования динамических систем, к которым приводят задачи теории колебаний<sup>1</sup>.

Пособие написано по материалам лекций, которые автор читает на протяжении более 10 лет студентам-математикам механико-математического факультета Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. В нем излагаются методы исследования систем, близких к интегрируемым, которые возникают в "классических" задачах теории колебаний. В отличие от традиционных курсов по теории колебаний, где рассматриваются в основном квазилинейные модели, в данном курсе сделана попытка рассмотреть и существенно нелинейные модели.

Пособие состоит из 7 глав. Первая, вводная глава содержит простейшие примеры задач динамики, основные понятия из теории динамических систем и результаты Ляпунова об устойчивости тривиального решения.

Во второй главе приводятся основные результаты качественной теории и теории бифуркаций двумерных автономных динамических систем.

В третьей главе рассматриваются интегрируемые нелинейные системы, к которым приводят разнообразные задачи из теории колебаний: системы с одной степенью свободы (задача о стационарных волновых решениях в уравнении КДВ, задача Кеплера), трехмерные автономные системы (уравнения Эйлера движения асимметричного волчка, уравнения гидродинамического типа, интегрируемый случай системы Лоренца и уравнений, описывающих динамику квантового генератора). В этой главе также рассматриваются многомерные интегрируемые гамильтоновы системы и их возмущения (введение в теорию КАМ).

Четвертая глава посвящена исследованию автономных систем, близких к интегрируемым. Здесь рассматривается метод малого параметра

---

<sup>1</sup>Пособие участвовало в конкурсе методических пособий ННГУ по математике. В связи с условиями конкурса его объем не должен превышать 100 страниц.

Пуанкаре и метод усреднения<sup>2</sup>. Изложение этих методов иллюстрируется как для квазилинейных уравнений второго порядка (например, для уравнения Ван дер Поля), так и для уравнений, близких к нелинейным гамильтоновым (например, для уравнения Дюффинга-Ван дер Поля). Основное внимание уделяется решению проблемы предельных циклов. На примере маятника Фроуда рассматривается задача о "мягком" и "жестком" режимах возбуждения автоколебаний.

В пятой главе кратко рассматриваются автономные системы с "быстрыми" и "медленными" движениями, со странными аттракторами. Здесь также рассматривается (на примере) метод точечных отображений.

В шестой главе рассматриваются периодические по времени линейные системы. Исследуются два типа колебаний: вынужденные и параметрические.

Седьмая глава посвящена исследованию периодических по времени возмущений нелинейных интегрируемых систем. Основное внимание уделяется изучению резонансов в системах с  $3/2$  степенями свободы.

Изложение материала сопровождается упражнениями для студентов.

---

<sup>2</sup>В теории колебаний рассматриваются обычно и другие методы (метод "медленно меняющихся амплитуд", асимптотический метод и др.) Однако эти методы либо являются вариантом метода усреднения, либо не являются обоснованными.

## Введение. Динамические системы, основные понятия

### 1.1. Исторический экскурс

В основу данного курса положены исследования по теории нелинейных колебаний (нелинейной динамике). Теория колебаний родилась в недрах механики. Условно ее зарождение можно отнести к XVII веку и связано с работами *Галилея* и *Гюйгенса* о колебаниях маятника и динамике часов. В конце XVIII века Лагранж построил достаточно общую теорию малых (линейных) колебаний.

Важным этапом в развитии теории колебаний явился трактат Рэлей "Теория звука"<sup>1</sup> Рэлей обнаружил аналогию между маятником и электрическим томсоновским контуром, разрядником, резонатором, органной трубой, музыкальным инструментом. Он нашел во всем этом многообразии великую колебательную общность.

В конце XIX века российский ученый Ляпунов А.М. заложил основы современной теории устойчивости движения [1]. В это же время благодаря трудам Пуанкаре и Ляпунова были разработаны основы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Используя эти результаты Андронов А.А. построил современную теорию нелинейных колебаний и создал всемирно известную Нижегородскую Школу по теории нелинейных колебаний.

Можно выделить два направления Школы: радиофизическое (теория колебаний и волн) и математическое (качественная теория и теория бифуркаций динамических систем). Отметим, что это разбиение весьма условно. По первому направлению отметим книги [2]-[5], а по второму направлению – [6]-[11].

Важной вехой в развитии теории колебаний явилась разработка методов усреднения Боголюбовым Н.Н. и его коллегами [12, 13].

---

<sup>1</sup>Стретт Дж. (лорд Рэлей) Теория звука.-М.: Гостехтеориздат, 1955; пер. с англ. под ред. С.М. Рытова.



Данное пособие написано в традициях Нижегородской (Горьковской) школы теории нелинейных колебаний – школы академика А.А. Андропова. При его написании использовались книги: Горяченко В.Д.[5], Морозова А.Д.[10], Баутина Н.Н. и Леонтович Е.А.[8], Арнольда В.И. [14], а также учебное пособие Морозова А.Д.[9]. По сути, этот курс является курсом по теории колебаний для математиков. Основной упор сделан на изложении математических методов теории нелинейных колебаний. Приведем известное высказывание Лейбница: ”На свете есть вещи поважнее самых прекрасных открытий – это знание метода, которым они были сделаны”.

До настоящего времени в нелинейной динамике (теории колебаний) наиболее популярны и разработаны методы исследования квазилинейных систем. Если же обратиться к неконсервативным системам, близким к нелинейным консервативным, то обнаруживается лишь их частичная освещенность в монографиях. В то же время исследованию различных аспектов в существенно нелинейных системах посвящено большое количество работ. Значительная часть работ посвящена вопросам существования и устойчивости периодических решений, инвариантных торов, существованию нерегулярной динамики и др., и меньшая часть – исследованию глобального поведения решений (как правило, в конкретных системах) и связана в основном с компьютерным (численным) анализом исходных систем. Исследования в этой области восходят к исследованиям Пуанкаре [15], который пытался построить в рамках консервативной модели теорию нелинейных возмущений планетных движений и разработал метод малого параметра. Однако консервативные модели, как правило, неадекватно описывают исходный процесс или явление. Так в небесной механике трудно объяснить эволюцию солнечной планетной системы без учета неконсервативных сил (солнечный ветер, приливные явления, сопротивление среды). Поэтому методам исследования неконсервативных систем, близких к гамильтоновым, в пособии уделяется основное внимание.

В настоящее время важную роль в исследовании динамических систем играют компьютерные методы. Разработаны удобные для пользователей программы, одной из которых является программа WInSet [16], используемая при чтении данного курса.

## 1.2. Понятие и классификация динамических систем

Динамической системой часто называют системы вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad \frac{dx}{dt} = F(x, t) \quad x \in R^n, t \in R. \quad (1.2.1)$$

Следуя, например, [5] можно дать следующую классификацию динамических систем, принятую у механиков и физиков. В зависимости от вида динамические системы можно разделить на три класса:

- системы с сосредоточенными параметрами;
- системы с отклоняющим аргументом;
- системы с распределенными параметрами.

Системы с сосредоточенными параметрами – это системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с единственной независимой переменной – временем  $t$ . В частности, все механические системы с конечным числом степеней свободы – это сосредоточенные системы.

Системы с отклоняющим аргументом также описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, но искомые функции и их производные входят в уравнения при различных значениях аргумента.

Распределенные системы – это системы, описываемые уравнениями в частных производных.

В зависимости от вида правых частей системы (1.2.1) динамическая система может быть как **линейной**, так и **нелинейной**. Кроме этого, если правые части системы (1.2.1) не зависят от  $t$ , то динамическая система называется **автономной**, в противном случае – **неавтономной**.

Далее, в зависимости от характера поведения решений динамические системы разделяются на консервативные, диссипативные, автоколебательные и прочие.

**Консервативные системы** – это системы, в которых сохраняется полная энергия. Консервативные системы описываются, например, системой Гамильтона. Пример – обычный маятник в пренебрежении трением (сопротивлением среды).

**Диссипативные системы** – это системы, в которых любое движение заканчивается в одном из устойчивых состояний равновесия.

**Автоколебательные системы** – это автономные системы, в которых устанавливается один и тот же периодический режим при любых начальных условиях из некоторого множества начальных условий. Пример – часовой механизм.

В теории колебаний выделяют следующие типы колебаний: свободные (собственные), вынужденные, параметрические, автоколебания. Далее мы познакомимся со всеми этими типами колебаний.

**1.2.1. Простейшие примеры задач динамики.** Обратимся к простейшим задачам, приводящим к динамическим системам.

**Задача 1. Грузик на пружине.** Рассмотрим грузик, закрепленный на пружине (см. рис. 1.2.1а). Движение такого грузика при

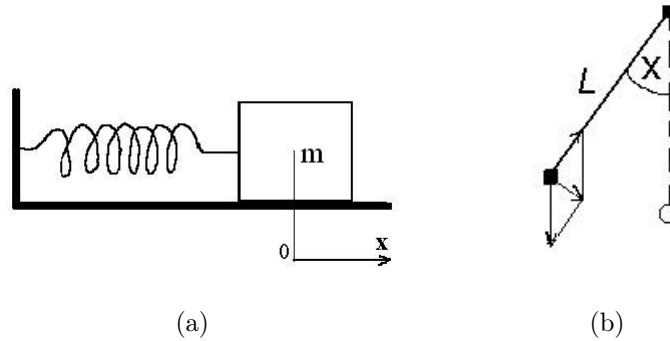


Рис. 1.2.1. Грузик на пружине (а) и маятник (б)

некоторых упрощающих предположениях описывается уравнением (второй закон Ньютона)

$$m\ddot{x} = f_{pr} + f_{tr} \quad (1.2.2)$$

где  $m$  – масса грузика,  $f_{pr} = f(x)$  – сила, которую создает растянутая на величину  $x$  пружина (предполагается, что нерастянутой пружине соответствует  $x = 0$ ), а  $f_{tr}$  – сила трения. При малой величине растяжения пружины имеем  $f_{pr} = -kx$ ,  $k > 0$  ( $k$  называется коэффициентом жесткости пружины). Положим  $f_{tr} = -b\dot{x}$ ,  $b > 0$  и  $m = 1$ . Тогда уравнение движения грузика примет вид

$$\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \quad (1.2.3)$$

**Задача 2. Маятник.** Колебания простого маятника при пренебрежении силой трения описывается уравнением

$$m\ddot{x} + \frac{mg}{L} \sin x = 0, \quad (1.2.4)$$

где  $m$  – масса маятника,  $L$  – длина,  $g$  – ускорение свободного падения, а  $x$  – угол отклонения от положения покоя (рис.1.2.1б). При малых углах отклонения  $\sin x \approx x$ , и мы приходим к линейному уравнению

$$\ddot{x} + \frac{g}{L}x = 0. \quad (1.2.5)$$

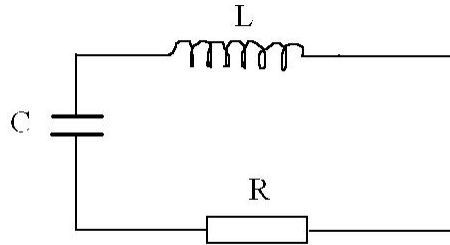


Рис. 1.2.2. Колебательный контур.

Более точная аппроксимация приводит к нелинейному уравнению

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} \left( x - \frac{1}{6} x^3 \right) = 0. \quad (1.2.6)$$

Учет силы трения приводит к уравнению

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} x + \delta \dot{x} = 0 \quad (1.2.7)$$

или к уравнению

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} \left( x - \frac{1}{6} x^3 \right) + \delta \dot{x} = 0, \quad (1.2.8)$$

где  $\delta$  – коэффициент вязкого трения. Заметим, что в задаче 1 также можно получить нелинейное уравнение, выбирая для  $f_{pr}$  более точную аппроксимацию.

**Задача 3. Колебательный контур.** Рассмотрим колебательный контур, представленный на рис. 7.1.1. Если обозначить через  $I = \dot{q}$  ток в контуре ( $q$  – заряд на конденсаторе), то напряжение на сопротивлении равно  $RI$ , на индуктивности –  $L\dot{I}$ , на конденсаторе –  $q/C$ . Так как отсутствуют внешние источники, то по закону Кирхгофа сумма напряжений равна нулю. Отсюда получаем уравнение

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0. \quad (1.2.9)$$

**Задача 4. Пример из макроэкономики.** Обратимся к макроэкономической задаче. Соединение двух таких простых причин, как расходов покупателями определенной доли своих доходов на потребление и сохранение производителями фиксированного отношения между основным капиталом и объемом производства (= реальным доходом), вызывает циклические изменения. Основопологающей предпосылкой такой модели явился макроэкономический подход Кейнса.

Обозначим доход через  $Y$ . Сбережения  $S$  находятся в заданном отношении между основным капиталом  $K$  и доходом, через  $v$  и  $s$  обозначим коэффициенты пропорциональности. Инвестиции, обозначаемые через  $I$ , по определению являются темпами изменения основного капитала. Таким образом,  $I = v(dY/dt)$  и  $S = s(dY/dt)$ . Предположим, что существует адаптивный процесс, при котором доходы возрастают пропорционально разности инвестиций и сбережений, т.е.

$$\dot{Y} \propto (I - S).$$

Предположим также, что

$$\dot{I} \propto v\dot{Y} - I.$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= I - sY \\ \dot{I} &= v\dot{Y} - I \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Дифференцируя первое уравнение системы (1.2.10) по  $t$ , придем к уравнению

$$\ddot{Y} - (v - s - 1)\dot{Y} + sY = 0. \quad (1.2.11)$$

Полученные в задачах 1-4 линейные уравнения можно записать в виде

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega_0^2 y = 0. \quad (1.2.12)$$

Уравнение (1.2.12) описывает свободные колебания линейной системы,  $h$  – коэффициент затухания,  $\omega_0$  – собственная частота системы в отсутствие затухания. При решении этого уравнения следует различать три случая: 1)  $h = 0$ , 2)  $h^2 < \omega_0^2$ , 3)  $h^2 > \omega_0^2$ . В случае 2 имеем

$$y(t) = e^{-ht}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t),$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ . Решение описывает затухающие колебания. Величину  $d = h \frac{2\pi}{\omega}$  в теории колебаний называют логарифмическим декрементом затухания. При  $h = 0$  имеем незатухающие гармонические колебания.

**1.2.2. Определение динамической системы.** Обратимся к математическому определению динамической системы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** Пусть  $(X, d)$  – метрическое пространство с метрикой  $d$  и  $\{f^t\}$  – множество непрерывных преобразований  $X$  в себя, параметризованное индексом  $t$ , который пробегает множество либо целых  $\mathbf{Z}$  (или натуральных  $\mathbf{N}$ ), либо действительных  $\mathbf{R}$  (положительных  $\mathbf{R}^+$ ) чисел. В последнем случае  $f^t$  непрерывно по  $t$  и такое, что  $f^{t_1+t_2} = f^{t_2} \cdot f^{t_1}$  для любых  $t_1, t_2$  (групповое

свойство). Для необратимой динамической системы необходимо заменить  $\mathbf{Z}$  на  $\mathbf{Z}^+ = \{n \in \mathbf{Z} : n \geq 0\}$  и  $\mathbf{R}$  на  $\mathbf{R}^+ = \{t \in \mathbf{R} : t \geq 0\}$ . Преобразование  $f^t$  называется отображением сдвига,  $X$  – фазовым пространством, а  $\{f^t\}$  – динамической системой. Если множество  $\{t\}$  непрерывно (дискретно), то  $\{f^t\}$  называется динамической системой с непрерывным (дискретным) временем. Иногда динамические системы с непрерывным временем называют потоками, а с дискретным – каскадами. Образ начальной точки при сдвигах на все (положительные) времена называется фазовой кривой или траекторией (положительной полутраекторией) динамической системы.

Обратимся снова к динамической системе, представляемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, \quad t \in R. \quad (1.2.13)$$

Здесь множество преобразований  $\{f^t\}$  пространства  $R^n$  определяется решением системы (1.2.13). **Фазовым пространством** системы (1.2.13) является пространство  $R^n$  (или некоторая область из  $R^n$ , если правые части определены не во всем пространстве  $R^n$ ). Точки фазового пространства называются **фазовыми точками**. При изменении  $t$  фазовая точка описывает некоторую кривую в фазовом пространстве, которую называют **фазовой кривой**. Фазовая кривая может состоять из одной точки. Такие фазовые кривые называют **состояниями равновесия** (или точками покоя).

Отметим, что уравнение (1.2.12) можно представить в виде системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -2hx_2 - \omega_0^2 x_1.$$

В этом случае  $n = 2$  и фазовым пространством является плоскость  $R^2$ . В механических задачах 1 и 2 переменные  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$  определяют состояние системы. Поэтому их называют фазовыми переменными. Отсюда и пошел термин "фазовое пространство".

В силу определения для состояний равновесия выполняется условие  $\dot{x} = 0$ . Поэтому координаты состояния равновесия находятся из системы

$$F(x) = 0. \quad (1.2.14)$$

Пусть  $x^0 = 0$  – состояние равновесия (вещественный корень системы). Тип состояния равновесия определяют корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (1.2.15)$$

где  $A$  – матрица Якоби ( $A = (a_{ij})$ ,  $a_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ ,  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ) вычислена в точке  $x^0 = 0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.** *Состояние равновесия  $x = x^0$  системы (1.2.13) будем называть простым (грубым), если  $Re\lambda_j \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .*

Простому состоянию равновесия будем приписывать тип  $(m, k)$ , если  $Re\lambda_j < 0$ ,  $j = 1, \dots, m$  и  $Re\lambda_i > 0$ ,  $i = m + 1, \dots, m + k = n$ .

В этом случае систему (1.2.13) с помощью невырожденного линейного преобразования можно привести к виду

$$\dot{u} = A^+ u + f(u, v), \quad \dot{v} = A^- v + g(u, v), \quad (1.2.16)$$

где  $u, v$  – векторы размерности  $m$  и  $k$  соответственно,  $f(0, 0) = 0$ ,  $g(0, 0) = 0$ .

Если  $m = n$  ( $m = 0$ ), состояние равновесия называется устойчивым (неустойчивым) узлом. Устойчивые состояния равновесия называют иногда аттракторами.

При  $m \neq n$ ,  $m \neq 0$  состояние равновесия называется седлом.

Состояния равновесия относятся к простейшим аттракторам. Оказывается, в многомерных динамических системах наряду с простыми аттракторами (точка, замкнутая фазовая кривая, двумерный тор и т. д.) могут существовать и сложные – нерегулярные аттракторы (притягивающие множества). Примером сложного аттрактора является множество Кантора. Такие аттракторы называют "странными аттракторами". Наиболее простыми системами, в которых существуют странные аттракторы являются трехмерные системы (системы Лоренца, Реслера, Чуа и др.).

В классе дискретных систем наиболее простой по виду системой со сложной динамикой является одномерное отображение (logistic map)

$$x_{j+1} = ax_j(1 - x_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad 0 < a \leq 4, \quad (1.2.17)$$

а также комплексное отображение Жулиа

$$z_{j+1} = z_j^2 + c, \quad z = x + iy, c = a + ib \quad (1.2.18)$$

### 1.3. Устойчивость состояния равновесия. Второй метод Ляпунова

Следуя [1] рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2.13):

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in R^n, \quad F = (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (1.3.1)$$

Пусть  $x = 0$  является состоянием равновесия этой системы. Тогда  $x = 0$  является тривиальным решением системы (1.3.1).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.** *Решение  $x = 0$  системы (1.3.1) называется устойчивым (по Ляпунову), если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для любого  $x(t)$ , для которого  $\|x(t_0)\| < \delta$  имеем  $\|x(t)\| < \varepsilon$  при любых  $t > t_0$ .*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.** *Решение  $x = 0$  системы (1.3.1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и существует  $\delta > 0$  такое, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ .*

При решении вопроса об устойчивости состояния равновесия (тривиального решения) системы (1.3.1) используют:

- 1) второй (прямой) метод Ляпунова;
- 2) устойчивость по линейному приближению;
- 3) частотную теорию абсолютной устойчивости нелинейных регулируемых систем.

Далее рассмотрим 1) и 2). Начнем с прямого метода Ляпунова.

Рассмотрим систему (1.3.1), для которой в области  $\|x\| < A$ , где  $A$  – некоторая положительная константа, выполняются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Предположим также, что  $F(0) = 0$ .

Введем в рассмотрение функцию  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которая в области  $\|x\| \leq a < A$  обладает свойствами:

- $V$  однозначная функция;
- $\partial V / \partial x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , непрерывные;
- $V(0, 0, \dots, 0) = 0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5.** *Функция  $V(x)$ , удовлетворяющая указанным условиям, называется знакоопределенной в области  $\|x\| \leq a < A$  (положительно или отрицательно определенной), если в этой области она принимает значения только одного знака и обращается в нуль только в точке  $x = 0$ .*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.** *Функция  $V(x)$ , удовлетворяющая указанным условиям, называется знакопостоянной в области  $\|x\| \leq a < A$ , если в этой области она принимает значения только одного знака, причем условие  $V = 0$  может выполняться и при  $x \neq 0$ .*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7.** *Функция  $V(x)$  называется знакопеременной, если она не является знакоопределенной или знакопостоянной.*



$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i$$

**ТЕОРЕМА 1.1** (Первая теорема Ляпунова). *Если для системы (1.3.1) можно найти знакоопределенную функцию  $V(x)$ , производная которой по времени, составленная в силу системы (1.3.1) есть функция знакопостоянная, знака, противоположного с  $V$  или тождественно равна нулю, то нулевое решение системы (1.3.1) устойчиво.*

**ТЕОРЕМА 1.2** (Вторая теорема Ляпунова). *Если для системы (1.3.1) можно найти знакоопределенную функцию  $V(x)$ , производная которой по времени, составленная в силу системы (1.3.1) есть функция знакоопределенная, знака, противоположного с  $V$ , то нулевое решение системы (1.3.1) асимптотически устойчиво.*

Функция  $V(x)$  называется функцией Ляпунова.

**Упражнения.** Исследовать с помощью функции Ляпунова устойчивость нулевого решения систем:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \dot{x} = x^3 - y, \quad \dot{y} = x + y^3 \\ 2) \quad & \dot{x} = 2y^3 - x^5, \quad \dot{y} = -x - y^3 + y^5. \end{aligned}$$

**1.3.1. Устойчивость по линейному приближению.** Систему (1.3.1) в окрестности состояния равновесия  $x = (0, 0, \dots, 0)$  можно представить в виде

$$\dot{x}_i = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right)_0 x_1 + \dots + \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right)_0 x_n + O(\|x\|^2), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3.2)$$

где производные  $(\partial f_i / \partial x_j)_0$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  вычислены в точке  $(0, 0, \dots, 0)$ . Пренебрегая в (1.3.2) нелинейными членами, получим линейную систему

$$\dot{x}_i = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right)_0 x_1 + \dots + \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right)_0 x_n, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.3.3)$$

Уравнение

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.3.4)$$

называется характеристическим уравнением линеаризованной системы (1.3.3). Здесь обозначено  $a_{ij} = (\partial f_i / \partial x_j)_0$ .

Справедливы следующие теоремы

**ТЕОРЕМА 1.3.** Если  $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то состояние равновесия  $x = 0$  системы  $\dot{x} = F(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  асимптотически устойчиво.

**ТЕОРЕМА 1.4.** Если среди корней  $\operatorname{Re}\lambda_i$  имеется хотя бы один  $\lambda_j$ , для которого  $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ , то состояние равновесия  $x = 0$  неустойчиво.

Для доказательства этих теорем достаточно выписать решение линейной системы (1.3.3). Если среди корней  $\operatorname{Re}\lambda_i$  существуют корни  $\lambda_j$  с  $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ , то вопрос об устойчивости состояния равновесия  $x = 0$  решается нелинейными членами. В этом случае можно воспользоваться вторым методом Ляпунова.

**1.3.2. Критерий Гурвица.** Запишем характеристическое уравнение (1.3.4) в виде

$$D(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (1.3.5)$$

Пусть  $a_0 > 0$ . Обозначим

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix} = a_n \Delta_{n-1},$$

где  $a_k = 0$  при  $k > n$ .

**ТЕОРЕМА 1.5 (критерий Гурвица).** Для того, чтобы все корни характеристического уравнения  $D(\lambda) = 0$  имели отрицательные реальные части необходимо и достаточно, чтобы  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n > 0$ .

*Примеры.*

1)  $n = 2$       $D(\lambda) \equiv a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1a_2 > 0 \rightarrow a_2 > 0.$

2)  $n = 3, \quad a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 - a_0a_3 > 0$

Критерий Гурвица не удобен для больших  $n$ . Более удобным является метод  $D$ -разбиений, разработанный учеником А.А. Андропова Ю.И. Неймарком (см. [17]).



## Методы качественной теории и бифуркации двумерных динамических систем

### 2.1. Качественные методы двумерных динамических систем

#### 2.1.1. Основные понятия. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

где  $(x, y) \in D$ ,  $D \subset R^2$ , либо  $D \subset R^1 \times S^1$ , либо  $D \subset S^1 \times S^1$ ;  $P, Q \in C_D^m$ ,  $m \geq 1$  или аналитические.

В данном случае пространство переменных  $x, y$  называется **фазовым пространством**. Точки фазового пространства называются **фазовыми точками**. Если не оговорено противное, под фазовым пространством будем понимать плоскость.

Правые части системы (2.1.1) определяют на фазовой плоскости **векторное поле** (векторное поле фазовой скорости).

Решение системы (2.1.1)  $x(t), y(t)$  определяет движение фазовой точки на фазовой плоскости. При изменении  $t$  фазовая точка вычерчивает на фазовой плоскости некоторую кривую, которую называют **фазовой кривой**. Фазовые кривые с отмеченным направлением движения иногда называют траекториями.

Допустим, что мы качественно определили основные фазовые кривые в области  $D$  (фазовый портрет). Можно ли по правым частям системы (2.1.1) не интегрируя ее построить фазовый портрет системы? Во многих случаях ответ на этот вопрос положительный.

Этот вопрос – основной вопрос качественной теории динамических систем.

При всевозможных топологических отображениях (гомеоморфизмах) плоскости вид фазовых кривых может сильно изменяться. Однако некоторые черты разбиения на траектории остаются неизменными или, иначе, **топологически инвариантными**. Уточним понятие качественной картины фазовых кривых, а в другой терминологии, **топологической структуры разбиения на траектории**.

### 2.1.2. Особые траектории и ячейки динамических систем.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** Две топологические структуры или, что то же, две качественные картины разбиения фазовой плоскости на траектории, заданные двумя системами вида (2.1.1), называются тождественными, если существует топологическое (т.е. взаимно однозначное и непрерывное) отображение плоскости в себя, при котором фазовые кривые одной системы отображаются в фазовые кривые другой системы (при этом фазовая кривая отображается в фазовую кривую как при прямом, так и при обратном отображении).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.** Говорят, что траектория  $L$   $\omega$ -орбитно устойчива в точке  $M$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$ , что для любой траектории, проходящей при  $t = \tau$  через какую-либо точку  $M'$  окрестности  $U_\delta(M)$ , положительная полутраектория  $L_M^+$  (соответствующая значениям  $t > \tau$ ) лежит целиком в  $\varepsilon$ -окрестности полутраектории  $L_M^+$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.** Траектория  $L$  (с ограниченной положительной полутраекторией) называется  $\omega$ -орбитно устойчивой или орбитно устойчивой при  $t \rightarrow \infty$ , если она  $\omega$ -орбитно устойчива в любой точке.

**ЛЕММА 2.1.** Если траектория  $L$   $\omega$ -орбитно устойчива хотя бы в одной точке, то она  $\omega$ -орбитно устойчива в любой другой своей точке, т.е. она  $\omega$ -орбитно устойчива.

Аналогично определяется  $\alpha$ -орбитно устойчивость ( $t \rightarrow -\infty$ ).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.** Траектория, не являющаяся  $\omega(\alpha)$ -орбитно устойчивой, называется  $\omega(\alpha)$ -орбитно неустойчивой или **особой**.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5.** Ограниченная траектория называется орбитно устойчивой или неособой, если она и  $\omega$  и  $\alpha$ -орбитно устойчива.

При топологическом отображении орбитно устойчивые траектории переходят в орбитно устойчивые. Особые траектории, а также дуги и полутраектории, характеризующие границу, называются особыми элементами. Особые элементы разделяют фазовую плоскость на конечное число областей, которые называются **ячейками**.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6.** Ячейкой называется максимальное связанное множество, состоящее из орбитно устойчивых траекторий.

### 2.1.3. Классификация простых состояний равновесия.

Фазовая кривая может состоять из одной точки. Такие точки называют состояниями равновесия или точками покоя. Очевидно, состояния равновесия определяются из условия  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ . Поэтому согласно (2.1.1) координаты состояний равновесия находятся как вещественные корни системы

$$P(x, y) = 0 \quad Q(x, y) = 0. \quad (2.1.2)$$

Пусть  $(x_0, y_0)$  – изолированное состояние равновесия. Так как с помощью линейного преобразования  $x - x_0 \rightarrow x, y - y_0 \rightarrow y$ , можно перенести начало координат в состояние равновесия, то положим  $x_0 = y_0 = 0$ . Обозначим

$$\sigma = P'_x(0, 0) + Q'_y(0, 0), \quad \Delta = \begin{vmatrix} P'_x(0, 0) & P'_y(0, 0) \\ Q'_x(0, 0) & Q'_y(0, 0) \end{vmatrix} \quad (2.1.3)$$

и рассмотрим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0. \quad (2.1.4)$$

Состояние равновесия  $O(0, 0)$  называется **простым**, если  $\Delta \neq 0$ .

Из характеристического уравнения (2.1.4) находим

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2} \quad (2.1.5)$$

При  $Re\lambda_{1,2} \neq 0$  анализ поведения фазовых кривых в окрестности простого состояния равновесия определяется линеаризованной в окрестности этого состояния равновесия системой.

*Случай 1.*  $\lambda_{1,2}$  вещественные одного знака. В этом случае поведение фазовых кривых показано на рис. 1. Такое состояние равновесия называется **узлом**.

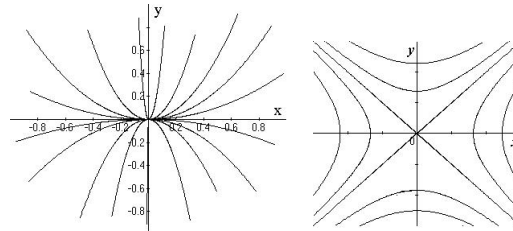


Рис. 1

Рис. 2

В случае вещественных  $\lambda_{1,2}$  линеаризованная в окрестности состояния равновесия система с помощью неособой линейной замены координат приводится к виду

$$\dot{X} = \lambda_1 X, \quad \dot{Y} = \lambda_2 Y \quad (2.1.6)$$

В случае  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  интегрирование (2.1.6) дает

$$\frac{Y}{X^{\lambda_2/\lambda_1}} = const. \quad (2.1.7)$$

В случае  $\lambda_1 = \lambda_2$  линеаризованная система приводится к виду

$$\dot{X} = \lambda_1 X, \quad \dot{Y} = \lambda_2 Y + \mu X. \quad (2.1.8)$$

При  $\mu = 0$  имеем дикритический узел, а при  $\mu \neq 0$  – вырожденный узел.

*Случай 2.*  $\lambda_{1,2}$  вещественные разных знаков,  $\lambda_1 \lambda_2 < 0 \rightarrow$

$$Y X^{|\lambda_2/\lambda_1|} = const \quad (2.1.9)$$

Такое состояние равновесия называется **седлом** (рис.2).

*Случай 3.*  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ,  $\alpha \neq 0$  (рис.3). Такое состояние равновесия называется **фокусом**. В этом случае линеаризованная система приводится к виду

$$\dot{X} = \alpha X - \beta Y, \quad \dot{Y} = \beta X + \alpha Y. \quad (2.1.10)$$

*Случай 4.*  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$  (рис.4). Такое состояние равновесия называется **центром**.

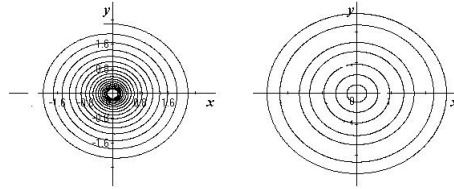
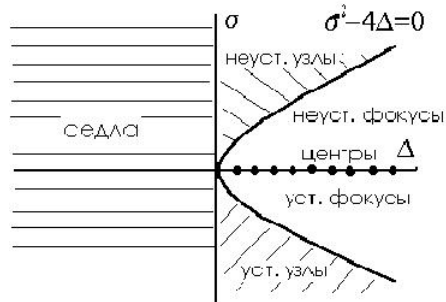


Рис. 3

Рис. 4

При  $\Delta < 0$  имеем седловую точку. При  $\sigma = 0$  и  $\Delta > 0$  получаем состояние равновесия типа центр. При  $\sigma < 0$  и  $\Delta > 0$  состояние равновесия асимптотически устойчиво и является либо устойчивым узлом, либо устойчивым фокусом. Наконец, при  $\sigma > 0$  и  $\Delta > 0$  состояние равновесия неустойчиво (узел или фокус).



**2.1.4. Направления стремления фазовых кривых к простому состоянию равновесия.** Запишем систему (2.1.1) в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + F(x, y) \\ \dot{y} &= cx + dy + R(x, y),\end{aligned}\tag{2.1.11}$$

где  $a = P'_x(0, 0)$ ,  $b = P'_y(0, 0)$ ,  $c = Q'_x(0, 0)$ ,  $d = Q'_y(0, 0)$ , а разложения функций  $F, R$  начинается с квадратичных членов. Предположим, что простое состояние равновесия  $(0, 0)$  не центр, так что существует полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия при  $t \rightarrow \infty$  или при  $t \rightarrow -\infty$ . При этом угловой коэффициент  $k$  удовлетворяет соотношению  $k = \frac{c+dk}{a+bk}$ . Отсюда получаем уравнение

$$bk^2 + (a - d)k - c = 0\tag{2.1.12}$$

При этом, если  $b = 0$ , то одним из корней этого уравнения считается  $\infty$ . Дискриминант уравнения (2.1.12) совпадает с дискриминантом характеристического уравнения (2.1.4). Поэтому в случае отрицательного дискриминанта, т.е. в случае фокуса не существует направлений стремления траекторий к состоянию равновесия.

### 2.1.5. Сложные состояния равновесия.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7.** *Изолированное состояние равновесия  $(0, 0)$  системы  $\dot{x} = P(x, y)$ ,  $\dot{y} = Q(x, y)$  называется сложным, если  $\Delta = 0$ .*

Возможны два случая: 1)  $\sigma \neq 0$ ; 2)  $\sigma = 0$ .

**Случай 1.** Система (2.1.1) приводится к виду

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P_2(x, y) \\ \dot{y} &= y + Q_2(x, y).\end{aligned}\tag{2.1.13}$$

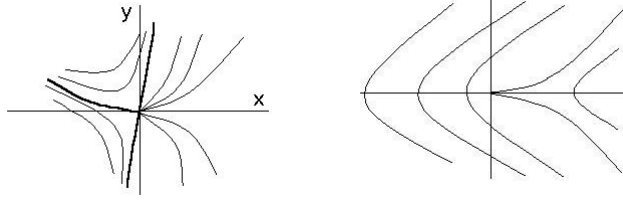
Из условия  $y + Q_2(x, y) = 0$  находим  $y = \varphi(x)$ . Раскладывая функцию  $\psi \equiv P_2(x, \varphi(x))$  в окрестности точки  $x = 0$  в степенной ряд, получим

$$\psi(x) = \Delta_m x^m + O(x^{m+1}), \quad \Delta_m \neq 0, \quad m \geq 2.$$

При  $m$  четном состояние равновесия  $O(0, 0)$  седло-узел (рис. (а)).

При  $m$  нечетном состояние равновесия  $(0, 0)$  "топологический узел", если  $\Delta_m > 0$  и – "топологическое седло", если  $\Delta_m < 0$ .





(a) седло-узел

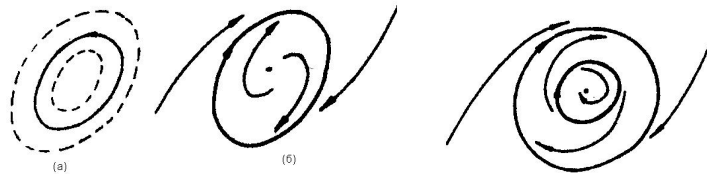
(b) вырожденное с. р.

**Случай 2.** При  $\sigma = 0$  оба корня характеристического уравнения (2.1.4) равны нулю. В этом случае состояние равновесия является "вырожденным" и поведение фазовых кривых в его окрестности может иметь, например, вид, представленный на рис. (b).

### 2.1.6. Предельные циклы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8.** *Замкнутая изолированная фазовая кривая называется предельным циклом.*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9.** *Предельный цикл называется орбитно устойчивым, если существует такая его окрестность, что все траектории, начинающиеся в этой окрестности, неограниченно приближаются (при  $t \rightarrow \infty$ ) к предельному циклу (см. рисунок ниже).*



Выражение

$$h = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [P'_x(\varphi(s), \psi(s)) + Q'_y(\varphi(s), \psi(s))] ds$$

называется **характеристическим показателем предельного цикла**. Здесь  $\varphi(t), \psi(t)$  – периодическое решение на цикле с периодом  $\tau$ .

Предельный цикл называется сложным, если  $h = 0$ .

### Критерии отсутствия замкнутых фазовых кривых.

**ТЕОРЕМА 2.1** (Критерий Дюлака для односвязной области). Пусть  $F(x, y)$  – непрерывная вместе с первыми производными функция. Пусть в некоторой области  $G$  на фазовой плоскости

аналитической системы (2.1.1) выражение

$$\frac{\partial(FP)}{\partial x} + \frac{\partial(FQ)}{\partial y}$$

не меняет знака и не равно тождественно нулю. Тогда в этой области не существует замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий.

**ТЕОРЕМА 2.2** (Критерий Бендиксона). Пусть

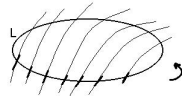
$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \neq 0$$

в области  $G$  ( $G \subset D$ ). Тогда в  $G$  не существует простых замкнутых кривых, состоящих из фазовых кривых системы и, в частности, предельных циклов.

Проблема существования предельных циклов является одной из основных проблем (вообще говоря, не решенных) качественной теории двумерных динамических систем (2.1.1). Далее мы рассмотрим вопрос рождения предельных циклов для некоторых классов двумерных динамических систем.

**2.1.7. Индексы Пуанкаре.** Введенные Пуанкаре индексы позволяют контролировать совместное сосуществование состояний равновесия разных типов и предельных циклов.

Полное приращение угла поворота вектора при обходе простой замкнутой кривой  $L$  составит  $2\pi j$ , где  $j$  – целое число. Число  $j$  не зависит от формы кривой  $L$  и называется индексом замкнутой кривой по отношению к заданному векторному полю.



$$j = \frac{1}{2\pi} \oint_L d \left( \arctg \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \right) = \frac{1}{2\pi} \oint_L \frac{PdQ(x, y) - QdP}{P^2 + Q^2} \quad (2.1.14)$$

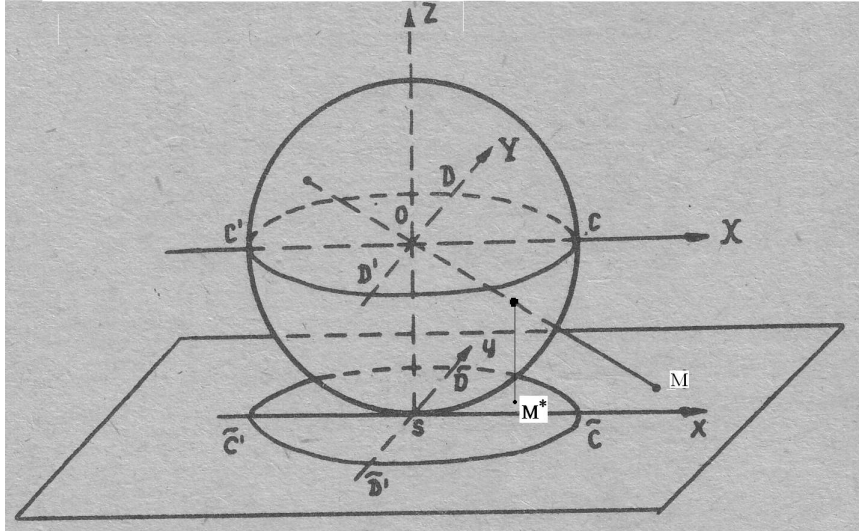
**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10.** Назовем индексом состояния равновесия (особой точки векторного поля) индекс простой замкнутой кривой, охватывающей только это состояние равновесия.

Индекс узла, фокуса и центра равен  $+1$  ( $j = +1$ ). Индекс седла равен  $-1$  ( $j = -1$ ). Индексы сложных особых точек могут быть отличными от  $\pm 1$ . Например, индекс седло-узла равен нулю ( $j = 0$ ). Индекс замкнутой фазовой кривой равен  $+1$ .

**ТЕОРЕМА 2.3 (Следствие 1).** *Внутри замкнутой фазовой кривой находится по крайней мере одно состояние равновесия.*

**ТЕОРЕМА 2.4 (Следствие 2).** *Если внутри замкнутой фазовой кривой находится несколько простых состояний равновесия, то число их всегда нечетное, причем число седел на единицу меньше числа остальных особых точек.*

**2.1.8. Поведение на бесконечности.** Рассмотрим систему  $\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$  и предположим, что  $P$  и  $Q$  многочлены степени  $n$ . Перейдем от рассмотрения этой системы на фазовой плоскости к рассмотрению в "круге Пуанкаре" (см. рисунок).



Преобразование

$$x = 1/z, \quad y = u/z \quad (2.1.15)$$

позволяет изучить особые точки, лежащие на экваторе сферы Пуанкаре, за исключением тех точек, которые соответствуют концам оси  $y$ . Для исследования этих "концов" используют преобразование

$$x = v/z, \quad y = 1/z. \quad (2.1.16)$$

Преобразования (2.1.15), (2.1.16) называют преобразованиями Пуанкаре. Бесконечно удаленным точкам плоскости  $x, y$  отвечает значение  $z = 0$ .

Преобразование (2.1.15) приводит к системе

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -uzP(1/z, u/z) + zQ(1/z, u/z) \\ \dot{z} &= -z^2P(1/z, u/z). \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Приводя правые части системы (2.1.20) к общему знаменателю, получим

$$\begin{aligned}\dot{u} &= P_*(u, z)/z^n \\ \dot{z} &= Q_*(u, z)/z^n.\end{aligned}\tag{2.1.18}$$

Делая в этой системе замену времени  $t = z^n \tau$  придем к системе

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= P_*(u, z) \\ \frac{dz}{d\tau} &= Q_*(u, z).\end{aligned}\tag{2.1.19}$$

Если  $z \neq 0$ , то фазовые кривые систем (2.1.18) и (2.1.19) совпадают. При этом направление движения на фазовых кривых не меняется, если  $n$  четное, и меняется на противоположное, если  $n$  нечетное. Все состояния равновесия на экваторе (за исключением состояний равновесия, соответствующих "концам" оси  $y$ ), определяются из уравнений  $P_*(u, 0) = 0, Q_*(u, 0) = 0$ .

Рассмотрим окрестности точек экватора, соответствующих бесконечно удаленным концам оси  $y$ . Применяя преобразование (2.1.16) к системе  $\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$ , получим

$$\begin{aligned}\dot{u} &= zP(v/z, 1/z) - zvQ(v/z, 1/z) \\ \dot{z} &= -z^2P(v/z, 1/z).\end{aligned}\tag{2.1.20}$$

Далее можно поступить аналогично предыдущему случаю.

Исследование преобразованных систем позволяет установить поведение решений исходной системы на бесконечности (подробнее см., например, [5]).

**2.1.9. Упражнения.** Исследуйте на бесконечности поведение фазовых кривых системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(3 - x - 2y) \\ \dot{y} &= y(-1 + x + y).\end{aligned}\tag{2.1.21}$$

Постройте фазовые портреты для следующих динамических систем:

(1)

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + x^2 + 0.5y.$$

(2)

$$\dot{x} = 2xy, \quad \dot{y} = 1 + y + y^2 - x^2.$$

(3)

$$\dot{x} = x(3 - x - 2y), \quad \dot{y} = y(-1 + x + y).$$

(4)

$$\dot{x} = 2x(1 + x^2 - 2y^2), \quad \dot{y} = -y(1 - 4x^2 + 3y^3).$$

(5)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x[(x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 - 1) - 4y^2] \\ \dot{y} &= y[(x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 - 1) + 4x^2]. \end{aligned}$$

## 2.2. Бифуркации двумерных динамических систем

Грубость (структурная устойчивость) динамической системы можно рассматривать как нечувствительность качественной картины фазовых кривых по отношению к малым изменениям правых частей системы. Строгое определение грубости впервые было дано в 30-х годах XX века А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.11.** *Динамическая система  $\dot{x} = P(x, y)$ ,  $\dot{y} = Q(x, y)$  называется грубой в некоторой замкнутой области  $G$ , если существует такое достаточно малое число  $\varepsilon$ , что все динамические системы  $\dot{x} = P(x, y) + p(x, y)$ ,  $\dot{y} = Q(x, y) + q(x, y)$ , в которых аналитические функции  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$  удовлетворяют в  $G$  неравенству*

$$\max |p| + \max |q| + \max |p'_x| + \max |p'_y| + \max |q'_x| + \max |q'_y| < \varepsilon$$

имеют одинаковую качественную картину фазовых кривых.

Строго установлены необходимые и достаточные условия грубости двумерных динамических систем на плоскости:

- отсутствие сложных состояний равновесия, а также простых состояний равновесия с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения;
- отсутствие сложных предельных циклов, для которых характеристический показатель равен нулю;
- отсутствие сепаратрис, идущих из седла в седло.

Нарушение какого-либо условия грубости связано с бифуркацией динамической системы. Бифуркации удобно рассмотреть на примере систем, зависящих от параметров

$$\dot{x} = P(x, y, \alpha), \quad \dot{y} = Q(x, y, \alpha), \quad (2.2.1)$$

где  $\alpha$  – параметр или совокупность параметров.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12.** *Значение  $\alpha = \alpha_0$  будем называть бифуркационным значением параметра, если при сколь угодно близких к  $\alpha_0$  значениях  $\alpha < \alpha_0$  и  $\alpha > \alpha_0$  фазовые портреты системы (2.2.1) качественно различны.*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13.** *Изменение качественной структуры фазового портрета при переходе через бифуркационное значение параметра будем называть **бифуркацией**.*

В системах вида (2.2.1) с аналитическими правыми частями качественная картина поведения фазовых кривых определяется особыми траекториями, к которым относятся: 1) состояния равновесия; 2) предельные циклы; 3) незамкнутые траектории, у которых хотя бы одна полутраектория является сепаратрисой какого-нибудь состояния равновесия типа седло. Поэтому бифуркации характеризуются рождением или исчезновением состояний равновесия, сменой их типов, рождением или исчезновением предельных циклов, изменением в расположении сепаратрис.

**Упражнение.** Найдите бифуркационные значения параметра  $\delta$  для системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + x^2 + \delta y.$$

Бифуркации, связанные с рождением предельных циклов рассматриваются в гл. 4. Методы теории бифуркаций многомерных систем выходят за пределы данного учебного пособия. Им посвящена книга [11](Часть II).



## Консервативные интегрируемые системы

### 3.1. Системы с одной степенью свободы

**3.1.1. Основные понятия и результаты.** Системой с одной степенью свободы обычно называют систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad \dot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (3.1.1)$$

Уравнение (3.1.1) называют также уравнением Ньютона. В случае нелинейной функции  $f(x)$  уравнение (3.1.1) называют иногда нелинейным осциллятором. Если не оговорено противного, предполагаем аналитичность  $f(x)$  на рассматриваемом интервале. Уравнение (3.1.1) допускает первый интеграл (интеграл энергии)

$$\frac{(\dot{x})^2}{2} + U(x) = h, \quad (3.1.2)$$

где  $U(x) = \int f(x)dx$  – потенциальная энергия системы, а  $T = \frac{(\dot{x})^2}{2}$  – кинетическая энергия. Полной энергией системы является сумма  $T + U$ . В силу (3.1.2)  $T + U = h = \text{const}$ , что доказывает закон сохранения энергии: полная энергия, движущейся в силу уравнения (3.1.1) материальной точки, сохраняется.

Уравнение (3.1.1) эквивалентно системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x), \quad (3.1.3)$$

которая является частным случаем рассмотренных ранее двумерных динамических систем. Состояния равновесия лежат на оси  $x$ . Уравнение  $f(x) = 0$  определяет координату  $x_0$  состояния равновесия. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + f'(x_0) = 0 \quad (3.1.4)$$

и, следовательно,

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-f'(x_0)}. \quad (3.1.5)$$

Поэтому при  $f'(x_0) > 0$  состояние равновесия  $(x_0, 0)$  типа центр, а при  $f'(x_0) < 0$  – седло.



### 3.1.2. Теорема Лагранжа-Дирихле и обратная теорема Ляпунова.

ТЕОРЕМА 3.1. В системе  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -f(x)$  с аналитической функцией  $f(x)$  могут существовать простые состояния равновесия лишь двух типов: седла, центры.

Вводя в рассмотрение потенциальную функцию  $U(x)$  находим

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-d^2U(x_0)/dx^2}. \quad (3.1.6)$$

Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 3.2. (Лагранжа-Дирихле.) Если в состоянии равновесия потенциальная энергия есть минимум, то состояние равновесия устойчиво (по Ляпунову).

ТЕОРЕМА 3.3. (Обратная теорема Ляпунова.) Если в состоянии равновесия потенциальная энергия не есть минимум, то состояние равновесия неустойчиво.

Обратимся к примерам.

Пример 1:  $f(x) = -x + x^2$ . В этом случае система  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = x - x^2$  имеет два состояния равновесия:  $O_1(0, 0)$  – седло и  $O_2(1, 0)$  – центр. Для  $h \in (-1/6, 0)$  имеется ячейка, заполненная замкнутыми фазовыми кривыми  $y^2/2 - x^2/2 + x^3/3 = h$ .

Пример 2 (уравнение математического маятника):  $f(x) = \sin x$ . В этом случае фазовым пространством является цилиндр ( $x \bmod 2\pi, y$ ). Существуют два состояния равновесия:  $O_1(0, 0)$  – центр и  $O_2(\pi, 0)$  – седло. Для  $h \in (-1, 1)$  фазовые кривые  $y^2/2 - \cos x = h$  не охватывают фазовый цилиндр, а при  $h > 1$  – охватывают.

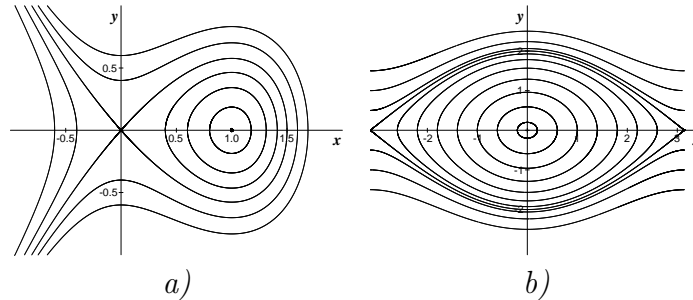


Рис. 3.1.1. Фазовый портрет уравнения  $\ddot{x} - x + x^2 = 0$  (a) и уравнения  $\ddot{x} + \sin x = 0$  (b).

**3.1.3. Построение решений систем с одной степенью свободы.** Из интеграла (3.1.2) находим

$$t \pm \int \frac{dx}{\sqrt{2(h - U(x))}} = C = \text{const} \quad (3.1.7)$$

Отсюда вытекает интегрируемость уравнений с одной степенью свободы (3.1.1). Однако, для построения решения  $x(t)$  необходимо обратить интеграл в (3.1.7). Обращение этого интеграла удастся лишь в немногих случаях (например, в случае линейной функции  $f(x)$ ). В случае, когда  $f(x)$  полином степени не выше 4, интеграл в (3.1.7) выражается через эллиптические интегралы, а его обращение приводит к эллиптическим функциям.

**3.1.4. Эллиптические интегралы.** Прежде всего напомним определение эллиптических интегралов. Следующие интегралы

$$\int_0^{\sin \varphi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}}, \quad \int_0^{\sin \varphi} \sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)} d\xi$$

или, что то же в тригонометрической форме

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \quad (3.1.8)$$

называются неполными эллиптическими интегралами 1-го и 2-го рода соответственно в нормальной форме Лежандра. Число  $k$  называется модулем эллиптических интегралов. Если  $\varphi = \pi/2$ , то получаем полные эллиптические интегралы соответственно 1-го и 2-го рода:

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad \mathbf{E}(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi. \quad (3.1.9)$$

Общим эллиптическим интегралом называется интеграл вида  $\int R(z, w) dz$ , где  $R$  – рациональная функция своих аргументов;  $w^2 = P(z)$ ,  $P(z)$  – полином 3-ей или 4-ой степени. Введем в рассмотрение эллиптический интеграл 3-го рода

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{(1 + n \sin^2 \psi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},$$

где  $n$  – параметр. Справедлива следующая

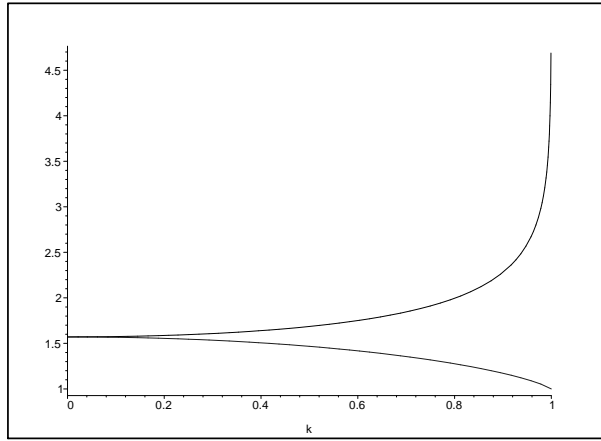


Рис. 3.1.2. Зависимости  $\mathbf{K}(k)$  (верхний график) и  $\mathbf{E}(k)$  (нижний график).

**ТЕОРЕМА 3.4.** *Всякий общий эллиптический интеграл может быть представлен как линейная комбинация элементарных функций и эллиптических интегралов 1-го, 2-го и 3-го родов в нормальной форме Лежандра. Для действительных эллиптических интегралов это представление можно произвести так, что модуль  $k \in [0, 1]$  и действителен,  $n$  – действительно,  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .*

Формулы приведения можно найти, например, в справочнике [18].

### 3.1.5. Эллиптические функции. 1. Амплитуда Якоби $\text{am}(u, k)$ .

Если  $u = F(\varphi, k)$  – неполный интеграл 1-го рода, то  $\varphi$  называется **амплитудой  $u$**  и обозначается  $\varphi = \text{am}(u, k)$ ; она является бесконечнозначной периодической (с комплексным периодом) функцией от  $u$  и обладает свойствами:  $\text{am}(u + 2\mathbf{K}, k) = \text{am}(u, k) + \pi$ ,  $\text{am}(-u, k) = -\text{am}(u, k)$ .

2. **Функции Якоби  $\text{sn}(u)$ ,  $\text{cn}(u)$ ,  $\text{dn}(u)$**  получаются посредством формул

$$\left. \begin{aligned} \text{sn}(u, k) &= \sin(\varphi) = \sin(\text{am}(u, k)) \\ \text{cn}(u, k) &= \cos(\varphi) = \cos(\text{am}(u, k)) \\ \text{dn}^2(u, k) &= 1 - k^2 \text{sn}^2(u, k) \end{aligned} \right\}. \quad (3.1.10)$$

Вещественные периоды этих функций соответственно равны  $4\mathbf{K}$ ,  $4\mathbf{K}$ ,  $2\mathbf{K}$ .

Далее нам понадобятся следующие частные значения этих функций:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u) &= \sin(u), \quad \operatorname{cn}(u) = \cos(u) && \text{при } k = 0 \\ \operatorname{sn}(u) &= \operatorname{th}(u), \quad \operatorname{cn}(u) = \operatorname{dn}(u) = \frac{1}{\operatorname{ch}(u)} && \text{при } k = 1. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

В силу определения функции Якоби обладают свойствами

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(-u) &= -\operatorname{sn}(u), \quad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn}(u), \quad \operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn}(u) \\ \operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{cn}^2(u) &= 1, \quad \operatorname{dn}^2(u) + k^2 \operatorname{sn}^2(u) = 1. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Таким образом, эллиптические функции Якоби при изменении параметра  $k$  дают функции, которые заполняют пробел между элементарными тригонометрическими функциями  $\sin(u)$ ,  $\cos(u)$  и гиперболическими функциями.

Для функций Якоби справедливы соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{sn}(u) &= \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) \\ \frac{d}{du} \operatorname{cn}(u) &= -\operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(u) \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn}(u) &= -k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \\ \operatorname{sn}(u) &= \frac{2\pi}{k\mathbf{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-\frac{1}{2}}}{1-a^{2n-1}} \sin(2n-1) \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} \\ \operatorname{cn}(u) &= \frac{2\pi}{k\mathbf{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-\frac{1}{2}}}{1+a^{2n-1}} \cos(2n-1) \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} \\ \operatorname{dn}(u) &= \frac{\pi}{2\mathbf{K}} + \frac{2\pi}{\mathbf{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{\mathbf{K}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.1.13)$$

где  $a = \exp\left(-\frac{\pi\mathbf{K}(\sqrt{1-k^2})}{\mathbf{K}(k)}\right)$ .

### 3.1.6. Построение решений уравнения Дюффинга $\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0$ .

Из интеграла (3.1.2) находим

$$t - t_0 = \pm \sqrt{2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{[\beta(x_1^2 - x^2)(x^2 - x_2^2)]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.1.14)$$

Здесь  $x_1^2$ ,  $x_2^2$  суть корни уравнения

$$h - \alpha \frac{x^2}{2} - \beta \frac{x^4}{4} = 0.$$

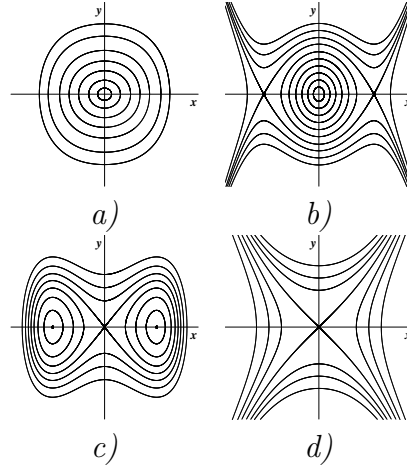


Рис. 3.1.3. Фазовые портреты для уравнения Дюффинга (3.1.15) при: (a)  $\alpha > 0, \beta > 0$ ; (b)  $\alpha > 0, \beta < 0$ ; (c)  $\alpha < 0, \beta > 0$ ; (d)  $\alpha < 0, \beta < 0$ .

В формуле (3.1.14) всегда можно выбрать конкретный знак, учитывая направление движения на траекториях и выбирая соответствующую начальную точку. Фазовые портреты уравнения

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0 \quad (3.1.15)$$

для различных знаков параметров  $\alpha, \beta$  приведены на рис. 3.1.6.

Полагая  $t_0 = 0, x_0 = x_1$  при  $\beta > 0$  и  $x_0 = 0$  при  $\alpha > 0, \beta < 0$ , из (3.1.14) находим

$$\begin{aligned} t &= (2/\beta)^{1/2} (x_1^2 - x_2^2)^{-1/2} F(\varphi, k) \\ k &= x_1 / (x_1^2 - x_2^2)^{1/2}, \quad \cos(\varphi) = x/x_1, \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

если  $\beta > 0, h > 0$ ,

$$\begin{aligned} t &= (-2/\beta)^{1/2} F(\varphi, k) / x_2, \\ k &= x_1 / x_2, \quad \sin(\varphi) = x/x_1, \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

если  $\alpha > 0, \beta < 0$ ,

$$\begin{aligned} t &= (2/\beta)^{1/2} F(\varphi, k) / x_1, \\ k &= \sqrt{x_1^2 - x_2^2} / x_1, \quad (1 - k^2 \sin^2(\varphi))^{1/2} = x/x_1, \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

если  $\alpha < 0, \beta > 0, (-\alpha^2/4\beta) < h < 0$ . Здесь  $F(\varphi, k)$  – неполный эллиптический интеграл 1-го рода,  $k$  – его модуль.

Используя соотношения (3.1.10) для функций Якоби из (3.1.16) - (3.1.18), находим

$$\begin{aligned} x(\vartheta) &= x_1 \operatorname{cn}(2\mathbf{K}\vartheta/\pi), \quad \vartheta = \omega t, \\ \omega &= \pi(\beta/2)^{1/2}(x_1^2 - x_2^2)^{1/2}/2\mathbf{K}, \quad x_1 = [2\alpha k^2/\beta(1 - 2k^2)]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

при  $\beta > 0$ ,  $h > 0$ ,

$$\begin{aligned} x(\vartheta) &= x_1 \operatorname{sn}(2\mathbf{K}\vartheta/\pi), \quad \vartheta = \omega t \\ \omega &= \pi(-\beta/2)^{1/2}x_2/2\mathbf{K}, \quad x_1 = [-2\alpha k^2/\beta(1 + k^2)]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

при  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ ,  $0 < h < (-\alpha^2/4\beta)$ ,

$$\begin{aligned} x(\vartheta) &= x_1 \operatorname{dn}(\mathbf{K}\vartheta/\pi), \quad \vartheta = \omega t, \\ \omega &= \pi(\beta/2)^{1/2}x_1/\mathbf{K}, \quad x_1 = [-2\alpha/\beta(2 - k^2)]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

при  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $(-\alpha^2/4\beta) < h < 0$ . Здесь  $\omega$  - частота движения на замкнутых фазовых кривых  $y^2/2 + \alpha x^2/2 + \beta x^4/4 = h$ ,  $\vartheta \in [0, 2\pi]$  - угловая переменная,  $\operatorname{sn}(u)$ ,  $\operatorname{cn}(u)$ ,  $\operatorname{dn}(u)$  - эллиптические функции Якоби,  $\mathbf{K}$  - полный эллиптический интеграл 1-го рода,  $k$  - его модуль.

**Упражнение 1.** Найдите решение уравнения  $\ddot{x} - x + x^2 = 0$ .

**Упражнение 2.** Найдите решение уравнения  $\ddot{x} + \sin x = 0$ .

### 3.2. Приложение к задаче о стационарных волновых решениях в уравнении Кортевега - де Вриза (КДВ)

Одной из прикладных задач, приводящих к уравнению с одной степенью свободы  $\ddot{x} + f(x) = 0$ , является задача о стационарных волновых решениях в уравнении КДВ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (3.2.1)$$

Это уравнение описывает эволюцию нелинейных волн малой амплитуды на больших интервалах времени  $t$ . В случае стационарных волн имеем  $u = u(x - \nu t)$ ,  $\nu = \text{const}$ . Для определенности положим  $\nu > 0$ ,  $\alpha = \beta = 1$ . Делая в уравнении (3.2.1) замену  $\xi = x - \nu t$ , придем к уравнению

$$\frac{d^3 u}{d\xi^3} + u \frac{du}{d\xi} - \nu \frac{du}{d\xi} = 0,$$

которое допускает первый интеграл

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{u^2}{2} - \nu u = E, \quad E = \text{const}, \quad (3.2.2)$$

где постоянная  $E$  определяется из "начального" условия. Положим  $E = 0$ .

Уравнение (3.2.2) допускает первый интеграл

$$\frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 - \nu \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} = h \quad (3.2.3)$$

Состояния равновесия  $O_1(0, 0)$  – седло и  $O_2(2\nu, 0)$  – центр. Замкнутым фазовым кривым соответствуют значения  $h \in (-2\nu^3/3, 0)$ .

Фазовый портрет уравнения (3.2.2) с  $E = 0$  имеет вид, представленный на рис. 3.1.1(а).

Из (3.2.3) находим

$$\xi - \xi_0 = \pm \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{2(h + \nu u^2/2 - u^3/6)}}. \quad (3.2.4)$$

При  $-2\nu^3/3 < h < 0$  уравнение  $h + \nu u^2/2 - u^3/6 = 0$  имеет три действительных корня  $u_1 < u_2 < u_3$ . Полагая  $u_0 = u_3, \nu_0 = 0$  из (3.2.4) находим

$$\xi = \sqrt{3} \int_u^{u_3} \frac{du}{\sqrt{(u_3 - u)(u - u_2)(u - u_1)}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{u_3 - u_1}} F(\varphi, k). \quad (3.2.5)$$

$$\sin^2 \varphi^2 = (u_3 - u)/(u_3 - u_2) \quad k^2 = (u_3 - u_2)/(u_3 - u_1) \quad (3.2.6)$$

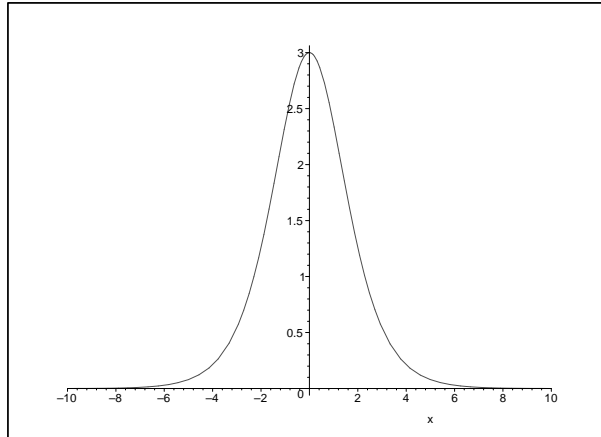
Из (3.2.5), (3.2.6) получаем

$$u(\xi) = u_3 - (u_3 - u_2) \operatorname{sn}^2 \left( \frac{\sqrt{u_3 - u_1}}{2\sqrt{3}} \xi \right) \quad (3.2.7)$$

Значению  $k = 0$  соответствует состояние равновесия типа "центр", а  $k = 1$  – седло и сепаратрисы седла. Решение на петле сепаратрисы получается из (3.2.7) при  $k = 1$ :

$$u(\xi) = u(x - \nu t) = \frac{3\nu}{ch^2(\sqrt{\nu}(x - \nu t)/2)}, \quad \nu > 0. \quad (3.2.8)$$

Это решение называется солитонным решением или уединенной волной (применительно к уравнению КДВ). График этого решения на плоскости  $(u, x)$  показан на рисунке. При получении формулы (3.2.8) было использовано соотношение (3.1.11) для эллиптических функций.



Уединенные волны можно наблюдать в природе – это волны цунами. С точки зрения теории дифференциальных уравнений уединенные волны (солитонные решения) – это существенно нелинейное явление, отвечающее движению по петле сепаратрисы седла, и не имеющее аналога в линейных системах.

Заканчивая этот пункт, отметим, что существует метод нахождения решений (без требования стационарности) уравнения КДВ при начальном условии  $U(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , где  $\varphi(x)$  достаточно быстро стремится к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ . Этот метод получил название метода обратной задачи теории рассеяния или метода  $(L, A)$ -пары и является наиболее ярким явлением в области интегрирования уравнений в частных производных (см., например, Миура Р.М. Уравнение Кортевега-де-Вриза – модельное уравнение для нелинейных волн в средах с дисперсией/ В сб.:Нелинейные волны.-М.:Мир,1977.)

### 3.3. Приложение к задаче Кеплера.

Рассмотрим движение частицы во внешнем поле, в котором ее потенциальная энергия зависит только от расстояния  $\mathbf{r}$  до определенной неподвижной точки – "притягивающего центра" (центрального поля). Для центральных полей справедлив закон сохранения момента  $\mathbf{M}$  системы относительно центра поля

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = \text{const},$$

где  $\mathbf{p}$  - импульс частицы. В силу перпендикулярности  $\vec{M}$  и  $\vec{r}$  постоянство  $\vec{M}$  означает, что радиус-вектор частицы все время остается в одной плоскости, перпендикулярной к  $\vec{M}$ . Поэтому траектория движения частицы в центральном поле целиком лежит в одной



плоскости. Вводя в этой плоскости полярные координаты  $r$ ,  $\varphi$  закон сохранения момента запишем в виде

$$\mathbf{M} = m\mathbf{r}^2\dot{\varphi} = \text{const}, \quad (3.3.1)$$

где  $m$  – масса частицы. Обозначая через  $S$  площадь, которую "заметает" радиус-вектор частицы, закон сохранения момента можно переписать в виде  $\mathbf{M} = 2m\dot{S} = \text{const}$ , где  $\dot{S} = dS/dt$  – так называемая секториальная скорость частицы. Поэтому  $\dot{S} = \text{const}$  (второй закон Кеплера).

Нетрудно показать, что при движении частицы в центральном поле ее расстояние от центра поля меняется так, как  $\mathbf{r}$  в одномерной задаче с потенциальной энергией

$$U(r) = V(r) + M^2/2mr^2, \quad (3.3.2)$$

где  $V(r)$  – потенциал поля,  $M^2/2mr^2$  – центробежная энергия,  $U(r)$  – эффективная энергия (см., например, [14]).

Важным случаем центрального поля является ньютоновское поле тяготения и кулоновские электростатические поля. Для ньютоновского поля  $V(r) \approx -\alpha/r$ ,  $\alpha = \text{const} > 0$ . Тогда уравнения движения при  $m = 1$  примут вид

$$\ddot{r} = -dU/dr = -\alpha/r^2 + M^2/r^3; \quad \dot{\varphi} = M/r^3 \quad (3.3.3)$$

и эквивалентны системе уравнений третьего порядка

$$\dot{r} = q, \quad \dot{q} = -dU/dr, \quad \dot{\varphi} = M/r^2, \quad (3.3.4)$$

в которой первые два уравнения не зависят от третьей координаты  $\varphi$ .

Система

$$\dot{r} = q, \quad \dot{q} = -dU/dr \quad (3.3.5)$$

имеет состояние равновесия  $q_0 = 0$ ,  $r_0 = M^2/\alpha$  типа центр и допускает интеграл энергии

$$q^2/2 + U(r) = h. \quad (3.3.6)$$

График  $U(r)$  приведен ниже на рисунке вверху, а внизу – фазовый портрет системы (3.3.5). Значениям  $h \in (-\alpha^2/2M^2, 0)$  отвечают замкнутые фазовые кривые (финитные движения), значению  $h = 0$  – параболическая орбита, а значениям  $h > 0$  – гиперболические орбиты (инфинитные движения).

Используя (3.3.6), получаем

$$t - t_0 = \pm \int_{r_1}^r \frac{dr}{\sqrt{2(h - U(r))}} = \pm \int_{r_1}^r \frac{r dr}{\sqrt{2(hr^2 + \alpha r - M^2/2)}}. \quad (3.3.7)$$

Полагая  $r_1 = r_{min}, t_0 = 0$  и делая замену  $r - a = -ae \cos \xi$ ,  $a = \alpha/2h$ ,  $e = \sqrt{1 + 2hM^2/\alpha^2}$ , находим

$$r = a(1 - e \cos \xi), \quad t = \sqrt{a^3/\alpha}(\xi - e \sin \xi). \quad (3.3.8)$$

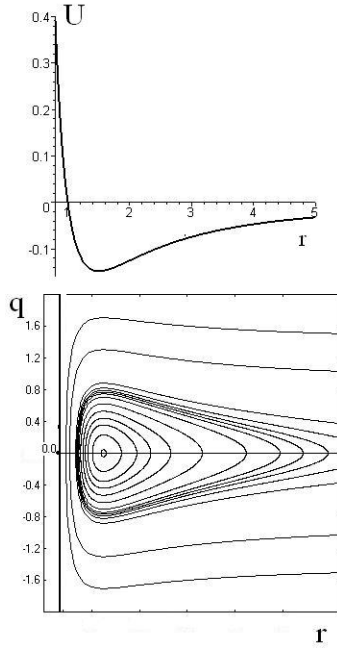


Рис. 3.3.1.

Решения системы (3.3.5) определяются формулами (3.3.8). Для получения орбиты частицы, т.е. траектории в плоскости движения (конфигурационном пространстве) воспользуемся третьим уравнением в системе (3.3.4) и соотношением (3.3.7). В результате найдем

$$r_0/r = 1 + e \cos(\varphi), \quad r_0 = M^2/\alpha.$$

Это соотношение называется уравнением конического сечения с фокусом в начале координат,  $r_0$  – параметр, а  $e$  – эксцентриситет орбиты ( $e = \sqrt{1 + 2hM^2/\alpha^2}$ ,  $h \in (-\alpha^2/2M^2, 0)$ ).

### 3.4. Трехмерные консервативные системы

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in R^3 \quad (3.4.1)$$

Эта система будет интегрируемой, если она допускает 3 независимых первых интеграла. Во многих случаях для интегрируемости ”в квадратурах” достаточно знать два первых интеграла.

Не существует общих рецептов интегрирования систем вида (3.4.1). Поэтому рассмотрим примеры трехмерных систем, которые удается проинтегрировать и которые играют важную роль в приложениях. Это:

- уравнения Эйлера движения асимметричного волчка;
- уравнения гидродинамического типа;
- уравнения динамики квантового генератора;
- система Лоренца.

**3.4.1. Уравнения Эйлера движения асимметричного волчка.** Твердым телом называется система материальных точек, стесненных голономной (геометрической) связью:

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = r_{ij} = \text{const}. \quad (3.4.2)$$

Конфигурационное многообразие твердого тела есть шестимерное многообразие, а именно  $R^3 \times SO(3)$ .

Твердое тело с неподвижной точкой  $\mathbf{O}$  есть система материальных точек, стесненных, кроме связей (3.4.2), связью  $x = \mathbf{O}$ .

Вращение твердого тела в трехмерном евклидовом пространстве описывается уравнениями Эйлера-Пуассона

$$J\omega' = J\omega \times \omega + \epsilon \mathbf{e} \times r, \quad \mathbf{e}' = \mathbf{e} \times \omega, \quad (3.4.3)$$

где  $\omega$  – вектор угловой скорости тела,  $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$  – главные моменты инерции тела,  $r_1, r_2, r_3$  – координаты центра масс относительно осей инерции,  $\epsilon r$  – произведение веса тела на радиус-вектор центра масс,  $\mathbf{e}$  – единичный вектор вертикали.

Рассмотрим задачу о свободном вращении асимметричного твердого тела с закрепленной точкой. Обозначим через  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор угловой скорости тела, через  $M = (M_1, M_2, M_3)$  – вектор кинетического момента. Направим оси системы координат, связанной с телом, вдоль главных осей инерции. Тогда имеем следующую связь вектора кинетического момента тела  $M$  с вектором угловой скорости  $\omega$ :  $M_i = J_i \omega_i, i = 1, 2, 3$ . Уравнения движения:

$$J\omega' = J\omega \times \omega \quad (3.4.4)$$

$$\dot{\omega}_1 = \frac{(J_2 - J_3)}{J_1} \omega_2 \omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_2} \omega_1 \omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3} \omega_1 \omega_2. \quad (3.4.5)$$

Эти уравнения называются уравнениями Эйлера и были получены к 1765 году.

Для асимметричного тела (волчка)  $J_i$  различны. Положим для определенности

$$J_1 < J_2 < J_3. \quad (3.4.6)$$

Тогда уравнение (3.4.4) переписется для компонент вектора момента  $M$  в виде

$$\dot{M}_1 = aM_2M_3, \quad \dot{M}_2 = bM_1M_3, \quad \dot{M}_3 = cM_1M_2, \quad (3.4.7)$$

где  $a = (J_2 - J_3)/J_2J_3$ ,  $b = (J_3 - J_1)/J_1J_3$ ,  $c = (J_1 - J_2)/J_1J_2$ . Система (3.4.7) допускает два первых интеграла

$$M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3 = C_1 \quad (3.4.8)$$

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = C_2. \quad (3.4.9)$$

В соответствии с (3.4.8), (3.4.9) конец вектора  $M$  лежит на пересечении эллипсоида со сферой. В силу (3.4.6) полуоси эллипсоида (3.4.8) удовлетворяют неравенствам  $\sqrt{C_1J_1} < \sqrt{C_1J_2} < \sqrt{C_1J_3}$ . Для реальных движений волчка выполняется условие

$$C_1J_1 < C_2 < C_1J_3. \quad (3.4.10)$$

Зафиксируем  $C_1$  и будем изменять радиус сферы  $\sqrt{C_2}$ . Получающиеся при этом линии пересечения сферы с эллипсоидом изображены на рис. 3.4.1.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.** *Движение тела, при котором его угловая скорость остается постоянной ( $\omega = const$ ), называется стационарным вращением.*

Стационарным вращениям отвечают состояния равновесия системы (3.4.7): 1)  $M_1 = M_2 = 0$ , 2)  $M_1 = M_3 = 0$ , 3)  $M_2 = M_3 = 0$ . Отметим, что в системе (3.4.7) состояния равновесия неизолированны – заполняют оси инерции. На эллипсоиде (3.4.8) имеем 6 состояний равновесия – это точки пересечения осей эллипсоида с эллипсоидом. Отсюда следует

**ТЕОРЕМА 3.5.** *Твердое тело, закрепленное в точке, допускает стационарное вращение вокруг любой из трех своих осей инерции  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .*

Нетрудно заметить (см. рисунок), что на эллипсоиде (3.4.8) имеем два состояния равновесия типа седло и четыре состояния равновесия типа центр, причем седлам отвечают точки пересечения средней оси эллипсоида с эллипсоидом, а центрам – большей и меньшей осей. Отсюда вытекает

**ТЕОРЕМА 3.6.** *Стационарные решения  $M = M_1\xi_1$  и  $M = M_3\xi_3$  уравнений Эйлера, соответствующие большей и меньшей осям инерции, устойчивы, а решение, соответствующее средней оси  $M = M_2\xi_2$  – неустойчиво.*

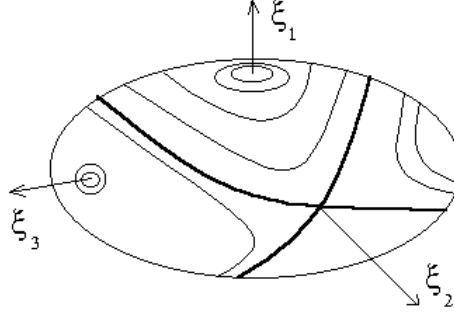


Рис. 3.4.1. Линии пересечения сферы (3.4.9) с эллипсоидом (3.4.8).

Замкнутость кривых на эллипсоиде (3.4.8) означает периодическое перемещение вектора  $M$  по отношению к телу волчка – за время периода вектор  $M$  описывает некоторую коническую поверхность, возвращаясь в прежнее положение.

Проинтегрируем уравнения Эйлера (3.4.7). Выражая из интегралов (3.4.8), (3.4.9)  $M_1$  и  $M_3$  через  $M_2$  и, подставляя полученные выражения во второе уравнение в (3.4.7), придем к дифференциальному уравнению первого порядка (см., например, Ландау, Лифшиц)

$$dM_2/dt = bM_1M_3 = b\{[A_1 - A_2M_2^2][B_1 - B_2M_2^2]\}^{1/2},$$

где  $b = 1/\sqrt{J_1J_3}$ ,  $A_1 = C_1J_3 - C_2$ ,  $A_2 = (J_3 - J_2)/J_2$ ,  $B_1 = C_2 - C_1J_1$ ,  $B_2 = (J_2 - J_1)/J_2$ . Разделяя переменные в этом уравнении и полагая  $t_0 = 0$ ,  $M_2^0 = 0$  придем к выражению

$$\tau = \int_{x_0}^x dx/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = \int_0^\varphi d\varphi/\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)} = F(\varphi, k), \quad (3.4.11)$$

где

$$\begin{aligned} x &= (M_2/J_2)\sqrt{J_2(J_3 - J_2)/(C_1J_3 - C_2)} = \sin \varphi, \\ \tau &= t\sqrt{(J_3 - J_2)(C_2 - C_1J_1)/J_1J_2J_3}, \\ k^2 &= (J_1 - J_3)(C_1J_2 - C_2)/(J_3 - J_2)(C_2 - C_1J_1). \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

При приведении интеграла к стандартной форме Лежандра мы для определенности предположили выполненным наряду с условием (3.4.10) и условие  $C_2 > J_2 C_1$ . Это означает, что рассматриваются периодические решения системы (3.4.7), отвечающие движениям вокруг большей оси эллипсоида (3.4.8). Так как  $x = \sin \varphi$ , то из (3.4.11) следует

$$x(\tau) = \sin(\operatorname{am} F) = \operatorname{sn}(F) = \operatorname{sn}(\tau) \quad (3.4.13)$$

Тогда, используя (3.4.12), (3.4.13), находим

$$M_2 = \sqrt{(C_1 J_3 - C_2) J_2 / (J_3 - J_2)} \operatorname{sn}(\tau). \quad (3.4.14)$$

Используя (3.4.8), (3.4.9) и известные тождества (3.1.12) для эллиптических функций найдем

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{(C_1 J_3 - C_2) J_1 / (J_3 - J_1)} \operatorname{cn}(\tau) \\ M_3 &= \sqrt{(C_2 - C_1 J_1) J_3 / (J_3 - J_1)} \operatorname{dn}(\tau). \end{aligned}$$

Период движения по замкнутым кривым на эллипсоиде (3.4.8), отвечающим условию  $J_3 C_1 > C_2 > J_2 C_1$ , определяется в соответствии с (3.4.11) по формуле

$$T = 4\mathbf{K}(k) \sqrt{J_1 J_2 J_3 / (J_3 - J_2)(C_2 - C_1 J_1)},$$

а частота – по формуле

$$\omega = 2\pi/T = \sqrt{(J_3 - J_2)(C_2 - C_1 J_1) / J_1 J_2 J_3} (\pi/2\mathbf{K}(k)).$$

С учетом этого решение системы (3.4.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{(C_1 J_3 - C_2) J_1 / (J_3 - J_1)} \operatorname{cn}(2\mathbf{K}\vartheta/\pi) \\ M_2 &= \sqrt{(C_1 J_3 - C_2) J_2 / (J_3 - J_2)} \operatorname{sn}(2\mathbf{K}\vartheta/\pi) \\ M_3 &= \sqrt{(C_2 - C_1 J_1) J_3 / (J_3 - J_1)} \operatorname{dn}(2\mathbf{K}\vartheta/\pi), \end{aligned}$$

где  $\vartheta = \omega t$ . Аналогично находятся периодические решения системы (3.4.7), отвечающие движениям вокруг меньшей оси эллипсоида (3.4.8) ( $C_2 < J_2 C_1$ ).

**Упражнение.** Постройте периодические решения уравнений Эйлера, отвечающие движениям вокруг меньшей оси эллипсоида (3.4.8).

**3.4.2. Уравнения гидродинамического типа.** Следуя Обухову и др. (Е.Б. Гледзер, Ф.В. Должанский, А.М. Обухов "Системы гидродинамического типа и их применение". - Под ред. А.М.

Обухова.-М.: Наука, 1981.) рассмотрим движение несжимаемой жидкости внутри замкнутого сосуда  $V$ , ограниченного твердой поверхностью  $S$ . Состояние такой системы в любой момент времени определяется бездивергентным полем скоростей  $v(x, t)$  ( $\operatorname{div}(v(x, t)) = 0$ ), удовлетворяющем граничному условию  $(\partial v / \partial n)|_S = 0$ , где  $n$  – внешняя нормаль к  $S$ . В пренебрежении вязкостью эволюция системы описывается классическими уравнениями Эйлера (совпадающими лишь по названию с рассмотренными выше уравнениями):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v + \nabla p = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad v = v(x, t) \quad (3.4.15)$$

В координатной форме уравнения (3.4.15) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{x1}}{\partial t} + v_{x1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x_1} + v_{x2} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x_2} + v_{x3} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial v_{x2}}{\partial t} + v_{x1} \frac{\partial v_{x2}}{\partial x_1} + v_{x2} \frac{\partial v_{x2}}{\partial x_2} + v_{x3} \frac{\partial v_{x2}}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial v_{x3}}{\partial t} + v_{x1} \frac{\partial v_{x3}}{\partial x_1} + v_{x2} \frac{\partial v_{x3}}{\partial x_2} + v_{x3} \frac{\partial v_{x3}}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_3} &= 0, \end{aligned}$$

где  $p$  – скалярное поле давления, плотность жидкости принята равной 1.

Для аппроксимации уравнений гидродинамики системой обыкновенных дифференциальных уравнений воспользуемся методом Галеркина.

Выберем последовательность бездивергентных базисных функций

$$\{\varphi_i(x)\}, \quad \varphi_i = (\varphi_i^1, \varphi_i^2, \varphi_i^3), \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

удовлетворяющих граничному условию  $(\partial \varphi_i / \partial n)|_S = 0$ , и поле скорости  $v(x, t)$ ,  $v = (v_{x1}, v_{x2}, v_{x3})$ , аппроксимируем линейной комбинацией базисных функций со скалярными коэффициентами  $C_i$ :

$$v(x, t) \simeq v_n(x, t) = \sum_{k=1}^n C_k(t) \varphi_k(x) \quad (3.4.16)$$

В методе Галеркина неизвестные коэффициенты  $C_k$  находятся из условия

$$\int_V \left( \frac{\partial v_n}{\partial t} \cdot \varphi_i + A v_n \cdot \varphi_i + \nabla p \cdot \varphi_i \right) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4.17)$$

В (3.4.17) произведения, стоящие под знаком интеграла и обозначенные "точкой", следует понимать как скалярные произведения соответствующих векторов, оператор  $A$  определен формулой

$Av \equiv (v\nabla)v$ . Предположим, что базис  $\{\varphi_i\}$  ортонормирован, т.е.

$$\int_V \varphi_i \cdot \varphi_j dx = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Тогда из (3.4.17) находим

$$\frac{dC_i}{dt} + b_{i,jk} C_j C_k = d_i, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4.18)$$

где

$$b_{i,jk} = \int_V [(\varphi_i \nabla) \varphi_k + (\varphi_k \nabla) \varphi_j] dx, \quad d_i = - \int_V \nabla p \varphi_i dx.$$

Поскольку давление в несжимаемой жидкости играет пассивную роль – это потенциал сил реакции, которые не совершают работы, то интеграл энергии в исходной системе сводится к сохранению кинетической энергии системы  $T = \int_V v^2 dx / 2$ . Так как  $\int_V \nabla p \varphi_i dx = \oint_S p(n, \varphi_i) dS = 0$ , то  $d_i = 0$ , что приводит к наличию квадратичного интеграла у "дискретной" системы (3.4.18)

$$\sum_{i=1}^n C_i^2 / 2 = \text{const} \quad (3.4.19)$$

при выполнении условия

$$b_{i,jk} + b_{j,ki} + b_{k,ij} = 0. \quad (3.4.20)$$

Можно показать, что

$$\sum_{i=1}^n (\partial C'_i / \partial C_i) = 0, \quad C'_i = dC_i / dt. \quad (3.4.21)$$

Системы вида (3.4.18) с  $d_i = 0$ , обладающие свойствами (3.4.19)-(3.4.21), были названы Обуховым А.М. **системами гидродинамического типа** (СГТ).

Положим в (3.4.16)  $n = 3$  (при  $n = 2$  условие (3.4.20) не выполняется). В этом случае специальным выбором координатных осей систему (3.4.18) можно привести к каноническому виду

$$\frac{dC_1}{dt} = p C_2 C_3, \quad \frac{dC_2}{dt} = q C_1 C_3, \quad \frac{dC_3}{dt} = r C_1 C_2, \quad (3.4.22)$$

где в силу (3.4.20) имеем  $p + q + r = 0$ . Нетрудно показать, что при выполнении условий  $p = (J_2 - J_3)(J_1 J_2 J_3)^{-1/2}$ ,  $q = (J_3 - J_1)(J_1 J_2 J_3)^{-1/2}$ ,  $r = (J_1 - J_2)(J_1 J_2 J_3)^{-1/2}$  система (3.4.22) с помощью замены  $C_1 = \sqrt{J_1} \omega_1$ ,  $C_2 = \sqrt{J_2} \omega_2$ ,  $C_3 = \sqrt{J_3} \omega_3$  приводится к уравнениям Эйлера движения волчка, рассмотренным в предыдущем пункте. Отсюда сразу же следует интегрируемость системы (3.4.22) и, что "вращение" жидкости вокруг средней оси эллипсоидального сосуда  $V$  является неустойчивым и под влиянием сколь



угодно малых возмущений "опрокидывается". Это явление наблюдалось в эксперименте, поставленном в ИФА РАН.

**3.4.3. Уравнения динамики квантового генератора и система Лоренца.** Согласно работе Басова Н.Г., Морозова В.Н. и А.Н. Ораевского А.Н. "К теории динамики одномодового квантового генератора" (Квантовая электроника.- 1974.-Т.1, N 10.-С. 2264-2274) уравнения динамики одномодового квантового генератора имеют вид

$$\dot{E} = P - \gamma_3 E, \quad \dot{P} = NE - \gamma_2 P, \quad \dot{N} = -PE + \gamma_1(N_0 - N), \quad (3.4.23)$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, N_0$  – параметры. Не останавливаясь на физическом смысле входящих в (3.4.23) переменных и параметров заметим, что в случае малых  $\gamma_i, i = 1, 2, 3$ , система (3.4.23) близка к системе

$$\dot{E} = P, \quad \dot{P} = NE, \quad \dot{N} = -PE. \quad (3.4.24)$$

Система (3.4.24) допускает два первых интеграла

$$P^2 + N^2 = C_1, \quad E^2/2 + N = C_2 \quad (3.4.25)$$

и, следовательно, является интегрируемой. Поскольку нелинейные члены в (3.4.24) квадратичные, то ее решение можно выразить через эллиптические функции аналогично случаю "волчка".

К системе вида (3.4.23) приводит известная система Лоренца

$$\dot{y} = \sigma(z - y), \quad \dot{z} = wy - z, \quad \dot{w} = R - zy - bw, \quad (3.4.26)$$

получающаяся при полудискретной аппроксимации Галеркина из уравнений в частных производных, описывающих конвекцию в подогреваемом снизу слое жидкости. В (3.4.26)  $R, \sigma, b$  – параметры.

Рассмотрим (3.4.26) при больших  $R$  ( $R$  – число Релея). Делая в (3.4.26) замену времени  $t = \varepsilon\tau$  и координат

$$y = Y/\varepsilon, \quad w = W/\varepsilon^2\sigma, \quad z = Z/\varepsilon^2\sigma, \quad \varepsilon = 1/\sqrt{R\sigma},$$

придем к системе

$$\frac{dY}{d\tau} = Z - \varepsilon\sigma Y, \quad \frac{dZ}{d\tau} = WY - \varepsilon Z, \quad \frac{dW}{d\tau} = -ZY + \varepsilon(1 - bW), \quad (3.4.27)$$

совпадающей (с точностью до обозначений) с системой (3.4.23). Пренебрегая в (3.4.27) членами  $\mathbf{O}(\varepsilon)$ , придем к интегрируемой системе вида (3.4.24)

$$\frac{dY}{d\tau} = Z, \quad \frac{dZ}{d\tau} = WY, \quad \frac{dW}{d\tau} = -ZY.$$

**Упражнение.** Найдите периодические решения этой системы.

### 3.5. Многомерные гамильтоновы системы

Здесь будут рассмотрены кратко метод Якоби-Гамильтона и теорема Лиувилля об интегрируемости гамильтоновых систем. Для интегрируемости гамильтоновых систем с  $\mathbf{n}$  степенями свободы во многих случаях достаточно знать лишь  $\mathbf{n}$  первых интегралов.

Рассмотрим систему Гамильтона с  $n$  степенями свободы

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H(p, q)}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q}, \quad q = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Координаты  $q$  называются обобщенными координатами, а  $p$  – обобщенными импульсами.

Для простоты ограничимся случаем, когда функция Гамильтона  $H$  явно не зависит от времени  $t$ . Основная идея интегрирования системы (3.5.1) заключается в ее преобразовании с помощью замены координат к более простому виду. Например, если с помощью замены координат

$$P = P(p, q), \quad Q = Q(p, q) \quad (3.5.2)$$

система (3.5.1) снова преобразуется к гамильтоновой форме с гамильтонианом, зависящем только от переменных  $Q$ , т.е.  $\tilde{H} = \tilde{H}(Q)$ , тогда преобразованная система интегрируемая. Действительно, имеем

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 0, \quad \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}$$

Первые  $n$  уравнений этой системы легко интегрируются:  $Q = C = \text{const}$ . Подставляя найденные значения  $Q$  во вторую группу  $n$  уравнений, найдем  $P = -\frac{\partial \tilde{H}(C)}{\partial Q}t + P_0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.** Если преобразование (3.5.2) оставляет систему гамильтоновой и сохраняет фазовый объем, то будем называть его **каноническим**.

Уточним слова "сохраняет фазовый объем". Как и в случае систем с одной степенью свободы будем пользоваться понятиями фазового пространства, фазовой кривой, фазового объема. Для системы (3.5.1) фазовое пространство – это пространство  $2n$  измерений  $\mathbf{R}^{2n}$ . Каждая точка этого пространства соответствует определенному состоянию системы и называется фазовой точкой. При изменении  $t$  фазовая точка описывает в фазовом пространстве некоторую линию, называемую фазовой

кривой. Произведение дифференциалов  $d\Gamma = dqdp$  можно рассматривать как элемент фазового пространства. Рассмотрим теперь некоторую область  $G$  фазового пространства. Объем этой области будет определяться величиной  $\int_G d\Gamma$ . При действии преобразования (3.5.2) имеем  $\int dQdP = \int Ddqdp$ , где  $D$  – якобиан преобразования. Говорят, что преобразование (3.5.2) сохраняет фазовый объем, если  $D \equiv 1$ .

**3.5.1. Метод Якоби-Гамильтона.** Метод Якоби-Гамильтона состоит в построении канонического преобразования (3.5.2). Это преобразование в данном методе определяется с помощью производящей функции  $S(Q, q)$ . Эта функция задана не в фазовом пространстве, а на прямом произведении  $\mathbf{R}_Q^n \times \mathbf{R}_q^n$ , и строится следующим образом. Если преобразование (3.5.2) каноническое, тогда выражение (1-форма)  $pdq - PdQ$  есть полный дифференциал. Пусть  $pdq - PdQ = dS(Q, q)$ . Отсюда следует

$$\frac{\partial S(Q, q)}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S(Q, q)}{\partial Q} = -P. \quad (3.5.3)$$

Итак, будем искать каноническое преобразование вида (3.5.2), приводящее функцию Гамильтона  $H(p, q)$  к виду  $\tilde{H}(Q)$ . Для этого найдем производящую функцию  $S(Q, q)$  этого преобразования. Используя (3.5.3), находим

$$H(\partial S(Q, q)/\partial q, q) = \tilde{H}(Q), \quad (3.5.4)$$

где после дифференцирования вместо  $q$  следует подставить  $q(P, Q)$ . Уравнение (3.5.4) является частным случаем уравнения Якоби - Гамильтона.

**ТЕОРЕМА 3.7 (Теорема Якоби.).** *Если найдено решение  $S(q, Q)$  уравнения Якоби-Гамильтона (3.5.4), зависящее от  $n$  параметров  $Q_i$  и такое, что  $\det \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial q} \right\} \neq 0$ , то гамильтоновы (канонические) уравнения*

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

*решаются явно в квадратурах. При этом функции  $Q(p, q)$ , определенные уравнениями  $\partial S/\partial q = p$ , являются  $n$  первыми интегралами данных гамильтоновых уравнений.*

*Доказательство.* Согласно (3.5.3) имеем  $p = \partial S/\partial q$ . Из этих соотношений в силу условия  $\det \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial q} \right\} \neq 0$  находим  $Q = Q(p, q)$ . Тогда  $H(p, q) = H(\partial S(Q, q)/\partial q, q)$ . Последнее выражение в соответствии с (3.5.4) от  $q$  не зависит так, что имеем  $H(p, q) = \tilde{H}(Q)$ . Поэтому в новых переменных уравнения движения имеют вид  $\dot{Q} = 0, \quad \dot{P} = -\partial \tilde{H}/\partial Q$ .

**3.5.2. Скобки Пуассона.** Рассмотрим функцию  $F(p, q)$ , зависящую от обобщенных координат и импульсов. Имеем

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k \right). \quad (3.5.5)$$

Отсюда находим

$$\frac{dF}{dt} = \{HF\}, \quad (3.5.6)$$

где

$$\{HF\} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} \right) \quad (3.5.7)$$

Выражение (3.5.7) называется **скобками Пуассона** для величин  $H$  и  $F$ .

Если  $\{HF\} = 0$ , то  $F$  – первый интеграл гамильтоновой системы.

Для любой пары дифференцируемых функций  $F$  и  $R$  скобки Пуассона определяются аналогично (3.5.7):

$$\{FK\} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial R}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial R}{\partial p_k} \right). \quad (3.5.8)$$

Справедливо следующее тождество Якоби

$$\{F\{RK\}\} + \{R\{KF\}\} + \{K\{FR\}\} = 0$$

**ТЕОРЕМА 3.8 (Теорема Пуассона).** Если  $F$  и  $R$  два первых интеграла системы Гамильтона  $\dot{q} = \partial H / \partial p$ ,  $\dot{p} = -\partial H / \partial q$ , то составленная из них скобка Пуассона также является первым интегралом этой системы:  $\{H\{FR\}\} = 0$ .

Доказательство вытекает из тождества Якоби при  $K \equiv H$ .

**3.5.3. Теорема Лиувилля об интегрируемости систем Гамильтона.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.** Две функции  $F_1$  и  $F_2$ , зависящие от канонических переменных  $p$  и  $q$ , находятся в инволюции, если их скобка Пуассона тождественно равна нулю, т.е.

$$\{F_1 F_2\} \equiv \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial p_k} \frac{\partial F_2}{\partial q_k} - \frac{\partial F_1}{\partial q_k} \frac{\partial F_2}{\partial p_k} \right\} = 0.$$

**ТЕОРЕМА 3.9 (Теорема Лиувилля).** Если в гамильтоновой системе (3.5.1) известны  $n$  независимых первых интегралов в инволюции, то система интегрируема в квадратурах.

Эта теорема сначала была доказана Буром для автономных канонических уравнений, а затем обобщена Лиувиллем на неавтономный случай, когда  $H = H(p, q, t)$ . Следующая теорема Арнольда [14] обобщает теорему Лиувилля и во многих случаях позволяет говорить о структуре фазового пространства интегрируемых гамильтоновых систем.

**ТЕОРЕМА 3.10** (Теорема Арнольда.). *Предположим, что на симплектическом  $2n$ -мерном многообразии даны  $n$  функций в инволюции*

$$F_1, F_2, \dots, F_n; \{F_i F_j\} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

*Рассмотрим множество уровня функций  $F_i$ :  $M_h = \{x : F_i(x) = h_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Предположим, что на  $M_h$   $n$  функций  $F_i$  независимы. Тогда:*

- $M_h$  – гладкое многообразие, инвариантное относительно фазового потока с функцией Гамильтона  $H = F_1$ ;
- если многообразие  $M_h$  компактно и связно, то оно диффеоморфно  $n$ -мерному тору  $T^n = \{(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n) \bmod 2\pi\}$ ;
- фазовый поток с функцией Гамильтона  $H$  определяет на  $M_h$  условно-периодическое движение, т.е. в угловых координатах  $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n) : \frac{d\vartheta}{dt} = \omega(h)$ ;
- канонические уравнения с функцией Гамильтона  $H$  интегрируемы в квадратурах.

Опуская доказательство первых трех пунктов теоремы, остановимся на 4-м пункте. Как и в методе Якоби-Гамильтона для доказательства этого пункта необходимо построить каноническое преобразование типа (3.5.2). В условиях теоремы Лиувилля таким преобразованием является преобразование  $(p, q) \rightarrow (I, \theta)$ , где  $I$  – переменные действия, а  $\theta$  – угловые координаты на торе  $T^n$ .

**3.5.4. Переменные действие-угол.** Перейдем в интегрируемой системе Гамильтона

$$\dot{q} = \partial H / \partial p, \quad \dot{p} = -\partial H / \partial q \quad (3.5.9)$$

от переменных  $p, q$  к новым переменным  $h, \theta$ , где  $F_i = h_i$  определяют множество уровня функций  $F_i$ , являющееся  $n$ -мерным тором,  $\theta_i$  – угловые координаты на торе. Переменные  $h, \theta$  не являются, вообще говоря, каноническими переменными (якобиан преобразования  $(p, q) \rightarrow (h, \theta)$  не равен единице). В переменных  $h, \theta$  система (3.5.9) запишется в виде

$$\dot{h} = 0, \quad \dot{\vartheta} = \omega(h). \quad (3.5.10)$$

Система (3.5.10) немедленно интегрируется:  $h = \text{const}$ ,  $\theta(t) = \theta(0) + \omega(h)t$ . В условиях теоремы Лиувилля можно выбрать такие координаты  $I, \theta$ , что  $I$  зависят только от  $h$ , а  $\theta$  – угловые координаты на торе, при этом преобразование  $(p, q) \rightarrow (I, \theta)$  является каноническим. Переменные  $I$  называются переменными действия. Величины  $I$  как функции от первых интегралов  $h$  являются также первыми интегралами. В переменных  $I, \theta$  система (3.5.9) запишется в виде

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\theta} = \omega(I). \quad (3.5.11)$$

Обратимся к рассмотренным примерам систем с одной степенью свободы.

**Пример 1.** Линейный осциллятор:  $H(p, q) = p^2/2 + q^2/2$

**Пример 2.** Нелинейный осциллятор:  $H(p, q) = p^2/2 + q^2/2 - q^3/3$

**Пример 3.** Математический маятник:  $H(p, q) = p^2/2 - \cos q$

Во всех этих примерах имеются компактные замкнутые фазовые кривые  $H(p, q) = h$ , и мы находимся в условиях теоремы Лиувилля при  $n = 1$ .

Чтобы построить переменные  $I, \theta$  найдем, следуя [14], каноническое преобразование  $(p, q) \rightarrow (I, \theta)$ , удовлетворяющее условиям

$$1) I = I(h), \quad 2) \oint_{M_h} d\theta = 2\pi. \quad (3.5.12)$$

Для построения такого преобразования будем искать его производящую функцию  $S(I, q)$ , удовлетворяющую условиям:

$$p = \partial S / \partial q, \quad \theta = \partial S / \partial I, \quad (3.5.13)$$

$$H(\partial S / \partial q, q) = h(I). \quad (3.5.14)$$

Предположим, что  $h(I)$  существует и обратима. В приведенных примерах это условие накладывает ограничение на область допустимых значений  $h$ .

Из первого соотношения (3.5.13) при  $I = \text{const}$  следует  $dS = pdq$ . Интегрируя это выражение вдоль кривой  $M_h = \{(p, q) : H(p, q) = h\}$ , получим

$$S(I, q) = \int_{q_0}^q pdq. \quad (3.5.15)$$

Для такой производящей функции первое условие выполнено, поскольку из интеграла  $H(p, q) = h$  имеем  $p = p(q, h)$  и, следовательно,  $I = I(h)$ . Покажем, что если положить

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{M_h} pdq, \quad (3.5.16)$$

то будет выполнено и второе условие:  $\oint_{M_h} d\theta = 2\pi$ .

Очевидно,  $\oint_{M_h} pdq$  – это площадь, ограниченная кривой  $H(p, q) = h$ . При обходе замкнутой кривой  $H = h$  интеграл  $\int pdq$  получит приращение  $S = \oint_{M_h} pdq$ . В силу второго соотношения в (3.5.13) имеем  $\theta = \partial S / \partial I$ . Поэтому для выполнения второго условия необходимо выполнение условия  $\theta = 2\pi$ , т.е.  $2\pi I = S = \oint_{M_h} pdq$ . Последнее выполнено в силу (3.5.16). Проиллюстрируем теорему Арнольда на примере.

**Пример 4.** Положим  $H(p, q) = p^2/2 + q^2/2 - q^4/4$ . Соотношение  $H(p, q) = h$  определяет фазовые кривые.

Из интеграла  $H(p, q) = h$  находим, что для значений  $h \in (0, 1/4)$  множество уровня  $M_h = \{(p, q) : H(p, q) = h\}$  компактно и связно, т.е. диффеоморфно 1-мерному тору. Это означает, что с помощью взаимно однозначного дифференцируемого преобразования замкнутая эллиптическая кривая  $H(p, q) = h$  может быть преобразована в окружность, или, как иногда говорят, продеформирована в окружность.

Перейдем от переменных  $p, q$  к переменным  $I, \theta$ . Согласно (3.5.16) имеем

$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \oint_{M_h} pdq = \frac{1}{2\pi} \oint_{M_h} \sqrt{2(h - q^2/2 + q^4/4)} dq.$$

Из второго соотношения (3.5.13), используя (3.5.15), находим

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial S(I, q)}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} \int_{q_0}^q \sqrt{2(h(I) - q^2/2 + q^4/4)} dq = \\ &= \int_{q_0}^q \frac{dq}{\sqrt{2(h(I) - q^2/2 + q^4/4)}} \frac{dh}{dI} = (t - t_0) \frac{dh}{dI}. \end{aligned}$$

Для замкнутых фазовых кривых справедливо соотношение

$$\frac{dI}{dh} = \frac{1}{2\pi} \oint_{M_h} \frac{dq}{\sqrt{2(h - q^2/2 + q^4/4)}} = \frac{\tau(h)}{2\pi}, \quad 0 < h < \frac{1}{4}, \quad (3.5.17)$$

где  $\tau(h)$  – период движения фазовой точки по замкнутой кривой  $H(p, q) = h$ . Тогда

$$\frac{dh}{dI} = \frac{2\pi}{\tau} = \omega(I), \quad \theta = \omega(I)(t - t_0).$$

Очевидно, в новых переменных система запишется в виде

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\theta} = \omega(I), \quad I(0) < I < I(1/4).$$

Заметим, что согласно (3.5.17) функция  $I(h)$  необратима на сепаратрисе седла ( $h = 1/4$ ), поскольку  $\tau(1/4) = \infty$ .

### 3.5.5. Условно-периодические движения. Пространственное и временное средние.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4.** Пусть  $T^n$   $n$ -мерный тор,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \bmod 2\pi$  – угловые координаты на нем. Тогда уравнения  $\dot{\theta} = \omega$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  определяют условно периодическое движение на  $T^n$ . Траектория на торе называется обмоткой тора.

Величины  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  называются частотами условно-периодического движения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5.** Частоты  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  называются независимыми (несоизмеримыми), если  $\sum_{i=1}^n k_i \omega_i = (k, \omega) = 0$ , тогда и только тогда, когда  $k = 0$  ( $k_i = 0$ ), где  $k \in Z^n$  ( $Z^n$  – группа целых чисел).

*Пример.* Пусть  $n = 2$ . Если  $\omega_1/\omega_2 = k_1/k_2$ , где  $k_1, k_2$  – целые числа, то траектории на торе  $T^2$  замкнутые; если же  $\omega_1/\omega_2$  – иррациональное число, то траектории на торе незамкнутые и всюду плотны. На рис. 3.5.1 показана траектория на развертке тора  $T^2$  в случае  $\omega_1/\omega_2 = 3$ .

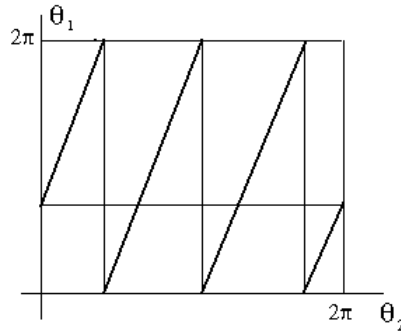


Рис. 3.5.1. Траектория на торе при  $\omega_1/\omega_2 = 3$ .

Пусть  $f(\theta)$  – интегрируемая на торе  $T^n$  функция.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6.** Пространственным средним на торе  $T^n$  называется число

$$\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n.$$

Рассмотрим значение функции  $f(\theta)$  на траектории  $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$ . Теперь  $f$  – это уже функция времени  $t$ . Рассмотрим ее среднее.



**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7.** *Временным средним функции  $f$  на торе  $T^n$  называется функция*

$$f^*(\theta_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta_0 + \omega t) dt.$$

(определенная там, где предел существует).

Справедлива следующая

**ТЕОРЕМА 3.11.** *Временное среднее всюду существует и совпадает с пространственным, если функция  $f$  непрерывна (или хотя бы интегрируема по Риману), а частоты  $\omega_i$  независимы.*

Эта теорема является одной из первых эргодических теорем и неявно встречается уже в работах Лапласа, Гаусса и Лагранжа по небесной механике. Строгое доказательство этой теоремы было дано лишь в начале XX века.

*Следствие.* Если частоты  $\omega_i, i = 1, 2, \dots, n$  независимы, то каждая траектория  $\theta(t)$  всюду плотна на торе  $T^n$ .

*Доказательство.* Предположим противное. Тогда найдется такая точка тора, в окрестности  $\mathbb{D}$  которой нет точек траектории  $\theta(t)$ . Нетрудно построить непрерывную функцию  $f(\theta)$ , равную нулю вне  $\mathbb{D}$  и с пространственным средним  $\bar{f} = 1$ . Временное среднее такой функции, очевидно, равно нулю.

### 3.5.6. Гамильтоновы системы, близкие к интегрируемым.

Этот подраздел следовало бы отнести к следующей главе. Однако, чтобы не разрывать рассмотрение мы включили его в данную главу.

Рассмотрим систему Гамильтона с гамильтонианом  $H(I, \vartheta) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \vartheta)$ , где  $I = (I_1, I_2, \dots, I_n), \vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n)$  – переменные действие-угол, определенные в интегрируемой (невозмущенной) системе с функцией Гамильтона  $H_0(I)$ ,  $\varepsilon$  – малый параметр:

$$\dot{I} = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \vartheta}, \quad \dot{\vartheta} = \omega(I) - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}. \quad (3.5.18)$$

Здесь  $\omega = -\partial H_0 / \partial I$ . К системам такого вида приводят задачи небесной механики.

Задачу об исследовании возмущений условно-периодических движений в системе, заданной гамильтонианом  $H(I, \vartheta) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \vartheta)$ , Пуанкаре назвал основной задачей динамики. В невозмущенной задаче углы  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$  меняются равномерно с постоянными частотами  $\omega_j$ , а все переменные действия  $I_j, j = 1, \dots, n$  являются первыми интегралами. Требуется исследовать поведение

фазовых кривых возмущенной системы Гамильтона (3.5.18) в фазовом пространстве, являющемся прямым произведением области  $n$ -мерного пространства  $R^n$  с координатами  $I_1, I_2, \dots, I_n$  и  $n$ -мерного тора  $T^n$  с угловыми координатами  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$  (см. п. 2.3.5). Предположим, что в рассматриваемой области функция  $H(I, \vartheta)$  аналитическая по  $I$  и  $\vartheta$ .

Существенный сдвиг в решении этой задачи был сделан Колмогоровым в 1954 году.

**ТЕОРЕМА 3.12** (Теорема Колмогорова.). *Если  $\det |d\omega/dI| \neq 0$  (невозмущенная система невырождена), то при достаточно малом консервативном гамильтоновом возмущении большинство нерезонансных инвариантных торов не исчезает, а лишь немного деформируется так, что в фазовом пространстве возмущенной системы также имеются инвариантные торы, заполненные всюду плотно фазовыми кривыми, обматывающими их условно периодически, с числом частот, равным числу степеней свободы. Указанные инвариантные торы образуют большинство в том смысле, что мера дополнения к их объединению мала вместе с возмущением.*

Полное доказательство этой теоремы было дано лишь в 1963 году Арнольдом. Приблизительно в это же время Мозер доказал теорему о сохранении замкнутых инвариантных кривых для сохраняющих площадь отображений.

По мере удаления от интегрируемости множество, занятое инвариантными торами, уменьшается, а множество, заполненное неинтегрируемой частью со сложным поведением траекторий, растет.

Что же происходит с фазовыми кривыми, не принадлежащими инвариантным торами? Если инвариантные торы соответствуют "сильно несоизмеримым" частотам, то "щели" между ними – как правило соизмеримым частотам. В невозмущенной системе последним отвечают резонансные торы – торы, заполненные замкнутыми фазовыми кривыми. Под действием возмущения резонансные торы могут разрушаться. Как происходит такое разрушение – проще всего понять на примере систем с  $3/2$  степенями свободы, которые мы рассмотрим в 7-ой главе этого курса. Явление разрушения резонансных торов достаточно сложно и характеризуется расщеплением сепаратрис и иерархией резонансов.

Промежутки между инвариантными торами называют "зонами неустойчивости".

При исследовании поведения решений возмущенной системы в зонах неустойчивости следует различать случаи  $n = 2$  и  $n > 2$ , где  $n$

– число степеней свободы. В случае  $n = 2$  двумерные инвариантные торы делят множество уровня энергии  $H(p, q) = h$ , при  $n > 2$  – не делят. Поэтому при  $n = 2$  из теоремы Колмогорова следует устойчивость (по Ляпунову) решений, а при  $n > 2$  – устойчивости нет.

Более полную информацию о затрагиваемых здесь вопросах можно найти, например, в книгах [19]-[22].

## Неконсервативны автономные системы, близкие к интегрируемым

### 4.1. Метод малого параметра Пуанкаре

ТЕОРЕМА 4.1 (Теорема Пуанкаре). Пусть правые части системы

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1.1)$$

являются аналитическими функциями переменных  $x_1, \dots, x_n$  и параметра  $\mu$  для достаточно малых  $\mu$ . Пусть, далее, система (4.1.1) при  $\mu = 0$  имеет периодическое решение  $x_i = \varphi_i(t), i = 1, \dots, n$  с периодом  $T$ . Тогда

1) решение системы (4.1.1) при  $\mu \neq 0$ , соответствующее начальному условию  $x_i(0) = \varphi_i(0) + \alpha_i(\mu), i = 1, \dots, n$  и записываемое в виде

$$x_i = x_i(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n; \mu), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1.2)$$

будет аналитическим относительно  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  и  $\mu$  при достаточно малых значениях этих величин;

2) решение (4.1.2) будет периодическим с периодом  $T' = T + \alpha(\mu)$ , если величины  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  можно найти из условий периодичности

$$x_i(T') = x_i(0), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1.3)$$

как аналитические функции  $\mu$ , обращающиеся в нуль при  $\mu = 0$ .

Согласно первому утверждению теоремы решение системы (4.1.1) можно представить в виде

$$x_i(t) = \varphi_i(t) + \mu\varphi_{i1}(t) + \mu^2\varphi_{i2}(t) + \dots \quad (4.1.4)$$

Имеется  $n$  условий периодичности (4.1.3) и  $n + 1$  параметров, подлежащих определению:  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ . В силу автономности системы (4.1.1) начальное время можно выбрать так, чтобы одно из чисел  $\alpha_i$  равнялось нулю.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}). \quad (4.1.5)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots \quad (4.1.6)$$

Наша цель – нахождение периодического решения уравнения (4.1.5). Функция  $x_0(t)$  – периодическая с периодом  $2\pi$  функция. Однако,  $x_i(t), i \geq 1$  не будут периодическими функциями даже при периодической функции  $x(t)$ .

Пример:  $\sin[(1 + \mu)t] = \sin t + \mu t \cos t - \frac{\mu^2 t^2}{2} \sin t + \dots$

В связи с этим введем новое время  $\tau = \omega t$ , где  $\omega$  – искомая частота периодического решения  $x(t)$ . В новом масштабе времени частота искомого решения  $x(\tau)$  будет равна единице, а период –  $2\pi$ . Ищем частоту в виде

$$\omega = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \omega_k \quad (4.1.7)$$

Заметим, что  $\omega = 1$  есть частота решения невозмущенного уравнения  $\ddot{x} + x = 0$ . Это решение называется **порождающим**.

Пусть

$$\omega^2 = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \Omega_k. \quad (4.1.8)$$

После перехода к новому времени уравнение (4.1.5) примет вид

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = \mu f\left(x, \omega \frac{dx}{d\tau}\right) \quad (4.1.9)$$

После подстановки (4.1.7), (4.1.8) в (4.1.9) получим

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \Omega_n\right) \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = \mu f\left[x, \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \omega_n\right) \frac{dx}{d\tau}\right]. \quad (4.1.10)$$

Решение уравнения (4.1.10) ищем в виде

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \dots \quad (4.1.11)$$

Так как периоды  $x(\tau)$  и  $x_0(\tau)$  равны  $2\pi$ , то будем искать  $x_i(\tau)$  как периодические функции периода  $2\pi$ .

Представим функцию  $f$  в виде

$$f\left(x, \omega \frac{dx}{d\tau}\right) = f_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n f_n(\tau), \quad (4.1.12)$$

где  $f_0(\tau) = f(x_0(\tau), dx_0/d\tau)$ .

Подставляя (4.1.11), (4.1.12) в (4.1.10) находим

$$\left(1 + \mu\Omega_1 + \mu^2\Omega_2 + \dots\right) \left(\frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + \mu \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \mu^2 \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \dots\right) + x_0 + \mu x_1 + \dots =$$

$$= \mu f_0 + \mu^2 f_1 + \dots$$

Приравнявая члены при одинаковых степенях  $\mu$ , получим систему рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + x_0 &= 0 \\ \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 &= -\Omega_1 \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + f_0 \equiv F_1(\tau) \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + x_2 &= -\Omega_2 \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} - \Omega_1 \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + f_1 \equiv F_2(\tau) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d^2 x_n}{d\tau^2} + x_n &= F_n(\tau) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Решение первого уравнения можно представить в виде

$$x_0(\tau) = A \cos \tau, \quad (4.1.14)$$

где  $A$  подлежит определению. Подставляя (4.1.14) во второе уравнение (4.1.13) получим

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = \Omega_1 A \cos \tau + f_0(A \cos \tau, -A \sin \tau) = F_1(\tau)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x_1(\tau) = X_1(\tau) + \int_0^\tau F_1(u) \sin(\tau - u) du,$$

где  $X_1 = A_1 \cos \tau + B_1 \sin \tau$  – общее решение однородного уравнения. Таким образом

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= A_1 \cos \tau + B_1 \sin \tau + \Omega_1 A \int_0^\tau \sin(\tau - u) \cos u du + \\ &+ \int_0^\tau f_0(A \cos u, -A \sin u) \sin(\tau - u) du. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Из условий периодичности

$$x_1(2\pi) = x_1(0), \quad \frac{dx_1(2\pi)}{d\tau} = \frac{dx_1(0)}{d\tau}$$

находим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f_0(A \cos u, -A \sin u) \sin u du &= 0 \\ \Omega_1 &= -\frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f_0(A \cos u, -A \sin u) \cos u du \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Из первого соотношения в (4.1.16) находим  $A$ . Второе соотношение определяет поправку  $\Omega_1$  к частоте:  $\omega^2 \simeq 1 + \mu\Omega_1$ . Порождающее решение:  $x_0 = A \cos \tau$ .

Рассмотрим пример (уравнение Ван дер Поля)

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}. \quad (4.1.17)$$

Первое уравнение в (4.1.16) дает

$$\int_0^{2\pi} (1 - A^2 \cos^2 u) A \sin^2 u du = 0.$$

Отсюда находим  $\pi A(1 - A^2/4) = 0$  и, следовательно,  $A = 2$ .

Второе соотношение в (4.1.16) дает:  $\Omega_1 = 0$ .

Таким образом, при малых  $\mu$  уравнение (4.1.17) имеет единственное периодическое решение с амплитудой  $A = 2$  и с частотой, равной собственной частоте ( $\omega = 1, \Omega_1 = 0$ ).

Если вычислить второе приближение, то получим  $A = 2, \omega^2 = 1 - \mu^2(1/8)$ .

Ограничения метода малого параметра Пуанкаре:

- метод не решает вопроса об устойчивости найденного периодического решения;
- не позволяет анализировать процесс установления;
- пригоден только для аналитических систем.

## 4.2. Метод усреднения

Рассмотрим произвольную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{I} = \varepsilon g(I, \vartheta), \quad \dot{\vartheta} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \vartheta), \quad (4.2.1)$$

заданную на прямом произведении  $T^k \times G$ :  $k$ - мерного тора  $T^k = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_k\}$  и области  $G \subset R^l = \{I_1, \dots, I_l\}$ . При  $\varepsilon = 0$  движение условно-периодическое. Метод усреднения состоит в замене системы (4.2.1) другой системой, называемой усредненной

$$\dot{u} = \varepsilon \bar{g}(u), \quad \bar{g}(u) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} g(u, \vartheta) d\vartheta_1 \dots d\vartheta_k, \quad (4.2.2)$$

определенной в  $l$ - мерной области  $G \subset R^l$  и в установлении соответствия между системами (4.2.1) и (4.2.2).

Для пояснения метода усреднения, следуя Арнольду [14], рассмотрим пример, когда  $k = l = 1$ :

$$\dot{I} = \varepsilon g(\vartheta), \quad \dot{\vartheta} = \omega \neq 0. \quad (4.2.3)$$

Покажем, что при  $0 < t < 1/\varepsilon$  справедлива оценка

$$|I(t) - u(t)| < C\varepsilon, \quad u(t) = I(0) + \varepsilon \bar{g}t. \quad (4.2.4)$$

Интегрируя (4.2.3), получаем

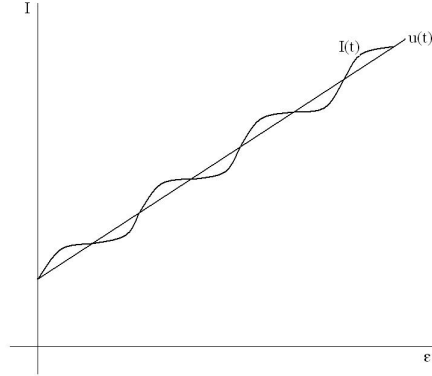
$$\begin{aligned} I(t) - I(0) &= \int_0^t \varepsilon g(\vartheta_0 + \omega t) dt = \int_0^t \varepsilon \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(\vartheta_0) e^{im\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\omega} \int_0^{t\omega} \varepsilon \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m e^{im\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{\omega} \int_0^{t\omega} \varepsilon g_0 d\vartheta + \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^{t\omega} \sum_{m \neq 0} g_m e^{im\vartheta} d\vartheta, \end{aligned}$$

где  $g_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\vartheta + \vartheta_0) d\vartheta = \bar{g}$ .

Таким образом

$$I(t) - I(0) = \varepsilon \bar{g}t + \varepsilon P(\omega t)/\omega,$$

где  $P(\omega t) = \int_0^{\omega t} \tilde{g}(\vartheta) d\vartheta$  – периодическая ограниченная функция.



Применяя принцип усреднения к гамильтоновой системе с гамильтонианом  $H(I, \theta) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta)$  получаем  $\dot{I} = 0$ . Таким образом, в гамильтоновой невырожденной системе эволюция отсутствует.

Рассмотрим частный случай системы (4.2.1), когда  $k = 1, \omega = \text{const}, f \equiv 0$ . Тогда

$$\dot{I} = \varepsilon g(I, \omega t). \quad (4.2.5)$$

Запишем систему (4.2.5) в более общей ”стандартной форме”

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.2.6)$$

где правая часть периодическая или почти периодическая по  $t$ .



**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.** Функция  $f(x, t)$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $t$  – вещественный скаляр, называется почти периодической по  $t$  равномерно относительно  $x \in D$ , если  $f(x, t)$  – непрерывна по  $t, x$  для  $t \in E, x \in D$  и если для любого  $\eta > 0$  найдется  $l(\eta)$  такое, что в любом интервале длиной  $l(\eta)$  существует значение  $\tau$ , при котором  $\|f(t + \tau, x) - f(t, x)\| \leq \eta$  для любых  $t \in E, x \in D$

Справедлива следующая теорема Боголюбова.

**ТЕОРЕМА 4.2 (Теорема Боголюбова 1).** Пусть вектор-функция  $X(x, t)$  удовлетворяет условиям:

1) для некоторой области  $D \subset \mathbb{R}^n$  можно указать такие положительные постоянные  $M$  и  $\lambda$ , что для любых  $t \geq 0$  и для любых точек  $x, x'$  и  $x''$  из  $D$  выполнены неравенства  $|X(x, t)| \leq M$ ;  $|X(x', t) - X(x'', t)| < \lambda|x' - x''|$ ;

2) равномерно по отношению к  $x \in D$  существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(x, t) dt = X_0(x).$$

Пусть  $\xi(t)$  – решение усредненной системы

$$\dot{\xi} = \varepsilon X_0(\xi) \quad (4.2.7)$$

и начальные условия для систем (4.2.6), (4.2.7) совпадают  $x(0) = x_0 = \xi(0) = \xi_0$ .

Тогда для любого (сколь угодно малого) числа  $\mu > 0$  и любого (сколь угодно большого) числа  $L > 0$  найдется такое значение  $\varepsilon_0(\mu, L)$ , что для любого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  справедливо неравенство  $|x(t) - \xi(t)| < \mu$  для любых  $t \in (0, L/\varepsilon)$ .

Доказательство теоремы см. в книге [13].

### 4.3. Применение метода усреднения для квазилинейных уравнений

Рассмотрим уравнения вида

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (4.3.1)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр, функция  $f$  – достаточно гладкая (аналитическая) в некоторой области  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Уравнение (4.3.1) эквивалентно квазигамильтоновой системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \equiv \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -x + \varepsilon f(x, y) \equiv -\frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon f(x, y) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Перейдем в системе (4.3.2) к каноническим переменным  $I, \vartheta$ :

$$x = \sqrt{2I} \sin \vartheta, \quad y = \sqrt{2I} \cos \vartheta. \quad (4.3.3)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon f(\sqrt{2I} \sin \vartheta, \sqrt{2I} \cos \vartheta) \sqrt{2I} \cos \vartheta \equiv \varepsilon B(I, \vartheta) \\ \dot{\vartheta} &= 1 - \varepsilon f(\sqrt{2I} \sin \vartheta, \sqrt{2I} \cos \vartheta) \sin \vartheta / \sqrt{2I}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Перейдем от системы (4.3.4) к усредненной системе:

$$\dot{u} = \varepsilon B_0(u), \quad (4.3.5)$$

где

$$B_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sqrt{2I} \sin \vartheta, \sqrt{2u} \cos \vartheta) \sqrt{2u} \cos \vartheta d\vartheta. \quad (4.3.6)$$

Установим связь между усредненной системой (4.3.6) и исходной (4.3.4). Разложим функцию  $B(I, \vartheta)$  в ряд Фурье

$$B(I, \vartheta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k(I) e^{ik\vartheta}$$

и сделаем в системе (4.3.4) замену

$$I = u - \varepsilon i \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} B_k e^{ik\vartheta}. \quad (4.3.7)$$

В результате приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \varepsilon B_0(u) + O(\varepsilon^2) \\ \dot{\vartheta} &= 1 + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

где члены  $O(\varepsilon)$  и  $O(\varepsilon^2)$  зависят как от  $u$ , так и от  $\vartheta$ .

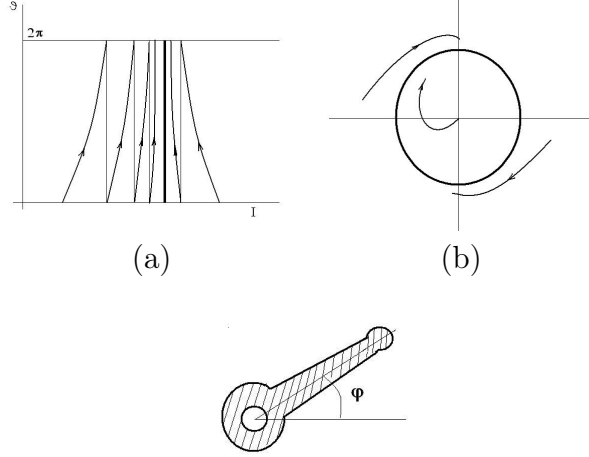
Отсюда следует обоснование процедуры усреднения. В частности, простому состоянию равновесия усредненной системы соответствует периодическое по  $\vartheta$  решение системы (4.3.8), а следовательно, и исходной системы (4.3.2) (см. рисунок (а) и (б) ниже).

**Пример.** Положим в (4.3.1)  $f = (a + bx^2)\dot{x}$  (при  $a = 1, b = -1$  уравнение называется уравнение Ван дер Поля). Тогда

$$\dot{u} = \varepsilon u(a + bu/2). \quad (4.3.9)$$

Это уравнение имеет два состояния равновесия:  $u_1 = 0, u_2 = -2b/a$ . Характеристическое уравнение имеет вид:  $\lambda = a + bu_k, k = 1, 2$ . Пусть  $ab < 0$  и  $a > 0$ . Тогда  $\lambda(u_1) = a > 0, \lambda(u_2) = -a < 0$ . Поэтому состояние равновесия  $u_1$  – неустойчивое, а  $u_2$  – устойчивое. Нетривиальному состоянию равновесия  $u_2$  в исходном уравнении

отвечает устойчивый предельный цикл, близкий к окружности радиуса  $u_2$  (по терминологии Андронова – автоколебательный режим).



**4.3.1. Маятник Фруда.** На вал, вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ , насажена втулка с жестко прикрепленным к ней маятником. Между валом и втулкой имеется сухое трение. Уравнение движения маятника при малых углах отклонения  $\varphi$  имеет вид

$$J\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} + mgl\varphi = M(\Omega - \dot{\varphi}), \quad (4.3.10)$$

где  $J$  – момент инерции маятника относительно оси вращения;  $h$  – коэффициент сопротивления;  $m$  – масса маятника;  $l$  – расстояние от оси вращения до центра тяжести;  $M$  – момент сил сухого трения, зависящий от относительной скорости трущихся поверхностей. Пусть

$$M(\Omega - \dot{\varphi}) = M(\Omega) - M'(\dot{\varphi}) - M'''(\Omega)\dot{\varphi}^3 + \dots$$

Уравнение (4.3.10) имеет состояние равновесия  $\varphi_0 = M(\Omega)/mgl$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ . Делая замену координаты  $\varphi - \varphi_0 = x$  и времени  $\tau = (mgl/J)t$  придем к уравнению

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \varepsilon \left[ -\alpha \frac{dx}{d\tau} - \beta \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^3 - \gamma \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^5 \right] \equiv \varepsilon f(dx/d\tau), \quad (4.3.11)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр. Положим  $\beta > 0$ .

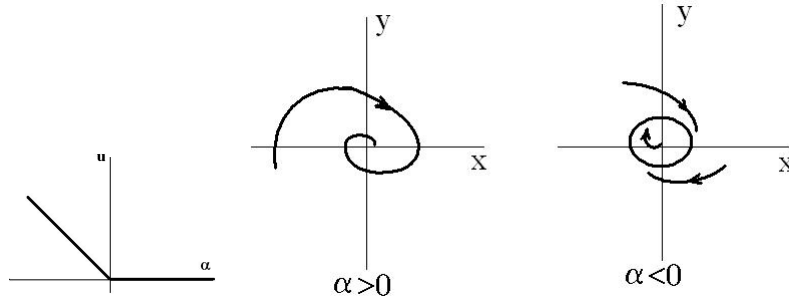
Для исследования уравнения (4.3.11) воспользуемся методом усреднения:

$$\dot{u} = \varepsilon B_0(u), \quad B_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sqrt{2u} \cos \vartheta) \sqrt{2u} \cos \vartheta d\vartheta. \quad (4.3.12)$$

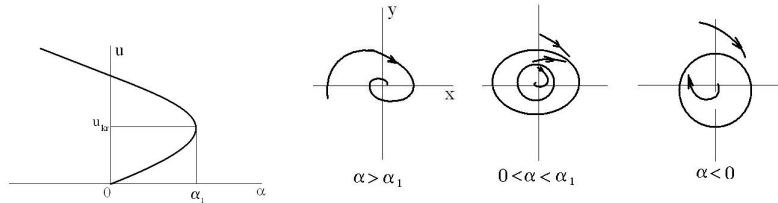
Вычисление  $B_0$  дает

$$B_0(u) = -u[\alpha + (3/2)\beta u + (5/2)\gamma u^2] \quad (4.3.13)$$

Состояния равновесия системы (4.3.12):  $u_0 = 0$ ,  $u_{1,2} = \frac{-3\beta \pm \sqrt{9\beta^2 - 40\alpha\gamma}}{10\gamma}$ .  
 Положим  $\beta > 0$ . Пусть  $\gamma = 0$ . В этом случае  $B_0(u) = -u(\alpha + (3/2)\beta u)$  и усредненная система имеет два состояния равновесия:  $u_0 = 0$ ;  $u_1 = -(2\alpha/3\beta)$ .



Пусть  $\gamma \neq 0, \beta < 0$ . Положим для определенности  $\gamma > 0$ . В этом случае усредненная система может иметь два нетривиальных состояния равновесия  $u_{1,2}$ . Имеем  $u_1 = u_2 = u_{kr} = -3\beta/10\gamma$  при  $9\beta^2 - 40\alpha\gamma = 0 \implies \alpha_1 = 9\beta^2/40\gamma$



#### 4.4. Метод усреднения для двумерных квазигамильтоновых систем

Рассмотрим двумерные автономные системы, близкие к **нелинейным** гамильтоновым:

$$\dot{x} = H'_y(x, y) + \varepsilon g_0(x, y), \quad \dot{y} = -H'_x(x, y) + \varepsilon f_0(x, y), \quad (4.4.1)$$

где гамильтониан  $H$  и функции  $g_0, f_0$  принадлежат классу  $C^k$ ,  $k \geq 3$  по переменным  $x, y$  из некоторой области  $G \subset R^2$ , ( $G \subset R^1 \times S^1$ ). Предположим, что у невозмущенной системы имеется хотя бы одна ячейка  $D_0 \subset G$ , заполненная замкнутыми фазовыми кривыми. Предположим также, что область  $D_0$  не содержит седел и их сепаратрис, а состояния равновесия имеют отличные от нуля корни характеристического уравнения.

Основной вопрос, возникающий при исследовании систем вида (4.4.1) – это установление качественного поведения решений в области  $D_0$ . Если функции  $g_0$ ,  $f_0$  зависят от параметров, то практически важным вопросом является вопрос о разбиении пространства параметров на области с разной топологией. Границы таких областей отвечают бифуркационным значениям параметров. Для ответа на основной вопрос преобразуем систему (4.4.1) к более удобному виду.

Прежде всего, в невозмущенной системе

$$\dot{x} = H'_y, \quad \dot{y} = -H'_x \quad (4.4.2)$$

перейдем в области  $D_0$  от переменных  $x, y$  к переменным действие  $I$ , угол  $\theta$  с помощью введенных ранее формул. Это преобразование можно записать в виде

$$x = X(I, \theta), \quad y = Y(I, \theta), \quad (4.4.3)$$

где  $X, Y$  – периодические по  $\theta$  с периодом  $2\pi$  функции. Например, при  $H(x, y) = y^2/2 + x^2/2 + x^4/4$  эти функции записываются в виде (3.1.19).

Дифференцируя (4.4.3) по  $t$ , получаем

$$\dot{x} = X'_\theta \dot{\theta} + X'_I \dot{I}, \quad \dot{y} = Y'_\theta \dot{\theta} + Y'_I \dot{I}. \quad (4.4.4)$$

Учитывая равенство единице якобиана канонического преобразования (4.4.3) и разрешая (4.4.4) относительно  $\dot{I}$ ,  $\dot{\theta}$  находим

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -Y'_\theta \dot{x} + X'_\theta \dot{y} = -X'_\theta H'_x - Y'_\theta H'_y = -dH/d\theta = 0 \\ \dot{\theta} &= Y'_I \dot{x} - X'_I \dot{y} = Y'_I H'_y + X'_I H'_x = dH/dI \equiv \omega(I). \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Обратимся теперь к возмущенной системе (4.4.1). Используя (4.4.5), запишем систему (4.4.1) в переменных  $I, \theta$ .

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon[f_0(\cdot)X_\theta + g_0(\cdot)Y_\theta] \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon[-f_0(\cdot)X_I + g_0(\cdot)Y_I]. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Вводя обозначения

$$B(I, \theta) = f_0 X_\theta - g_0 Y_\theta, \quad Q(I, \theta) = -f_0 X_I + g_0 Y_I, \quad (4.4.7)$$

перепишем систему (4.4.6) в виде

$$\dot{I} = \varepsilon B(I, \theta), \quad \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon Q(I, \theta). \quad (4.4.8)$$

Здесь, в силу определения, функции  $B$  и  $Q$  – периодические по  $\theta$  с периодом  $2\pi$ . В отличие от исходной системы (4.4.1) в системе (4.4.8) переменные разделены на "быструю" –  $\theta$  и "медленную"

–  $I$ . Таким образом, к системе (4.4.8) можно применить принцип усреднения. В соответствии с этим принципом вместо системы (4.4.8) можно рассмотреть усредненную систему

$$\dot{u} = \varepsilon B_0(u), \quad B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(u, \theta) d\theta. \quad (4.4.9)$$

При таком формальном переходе к усредненной системе остается открытым вопрос о соответствии поведения решений систем (4.4.8) и (4.4.9). Для ответа на этот вопрос сделаем в системе (4.4.8) замену

$$I = u - \frac{\varepsilon i}{\omega(I)} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} B_k(u) e^{ik\theta}, \quad (4.4.10)$$

где  $B_k$  – суть коэффициенты Фурье разложения периодической по  $\theta$  функции  $B(u, \theta)$  в ряд Фурье:

$$B(u, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k(u) e^{ik\theta}. \quad (4.4.11)$$

*Замечание.* Поскольку область  $D_0$  не содержит сепаратрис седла, то  $\omega(I) \neq 0$  в  $D_0$  и в замене (4.4.10) нет "малого знаменателя".

В результате система (4.4.8) преобразуется к виду

$$\dot{u} = \varepsilon B_0(u) + O(\varepsilon^2), \quad \dot{\theta} = \omega(u) + O(\varepsilon), \quad (4.4.12)$$

где невыписанные члены порядка  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^2$  зависят как от  $u$ , так и от  $\theta$ .

#### **Качественное поведение решений в отдельной ячейке.**

Если в системе (4.4.12) пренебречь членами  $O(\varepsilon^2)$ , то система расщепится на два уравнения, и тем самым приходим к усредненной (одномерной) системе (4.4.9). Для грубой (в смысле Андронова-Понтрягина) усредненной системы малые добавки порядка  $\varepsilon^2$  не изменяют качественного поведения решений двумерной укороченной системы

$$\dot{u} = \varepsilon B_0(u), \quad \dot{\theta} = \omega(u) + O(\varepsilon). \quad (4.4.13)$$

Поведение решений системы (4.4.13) легко установить, если мы знаем, как ведут себя решения усредненной системы (4.4.9): фазовое пространство системы (4.4.13) – это прямое произведение интервала  $\Delta = (u_1, u_2) \in R^1$  на окружность  $S^1$ . Поэтому, если у усредненной системы есть устойчивое состояние равновесия  $u = u_0 \in \Delta$  ( $B_0(u_0) = 0$ ,  $B'_0(u_0) < 0$ ), то в исходной системе ему отвечает грубый устойчивый предельный цикл – изолированная замкнутая фазовая кривая. Все близкие фазовые кривые асимптотически при  $t \rightarrow \infty$  к ней приближаются.

**Пример.** В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x + x^3 = \varepsilon(a - x^2)\dot{x}, \quad (4.4.14)$$

Для невозмущенного уравнения ( $\varepsilon = 0$ ) фазовые кривые замкнутые и окружают единственное состояние равновесия  $O(0, 0)$  типа центр. Согласно (3.1.19) решение этого уравнения имеет вид

$$x = X(I, \vartheta) = x_1(I)\operatorname{cn}(2\mathbf{K}\vartheta/\pi), \quad \vartheta = \omega t. \quad (4.4.15)$$

Из (4.4.15) находим

$$X'_\vartheta = (-x_1 2\mathbf{K}/\pi)\operatorname{sn}(2\mathbf{K}\vartheta/\pi)\operatorname{dn}(2\mathbf{K}\vartheta/\pi), \quad Y = \omega X'_\vartheta. \quad (4.4.16)$$

Для (4.4.14) усредненная система имеет вид

$$\dot{u} = B_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [a - X^2(u, \vartheta)] Y X'_\vartheta d\vartheta. \quad (4.4.17)$$

Подставляя в (4.4.17) выражение для решения  $X(I, \vartheta)$  из (4.4.15) и его производных, получаем

$$B_0(u) = \frac{2x_1^2 \mathbf{K}^2 \omega}{\pi^2} \int_0^{2\pi} [\operatorname{sn}^2(2\mathbf{K}\vartheta/\pi)\operatorname{dn}^2(2\mathbf{K}\vartheta/\pi)(a - x_1^2 \operatorname{cn}^2(2\mathbf{K}\vartheta/\pi))] d\vartheta \quad (4.4.18)$$

Модуль эллиптического интеграла  $\mathbf{K}(k)$  согласно (3.1.14) определяется по формуле  $k^2 = x_1^2/(x_1^2 - x_2^2)$ , а частота  $\omega$  – по формуле  $\omega = \pi/2\mathbf{K}\sqrt{1 - 2k^2}$ . Используя формулы для корней  $x_1, x_2$ , получаем  $x_1^2 = 2k^2/(1 - 2k^2)$ .

Делая в интеграле в (4.4.18) замену  $\varphi = 2\mathbf{K}\vartheta/\pi$ , находим

$$B_0(k(u)) = \frac{k^2}{\pi(1 - 2k^2)^{3/2}} \int_0^{4\mathbf{K}} \operatorname{sn}^2 \varphi \operatorname{dn}^2 \varphi (a - x_1^2 \operatorname{cn}^2 \varphi) d\varphi. \quad (4.4.19)$$

Таким образом, вычисление интеграла в (4.4.19) с помощью известных тождеств для эллиптических функций сводится к вычислению интегралов

$$\int_0^{4\mathbf{K}} \operatorname{sn}^{2n} \varphi d\varphi, \quad n = 1, 2, 3.$$

Последние могут быть вычислены с помощью рекуррентной формулы

$$(m+3)k^2 \int \operatorname{sn}^{m+4} \varphi d\varphi = \operatorname{sn}^{m+4} \varphi \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi - (m+1) \int \operatorname{sn}^m \varphi d\varphi + \\ + (m+2)(1+k^2) \int \operatorname{sn}^{m+2} \varphi d\varphi$$

и известного тождества  $\int_0^{4\mathbf{K}} \operatorname{sn}^2 \varphi d\varphi = 4[\mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k)]/k^2$ .

Окончательно находим

$$\begin{aligned}
B_0(k) &= \\
&= \frac{8}{\pi(1-2k^2)^{5/2}} \left[ \left[ \frac{a}{6}(1-2k^2)(1-k^2) - \frac{1}{15}(k^2-1)(2-k^2) \right] \mathbf{K}(k) + \right. \\
&+ \left. \left[ -\frac{a}{6}(1-2k^2)^2 - \frac{2}{15}(k^4-k^2+1) \right] \mathbf{E}(k) \right].
\end{aligned} \tag{4.4.20}$$

Отсюда следует, что нахождение вещественных нулей функции  $B_0(k)$  сводится к нахождению на интервале  $(0, 1/\sqrt{2})$  нулей функции

$$\tilde{B}(k) = P_2(k^2)\mathbf{K}(k) + Q_2(k^2)\mathbf{E}(k), \tag{4.4.21}$$

где

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{a}{6}(1-2k^2)(1-k^2) - \frac{1}{15}(k^2-1)(2-k^2), \\
Q_2 &= -\frac{a}{6}(1-2k^2)^2 - \frac{2}{15}(k^4-k^2+1).
\end{aligned}$$

Простые нули функции  $\tilde{B}(k)$  определяют невозмущенные уровни энергии  $y^2/2 + x^2/2 + x^4/4 = h$ , от которых под действием возмущения родится предельный цикл.

Значению  $k = 0$  отвечает состояние равновесия типа центр невозмущенной системы, а  $k = 1/\sqrt{2}$  – бесконечно удаленная замкнутая фазовая кривая.

Используя разложения  $\mathbf{K}(k)$  и  $\mathbf{E}(k)$  в степенной ряд в окрестности точки  $k = 0$

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right), \mathbf{E}(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3k^4}{64} - \dots \right) \tag{4.4.22}$$

находим

$$\tilde{B}(k) = \frac{\pi}{60} \left[ \frac{15a}{2}k^2 - \frac{285a+44}{16}k^4 + O(k^6) \right]. \tag{4.4.23}$$

Следовательно, при  $k > 0, k \approx 0$  и  $a > 0, a \approx 0$  уравнение  $\tilde{B}(k) = 0$  имеет простой корень  $k_0^2(a) \approx 120a/(285a+44)$ , причем  $k_0(0) = 0$ . Этому значению  $k_0$  соответствует значение  $h_0$ , определяющее замкнутую фазовую кривую  $y^2/2 = x^2/2 + x^4/4 = h_0$  невозмущенной системы, в малой окрестности которой у возмущенной системы существует грубый предельный цикл.

Этот результат согласуется с локальным исследованием исходной системы в окрестности состояния равновесия  $O(0,0)$ :  $Re\lambda_{1,2} = \varepsilon a/2$ . Первая ляпуновская величина  $l_1$  совпадает с точностью до постоянного положительного множителя с коэффициентом при  $k^4$ , когда  $a = 0$ .



При  $\varepsilon a < 0$  состояние равновесия  $O(0, 0)$  является грубым (устойчивым) фокусом; при  $a = 0$  фокус становится негрубым (первой степени негрубости, ибо  $l_1 \neq 0$ ); при дальнейшем увеличении  $a$  из фокуса родится устойчивый предельный цикл, а фокус становится неустойчивым (бифуркация Андронова-Хопфа).

Дальнейшую судьбу предельного цикла можно проследить, используя (4.4.21). Можно показать, что уравнение  $\tilde{B}(k) = 0$  при  $k \in (0, 1/\sqrt{2})$  и  $a > 0$  имеет только один вещественный корень, который с увеличением  $a$  ( $a \rightarrow \infty$ ) растет по величине. Это означает, что предельный цикл, родившийся из фокуса при  $a = 0$  с увеличением  $a$  растет "по амплитуде  $h$ " и при  $a \rightarrow \infty$  "уходит" на бесконечность. Это похоже на то, что имеет место для уравнения Ван дер Поля. Тем самым мы построили разбиение одномерного пространства параметров на области с разными топологическими структурами.

**Упражнение 1.** Постройте порождающую функцию  $B_0(k)$  для системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + x^3 + \varepsilon(a - x^2)y.$$

**Упражнение 2.** Могут ли в системе из упражнения 1 существовать предельные циклы?

## Другие автономные системы

### 5.1. Разрывные колебания

Рассмотрим систему<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\mu\dot{x}_i &= F_i(x_1, \dots, x_s; y_1, \dots, y_m) \\ \dot{y}_j &= G_j(x_1, \dots, x_s; y_1, \dots, y_m),\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

где  $\mu$  – малый положительный параметр, функции  $F_i, G_j$  – достаточно гладкие в некоторой области фазового пространства  $R^{s+m}$ .

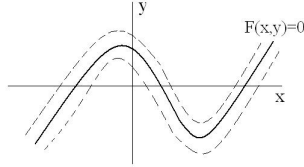
Пусть  $s = m = 1$ . Запишем систему (5.1.1) в виде

$$\begin{aligned}\mu\dot{x} &= F(x, y) \\ \dot{y} &= G(x, y).\end{aligned}\tag{5.1.2}$$

При  $\mu \rightarrow 0$  имеем

$$F(x, y) = 0, \quad \dot{y} = G(x, y).\tag{5.1.3}$$

В фазовом пространстве системы (5.1.2) состояния предельной системы (5.1.3) располагаются в одномерном подпространстве, определяемом равенством  $F(x, y) = 0$ . Фазовая точка системы (5.1.3) перемещается в плоскости  $(x, y)$  вдоль кривой  $F(x, y) = 0$ .



Если  $\mu \neq 0$  и мало, то движение может происходить в некоторой полосе, содержащей кривую  $F(x, y) = 0$ . Обозначим через  $U_{\mu^\alpha}$  – окрестность кривой  $F(x, y) = 0$  шириной порядка  $O(\mu^\alpha)$ , где  $0 < \alpha < 1$ . Вне окрестности  $U_{\mu^\alpha}$  имеем  $|F(x, y)| \geq O(\mu^\alpha)$  и

$$|\dot{x}| = \frac{1}{\mu}|F(x, y)| \geq O(\mu^{\alpha-1}).$$

<sup>1</sup>Подробности см. в [23, 2].

Так как  $0 < \alpha < 1$  и  $\mu$  – мало, то  $\dot{x} \rightarrow \infty$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Тогда **вне**  $U_{\mu^\alpha}$  переменная  $x$  изменяется быстро, а  $\dot{y} = G(x, y)$  остается ограниченной величиной. В этой области за малое время переменная  $y$  не успевает измениться, в то время как  $x$  изменяется на конечную величину. Эту область фазового пространства назовем **областью быстрых движений**.

В области быстрых движений уравнения движения имеют вид

$$y = y_0 = \text{const}, \quad \dot{x} = \frac{1}{\mu} F(x, y_0). \quad (5.1.4)$$

Таким образом, вне окрестности  $U_{\mu^\alpha}$  исходные уравнения (5.1.2) заменяются приближенными уравнениями (5.1.4) (**гипотеза скачка**).

Окрестность  $U_{\mu^\alpha}$  назовем **областью медленных движений**.

Возможны два случая.

*Случай 1.* Все траектории системы (5.1.2) входят в окрестность  $U_{\mu^\alpha}$  (при  $t \rightarrow \infty$ ). Тогда можно отказаться от рассмотрения траекторий быстрых движений и постулировать, что изображающая точка скачком переходит в соответствующую точку окрестности  $U_{\mu^\alpha}$ . В этом случае динамика описывается системой (5.1.3).

*Случай 2.* Не все траектории стремятся в окрестность  $U_{\mu^\alpha}$ . Существует непустое множество начальных условий, из которых выходят траектории, покидающие  $U_{\mu^\alpha}$ .

Если  $\lambda = (\partial F(x, y_0)/\partial x) < 0$  для любых  $x \in U_{\mu^\alpha}$ , то имеет место случай 1).

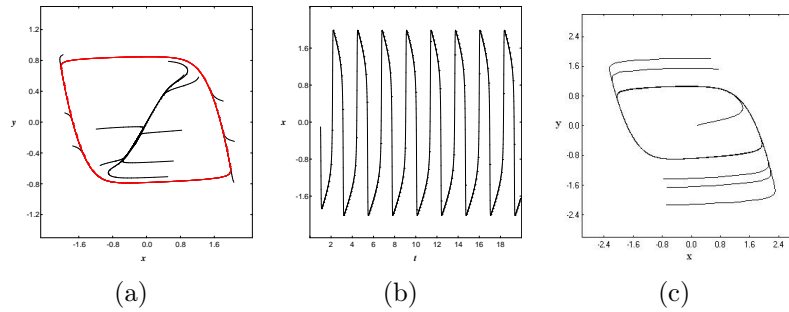
**Пример.** Рассмотрим "точечный" вариант системы Фитц Хью-Нагумо

$$\begin{aligned} \mu \frac{dx}{dt} &= x - x^3/3 - y \\ \frac{dy}{dt} &= \mu(x - \gamma y + \beta), \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

где  $\beta, \gamma$  – параметры,  $\mu$  – малый параметр. Вводя медленное время  $\tau = \mu t$ , приходим к системе

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx}{d\tau} &= x - x^3/3 - y \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - \gamma y + \beta, \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

где  $\varepsilon = \mu^2$ . Ниже на рисунке (а,с) показан фазовый портрет системы (5.1.6) при  $\beta = 0.2$ ,  $\gamma = 0.3$  и  $\varepsilon = 1/30$ (а) и  $\varepsilon = 0.1$ (с), а на рисунке (b) - график  $x(t)$  для (а).



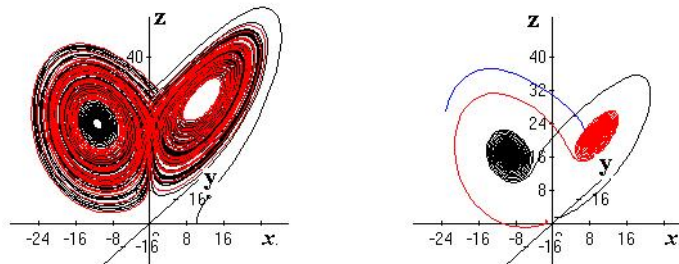
## 5.2. Нерегулярные колебания. Странные аттракторы

Рассмотрим систему Лоренца [24, 10]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(-x + y) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

В системе (5.2.1) в зависимости от положительных параметров  $\sigma, r, b$  существует одно или три простых состояния равновесия. Нетрудно показать, что  $\dot{V} = -(\sigma + b + 1)V$ , где  $V = x^2 + y^2 + z^2$ , а величина  $-(\sigma + b + 1)$  определяет дивергенцию векторного поля системы Лоренца. Поэтому при выполнении условия  $\sigma + b + 1 > 0$  фазовый объем сжимается.

При  $r > 1$  система (5.2.1) имеет три состояния равновесия, которые при  $r > r_{cr} = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$  — неустойчивые. Например, при  $\sigma = 10, b = 8/3$  имеем  $r_{cr} \approx 24.74$ . При  $r = 28$  Лоренц наблюдал ”странный аттрактор”, показанный на рисунке (а). На рисунке (б) показан случай, когда  $r = 10$ .



(a)

(b)

**Упражнение.** Найдите состояния равновесия системы (5.2.1) и установите их тип.

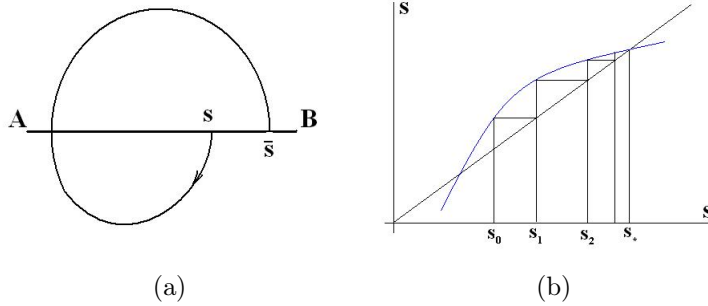
### 5.3. Метод точечных отображений на примере двумерных систем

Допустим, что на фазовой плоскости системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

имеется отрезок без контакта  $AB$  (см. рисунок (а)) и  $s$  определяет положение точки на этом отрезке. Тогда фазовые кривые системы (5.3.1) индуцируют отображение отрезка  $AB$  в себя:

$$\bar{s} = f(s).$$



**ТЕОРЕМА 5.1.** *Неподвижная точка  $s = s_*$  точечного отображения  $\bar{s} = f(s)$  устойчива, если*

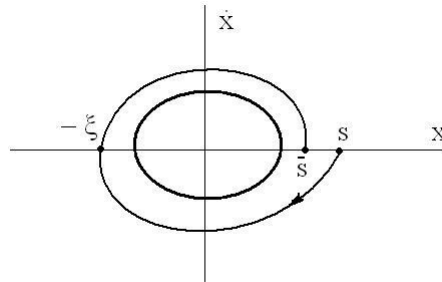
$$\left| \frac{df(s_*)}{ds} \right| < 1$$

*и неустойчива, если  $|f'(s_*)| > 1$ .*

Рассмотрим пример

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = \begin{cases} 0, & \dot{x} < 0 \\ a, & \dot{x} = 0 \\ 1, & \dot{x} > 0 \end{cases} \quad (5.3.2)$$

Найдем функцию последования  $f(s)$ . Пусть  $0 < \delta \ll 1$ .



Тогда фазовые кривые определяются уравнением

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = 0 \quad (5.3.3)$$

Очевидно, фазовые кривые – спирали.

$$\begin{aligned} x &= e^{-\delta t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{1 - \delta^2} \\ y = \dot{x} &= e^{-\delta t}[(-\delta A + \omega B) \cos \omega t - (\delta B + \omega A) \sin \omega t] \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Пусть  $x_0 = s, y_0 = 0, t_0 = 0$ . Из (5.3.4) находим  $A = s, -\delta A + \omega B = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} x &= e^{-\delta t}(s \cos \omega t + B \sin \omega t), \\ y = \dot{x} &= -e^{-\delta t}(\delta B + \omega s) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

В момент времени  $t_1 = \pi/\omega$  имеем  $y = 0$  и  $-\xi = x(t_1) = -se^{-\delta\pi/\omega}$ . Отсюда находим  $\xi = se^{-\gamma}, \quad \gamma = \delta\pi/\omega$ .

Далее переходим к уравнению

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = 1$$

с начальными условиями:  $x_0 = -\xi, y_0 = 0$  при  $t = 0$  (начальный момент выбрали нулевым для удобства). Для точки  $\bar{s}$  находим  $t_2 = \pi/\omega$ . Тогда окончательно находим

$$t_2 = \pi/\omega, \quad \bar{s} = 1 + e^{-\gamma} + se^{-2\gamma} \equiv f(s).$$

Итак  $f(s)$  – линейная функция и ее производная в неподвижной точке  $s = s_* = (1 + e^{-\gamma})/(1 - e^{-2\gamma})$  меньше единицы. Это означает, что неподвижная точка  $s_*$  – устойчивая и ей отвечает в исходном уравнении (5.3.2) устойчивый предельный цикл.

Подробнее о методе точечных отображений см. в [25].



## Периодические по времени линейные системы

### 6.1. Вынужденные колебания в системах с одной степенью свободы

Вынужденные колебания в системах с одной степенью свободы описываются уравнением [5]

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (6.1.1)$$

где  $f(t)$  – внешняя периодическая по  $t$  сила,  $\omega_0$  – частота собственных колебаний в отсутствии трения,  $h > 0$  – коэффициент трения. Как известно, решение  $x(t)$  уравнения (6.1.1) складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Это частное решение и описывает вынужденные колебания системы, обусловленные внешней силой  $f(t)$ , а не начальными условиями.

При малом трении ( $h < \omega_0$ ) вынужденное решение определяется выражением

$$x_{forced}(t) = \frac{e^{-ht}}{\omega} \int_0^t f(u) e^{hu} \sin \omega(t-u) du, \quad (6.1.2)$$

где  $\omega = \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$ . Рассмотрим частный случай, когда  $f(t) = f_0 \sin \Omega t$ , где  $f_0$  – амплитуда, а  $\Omega$  – частота внешнего воздействия.

Рассмотрим прежде всего консервативную систему, когда  $h = 0$ . Тогда уравнение (6.1.1) принимает вид

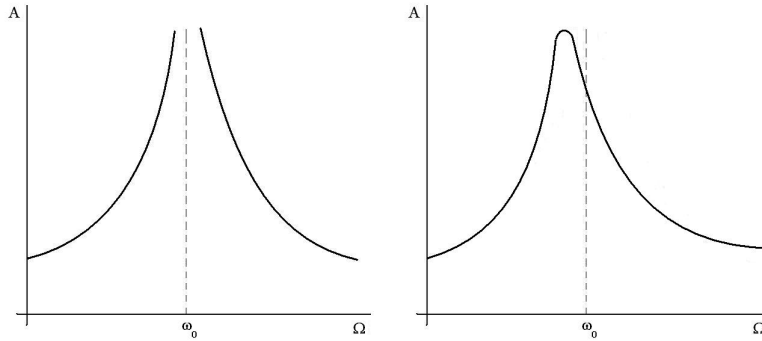
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \Omega t. \quad (6.1.3)$$

В этом случае в системе совершаются как собственные колебания с частотой  $\omega_0$ , так и вынужденные с частотой  $\Omega$ . Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$x_{forced}(t) = A \sin \Omega t, \quad A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (6.1.4)$$

График зависимости амплитуды вынужденного решения показан на левом рисунке. Видно, что  $A \rightarrow \infty$  при  $\Omega \rightarrow \omega_0$ .





Явление, которое наступает при совпадении частоты внешнего воздействия с собственной частотой называют **резонансом**, а кривую на рисунке – резонансной кривой.

Анализ решения (6.1.2) показывает, что  $x_{forced}(t) \sim t \sin \omega_0 t$ .

При малом сопротивлении ( $h \ll \omega_0$ ) зависимость вынужденных колебаний от амплитуды показана на правом рисунке. В этом случае отсутствует бесконечный разрыв резонансной кривой.

При  $h \ll \omega_0$  под резонансом понимают резкое увеличение амплитуды колебаний при  $\Omega \approx \omega_0$ .

Отметим следующий факт. В линейной системе, описываемой уравнением (6.1.1), каждому значению частоты внешней силы соответствует только одно значение амплитуды вынужденных колебаний. Далее мы увидим, что наличие нелинейности существенно меняет ситуацию. Например, одному значению  $\Omega$  может соответствовать три значения амплитуды вынужденных колебаний.

## 6.2. Параметрические колебания

Параметрической системой обычно называют систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими по времени коэффициентами. Теория таких систем – это теория Флоке, излагаемая в общем курсе обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, пособие [26]). Изложение в данной главе следует Арнольду [14] и ограничивается линейными системами. Интересующихся параметрическими системами, близкими к нелинейным интегрируемым гамильтоновым, мы адресуем к книге [10] (см. также следующую главу).

*Примеры параметрических систем.*

1) Примером параметрической системы являются качели, у которых длина эквивалентного математического маятника изменяется со временем периодически. Маятник переменной длины описывается уравнением (см., например, [5]):

$$ml^2\ddot{\theta} + 2mll\dot{\theta} + mgl \sin \theta = 0,$$

где  $m$  – масса маятника,  $l$  – его длина, являющаяся периодической функцией времени,  $g$  – ускорение свободного падения. При малых углах  $\theta$  отклонения маятника имеем уравнение

$$\ddot{\theta} + (g/l(t))\theta = 0.$$

Колебания такого маятника называют параметрическими.

2). Маятник с вертикально вибрирующей точкой подвеса описывается уравнением [5]:

$$l\ddot{\theta} + \lambda l\dot{\theta} + (g + f(\nu t)) \sin \theta = 0,$$

или уравнением

$$\ddot{\theta} + (a + bf(\nu t)) \sin \theta = 0$$

или уравнением

$$\ddot{\theta} + (a + b \cos \nu t)\theta = 0,$$

где  $\lambda, a, b, \nu$  – параметры.

При  $\nu = 2$  последнее уравнение называется уравнением Матье. Более общее уравнение Хилла имеет вид  $\ddot{x} + p(t)x = 0$ ,  $p(t+T) = p(t)$ , где функция  $p(t)$  представляется рядом Фурье. Это уравнение возникает при построении периодических решений в задаче о движении Луны.

**6.2.1. Отображение за период.** Запишем параметрические системы в виде

$$\dot{x} = F(x, t), \quad F(x, t+T) = F(x, t), \quad x \in R^n. \quad (6.2.1)$$

*Общие свойства системы (6.2.1).*

Обозначим через  $g^t : R^n \rightarrow R^n$  отображение, переводящее  $x \in R^n$  в значение в момент  $t : g^t x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  – решение системы (6.2.1) с начальным условием  $\varphi(0) = x$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.** *Отображение  $g^T : R^n \rightarrow R^n$  будем называть отображением за период и обозначать через  $A : R^n \rightarrow R^n$ ,  $Ax(0) = x(T)$ .*

**ТЕОРЕМА 6.1.** *1). Точка  $x_0$  есть неподвижная точка отображения  $A$  ( $Ax_0 = x_0$ ) тогда и только тогда, когда решение с начальным условием  $x(0) = x_0$  периодическое с периодом  $T$ .*

2) Периодическое решение  $x(t)$  устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда неподвижная точка  $x_0$  отображения  $A$  устойчива по Ляпунову (асимптотически устойчива).

3) Если система (6.2.1) линейная, т.е.  $F(x, t) = F(t)x$ , то отображение  $A$  – линейно.

4) Если система (6.2.1) гамильтонова, то отображение  $A$  сохраняет объем, т.е.  $\det A = 1$ .

Применим эту теорему к уравнению  $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$ , которое эквивалентно линейной гамильтоновой системе ( $H = \dot{x}^2/2 + \omega^2(x^2/2)$ ). В результате получим, что отображение  $A$  линейно и сохраняет площадь. Для устойчивости нулевого решения необходима и достаточна устойчивость неподвижной точки отображения  $A$ .

**ТЕОРЕМА 6.2.** Пусть  $A$  – матрица сохраняющего площадь линейного отображения плоскости на себя ( $\det A = 1$ ). Тогда отображение  $A$  устойчиво, если  $|tr A| < 2$  и неустойчиво, если  $|tr A| > 2$ .

*Доказательство.* Пусть  $\lambda_{1,2}$  – собственные числа матрицы  $A$ . Они удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\lambda^2 - tr A \lambda + 1 = 0$$

( $\lambda_1 + \lambda_2 = tr A$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 = 1 = \det A$ ). При  $|tr A| > 2$   $\lambda_{1,2}$  – вещественные и при  $|tr A| < 2$  – комплексно-сопряженные.

Таким образом, вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения  $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$  сводится к вычислению следа матрицы  $A$ . К сожалению, вычислить  $tr A$  удастся лишь в специальных случаях. Один из таких случаев мы рассмотрим.

### 6.2.2. Сильная устойчивость. Зоны неустойчивости.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2.** Нулевое решение линейной гамильтоновой системы **сильно устойчиво**, если оно устойчиво, и у всякой достаточно близкой линейной гамильтоновой системы нулевое решение также устойчиво.

Из теорем 1,2 вытекает: если  $|tr A| < 2$ , то нулевое решение сильно устойчиво. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2(1 + \varepsilon a(t))x = 0, \quad (6.2.2)$$

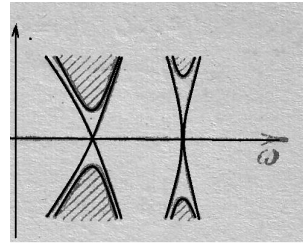
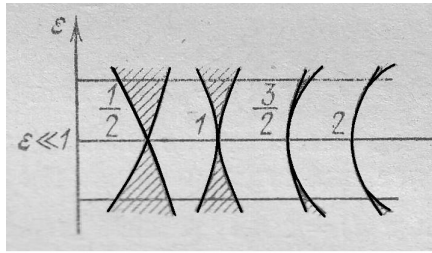
где  $\varepsilon$  – малый параметр,  $a(t + 2\pi) = a(t)$ , например,  $a = \cos t$ . Справедлива

**ТЕОРЕМА 6.3.** Все точки оси  $\omega$ , исключая целые и полуцелые точки  $\omega = k/2$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  соответствуют сильно устойчивым системам (6.2.2).

Поэтому множество неустойчивых систем может подходить к оси  $\omega$  только в точках  $\omega = k/2$ . Доказательство этой теоремы основано на том, что при  $\varepsilon = 0$  уравнение (6.2.2) имеет постоянные коэффициенты и явно решается. Матрица преобразования  $A$  за период  $T = 2\pi$  в базисе  $x, \dot{x}$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\omega & \sin 2\pi\omega/\omega \\ -\omega \sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega \end{pmatrix}.$$

Поэтому  $|tr A| = |2 \cos 2\omega\pi| < 2$ , если  $\omega \neq k/2, k = 0, 1, \dots$ . Это доказывает теорему.



Граница устойчивости дается уравнением  $|tr A| = 2$ . Каждую систему (6.2.2) изобразим точкой на плоскости параметров  $(\omega, \varepsilon)$ . В результате получим зоны неустойчивости, изображенные на рисунке слева штриховкой. При наличии малого трения получим зоны неустойчивости, изображенные на правом рисунке.

Явление неустойчивости колебаний называется **параметрическим резонансом**. Таким образом, на рисунке показаны зоны параметрического резонанса.



## Периодические по времени возмущения

### 7.1. Периодические по времени возмущения линейного осциллятора

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}, \nu t), \quad (7.1.1)$$

где функция  $f(x, \dot{x}, \nu t)$  – периодическая по  $\nu t$  с периодом  $2\pi$ ,  $\nu$  – частота возмущения,  $\varepsilon$  – малый положительный параметр. Предполагаем, что функция  $f$  достаточно гладкая по своим аргументам в некоторой области  $D \subset \mathbb{R}^2 \times S^1$ . Уравнение (7.1.1) эквивалентно системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon f(x, y, \varphi) \quad \dot{\varphi} = \nu. \quad (7.1.2)$$

Перейдем в системе (7.1.2) от переменных  $(x, y)$  к переменным действию  $-I$ , углу  $\theta$  о формулам

$$x = \sqrt{2I} \sin \theta, \quad y = \sqrt{2I} \cos \theta. \quad (7.1.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon f(\sqrt{2I} \sin \theta, \sqrt{2I} \cos \theta, \varphi) \sqrt{2I} \cos \theta \equiv \varepsilon B(I, \theta, \varphi) \\ \dot{\theta} &= 1 - \varepsilon f(\sqrt{2I} \sin \theta, \sqrt{2I} \cos \theta, \varphi) \sin \theta / \sqrt{2I} \equiv 1 + \varepsilon Q(I, \theta, \varphi) \\ \dot{\varphi} &= \nu. \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

В системе (7.1.4) переменные разделены на медленную  $I$  и быстрые  $\theta, \varphi$ . Применяя к этой системе принцип усреднения, получим усредненную систему

$$\dot{u} = \varepsilon B_{00}(u), \quad (7.1.5)$$

где

$$B_{00}(u) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} B(u, \theta, \varphi) d\theta d\varphi \quad (7.1.6)$$

Нетрудно показать, что в резонансных случаях, когда собственная частота  $\omega$  ( $\omega = 1$ ) и частота возмущения  $\nu$  соизмеримы:

$$\nu = \frac{p}{q},$$

где  $(p, q)$  – взаимно простые целые числа, усредненная система не определяет поведение решений исходной системы (7.1.2). Поэтому в резонансных случаях сделаем в системе (7.1.4) замену

$$\theta = \psi + \frac{q}{p}\varphi. \quad (7.1.7)$$

При  $p = q = 1$  говорят о главном (или основном) резонансе; при  $p > 1, q = 1$  – о субрезонансе; при  $p = 1, q > 1$  – ультрарезонансе; наконец, при  $p > 1, q > 1$  – об ультрасубрезонансе.

В результате замены (7.1.7) система (7.1.4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon B(I, \psi + \frac{q}{p}\varphi, \varphi) \\ \dot{\psi} &= \varepsilon Q(I, \psi + \frac{q}{p}\varphi, \varphi) \\ \dot{\varphi} &= \nu. \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

Усредняя эту систему по  $\varphi$  приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \varepsilon B_0(u, v) \\ \dot{v} &= \varepsilon Q_0(u, v), \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

где

$$B_0(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(u, v + \frac{q}{p}\varphi, \varphi) d\varphi, \quad Q_0(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(\cdot) d\varphi. \quad (7.1.10)$$

Правые части системы (7.1.9) периодические по  $v$  с периодом  $2\pi$  и поэтому фазовым пространством этой системы является цилиндр  $\{u, v(\text{mod}2\pi)\}$ .

Простым состояниям равновесия системы (7.1.9) соответствуют в исходной системе (7.1.2) грубые периодические решения периода  $2p\pi/q$ . Такие решения называют резонансными решениями.

Далее рассмотрим два примера.

### 7.1.1. Пример 1, проясняющий роль нелинейности.

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(ax^3 + bx + dx + c \sin(\nu t)), \quad (7.1.11)$$

где  $a, b, c, d$  – параметры. В этом случае  $f = ax^3 + bx + dx + c \sin(\nu t)$  и усредненная система (7.1.9) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \varepsilon(bu - c \frac{\sqrt{2u}}{2} \sin v) \\ \dot{v} &= -\varepsilon \left( \frac{d}{2} + \frac{a}{4}u + \frac{c}{2\sqrt{2u}} \cos v \right). \end{aligned} \quad (7.1.12)$$

**Консервативный случай:**  $b = 0$ . В этом случае система (7.1.12) гамильтонова с функцией Гамильтона

$$H(u, v) = c \frac{\sqrt{2u}}{2} \cos v + \frac{a}{8} u^2 + \frac{d}{2} u. \quad (7.1.13)$$

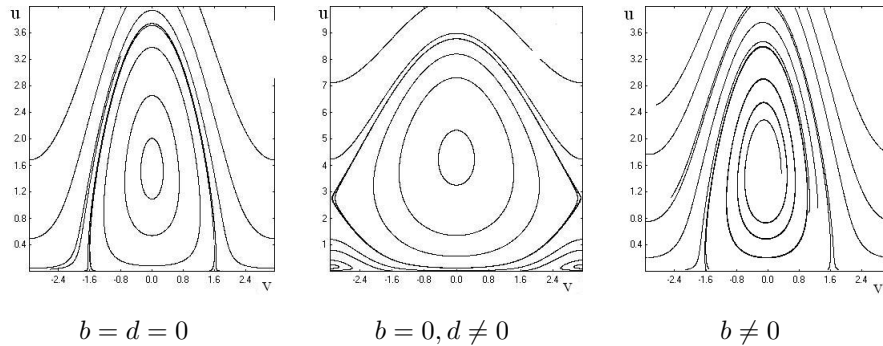
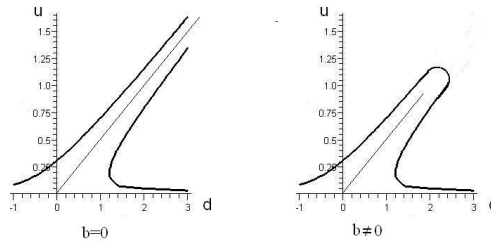
Нетрудно построить фазовый портрет, ибо мы знаем уравнения фазовых кривых:  $H(u, v) = h = const$ .

Состояния равновесия:

$$v = 0, \pi; \quad \sqrt{2u}(au/2 + d) = \mp c \quad (7.1.14)$$

$$v = \pm\pi/2, \quad u = 0. \quad (7.1.15)$$

На левом рисунке показана зависимость  $u(d)$ , определяемая из (7.1.14), а ниже – фазовые портреты.



**7.1.2. Пример 2. Автоколебательная система при периодическом внешнем воздействии.** Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(dx + (1 - x^2)\dot{x} + c \cos(\nu t)), \quad (7.1.16)$$

где  $d, c, \nu$  – параметры,  $\varepsilon$  – малый параметр.

При  $c = 0$  уравнение (7.1.16) имеет единственный устойчивый предельный цикл (ПЦ). Что произойдет с ПЦ при  $c \neq 0$ ?

Рассмотрим случай основного резонанса, когда  $\nu = 1$ .



Усредненная система принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \varepsilon \left( u - \frac{u^2}{2} - c \frac{\sqrt{2u}}{2} \sin v \right) \\ \dot{v} &= -\frac{\varepsilon}{2} \left( d + \frac{c}{\sqrt{2u}} \cos v \right). \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

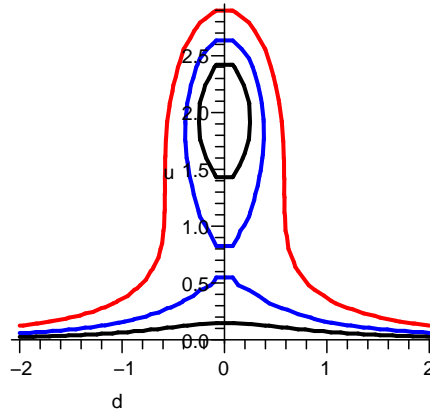
Состояния равновесия находятся из системы

$$\begin{aligned} u - \frac{u^2}{2} - c \frac{\sqrt{2u}}{2} \sin v &= 0 \\ d + \frac{c}{\sqrt{2u}} \cos v &= 0. \end{aligned} \quad (7.1.18)$$

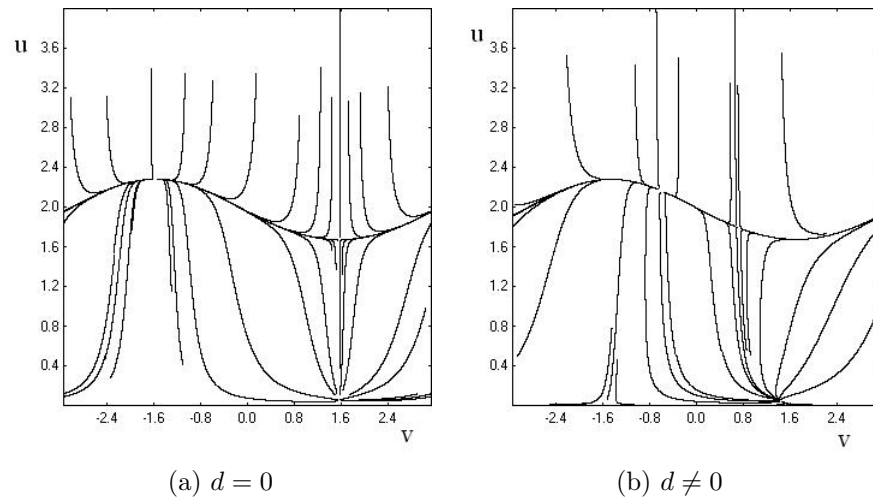
Из второго уравнения системы (7.1.18) находим  $\cos^2 v = 2ud^2/c^2$ . Тогда из первого уравнения (7.1.18) получаем

$$u \left( 1 - \frac{u}{2} \right)^2 + d^2 u = \frac{c^2}{2}. \quad (7.1.19)$$

При  $c = 0$  и  $d = 0$  имеем  $u = 0$  и  $u = 2$ . При фиксированных  $c \neq 0$  график функции  $u = u(d)$  показан на рисунке ниже. Далее на рисунках (а) и (б) показаны фазовые портреты системы (7.1.17). На рис. 7.1.1 показаны траектории отображения Пуанкаре для уравнения (7.1.16), которые соответствуют траекториям усредненной сис-



темы в плоскости  $(x, \dot{x})$ .



$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\varepsilon \left( \frac{d}{2} + \frac{c}{\sqrt{2u}} \cos v \right) \\ \dot{u} &= \varepsilon \left( u - \frac{u^2}{2} - \frac{c\sqrt{2u}}{2} \sin v \right) \end{aligned} \quad (7.1.20)$$

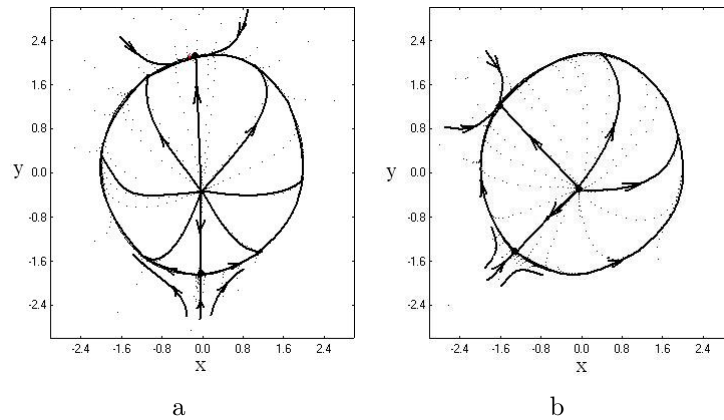


Рис. 7.1.1. Отображение Пуанкаре для уравнения (7.1.16) при  $\varepsilon = 0.1$ ,  $c = 0.3$ ,  $d = 0$ (a) и  $d = 0.1$ (b).

Уравнение (7.1.16) описывает ламповый генератор с гармоническим источником напряжения в колебательном контуре (А.А. Андронов, А.А. Витт "К теории захватывания Ван -дер Поля"// Собр. тр. А.А. Андропова.-М.: Изд-во АН СССР,1956.- С.51-64. ). Параметр  $d$  – определяет расстройку частоты:  $\omega_\varepsilon^2 = 1 - \varepsilon d$ ,  $\omega_0 = 1$  – частота

собственных колебаний (собственная частота);  $\nu$  – частота внешнего возмущения. При  $\nu = 1$  в генераторе, описываемом уравнением (7.1.16), имеет место главный резонанс.

Параметр  $c$  определяет амплитуду возмущения. При  $c = 0$  уравнение (7.1.16) – это уравнение Ван дер Поля, в котором существует единственный устойчивый предельный цикл, близкий к окружности радиуса 2. Поэтому при  $c \neq 0$  мы изучаем воздействие периодического по  $t$  возмущения на автоколебательную систему.

*Вывод.* Ламповый генератор, описываемый уравнением (7.1.16) и совершающий в отсутствии внешней силы ( $c = 0$ ) автоколебания с собственной частотой  $\omega_\varepsilon = \sqrt{1 - \varepsilon d}$ , начинает колебаться с иной частотой, равной частоте внешней силы. Это явление называется **синхронизацией** лампового генератора или **захватыванием**.

## 7.2. Периодические по времени возмущения двумерных нелинейных гамильтоновых систем

В данном разделе исследуются системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon g(x, y, \nu t) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon f(x, y, \nu t). \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

Основной вопрос, который здесь решается – это вопрос о топологии резонансных зон. Рассматривается случай невырожденных резонансов. Это исследование приводит к анализу маятниковых уравнений. Указываются системы, в которых могут существовать новые типы установившихся движений, отвечающих предельным циклам в усредненных (маятниковых) уравнениях. Изложение следует книге [10].

**7.2.1. Разделение переменных на "быстрые" и "медленные".** Рассмотрим систему (7.2.1), где  $g$  и  $f$  – периодические по  $\nu t$  с периодом  $2\pi$  функции и, по крайней мере, непрерывные по  $t$ ; по переменным  $x$  и  $y$  эти функции являются достаточно гладкими в некоторой области  $G$ ;  $\nu$  – параметр (частота возмущения),  $\varepsilon$  – малый параметр. Относительно невозмущенной системы предположим выполнение тех же условий, что и в автономном случае. А именно, предположим существование ячеек  $D_j \subset G$ , заполненных замкнутыми фазовыми кривыми и не содержащих малых окрестностей центров, сепаратрисных петель или контуров, параболических траекторий и "бесконечности".

Для решений системы (7.2.1) в  $D_j \times S^1$  характерна возможность разделения переменных на "быстрые" и "медленную". Рассмотрим одну из ячеек  $D_j$  и далее опустим индекс  $j$ . Фазовые кривые невозмущенной системы в этой ячейке определяет "интеграл энергии"  $H(x, y) = h = \text{const}$ . Пусть для области  $D$  значения  $h$  принадлежат интервалу  $(h^-, h^+)$ .

В области  $D$  перейдем от переменных  $x, y$  к переменным действие  $-I$ , угол  $-\theta$ . Поскольку такие переменные определяются в силу невозмущенных уравнений движения, то аналогично автономному случаю можно сразу записать возмущенную систему (7.2.1) в этих переменных

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \varepsilon[f(x, y, \nu t)x'_\theta - g(x, y, \nu t)y'_\theta] \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon[-f(x, y, \nu t)x'_I + g(x, y, \nu t)y'_I].\end{aligned}\quad (7.2.2)$$

Система (7.2.2) эквивалентна трехмерной системе

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \varepsilon F_1(I, \theta, \varphi) \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon F_2(I, \theta, \varphi) \\ \dot{\varphi} &= \nu,\end{aligned}\quad (7.2.3)$$

где

$$F_1 \equiv fx'_\theta - gy'_\theta, \quad F_2 \equiv -fx'_I + gy'_I \quad (7.2.4)$$

– периодические по  $\theta$  и  $\varphi$  с периодом  $2\pi$  функции. Система (7.2.3) определена на прямом произведении  $\Delta \times S^1 \times S^1 = \Delta \times T^2$ , где  $T^2$  – двумерный тор,  $\Delta = (I^-, I^+)$ ,  $I^\pm = I(h^\pm)$ .

В случае, когда возмущенная система является гамильтоновой, имеем  $Div = \partial F_1/\partial I + \partial F_2/\partial \theta \equiv 0$ . В случае же неконсервативных возмущений, когда  $\partial g/\partial x + \partial f/\partial y \neq 0$ , имеем  $Div \neq 0$ . Например, система

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - x^3 + \varepsilon(y(a + bx^2) + c \sin t) \quad (7.2.5)$$

при  $a = b = 0$  является гамильтоновой, при  $b = 0, a \neq 0$  – диссипативной, а при  $a \neq 0, b \neq 0$  – автоколебательной. Как мы знаем, диссипативные и автоколебательные системы относятся к неконсервативным системам.

### 7.2.2. Вспомогательные системы. Резонансы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1.** *Уровень энергии  $I = I_{pq}$  ( $H(x, y) = h_{pq}$ ) невозмущенной системы называем резонансным, если выполняется условие*

$$\omega(I_{pq}) = (q/p)\nu, \quad (7.2.6)$$

где  $p, q$  – взаимно простые целые числа ( $p, q \in \mathbb{N}$ ).

Ряды в замене, связанной с переходом от системы (7.2.3) к усредненной системе

$$\dot{u} = \varepsilon B_0(u), \quad B_0(u) = F_{100} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(u, \theta, \varphi) d\theta d\varphi, \quad u = I_{pq} + O(\varepsilon) \quad (7.2.7)$$

расходятся для всюду плотного множества значений  $I$  (в частности, на резонансном множестве  $\{I_{pq}\}$ ). Это приводит к невозможности обоснования соответствия между системами (7.2.3) и (7.2.7) в области  $\Delta \times T^2$ . В связи с этим мы изучим поведение решений в малых (зависящих от  $\varepsilon$ ) окрестностях индивидуальных уровней  $I = \text{const}$ .

Система (7.2.7) играет важную роль при установлении топологии окрестностей индивидуальных уровней  $I = \text{const}$ .

Наряду с системой (7.2.7) важную роль в исследовании системы (7.2.1) играет и рассмотренная ранее автономная система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \partial H / \partial y + \varepsilon \bar{g}(x, y) \\ \dot{y} &= -\partial H / \partial x + \varepsilon \bar{f}(x, y), \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

где обозначено  $\bar{g} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x, y, \varphi) d\varphi$ ,  $\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y, \varphi) d\varphi$ .

Систему (7.2.7) можно получить из системы (7.2.8) после перехода в ней к переменным действие  $I$ , угол  $\theta$  и усреднения по  $\theta$ . Как мы установили ранее, простые состояния равновесия системы (7.2.7) определяют предельные циклы в системе (7.2.8). Предположим, что порождающее уравнение Пуанкаре-Понтрягина

$$B_0(I) = 0 \quad (7.2.9)$$

имеет не более, чем конечное число простых вещественных корней. Из этого предположения следует, что

$$B_1(I_*) \equiv \frac{dB_0(I_*)}{dI} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\bar{g}_x + \bar{f}_y) \Big|_{\substack{x = x(I_*, \theta) \\ y = y(I_*, \theta)}} d\theta \neq 0. \quad (7.2.10)$$

Здесь  $I_*$  – корень уравнения (7.2.9).

**7.2.3. Приведение системы в окрестностях индивидуальных резонансных уровней.** Для установления качественного поведения решений исходной системы (7.2.1) в окрестностях

$$U_\mu = \{(I, \theta) : I_{pq} - c\mu < I < I_{pq} + c\mu, 0 \leq \theta < 2\pi\}, \quad \mu = \varepsilon^s, \quad s = 1/2$$

индивидуальных невырожденных ( $d\omega(I_{pq})/dI \neq 0$ ) резонансных уровней  $I = I_{pq}$ ,  $I_{pq} \in \Delta$ , преобразуем систему (7.2.3) к более удобному виду. Зафиксируем уровень  $I = I_{pq}$  и сделаем замену

$$I = I_{pq} + \mu W, \quad \theta = \psi + q\varphi/p, \quad \mu = \sqrt{\varepsilon} \quad (7.2.11)$$

В результате этой замены система (7.2.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \mu F_1(I_{pq} + \mu W, \psi + q\varphi/p, \varphi) \\ \dot{\psi} &= \omega(I_{pq} + \mu W) - q\nu/p + \mu^2 F_2(I_{pq} + \mu W, \psi + q\nu/p, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \nu.\end{aligned}\quad (7.2.12)$$

Систему (7.2.12) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \mu F_1(I_{pq}, \psi + q\varphi/p, \varphi) + O(\mu^2) \\ \dot{\psi} &= \mu b W + O(\mu^2), \quad \dot{\varphi} = \nu,\end{aligned}\quad (7.2.13)$$

где  $b = d\omega(I_{pq})/dI$ . Усредняя систему (7.2.13) по  $\varphi$  приходим к системе

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \mu A_0(v; I_{pq}) \\ \dot{v} &= \mu b u,\end{aligned}\quad (7.2.14)$$

где  $b = \omega'(I_{pq})$ ,

$$A_0(v; I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} F_1(I_{pq}, v + q\varphi/p, \varphi) d\varphi \quad (7.2.15)$$

периодическая с наименьшим периодом  $2\pi/p$  функция,  $u = W + O(\mu)$ ,  $v = \psi + O(\mu)$ .

Система (7.2.14) эквивалентна уравнению маятникового типа

$$\ddot{v} - \mu^2 A_0(v; I_{pq}) = 0. \quad (7.2.16)$$

Учитывая в системе (7.2.12) члены  $O(\mu^2)$ , приходим к усредненной системе (второе приближение метода усреднения):

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \mu A_0(v, I_{pq}) + \mu^2 P_0(v, I_{pq}) u = \mu P(v, u, I_{pq}; \mu) \\ \dot{v} &= \mu b u + \mu^2 (b_1 u^2 + Q_0(v, I_{pq})) = \mu Q(v, u, I_{pq}; \mu),\end{aligned}\quad (7.2.17)$$

где

$$P_0(v, I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} [\partial F_1(I_{pq}, v + q\varphi/p, \varphi) / \partial I] d\varphi, \quad (7.2.18)$$

$$Q_0(v, I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} F_2(I_{pq}, v + q\varphi/p, \varphi) d\varphi, \quad b_1 = \omega''(I_{pq})/2. \quad (7.2.19)$$

Делая в системе (7.2.17) замену

$$u \rightarrow u - \mu Q_0(v; I_{pq})/b,$$

пренебрегая членами  $O(\mu^3)$  и переходя к "медленному времени"  $\tau = \mu t$  получаем (с точностью до членов  $O(\mu^2)$ ) уравнение маятникового типа

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} - b A_0(v, I_{pq}) = \mu [\sigma(v, I_{pq}) + 2b_1 A_0(v, I_{pq})/b] \frac{dv}{d\tau}. \quad (7.2.20)$$

Пренебрегая консервативным членом  $(2b_1 A_0(v, I_{pq})/b) \frac{dv}{d\tau}$ , приходим к уравнению

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} - b A_0(v, I_{pq}) = \mu \sigma(v, I_{pq}) \frac{dv}{d\tau}, \quad (7.2.21)$$

где  $\mu^2\sigma$  – дивергенция векторного поля системы (7.2.17) ( $\sigma = P_0(v; I_{pq}) + dQ_0(v; I_{pq})/dv$ ). Согласно [10] имеют место следующие теоремы.

**ТЕОРЕМА 7.1.** Если функции  $f$  и  $g$  в системе (7.1.1) – тригонометрические многочлены степени  $N$  по  $\varphi = \nu t$ , то и функция  $A_0(v; I_{pq})$  является тригонометрическим многочленом степени не выше  $[N/q]$ , причем при  $q = 1$  многочлен имеет наивысшую степень, а при  $q = N$  его степень равна 1.

**ТЕОРЕМА 7.2.** Справедливо следующее соотношение

$$\sigma(v, I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} (g'_x + f'_y) \Big|_{\substack{x = x(I_{pq}, v + q\varphi/p) \\ y = y(I_{pq}, v + q\varphi/p)}} d\varphi \quad (7.2.22)$$

Из определения  $B_0(I)$ ,  $B_1(I)$ , (7.2.15) и определения функции  $\sigma$  следует

$$\begin{aligned} A_0(v, I_{pq}) &= A_{0*}(v, I_{pq}) + B_0(I_{pq}) \\ \sigma(v, I_{pq}) &= \sigma_*(v, I_{pq}) + B_1(I_{pq}). \end{aligned} \quad (7.2.23)$$

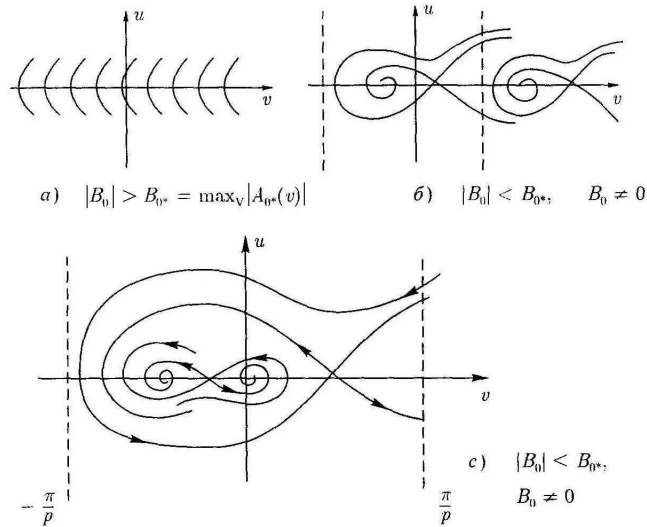


Рис. 7.2.1.

На рис. 7.2.1 показаны возможные фазовые портреты уравнения (7.2.21) при  $B_0 \neq 0$ , а на рис. 7.2.2 – при  $B_0 = 0$ .

**7.2.4. Пример.** Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x - x^3 = \varepsilon(\gamma\dot{x} + c \sin t), \quad (7.2.24)$$

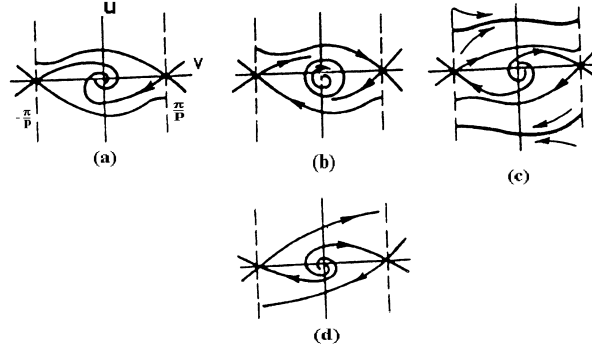


Рис. 7.2.2.

При  $\varepsilon = 0$  его решение имеет вид:

$$x(\theta) = x_1 \operatorname{sn} \left( \frac{2\mathbf{K}\theta}{\pi} \right), \quad \theta = \omega t, \quad (7.2.25)$$

$$k = \frac{x_1}{x_2}, \quad x_1^2 = 1 - \sqrt{1 - 4h}, \quad x_2^2 = 1 + \sqrt{1 - 4h}, \quad h \in (0, 1/4),$$

$$\omega = \frac{\pi x_1}{2\sqrt{2}k\mathbf{K}}, \quad b = d\omega(I_{pq})/dI < 0.$$

При  $\varepsilon \neq 0$  вычисление усредненной системы дает:

$$A(v; I_{pq}) = \begin{cases} cC_1 \sin(pv) + \gamma B_0 & \text{при } p - \text{нечетном} \\ \gamma B_0 & \text{при } p - \text{четном или } q > 1, \end{cases} \quad (7.2.26)$$

$\sigma = \gamma$ , где

$$C_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{p} \frac{a^{p/2}}{1 - a^p}, \quad a = \exp \left( \frac{-\pi\mathbf{K}(\sqrt{1 - k^2})}{\mathbf{K}(k)} \right), \quad (7.2.27)$$

$$B_0 = (k^2 - 1)\mathbf{K}(k) + (k^2 + 1)\mathbf{E}(k), \quad k = k(I_{pq}).$$

При  $p$  – нечетном имеем усредненную систему

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \mu [cC_1 \sin(pv) + \gamma B_0] + \mu^2 \gamma u \\ \dot{v} &= \mu b u + \mu^2 b_1 u^2, \end{aligned} \quad (7.2.28)$$

которая эквивалентна (с точностью до членов  $O(\mu^2)$  и  $\tau = \mu t$ ) уравнению вида (7.2.21)

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} - b [cC_1 \sin(pv) + \gamma B_0] = \mu \gamma \frac{dv}{d\tau}. \quad (7.2.29)$$

**Упражнение 1.** Существуют ли у уравнения (7.2.24) при  $c = 0$  предельные циклы? Что можно сказать о функции  $B_0(k)$ ?

**Упражнение 2.** Постройте фазовые портреты уравнения (7.2.29):

- а) при  $\gamma = 0$ ,
- б) при  $\gamma \neq 0$ .

**Упражнение 3.** Представьте фазовые портреты уравнения (7.2.29) в плоскости  $(x, y)$  при  $p = 3, q = 1$ .





## Литература

- [1] А.М. Ляпунов *"Общая задача об устойчивости движения"*.-М.;Л: Гостехиздат, 1950.
- [2] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний.-М.:Физматгиз, 1959; М.: Наука, 1981.
- [3] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн.-М.: Наука, 1984. 432 с.
- [4] Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний.-М.: Наука, 1976.
- [5] Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний.-Красноярск: Изд-во Красноярского ун-та, 1995. 430 с.
- [6] Андронов,А.А. Качественная теория динамических систем/А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер.-М.: Физматгиз,1966.
- [7] Андронов,А.А., Теория бифуркаций динамических систем на плоскости/А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер.- М.: Физматгиз,1967.
- [8] Баутин,Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости/Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович.-М.: Наука,1976.
- [9] Морозов,А.Д. Системы, близкие к нелинейным интегрируемым/ А.Д. Морозов.- Горький: Изд-во ГГУ, 1983.
- [10] Морозов А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах.– Москва-Ижевск: РХД, 2005. 424 с.
- [11] Л.П.Шильников, А.Л.Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа Методы качественной теории в нелинейной динамике.-Москва-Ижевск: РХД, 2004 (Часть 1), 2008 (Часть 2).
- [12] Крылов,Н.М. Введение в нелинейную механику/ Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов.- М.: Изд-во АН СССР, 1937.
- [13] Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.-М.: Гос. издательство физико-матем. литературы, 1958.
- [14] Арнольд В.И. Математические методы классической механики.-М.:Наука, 1974.
- [15] Пуанкаре, А. Избранные труды. Новые методы небесной механики/ А. Пуанкаре.-М.: Наука. Т. 1, 1971.-772 с.; Т. 2, 1972.-1000 с.
- [16] Морозов,А.Д. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем/ А.Д. Морозов, Т.Н. Драгунов.-Москва-Ижевск: Изд-во Инст. компьютер. иссл., 2003.
- [17] Неймарк Ю.И. Математические модели в естествознании и технике.-Н. Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского, 2004.

- [18] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений.-М.:Наука, 1971.
- [19] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах.-Москва.-Изд-во "Мир", 1973, 167 с.
- [20] Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике.-Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 1995, 432 с.
- [21] Трещев Д.В. Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем.-М.: Фазис, 1998, 184 с.
- [22] Джакаля Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем.-М.: Наука, 1979, 320 с.
- [23] Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.:Наука, 1975.
- [24] Странные аттракторы. Сборник статей под ред. Синая Я.Г. и Шильникова Л.П., М.:Мир,1981.
- [25] Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.- М.: Наука, 1972.
- [26] Лерман Л.М. Линеиные дифференциальные уравнения и системы.- Электронное учебно-методическое пособие-Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012.- 83 с., <http://www.unn.ru/books>.