МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

МАТЕМАТИКА. УПРАЖНЕНИЯ

Практикум

Рекомендован Учёным советом Института биологии и биомедицины для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 06.03.01 «Биология» и 05.03.06 «Экология и природопользование»

Нижний Новгород
2018

УДК 517.1
ББК 22.1
М 34

М 34 МАТЕМАТИКА. УПРАЖНЕНИЯ: Практикум. Составители: Клюев А.В., Якимов А.В. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018. – 44 с.

Рецензенты: кандидат физ.–мат. наук, доцент **А.А. Дубков**,
доктор технических наук, профессор **В.Р. Фидельман**

В основу практикума легли материалы практических занятий по дисциплинам «Высшая математика» и «Математика», проводившихся сотрудниками кафедры бионики и статистической радиофизики для биологического факультета (затем Института биологии и биомедицины) ННГУ на протяжении более 30 лет. Приводятся упражнения, предназначенные для активизации изучения материала, изложенного в учебных пособиях по указанным выше дисциплинам.

Практикум предназначен для студентов Института биологии и биомедицины ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 06.03.01 «Биология» и 05.03.06 «Экология и природопользование» (уровень бакалавриата). Данный практикум может быть рекомендован студентам других естественнонаучных специальностей и направлений подготовки.

Ответственные за выпуск:
председатель методической комиссии Института биологии и биомедицины ННГУ, кандидат биологических наук, доцент **Е.Л. Воденеева**,
зам. председателя методической комиссии радиофизического факультета ННГУ доктор физ.–мат. наук, профессор **Е.З. Грибова**

УДК 517.1
ББК 22.1

1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Системы координат

1.1. Вывести уравнения, связывающие между собой декартовы прямоугольные координаты $(x; y)$ и полярные координаты $(\rho; \varphi)$ заданной точки M на плоскости при условии, что $\rho \geq 0$, $\varphi \in [0; 2\pi)$.

1.2. Определить геометрические образы координатных линий полярной системы координат и записать их уравнения в прямоугольной системе координат: (а) $\rho = R$, $\varphi \in [0; 2\pi)$; (б) $\varphi = \varphi_0$, $\rho \geq 0$.

1.3. Нарисовать линии, заданные в полярных координатах, и определить их типы: (1) $\rho = R$, $\varphi \in [0; \pi]$; (2) $\varphi = \pi/4$, $\rho \in [0; \infty)$; (3) $\varphi = \pi/6$, $\rho \in [0; \infty)$; (4) $\rho = (\alpha/2\pi)\cdot\varphi$, $\varphi \in [0; \infty)$; (5) $\rho = \alpha\cdot(1 + \cos\varphi)$, $|\varphi| \leq \pi$.

1.4. Определить тип линии, заданной параметрически; определить смысл параметра: (1) $x = 2\cdot\cos\varphi$, $y = 2\cdot\sin\varphi$; $\varphi \in [-\pi/2; \pi/2]$;
(2) $x = 1 + \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$; $\varphi \in [0; 2\pi)$; (3) $x = 1 + t$, $y = 2t - 1$; $t \in (-\infty; \infty)$.

1.5*. Вывести формулу для вычисления $r = |M_1 M_2|$ –длины отрезка, соединяющего точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

1.6. Вычисляя расстояния между точками, определить, лежат ли они на одной прямой: (1) $A_1(1; -1)$, $B_1(4; 3)$, $C_1(7; 7)$; (2) $A_2(-2; -1)$, $B_2(2; 2)$, $C_2(5; 6)$.

1.7. Записать преобразование системы координат, при котором прямая $y = x + 2$ преобразуется в ось $O'x'$, а прямая $y = -x + 2$ преобразуется в ось $O'y'$,

1.8. Даны вершины треугольника: $A(3; 5)$, $B(-3; 3)$, $C(5; -8)$. Определить длину медианы, проведенной из вершины C.

1.9. Определить координаты вершин треугольника, зная середины его сторон: $P(2; 3)$, $M(5; 4)$, $R(6; -3)$.

Прямая линия

1.10*. Вывести уравнение пучка прямых, проходящих через заданную точку $M_1(x_1; y_1)$, используя:
(а) общее уравнение; (б) уравнение прямой с угловым коэффициентом.

1.11. Написать уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M(1; 2)$. Выделить уравнения координатных линий.

1.12*. Вывести уравнение прямой линии, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

1.13. Написать уравнение прямой (L), проходящей через две точки; сделать чертеж. (1) $A_1(1; 2)$, $B_1(3; 4)$. (2) $A_2(2; -1)$, $B_2(-2; 3)$. (3) $A_3(1; -1)$; $B_3(-3; 3)$.

1.14. Вычислить угол φ между прямыми; сделать чертеж.
(1) $2x + y - 1 = 0$, $4x + 2y + 1 = 0$. (2) $y = 3x$, $y = -2x + 4$.
(3) $y = 4x - 4$, $y = -x/4 + 2$. (4) $x + y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$.

1.15. Написать уравнение прямой (L_2), проходящей через точку $M(1; 1)$, и перпендикулярной (L_1): $2x - 3y + 1 = 0$.

1.16. Записать уравнения прямых, образующих стороны ромба, имеющего вершины в точках: $A(a; 0)$, $B(0; b)$, $C(–a; 0)$, $D(0; –b)$.

1.17. Привести к нормальному виду уравнения прямых: (1) $3x + 4y – 10 = 0$; (2) $12x – 5y + 39 = 0$; (3) $x + 6 = 0$; (4) $3x + y – 8 = 0$.

1.18. Найти расстояния от точек $A(2; 4)$ и $B(3; –4)$ до прямой
(L): $6x – 8y – 15 = 0$.

1.19. Найти расстояние между параллельными прямыми:
(L_1): $3x + 4y – 5 = 0$; (L_2): $3x + 4y + 10 = 0$.

Кривые второго порядка

1.20. Найти координаты центра $C(x_0; y_0)$ и радиус R окружности; получить уравнение касательной в заданной точке $M_1(x_1; y_1)$.
(1) $x^2 + y^2 – 8x + 6y + 21 = 0$, $M_1\,(4; –5)$. (2) $4x^2 + 4y^2 + 4x – 4y – 23 = 0$, $M_1\,(1; 2{,}5)$.
(3) $x^2 + y^2 – 4x + 2y + 5 = 0$, $M_1\,(2; –1)$.

1.21. Найти уравнения касательных (L_1) и (L_2), выходящих из начала координат, если уравнение окружности имеет следующий вид.
(1) $x^2 + y^2 – 14x + 24 = 0$. (2) $x^2 + y^2 – 4x – 4y + 4 = 0$.

1.22. Составить каноническое уравнение эллипса, вычислить его эксцентриситет и сделать рисунки, зная, что: (а) его полуоси равны 4 и 2;
(б) расстояние между фокусами равно 6, большая полуось равна 5.

1.23. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти значения большой и малой полуосей a и b, полуфокальное расстояние c. Вычислить эксцентриситет ε. Определить расстояния d от фокусов F_1 и F_2 до точек пересечения эллипса: (1) $A_1(–a; 0)$, $A_2(a; 0)$ с осью Ox; (2) $B_1(–b; 0)$, $B_2(b; 0)$ с осью Oy. Сделать рисунок.

1.24. Написать уравнения фокальных радиусов (r_1) и (r_2) точки $M_1(4; 9/5)$ на эллипсе (Э): $9x^2 + 25y^2 = 225$. Сделать рисунок.

1.25. На эллипсе $x^2 + 4y^2 = 8$ дана точка в первом квадранте с ординатой $y_1 = 1$. Найти: (1) уравнение касательной (L_1) к эллипсу в этой точке;
(2) уравнение нормали (L_2) к эллипсу в той же точке.

1.26. Известно, что луч света, вышедший из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса проходит через его второй фокус.

Из левого фокуса эллипса $7x^2 + 16y^2 = 112$ вышел луч света (L_1) и отразился в точке $A(–3; 7/4)$. Найти:
(1) уравнение прямой (L_2), вдоль которой распространяется отражённый луч;
(2) уравнение касательной (L_3) к эллипсу в точке отражения;
(3) уравнение нормали (L_4) к поверхности эллипса в точке A;
(4) угол φ между лучом света и нормалью в точке отражения. Сделать рисунок.

1.27. Выполнить анализ приведённых уравнений эллипса. (а) Выделяя в уравнении полные квадраты, найти центр $C(x_0; y_0)$ эллипса, определить величины полуосей a и b. (б) Вычислить эксцентриситет ε. (в) Получить уравнение касательной (L_1) для заданной точки M_1.
(1) $4x^2 + 9y^2 – 8x + 36y + 4 = 0$, $M_1(4; –2)$.

(2) $x^2 + 4y^2 + 4x + 8y = 0$, $M_1(0; 0)$.

1.28. Составить каноническое уравнение гиперболы, вычислить эксцентриситет и написать уравнения асимптот, зная, что:
(1) расстояние между вершинами равно 8, а между фокусами равно 10;
(2) вещественная полуось равна 5, вершины делят отрезки, соединяющие центр и фокусы, пополам.

1.29. Найти угол пересечения φ эллипса (Э) $4x^2 + 5y^2 - 20 = 0$ и гиперболы (Г) $x^2 - y^2 = 1$. Сделать чертеж фрагмента в 1-м квадранте.

1.30. Известно, что луч света, вышедший из одного фокуса гиперболы, после отражения от неё распространяется далее так, как будто бы он вышел из другого фокуса.

Из правого фокуса гиперболы (Г) $x^2 - 8y^2 = 8$ вышел луч света (L_1), отразившийся от гиперболы в 1-м квадранте в точке с абсциссой $x_1 = 4$. Написать уравнение прямой (L_2), вдоль которой распространяется отражённый луч света.

1.31. Выделяя полные квадраты в уравнениях гипербол, найти координаты центра симметрии $C(x_0; y_0)$, а также величины полуосей a и b:
(1) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$;
(2) $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$.

1.32. Составить уравнение параболы, зная, что:
(1) расстояние от фокуса до вершины равно 3;
(2) фокус имеет координаты (5; 0), а ось Oy является директрисой;
(3) парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точки $O(0; 0)$ и $M_1(1; 8)$;
(4) парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точки $O(0; 0)$ и $M_2(6; -2)$.

1.33. Составить уравнения прямых (L_1) и (L_2), касающихся параболы $y^2 = 12x$ в точках с $x_1 = 3$.

1.34. Найти условия пересечения и касания прямой (L) $x - 2y + a = 0$ и параболы (П) $y^2 = 2x$. Найти координаты точки касания.

1.35. Известно, что луч света, вышедший из фокуса параболы и отразившийся от неё, распространяется параллельно оси параболы.

На параболе $y^2 = 4x$ отражение луча произошло в точке $M_1(1; 2)$. Написать уравнения прямых, вдоль которых распространяются прямой (L_1) и отражённый (L_2) лучи.

1.36. Преобразовать методом выделения полных квадратов заданные уравнения кривых второго порядка, определить типы описываемых линий и найти координаты характерных точек кривых. Сделать рисунки.
(1) $9x^2 + 16y^2 - 90x + 32y + 97 = 0$.
(2) $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 7 = 0$.
(3) $3y^2 + 5x + 6y + 13 = 0$.
(4) $y = ax^2 + 2bx + c$.
(5) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 61 = 0$.

2. ФУНКЦИЯ

2.1. Дана функция $f(x) = x^2 - 3x + 2$. (а) Вычислить $f(0), f(1), f(2), f(3)$. (б) Определить функции: $g_1(x) = f(-x)$; $g_2(x) = f(1/x)$; $g_3(x) = f(x+1)$.

2.2. Дана функция $f(x) = \lg x$. (а) Вычислить $f(1), f(10), f(100), f(0{,}1)$. (б) Определить функции: $g_1(x) = f(1/x)$; $g_2(x) = f(x^2)$; $g_3(x) = f(10/x^2)$.

2.3. Дана функция $f(x) = \log_2 x$. (а) Вычислить $f(1), f(2), f(8), f(1/16)$. (б) Определить функции: $g_1(x) = f(2x)$, $g_2(x) = f(2x^2)$, $g_3(x) = f(1/x)$.

2.4. Дана функция $f(x) = 10^x$. (а) Вычислить $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(-2)$. (б) Определить функции: $g_1(x) = f(x+1)$, $g_2(x) = f(x-1)$, $g_3(x) = f(\lg x)$, $g_4(x) = f(2\lg x)$.

2.5. У следующих функций выделить чётную $y^{(0)}(x)$ и нечётную $y^{(1)}(x)$ компоненты: (1) $y = \sin x$; (2) $y = \cos x$; (3) $y = \sin(x+1)$; (4) $y = \cos(x-2)$; (5) $y = \sin x + 2$; (6) $y = x + \cos x$; (7) $y = x^2 + x + 1$; (8) $y = (1+x)/x$; (9) $y = (1 + x + x^2)/x^2$; (10) $y = e^{ax}$, $a = \text{const}$; (11) $y = \sin^2 x$; (12) $y = \sin(x^2)$.

2.6. Определить период T, если он существует, у следующих функций: (1) $y = \sin(1+x)$; (2) $y = \sin(2x)$; (3) $y = \sin(x^2)$; (4) $y = \cos(3x)$; (5) $y = \cos(x^3)$; (6) $y = \cos(x/2)$.

2.7. Построить графики следующих функций, разлагая заданные функции на сумму более простых функций, $y = y_1 + y_2$, графики которых известны. (1) $y = x^2 - 1$. (2) $y = x^2 + x$. (3) $y = 1 + \cos x$. (4) $y = (1 + x^2)/x$; (5) $y = 2\sin^2(x/2)$; (6) $y = (1+x)/x$.

2.8. Построить графики функций и этих же функций, возведённых во вторую степень, $y_2 = y^2$. (1) $y = x$. (2) $y = 1 + x$. (3) $y = \mathrm{tg}\, x$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$. (4) $y = x - 1$. (5) $y = \sin x$, $x \in [-\pi; \pi]$. (6) $y = \cos x$, $x \in [0; 2\pi]$.

2.9. Для функций из Упражнения 2.8 построить графики обратно пропорциональных функций $y_2 = 1/y$.

2.10. Построить графики следующих пар функций: (1) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$; (2) $y_1 = \sin x$, $y_2 = \sin(-x)$; (3) $y_1 = x^2 + x$, $y_2 = y_1(-x)$; (4) $y_1 = \ln x$, $y_2 = y_1(-x)$; (5) $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = y_1(-x)$; (6) $y_1 = 1 + x$, $y_2 = y_1(-x)$.

2.11. Построить графики следующих пар функций: (1) $y_1 = e^x$, $y_2 = y_1(x-1)$; (2) $y_1 = \sin x$, $y_2 = \sin(x - \pi/4)$; (3) $y_1 = x^2$, $y_2 = y_1(x+1)$; (4) $y_1 = \ln x$, $y_2 = \ln(1+x)$; (5) $y_1 = (\sqrt{x})$, $y_2 = \sqrt{(1+x)}$; (6) $y_1 = x^3$, $y_2 = y_1(x-1)$.

2.12. Построить графики и определить основные свойства функций: (1) $y_1 = e^x$; (2) $y_2 = e^{-x}$; (3) $y_3 = \mathrm{sh}\, x \equiv (e^x + e^{-x})/2$; (4) $y_4 = \mathrm{sh}\, x \equiv (e^x - e^{-x})/2$; (5) $y_5 = \mathrm{th}\, x \equiv \mathrm{sh}\, x/\mathrm{ch}\, x$; (6) $y_6 = \mathrm{cth}\, x \equiv 1/\mathrm{th}\, x$; (7) $y_7 = \mathrm{sech}\, x \equiv 1/\mathrm{ch}\, x$; (8) $y_8 = \mathrm{cosech}\, x \equiv 1/\mathrm{sh}\, x$; (9) $y_9 = \sec x \equiv 1/\cos x$.

2.13. Следующие обратные гиперболические функции выразить через логарифмическую функцию. (1) $\mathrm{arcsh}\, x$. (2) $\mathrm{arcch}\, x$. (3) $\mathrm{arcth}\, x$. (4) $\mathrm{arccth}\, x$.

2.14. Вычислить первые пять факториалов:
(1) простые ($n!$), $n = 0, 1, 2, 3, 4$;
(2) двойные ($n!!$), $n = 0, 2, 4, 6, 8$ и $n = 1, 3, 5, 7, 9$.

2.15. Вычислить следующие отношения факториалов:
(1) $(n+2)!\,/\,n!$ (2) $101!\,/\,100!$ (3) $n!\,/\,(n-1)!$ (4) $(n+2)!!\,/\,n!!$ (5) $100!!\,/\,98!!$
(6) $(n+1)!!\,/\,(n-1)!!$ (7) $5!\,/\,5!!$ (8) $6!\,/\,6!!$ (9) $n!\,/\,n!!$

2.16. Построить графики и определить свойства следующих функций.
(1) $x = a\cdot t$, $y = b\cdot t$, $t \in [0;\ 1]$, $a > 0$, $b > 0$. (2) $x = a\cdot\cos t$, $y = a\cdot\sin t$, $t \in [0;\ \pi]$.
(3) $x = a\cdot t$, $y = b\cdot t^2$, $t \in [0;\ 1]$, $a > 0$, $b > 0$. (4) $x = a\cdot t$, $y = b\cdot\sqrt{t}$, $t \in [0;\ 1]$, $a > 0$, $b > 0$.
(5) $x = R\cdot\sin t$, $y = R\cdot\cos t$, $t \in [-\pi/2;\ \pi/2]$.

2.17. Используя обобщённые функции, записать зависимость температуры нагревательного элемента от времени $T(t)$, если линейный рост температуры начался в момент времени t_0 от температуры T_0 и продолжался до момента времени t_1.

3. ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

Комплексные числа

3.1. Определить модули и аргументы комплексных чисел. Изобразить эти числа на комплексной плоскости. $z_1 = 3$; $z_2 = 3i$. $z_3 = 1 + 2i$; $z_4 = z_3^*$.
$z_5 = -4 + 3i$; $z_6 = z_5^*$. $z_7 = -2 + i$; $z_8 = z_7^*$.

3.2. Изобразить числа на комплексной плоскости и определить их вещественные и мнимые части. $z_1 = 2\exp(\pi i/2)$; $z_2 = z_1^*$. $z_3 = 3\exp(\pi i/4)$; $z_4 = z_3^*$.
$z_5 = \exp(-\pi i/6)$; $z_6 = z_5^*$. $z_7 = \exp(3\pi i/4)$, $z_8 = z_7^*$.

3.3. Дано: $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 2 + 3i$. Вычислить:
$z_3 = z_1 + z_2$; $z_4 = z_1 - z_2$; $z_5 = z_1 - 3z_2$; $z_6 = z_1\cdot z_2$; $z_7 = z_2/z_1$.

3.4. Вычислить: (1) $z = 1/(4 + 3i)$; (2) $z_n = (1 + i)^n$, $n = 12, 13, 14, 15$.

3.5*. Доказать, что $|z^2| = |z|^2$.

3.6*. Доказать, что $|1/z| = 1/|z|$.

3.7*. Доказать, что $\mathrm{Arg}(1/z) = -\mathrm{Arg}\,z = \mathrm{Arg}(z^*)$.

3.8. Вычислить корни из представленных чисел и изобразить их на комплексной плоскости. Выполнить проверку полученных результатов.
(1) $1^{1/4}$. (2) $[(3 + 4i)/5]^{1/2}$. (3) $8^{1/3}$. (4) $\sqrt{(-4)}$. (5) $\sqrt{i}$. (6) $i^{1/4}$. (7) $(-1)^{1/4}$. (8) $(-i)^{1/4}$.

3.9*. Используя формулу Эйлера и правило умножения комплексных чисел, вывести формулы:
(1) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$;
(2) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$.

3.10. Используя формулу Эйлера и известные формулы тригонометрии, решить следующие задачи.
(1) Выразить $\cos x$ и $\sin x$ через e^{ix} и e^{-ix}.
(2) Установить связь между гиперболическими и тригонометрическими синусами и косинусами.
(3) Вычислить $\cos(\alpha + i\beta)$, $\sin(\alpha + i\beta)$.
(4) Вывести формулы для $\mathrm{ch}(\alpha + \beta)$ и $\mathrm{sh}(\alpha + \beta)$.
(5) Доказать формулу: $\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sh}^2\alpha = 1$.

Определители. Правило Крамера

3.11. Вычислить следующие определители второго порядка.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} i & (1+i) \\ (1-i) & i \end{vmatrix};$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & (1+i) \\ (1-i) & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}; \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & (1+i) \\ 2 & (2+2i) \end{vmatrix}.$$

3.12. Вычислить следующие определители третьего порядка:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & (-1) & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & (-1) \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (-2) & (-1) & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & (-1) & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

3.13. Используя правило Крамера решить системы линейных уравнений.

$$(1)\ \begin{cases} 2x+3y=-1, \\ 3x+y=2. \end{cases} \quad (2)\ \begin{cases} -x+4y=4, \\ 5x-y=-1. \end{cases} \quad (3)\ \begin{cases} (1+i)x-2iy=2, \\ 3ix+y=1+6i. \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases} -x+y=1, \\ 2x+y=1+3i. \end{cases} \quad (5)\ \begin{cases} -x+y+z=3, \\ x-y+z=1, \\ x+y-z=-1. \end{cases} \quad (6)\ \begin{cases} x+2y-z=1, \\ 4x-y+z=5, \\ 2x-5y+3z=0. \end{cases}$$

$$(7)\ \begin{cases} 2x+y-z=1, \\ x+2y+z=1, \\ x-y-2z=0. \end{cases}$$

3.14. Используя правило Крамера, найти, при каких значениях параметра a системы линейных уравнений имеют единственное решение.

$$(1)\ \begin{cases} 2x+y=0, \\ 4x+ay=2. \end{cases} \quad (2)\ \begin{cases} 3x+y=3, \\ x+ay=2. \end{cases} \quad (3)\ \begin{cases} 3x+2y+z=0, \\ -x+y+3z=5, \\ x+4y+az=6. \end{cases}$$

3.15. Связь прямоугольных координат Oxy с координатами $Ox'y'$, повернутыми относительно центра O на угол α, имеет вид:

$x = x'{\cdot}\cos\alpha - y'{\cdot}\sin\alpha$;

$y = x'{\cdot}\sin\alpha + y'{\cdot}\cos\alpha$.

Пользуясь правилом Крамера, выразить координаты $(x'; y')$ через $(x; y)$.

Векторы и их свойства

3.16. Изобразить векторы $\vec{a}(1;\ 3)$ и $\vec{b}(-1;\ -3)$ на плоскости Oxy; нарисовать дополнительно по два одинаковых вектора: $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$; $\vec{b}_1 = \vec{b}_2 = \vec{b}$.

3.17. На плоскости Oxy изобразить несколько векторов $(-\vec{a})$, противоположных вектору $\vec{a}(1;\ 2)$.

3.18. Определить направляющие косинусы векторов: $\vec{a}(1;\ 2;\ 3)$; $\vec{b}(4;\ -3;\ 5)$; $\vec{c}(-4;\ 2;\ 4)$.

3.19. (а) Представить векторы из Упражнения 3.18 в виде линейной комбинации ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

(б) Используя те же векторы, найти: $\vec{a}_1 = \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{a}_2 = \vec{b} - 4\vec{a}$; $\vec{a}_3 = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

3.20*. Используя свойства скалярного произведения и свойства ортов прямоугольной системы координат, доказать формулу:

$$A = \vec{r}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)\cdot\vec{r}_2(x_2;\ y_2;\ z_2) = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2.$$

3.21. Вычислить скалярные произведения $A = \vec{a}\cdot\vec{b}$ следующих пар векторов и найти косинусы углов $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ между ними.

(1) $\vec{a}(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}(2;\ -1;\ 3)$. (2) $\vec{a}(2;\ 1;\ 0)$, $\vec{b}(2;\ 3;\ 3)$. (3) $\vec{a}(-2;\ 0;\ 2)$, $\vec{b}(-1;\ 0;\ 1)$.

3.22. Для пар векторов из Упражнения 3.21 вычислить проекцию a_b вектора $\vec{a}$ на направление $\vec{b}$.

3.23*. Используя известные свойства векторного произведения и свойства ортов прямоугольной системы координат, доказать формулу:

$$\vec{s} = \left[\vec{r}_1(x_1;y_1;z_1)\times\vec{r}_2(x_2;y_2;z_2)\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

3.24. Вычислить векторные произведения $[\vec{a}\times\vec{b}] = \vec{s}$ для пар векторов из Упражнения 3.21.

3.25. Найти площадь $S = |\vec{s}|$ параллелограмма, построенного на векторах, начинающихся в точке A и кончающихся в точках B и C.

(1) $A(0;0;0)$, $B(1;2;0)$, $C(-2;-4;0)$.

(2) $A(-1;0;1)$, $B(1;2;1)$, $C(0;1;-1)$.

(3) $A(1;-1;0)$, $B(1;-2;0)$, $C(2;-1;1)$.

3.26. Найти объем $V = |v|$ параллелепипеда, образованного тройкой векторов и определить направление этой тройки (правое или левое); $v = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

(1) $\vec{a}(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}(1;\ 2;\ 0)$, $\vec{c}(0;\ 1;\ 0)$. (2) $\vec{a}(-1;\ 0;\ 2)$, $\vec{b}(1;\ 1;\ 3)$, $\vec{c}(-1;\ 1;\ 7)$.

(3) $\vec{a}(2;\ 1;\ -1)$, $\vec{b}(1;\ 0;\ -2)$, $\vec{c}(1;\ 1;\ 1)$. (4) $\vec{a}(2;\ 0;\ 1)$, $\vec{b}(1;\ -2;\ 1)$, $\vec{c}(1;\ 1;\ 3)$.

3.27*. Проверить, лежат ли в одной плоскости следующие четверки точек:

(1) $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 1;\ -1)$, $C(3;\ 0;\ 4)$, $D(0;\ 2;\ -6)$;

(2) $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 0)$, $C(3;\ 2;\ 1)$, $D(1;\ 0;\ 0)$.

4. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Таблица производных и дифференциалов

4.1. Используя определение производной и первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, доказать, что $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$.

4.2. Используя известный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, вычислить производную $(e^x)'$.

4.3. (а) Вывести правило дифференцирования сложных функций.
(б) Учитывая результат Упражнения 4.2 и используя правило дифференцирования сложных функций, вычислить производную от показательной функции a^x, где a –любое положительное число, не равное единице, $a > 0$, $a \neq 1$.

4.4. (а) Вывести правило дифференцирования обратной функции.
(б) Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, вычислить производные от логарифмических функций $\ln x$ и $\log_a x$.

4.5. Пользуясь правилом дифференцирования сложных функций, см. Упражнение 4.3(а), вычислить производную от степенной функции x^a.

4.6. Пользуясь правилом дифференцирования отношения функций вычислить производные $(\mathrm{tg}\, x)'$ и $(\mathrm{ctg}\, x)'$.

4.7. Вычислить производные обратных тригонометрических функций:
(1) $(\arcsin x)'$; (2) $(\arccos x)'$; (3) $(\mathrm{arctg}\, x)'$; (4) $(\mathrm{arcctg}\, x)'$.

4.8. Вычислить производные гиперболических функций:
(1) $(\mathrm{sh}\, x)'$; (2) $(\mathrm{ch}\, x)'$; (3) $(\mathrm{th}\, x)'$; (4) $(\mathrm{cth}\, x)'$.

4.9. Вычислить производные обратных гиперболических функций:
(1) $(\mathrm{arcsh}\, x)'$; (2) $(\mathrm{arcch}\, x)'$; (3) $(\mathrm{arcth}\, x)'$; (4) $(\mathrm{arccth}\, x)'$.

Правила дифференцирования

4.10. Вычислить производные следующих функций.
(1) $y = 1+x+x^2+x^3$. (2) $y = (\sqrt{x}) + 1/(\sqrt{x})$. (3) $y = \ln x + e^x$.
(4) $y = \lg x + 10^x$. (5) $y = e^x\cdot\sin x$. (6) $y = a^x\cdot\cos x$.
(7) $y = (\ln x)/x$. (8) $y = (1+\cos x)/\sin x$. (9) $y = (1+e^x)/(1+x)$.

4.11. Вычислить производные сложных функций.
(1) $y = \sin(x^2)$. (2) $y = \sin^2 x$. (3) $y = \ln(\sin x)$.
(4) $y = \ln(\cos x)$. (5) $y = \ln(-x)$. (6) $y = \ln(Cx)$.
(7) $y = \exp(ax)$. (8) $y = \sin^2(1+x^2)$. (9) $y = \ln^2\sin x$.
(10) $y = \ln^3\cos^2 x$. (11) $y = \ln(\mathrm{sh}\, x)$. (12) $y = \ln(\mathrm{ch}\, x)$.

4.12. Вычислить производные функций, заданных параметрически.
(1) $y = \sin t$, $x = \cos t$, $t \in [0; 2\pi)$; –единичная окружность.
(2) $y = 1 - \cos t$, $x = t - \sin t$, $t \in [0; \infty)$; –циклоида.
(3) $y = t\cdot\sin t$, $x = t\cdot\cos t$, $t \in [0; \infty)$; –спираль Архимеда.

4.13. Вычислить первые четыре производные от следующих функций.
(1) $y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$. (2) $y = \sin x$. (3) $y = \exp(ax)$. (4) $y = \cos x$.
(5) $y = \operatorname{ch} x$. (6) $y = \operatorname{sh} x$. (7) $y = \ln(1 + x)$. (8) $y = (1 + x)^a$.

4.14. Вычислить первые четыре дифференциала в точке $x = 0$ для функций:
(1) $y = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$; (2) $y = \sin x$; (3) $y = \cos x$; (4) $y = \exp(ax)$;
(5) $y = \operatorname{ch} x$; (6) $y = \operatorname{sh} x$.

4.15. Пользуясь правилом Лопиталя вычислить следующие пределы.

$$A_1 = \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi - x}. \qquad A_2 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}. \qquad A_3 = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}.$$

$$A_4 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{\sin x}\right). \qquad A_5 = \lim_{x\to 0}(1 + ax)^{1/x}. \qquad A_6 = \lim_{x\to\infty}(x^2 e^{-x}).$$

$$A_7 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right). \qquad A_8 = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x.$$

Ряд Маклорена. Исследование графика функции

4.16. Разложить в ряд Маклорена следующие функции.
(1) $y = \cos x$;
(2) $y = \sin x$;
(3) $y = \ln(1 + x)$;
(4) $y = 1/(1 - x)$;
(5) $y = \operatorname{sh} x$;
(6) $y = \operatorname{ch} x$.

4.17. Используя результаты Упражнения 4.16, найти разложения в ряд Маклорена для следующих функций.
(1) $\sin(x^2)$. (2) $(\sin x)/x$. (3) $1/(1 + x)$. (4) $1/(1 + x^2)$.

4.18. Определить точность следующих приближенных формул при $|x| \le 0{,}01$.
(1) $\cos x \approx 1 - x^2/2$. (2) $\sin x \approx x$. (3) $\exp x \approx 1 + x$. (4) $\ln(1 + x) \approx x$.
(5) $1/(1 + x) \approx 1 - x$. (6) $\sqrt{(1 + x)} \approx 1 + x/2$.

4.19. Записать приближённые представления в виде ряда Маклорена (дающего точность $R_N \le 10^{-5}$ при $|x| \le 0{,}1$) для следующих функций.
(1) e^x. (2) $\cos x$. $\operatorname{ch} x$; (3) $\sin x$, $\operatorname{sh} x$. (4) $\ln(1 + x)$. (5) $1/(1 + x)$. (6) $1/(1 + x^2)$.

4.20. Исследовать поведение следующих функций и построить качественно их графики.
(1) $y = (1 + x^2)/x$.
(2) $y = 1/(1 + x^2)$.
(3) $y = x/(1 + x^2)$.
(4) $y = \sin t$, $x = \cos t$, $t \in [0; 2\pi)$ – единичная окружность.
(5) $y = 1 - \cos t$, $x = t - \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$ – циклоида.
(6) $y = t\cdot\sin t$; $x = t\cdot\cos t$, $t \in [0; 4\pi]$ – спираль Архимеда.

5. ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Общий анализ

5.1. Построить линии уровня для следующих функций. (1) $z = \sqrt{(xy)}$. (2) $z = x/y$. (3) $z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)}$. (4) $z = 1/(x^2 + y^2)$. (5) $z = 1/(xy)$. (6) $z = y^2 - 2x$.

5.2. Вычислить частные производные и частные дифференциалы заданных функций в указанных точках. (1) $z = \sqrt{(xy)}$, $M_1\,(1; 4)$. (2) $z = x/y$, $M_2\,(2; -1)$. (3) $z = (x^2 + y^2)^{-1}$, $M_3\,(-4; 3)$. (4) $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $M_4\,(3; 4)$. (5) $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$, $M_5\,(1; -2)$. (6) $z = \sin(x\cdot\cos y)$, $M_6\,(0; \pi/2)$.

5.3. Доказать, что функция $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ удовлетворяет уравнению:

$$x\cdot\partial z/\partial x + y\cdot\partial z/\partial y = 2.$$

5.4. Дана функция $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$. Вычислить $(\partial/\partial x)(1/r)$.

5.5. Дана функция $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$.
Вычислить сумму $u_x' + u_y' + u_z'$ в точке $M_0\,(1; 1; 1)$.

5.6. Показать, что функция $u = (x - y)(y - z)(z - x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\partial u/\partial x + \partial u/\partial y + \partial u/\partial z = 0.$$

5.7. Показать, что функция $z = (\sqrt{x})\cdot \sin(y/x)$ удовлетворяет уравнению:

$$2x\cdot\partial z/\partial x + 2y\cdot\partial z/\partial y = z.$$

5.8. Вычислить полный дифференциал для следующих функций. (1) $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$. (2) $z = \ln\cos(xy)$. (3) $z = x^{\,y}$. (4) $u = xy^2z^3$. (5) $z = \exp(xy)$. (6) $z = \sin(x + \cos y)$.

5.9. Вычислить dz/dt, если: (1) $z = x^2 + xy + y^2$, $x = t^2$, $y = t^3$; (2) $z = \arcsin(x/y)$, $x = t$, $y = \sqrt{(1+t^2)}$; (3) $z = \exp(x^2+y^2)$, $x = 2\cdot\cos t$, $y = 2\cdot\sin t$.

5.10. Вычислить $\partial z/\partial u$ и $\partial z/\partial v$, если:
(1) $z = x^2\cdot\ln y$, $x = u/v$, $y = uv$; (2) $z = \mathrm{arctg}(x/y)$, $x = u\cdot\sin v$, $y = u\cdot\cos v$.

5.11. Показать, что если функция $z = f(x/y)$ дифференцируема, то она удовлетворяет уравнению: $x\cdot\partial z/\partial x + y\cdot\partial z/\partial y = 0$.

5.12. Найти y_x', если: (1) $1+ xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$; (2) $x + y = \cos(x + y)$; (3) $x^2 + y^2 = R^2$; (4) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$; (5) $x^3 + y^3 = 2axy$; (6) $x + y = \exp(xy)$.

5.13. Найти первые частные производные функции $z(x; y)$, если: (1) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$; (2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 1$; (3) $x + \ln(y + z) = 1$; (4) $x + y + z = \exp(xyz)$.

5.14. Найти полный дифференциал dz, если: (1) $xyz = x + y + z$; (2) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$; (3) $\ln(x + z) + y + z = 1$; (4) $xyz + x + y + z = 0$.

5.15. Найти все ненулевые частные производные и дифференциалы следующих функций. (1) $z = xy^2$. (2) $z = x^2 + y^2$. (3) $z = (x + y)^2$.

5.16. Вычислить вторые частные производные следующих функций. (1) $z = \sin(xy)$. (2) $z = \ln(x + y)$. (3) $u = xy^2z^3$. (4) $r = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$. (5) $z = \ln[1/\cos(x+y)]$. (6) $z = x\cdot \ln y$.

5.17*. Доказать, что функция $u = 1/\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ удовлетворяет уравнению Лапласа: $u_{xx}'' + u_{yy}'' + u_{zz}'' = 0$.

5.18. Вычислить второй полный дифференциал d^2z для следующих функций. (1) $z = x\cdot \ln(y/x)$. (2) $z = e^x\cdot\cos y$. (3) $z = x^3 + y^3 + 3xy$.

Элементы векторного анализа

5.19. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M_1(1; 2)$ в направлениях $\vec{s}_1(1; 2)$, $\vec{s}_2(2; -1)$.

5.20. Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке $M_1(3; 1)$ в направлении от этой точки к точке $N(6; 5)$.

5.21. Найти производную функции $z = \ln(x + y)$ в точке $M_1(1; 2)$, принадлежащей параболе $y^2 = 4x$ по направлению касательной к этой параболе.

5.22. Даны функции $z_1 = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $z_2 = x - 3y + (\sqrt{3})xy$. Найти угол между градиентами этих функций в точке $M_1(3; 4)$.

5.23. Найти точки, в которых модуль градиента функции $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ равен 2.

5.24. Пусть $\vec{E} = Q\,\vec{r}/r^3$. Найти $div\,\vec{E}$, $rot\,\vec{E}$.

5.25. Тело массы m движется равномерно по окружности радиуса r со скоростью V. Найти вихрь (rot) скорости $\vec{V}$ и $div\,\vec{V}$**.**

5.26. Доказать, что $rot\,rot\,\vec{V} = \nabla\,div\,\vec{V} - \Delta\vec{V}$.

5.27. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к параболоиду $z = x^2 + y^2$ в точке M_1 с координатами $x =1$, $y = -2$.

5.28. Найти уравнение касательной плоскости к сфере $x^2 + y^2 + z^2 =4$ в точке M_1 с ординатой $y =1$ и аппликатой $z = (\sqrt{3})$.

Вычисление погрешностей

5.29. Вычислить ln 2,0 и определить погрешность результата, если известно табличное значение: $\ln 2 \approx 0{,}69315$.

5.30. Вычислить $e^{2,00}$ и определить погрешность результата, если известно табличное значение: $e^2 \approx 7{,}38906$.

5.31. Вычислить $8{,}0^{1/3}$. Определить погрешность результата.

5.32. Вычислить x^2 и определить погрешность результата, если $x = 2{,}5 \pm 0{,}1$.

5.33. Вычислить суммы следующих приближенных чисел.
(1) 1,003 + 2,0 = ? 2) 2,10 + (–1,401) = ? (3) 10,2 + (–10,1) = ?

5.34. Выполнить вычисления с приближенными числами.
(1) 1,0010·2,0 = ? (2) 2,00·(–5,0) = ? (3) 10,2 /2,0 = ? (4) (2,0 / 2,0)·2,0 = ?
(5) (–5,0 /2,50) + 0,91·2,0 = ? (6) 3,0·3,0 /(–9.0) = ?

5.35. Вычислить $\mathrm{tg}(45^0 \pm 3^0)$.

5.36. Вычислить площадь $S = ab$ стола, если при измерениях его стороны оказались равны: $a = (1{,}5 \pm 0{,}01)$ м; $b = (0{,}5 \pm 0{,}01)$ м.

5.37. Тело прошло путь $S = 1$ км за время $t = 10$ с. Определить среднюю скорость движения и абсолютную погрешность её определения, если погрешности при измерениях составляли: $\Delta S = 10$ см; $\Delta t = 0{,}1$ с.

5.38. Для определения плотности вещества изготовлен кубик со стороной $a = 1$ см. Его масса оказалась равной $m = 2{,}7$ *г*. Определить плотность ρ этого вещества, абсолютную и относительную погрешности её определения, если погрешности при измерении составляют: $\Delta a = 0{,}1$ мм; $\Delta m = 0{,}01$ *г*.

5.39. Сопротивление R резистора вычисляется по формуле $R = U / I$. Вычислить R, если: $U = (10 \pm 0{,}5)$ В; $I = (1 \pm 0{,}05)$ А.

5.40. Рост биомассы в реакторе происходит по экспоненциальному закону: $m = m_0 \exp(rt)$. Определить количество биомассы в реакторе в момент времени $t = (10 \pm 0{,}1)$ с для относительной скорости роста $r = 0{,}5$ с$^{-1}$ и начальной (при $t = 0$) массе $m_0 = (5 \pm 0{,}05)$ *г*. Замечание: $e^5 \approx 148{,}41$.

6. ИНТЕГРАЛЫ

Методы вычисления неопределённого интеграла

6.1. Пользуясь методом разложения, вычислить следующие интегралы.

$I_1 = \int (x^3 + \sin x)dx$. $\quad I_2 = \int \frac{x^2+2}{x} dx$. $\quad I_3 = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$. $\quad I_4 = \int \frac{2+x^2}{1+x^2} dx$.

$I_5 = \int \frac{1+x}{1+x^2} dx$. $\quad I_6 = \int \frac{x^2+2x+1}{1+x^2} dx$.

6.2. Вычислить интегралы, осуществляя простейшие преобразования дифференциала (замену переменной). $\quad I_1 = \int (x+2)^5\, dx$. $\quad I_2 = \int \frac{dx}{1+x}$. $\quad I_3 = \int \frac{2xdx}{1+x^2}$.

$I_4 = \int \cos^6 x \cdot \sin x\, dx$. $\quad I_5 = \int \sin^4 x \cdot \cos x\, dx$. $\quad I_6 = \int \operatorname{tg} x\, dx$. $\quad I_7 = \int \operatorname{ctg} x\, dx$.

$I_8 = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$. $\quad I_9 = \int \cos(2x+1)\, dx$.

6.3. Вычислить методом интегрирования по частям: $I_1 = \int x \cdot \sin x\, dx$;
$I_2 = \int \ln x\, dx$; $\quad I_3 = \int \operatorname{arctg} x\, dx$; $\quad I_4 = \int (x^2 + x + 1) \cdot \cos x\, dx$.

6.4. Вычислить интегралы. $I_1 = \int \sin(2x)\, dx$. $\quad I_2 = \int \frac{dx}{\cos^2(2x+1)}$.

$I_3 = \int \operatorname{th} x\, dx$. $\quad I_4 = \int (x+1) \cdot \sin x\, dx$. $\quad I_5 = \int x \cdot \exp x\, dx$. $\quad I_6 = \int \frac{x^2}{1+x} dx$.

$I_7 = \int x \cdot \sin(x^2 + 1)\, dx$. $\quad I_8 = \int (x^2 + 1) \cdot \exp x\, dx$.

6.5. Вычислить интегралы. $I_c = \int e^x \cos x\, dx$. $\quad I_s = \int e^{ax} \sin x\, dx$.

6.6. Вычислить интегралы. $I_1 = \int \frac{\ln x}{x} dx$. $\quad I_2 = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$.

$I_3 = \int \cos x \cdot \exp(\sin x)\, dx$. $\quad I_4 = \int \sin x \cdot (1 + \cos x)^3\, dx$.

6.7. Вычислить следующие интегралы, используя метод разложения подынтегральной функции на простейшие дроби.

$$I_1=\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)},a\neq b.\qquad I_2=\int\frac{xdx}{(x+a)(x+b)},\ a\neq b.\qquad I_3=\int\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}.$$

$$I_4=\int\frac{xdx}{(1+x)(1+x^2)}.\qquad I_5=\int\frac{dx}{x(1+x^2)}.\qquad I_6=\int\frac{dx}{(1-x)(1+x^2)}.$$

6.8. Вычислить следующие интегралы.

В заданиях 12–18 вычисления провести для случаев m, $n = 0, 1, 2 \dots$ Дополнительно в заданиях 16–18 рассмотреть отдельно случаи: $n = 0$; $n = m$; $n = m = 0$.

(1) $I_1=\int\frac{dx}{(1-x^2)^2}$. (2) $I_2=\int\frac{dx}{a^2+x^2}$. (3) $I_3=\int\frac{dx}{\cos x}$. (4) $I_4=\int\frac{dx}{\sin x}$.

(5) $I_5=\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. (6) $I_6=\int \mathrm{tg}(3x)dx$. (7) $I_7=\int\cos(2x-1)dx$. (8) $I_8=\int x\cdot\cos(2x)dx$.

(9) $I_9=\int\ln\sqrt{x}\,dx$. (10) $I_{10}=\int\frac{dx}{x^2+3x+2}$. (11) $I_{11}=\int\frac{dx}{x^2+x-2}$.

(12) $I_{nc}=\int\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt,\ n=0,1,2\dots$ (13) $I_{ns}=\int\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$.

(14) $J_{nc}=\int\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$. (15) $J_{ns}=\int\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$.

(16) $I_{cc}=\int\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}mt\right)dt$. (17) $I_{ss}=\int\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}mt\right)dt$.

(18) $I_{cs}=\int\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}mt\right)dt$.

6.9. Используя соответствующие замены, вычислить интегралы:

$$I_1=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin(2x)}dx;\qquad I_2=\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x};\qquad I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}};$$

$$I_4=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx;\qquad I_5=\int\frac{dx}{x^2-2x+2};\qquad I_6=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

Определённый интеграл

6.10. Вычислить площадь под кривыми, используя формулу Ньютона – Лейбница (сделать рисунки).

(1) $y = kx$, $x \in [-x_1 ; x_1]$. Пояснить геометрический смысл результата.

(2) $v = V_0 \cos(\omega_0 t)$; $t \in [0; t_1]$. Предложить физический смысл результата.

(3) $y = 1/(1 + x)$, $x \in [0; 1]$. (4) $y = 1/(a^2 + x^2)$, $x \in [-a; a]$.

6.11. Вычислить y'_x, если функция $y(x)$ задана интегралом:

(1) $y=\int\limits_0^x\sqrt{(1+t^3)}\,dt$; (2) $y=\int\limits_0^x\ln(1+t^2)dt$; (3) $y=\int\limits_x^1\exp(t^2)dt$;

(4) $y=\int\limits_0^z \frac{\sin t}{t}dt,\ z=x^2$; (5) $y=\int\limits_z^1 \sin(1+t^2)dt,\ z=x^3$; (6) $y=\int\limits_{2x}^1 \cos(t^2)dt$;

(7) $y=\int\limits_0^{x^2} \ln\sqrt{t}\,dt$; (8) $y=\int\limits_0^{\cos x} \cos t dt.$

6.12. Вычислить площадь S под кривой:
(1) $y = 0{,}5 \exp x$, $x \in [-a; a]$; (2) $y = x\cdot\cos x$, $x \in [0; 2\pi]$.

6.13. Вычислить интегралы: $I_1=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{xdx}{\sin^2 x}$; $I_2=\int\limits_0^{2\pi} x\cdot\sin xdx$;

$I_3=\int\limits_0^2 x\cdot\exp(x^2)dx$; $I_4=\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\cdot\exp(\sin x)dx$; $I_5=\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} xdx}{\cos^2 x}$;

$I_6=\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 x\cdot\cos xdx$; $I_7=\int\limits_1^e \ln xdx$; $I_8=\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x}dx$.

6.14. Исходя из определения несобственных интегралов от неограниченных функций, вычислить следующие интегралы (или установить их расходимость):

(1) $I_1=\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} xdx$; (2) $I_2=\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$; (3) $I_3=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (4) $I_4=\int\limits_3^6 \frac{dx}{x^2-7x+10}$;

(5) $I_5=\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$; (6) $I_6=\int\limits_{-2}^1 \frac{dx}{x}$; (7) $I_7=\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$; (8) $I_8=\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}$; (9) $I_9=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

(10) $I_{10}=\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{x^3}$; (11) $I_{11}=\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$; (12) $I_{12}=\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-1}$.

6.15. Исходя из определения несобственных интегралов с бесконечными пределами, вычислить интегралы (или установить их расходимость):

(1) $I_1=\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$; (2) $I_2=\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^3}$; (3) $I_3=\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$; (4) $I_4=\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\cdot\ln x}$;

(5) $I_5=\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x}$; (6) $I_6=\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$; (7) $I_7=\int\limits_0^\infty \exp(-x)dx$; (8) $I_8=\int\limits_{-\infty}^0 x\cdot\exp(x)dx$.

6.16. Найти площадь S между первым и вторым витками спирали Архимеда: $\rho=\alpha\varphi$, $\varphi \in [2\pi; 4\pi]$.

6.17. Вычислить площадь S круга $x^2 + y^2 \le 1$.

6.18. Найти площадь S частей круга $x^2 + y^2 = 1$, образованных его сечением прямыми: (L_1) $y = x$ и (L_2) $y = 2x$.

6.19. Вычислить площадь S эллипса $4x^2 + y^2 = 4$.

6.20. Вычислить площадь S сегмента параболы $y^2 = 2x$ на отрезке $x \in [0; 1]$.

6.21. Вычислить объем V шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

6.22. Вычислить объём V конуса, имеющего радиус основания R и высоту H.

6.23. Найти длину L дуги кривой $y = \ln x$ от $x_1 = 1$ до $x_2 = 8$.

6.24. Найти длину L двух первых витков спирали Архимеда $\rho = \alpha\varphi$.

6.25. Вычислить длину L дуги линии $x = (t^2 - 2)\cdot\sin t + 2t\cdot\cos t$, $y = (2 - t^2)\cdot\cos t + 2t\cdot\sin t$, от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

6.26. Вычислить длину L отрезка параболы $y^2 = 4x$, соединяющего точки с $x_1 = 1$.

6.27. Вычислить длину L дуги $y = \operatorname{ch} x$ для $x \in [0; a]$.

6.28. Вычислить длину L кривой: $\rho = 2a\cdot\cos\varphi$; $\varphi \in [-\pi/2; \pi/2]$.

6.29. Вычислить длину L кривой: $\rho = 2b\cdot\sin\varphi$; $\varphi \in [0; \pi]$.

Многомерные и криволинейные интегралы

6.30. Вычислить интегралы по заданной области D.

$$I_1 = \iint\limits_D \exp(x+y)\,dxdy,\ D = \{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}\,.$$

$$I_2 = \iint\limits_D x\cdot\sin(x+y)dxdy,\ D = \{0 \le x \le \pi;\ 0 \le y \le \pi/2\}\,.$$

6.31. Вычислить интегралы, перейдя к полярным координатам:

$$I_1 = \int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy\,; \qquad I_2 = \iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy,\ D = \{x^2+y^2 \le R^2\}\,.$$

6.32. Найти пределы двойного интеграла $I = \iint\limits_D xydS$, если область D ограничена параболами $y = x^2$, $y = (\sqrt{x})$.

6.33. Переменить порядок интегрирования и вычислить $I = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} ydy$.

6.34. Найти двойным интегрированием площадь S области, ограниченной прямыми: $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 1$.

6.35. Вычислить площадь S части плоскости $6x + 3y + 2z = 12$, заключённой в первом октанте.

6.36. Вычислить площадь S части поверхности $z^2 = 2xy$, находящейся над прямоугольником, лежащим в плоскости $z = 0$ и ограниченном прямыми: $x = 0$; $y = 0$; $x = 3$; $y = 6$.

6.37. Найти момент инерции I однородного круга радиуса R относительно касательной.

6.38. Найти центр тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$, осью Ox, и прямой $x = \pi/4$.

6.39. Вычислить тройные интегралы:

$$I_1 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 dz\,; \qquad I_2 = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy \int\limits_0^c (x+y+z)dz\,; \qquad I_3 = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y xyzdz\,;$$

$$I_4 = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} x^3y^2 zdz\,.$$

6.40. Вычислить тройные интегралы:

$$I_1 = \iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3},$$

–область Ω ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

$$I_2 = \iiint\limits_{\Omega} y\cdot\cos(z+x)\,dxdydz,$$

–область Ω ограничена цилиндром $y=\sqrt{x}$ и плоскостями $y=0$, $z=0$, $x+z=\pi/2$.

6.41. Вычислить следующие интегралы, переходя к цилиндрическим или сферическим координатам.

$$I_1 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^a dz.$$

$I_2 = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,dxdydz$, –область Ω определяется неравенствами:

$z \ge 0$, $r^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

$I_3 = \iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{(z-2)^2}$, –область Ω есть цилиндр: $x^2+y^2 \le 1$; $-1 \le z \le 1$.

$$I_4 = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz.$$

6.42. Вычислить следующие криволинейные интегралы.

$I_1 = \int\limits_L \dfrac{ds}{x-y}$; L –отрезок прямой $y=(x/2)-2$, заключённый между точками $A(0;-2)$ и $B(4;0)$.

$I_2 = \int\limits_L y\,ds$, L –дуга параболы $y^2=2px$, отсечённая параболой $x^2=2py$.

$I_3 = \int\limits_L xyz\,ds$, L –четверть окружности $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=R^2/4$, лежащая в первом октанте.

6.43. Найти массу M участка линии $y=\ln x$ между точками с абсциссами $x_1=1$ и $x_2=2$, если плотность линии в каждой точке равна $\rho=x^2$.

6.44. Найти массу M четверти окружности $x^2+y^2=R^2$, расположенной в первом квадранте, если плотность в каждой точке равна ординате этой точки.

6.45. Вычислить площадь S цилиндрической поверхности, заключённой между плоскостью Oxy и поверхностью: $x^2+y^2=R^2$, $z=x$.

6.46. Вычислить интеграл по поверхности S –части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, находящейся в первом октанте: $I = \iint\limits_S x^2y^2z\,dxdy$.

6.47. Поверхностный интеграл по замкнутой поверхности преобразовать с помощью формулы Остроградского в тройной интеграл по объёму тела, ограниченного этой поверхностью. Интегрирование ведется по внешней стороне поверхности S: $I = \oiint\limits_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$.

7. РЯДЫ

Числовые ряды

7.1. Исследовать сходимость ряда: $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \ldots$

7.2. Общий член ряда есть $u_n = 1/(n\,3^n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Записать первые 4 члена ряда и исследовать его сходимость.

7.3. Исследовать ряд $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ на сходимость.

7.4. Исследовать сходимость ряда $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$.

7.5. Записать первые 5 членов и исследовать сходимость ряда: $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

7.6. Записать развёрнутое представление ряда и исследовать его сходимость:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

7.7. Записать ряд и исследовать его сходимость, если общий член ряда равен:

(1) $u_n = \frac{1}{n^2}, n = \overline{1, \infty};$

(2) $u_n = \frac{n}{n^2+1}, n = \overline{1, \infty}.$

7.8. Записать развёрнутое представление следующих знакочередующихся рядов и исследовать их на абсолютную и условную сходимость:

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1}; \qquad S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}; \qquad S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1};$$

$$S_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}; \qquad S_5 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}; \qquad S_6 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1}.$$

Функциональные ряды

7.9. Записать развёрнутое представление рядов, определить радиус R их абсолютной сходимости, исследовать поведение на краях интервала сходимости:

(1) $S_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n$; (2) $S_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$; (3) $S_3(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}x^n$;

(4) $S_4(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(x/2)^n$; (5) $S_5(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2x)^n}{n!}$; (6) $S_6(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2n}$;

(7) $S_7(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot n!}$; (8) $S_8(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2x)^n$; (9) $S_9(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)!}$.

7.10. Продифференцировать и проинтегрировать ряды из Упражнения 7.9. Обсудить полученные результаты.

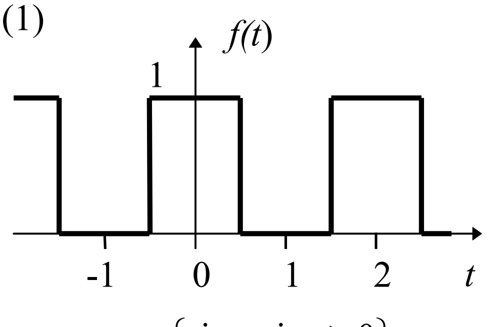
7.11. Проверить ортогональность следующих функций и вычислить их нормы (период T определять по первой гармонике).

(1) $u_0(t)=1$; $u_{1C}(t)=\cos t$; $u_{1S}(t)=\sin t$.
(2) $u_0(t)=1$; $u_{1C}(t)=\cos(2t)$; $u_{1S}(t)=\sin(2t)$.
(3) $u_0(t)=1$; $u_{1C}(t)=\cos(2\pi t)$; $u_{1S}(t)=\sin(2\pi t)$.
(4) $u_0(t)=1$; $u_{1C}(t)=\cos(\pi t)$; $u_{1S}(t)=\sin(\pi t)$.
(5) $u_{1C}(t)=\cos t$; $u_{2C}(t)=\cos(2t)$; $u_{3C}(t)=\cos(3t)$.
(6) $u_0(t)=1$; $u_1(t)=\exp(it)$; $u_{-1}(t)=\exp(-it)$, $i=\sqrt{(-1)}$.
(7) $u_0(t)=1$; $u_1(t)=\exp(2\pi it)$; $u_2(t)=\exp(4\pi it)$.

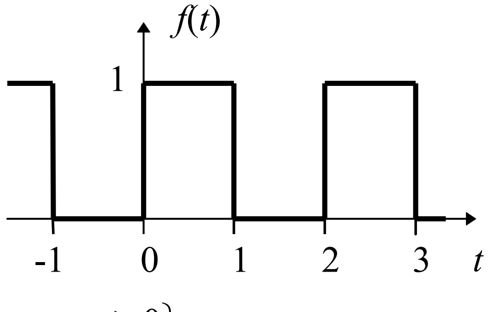
7.12. Разложить в ряд Фурье следующие функции. (1) $f(t)=\sin t$.
(2) $f(t)=\cos t$. (3) $f(t)=|\sin t|$. (4) $f(t)=|\cos t|$. (5) $f(t)=\sin^2 t$. (6) $f(t)=\cos^2 t$.
(7) $f(t)=\cos(t-\alpha)$. (8) $f(t)=\sin(t+2)$. (9) $f(t)=1+\cos(2t)$.
Изобразить амплитудные спектры этих функций.

7.13. Разложить в ряд Фурье следующие функции и исследовать их амплитудные спектры:

(1)



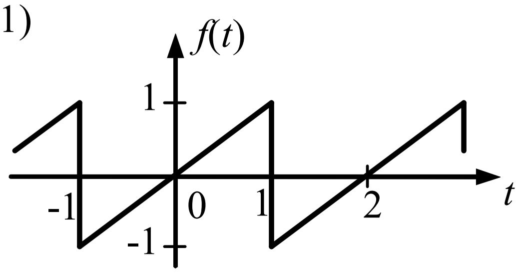
(2)



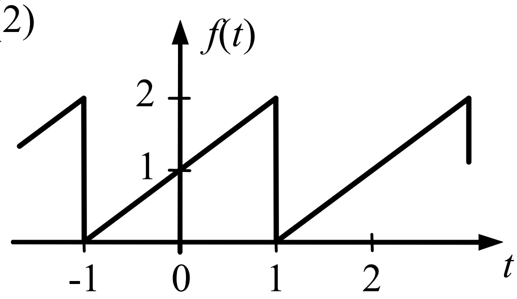
(3) $f(t)=\begin{Bmatrix}\sin t;\ \sin t\ge 0\\ 0;\ \sin t\langle 0\end{Bmatrix}$; (4) $f(t)=\begin{Bmatrix}\cos t;\ \cos t\ge 0\\ 0;\ \cos t\langle 0\end{Bmatrix}$.

7.14. Разложить в ряд Фурье следующие функции, построить их амплитудные спектры и обсудить результаты.

(1)

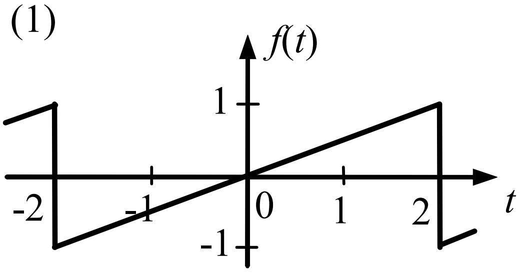


(2)

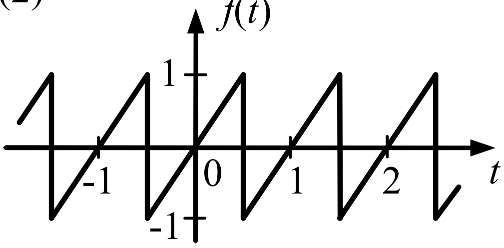


7.15. Найти амплитудные спектры следующих функций, построить их зависимость от текущей частоты F, сравнить с результатами Упражнения 7.14:

(1)



(2)



8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения первого порядка

8.1. Решить следующие уравнения с разделяющимися переменными.

(1) $xy\cdot dx + (x+1)\cdot dy = 0$.

(2) $\sqrt{(y^2+1)}\cdot dx = xy\cdot dy$.

(3) $(x^2-1)\cdot y' + 2xy^2 = 0$; $y(0) = 1$.

(4) $y'\cdot\mathrm{ctg}\, x + y = 2$; $y(0) = -1$.

8.2. Решить следующие однородные уравнения.

(1) $(x + 2y)\cdot dx - x\cdot dy = 0$.

(2) $(x - y)\cdot dx + (x + y)\cdot dy = 0$.

(3) $(y^2 - 2xy)\cdot dx + x^2\cdot dy = 0$.

(4) $y' = 1 + y/x$; $y(1) = 1$.

8.3. Решить следующие уравнения в полных дифференциалах.

(1) $2xy\cdot dx + (x^2 - y^2)\cdot dy = 0$. (2) $(2 - 9xy^2)x\cdot dx + (4y^2 - 6x^3)y\cdot dy = 0$.

(3) $\exp(-y)\cdot dx - (2y + x\cdot\exp(-y)\cdot dy = 0$.

8.4. Решить следующие линейные уравнения.

(1) $x\cdot y' - 2y = 2x^4$. (2) $y' + y\ \mathrm{tg}\, x = 1/\cos x$.

(3) $(xy' - 1)\ln x = 2y$. (4) $xy' + (x + 1)y = 3x^2\cdot\exp(-x)$.

8.5. Решить следующие уравнения. (1) $y'\cdot(1 + \exp x)\cdot y = \exp x$; $y(0) = 1$.
(2) $xy' - y = y^3$. (3) $y' = (y/x) - 1$. (4) $(x^2 + y^2)\cdot dx + 2xy\cdot dy = 0$; $y(1) = 1$.
(5) $y'\cdot\mathrm{tg}\, x = y$. (6) $y' = -(x + y)/x$.

8.6. При внутривенном вливании содержание глюкозы x в крови больного диабетом описывается уравнением: $dx/dt = \alpha - \varepsilon x$, где α –скорость вливания, ε – удельная скорость удаления глюкозы из организма. Найти закон изменения количества глюкозы в крови при условии $x(t = 0) = 0$ –больной поступил в состоянии комы. Оценить время t_0, необходимое для снятия приступа болезни.

Дифференциальные уравнения второго порядка

8.7. Решить однородные уравнения с постоянными коэффициентами:
(1) $y'' + y' - 2y = 0$;
(2) $y'' - 2y' = 0$;
(3) $y'' + 2y' + 10y = 0$;
(4) $y'' + 2y' + y = 0$.

8.8. Решить уравнения, содержащие полином в правой части:
(1) $y'' - 6y' + 5y = 5x^2 - 2x$; (2) $y'' + y' = 2x$; (3) $y'' + 4y' - 5y = 5x + 1$;
(4) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x - 4$.

8.9. Решить уравнения, содержащие экспоненту в правой части:
(1) $y'' - 2y' - 3y = 5\cdot\exp(4x)$; (2) $y'' - 2y' - 3y = 4\cdot\exp(-x)$;
(3) $y'' - 2y' - 3y = 25x\cdot\exp(4x)$; (4) $y'' - 2y' - 3y = 4\cdot\exp(3x)$.

8.10. Решить уравнение: $y'' - 2y' + y = \exp(x)$.

8.11. Найти вынужденные решения уравнения $y'' + y = f(x)$, если:
(1) $f(x) = \sin(2x)$; (2) $f(x) = \sin x$.

8.12. Найти вынужденные решения уравнения $y'' - 2y' + 2y = f(x)$, если:
(1) $f(x) = \exp x$; (2) $f(x) = \cos x + 2\sin x$; (3) $f(x) = x\cdot\cos x$.

8.13. Решить системы дифференциальных уравнений:

$$(1)\ \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 4y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2z + y; \end{cases} \qquad (2)\ \left.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = 0 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x(t=0) = \\ = y(t=0) = 1; \end{matrix}$$

$$(3)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y; \end{cases} \qquad (4)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 5x + 3y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} - x - y = 5e^{-t}; \end{cases}$$

$$(5)\ \left.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 2x + y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} - 2y + x = 5e^{t}\cdot\sin t \end{cases}\right\} \begin{matrix} x(0) = \\ = y(0) = 0; \end{matrix} \qquad (6)\ \left.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x \end{cases}\right\} \begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{matrix}$$

Особые точки в решениях дифференциальных уравнений

8.14. Найти особые точки уравнения $dx/dt = \alpha - \varepsilon x$, описывающего динамику внутривенного вливания глюкозы ($\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, см. Упражнение 8.6). Исследовать поведение $x = x(t)$ в окрестности особых точек.

8.15. Найти особые точки системы уравнений, описывающей, согласно модели Вольтера, динамику системы «хищники–жертвы». Здесь x –число жертв, y – число хищников. Исследовать поведение системы в окрестности особых точек. Нарисовать качественно фазовый портрет системы.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x - \delta_1 xy\,, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\varepsilon_2 y + \delta_2 xy; \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2 \rangle 0\,. \end{cases}$$

8.16. Для заданных систем дифференциальных уравнений выявить особую точку и определить её тип. Найти уравнение фазовой траектории $F(x; y) = C$ и определить направление движения по ней:

$$(1)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x; \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y; \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x; \end{cases} \qquad (4)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

8.17. В заданных системах дифференциальных уравнений выявить особую точку и определить её тип по имеющейся классификации. Найти уравнения фазовых траекторий в параметрическом виде. В заданиях (1) и (2) преобразовать эти уравнения к виду $F(x; y) = C$, в (3) и (4) использовать полярные координаты, $\rho = \rho(\varphi)$. Определить направление движения по фазовой траектории.

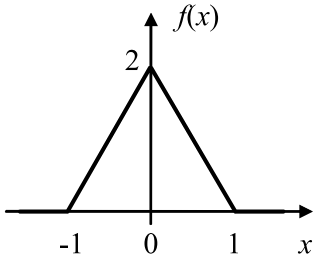
$$(1)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x; \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y; \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y; \end{cases} \qquad (4)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

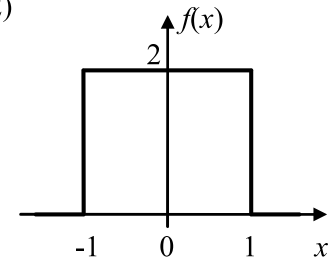
Метод Даламбера

9.1. Имеется бесконечная струна, смещение от положения равновесия которой $u(x; t)$ описывается уравнением $\partial^2u/\partial t^2 = \partial^2u/\partial x^2$. В момент $t = 0$ задаётся смещение $u(x; t = 0) = f(x)$. Найти $u(x; t)$, если функция $f(x)$ имеет вид, изображ`нный на рисунках. Указание: взять значения $t = 0$; $t = 0{,}5$; $t = 1$; $t = 2$.

(1)

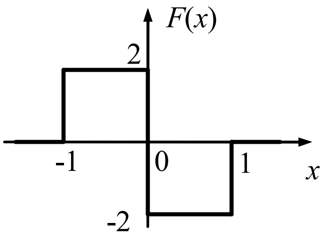


(2)

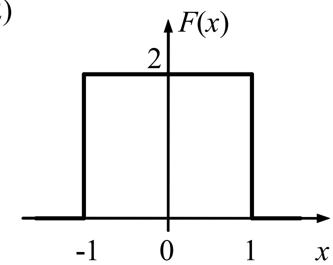


9.2. Имеется бесконечная струна, смещение от положения равновесия которой описывается уравнением $\partial^2u/\partial t^2 = \partial^2u/\partial x^2$. В момент $t = 0$ задаётся начальная скорость: $\partial u(x; t)/\partial t|_{t=0} = F(x)$, см. рисунки. Найти $u(x; t)$. Указание: взять значения $t = 0$; $t = 0{,}5$; $t = 1$; $t = 2$. Построить на фазовой плоскости $(x; t)$ характеристики решения.

(1)



(2)



Метод Фурье

9.3. Дана струна длины $l = 1$, колебания которой описываются уравнением: $\partial^2u/\partial t^2 = \partial^2u/\partial x^2$. Найти собственные функции $X(x)$, если:

(1) $u(x = 0; t) = u(x = l; t) = 0$ –концы струны закреплены;

(2) $\partial u(x; t)/\partial t|_{x=0} = \partial u(x; t)/\partial t|_{x=l} = 0$ –концы свободны;

(3) $u(x; t)|_{x=0} = \partial u(x; t)/\partial t|_{x=l} = 0$ –один конец закреплен, другой свободен.

9.4. Найти собственные частоты колебаний струны, приняв условия, сформулированные в Упражнении 9.3.

9.5. Дана струна длины $l = 1$, колебания которой описываются уравнением: $\partial^2u/\partial t^2 = 4\partial^2u/\partial x^2$. Найти собственные функции $X(x)$ и собственные частоты колебаний, если: (1) оба конца струны закреплены; (2) оба конца струны свободны; (3) при $x = 0$ струна закреплена, другой конец свободен.

10. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайные события. Вероятность

10.1. Найти вероятность того, что число, выбранное наугад из чисел от «1» до «100», удовлетворяет следующему условию.
(1) содержит цифру «5». (2) не содержит цифру «5».

10.2. Задача о шимпанзе–писателе. Для шимпанзе изготовили пишущую машинку с клавишами: О, П, Р, С, Т, –всего 5 букв. Найти вероятность следующих событий. (1) Шимпанзе, ударяя по клавишам 5 раз, напечатает: слово «СПОРТ»; слово «ТОПОР». (2) Шимпанзе, ударяя по клавишам 4 раза, напечатает: слово «ТРОС»; слово «СОРТ».

10.3. На пяти карточках написаны буквы: О, П, Р, С, Т. Карточки выбираются наугад и последовательно раскладываются на столе. Найти вероятности составления слов «СПОРТ» и «ТОПОР».

10.4. В некотором городе вероятность дождя в любой августовский день составляет 0,25, а вероятность града равна 0,1. Вероятность выпадения града во время дождя равна 0,3. Ответить на следующие вопросы. (1) Независимы ли события «Град» (Г) и «Дождь» (Д)? (2) Какова вероятность выпадения града в день без дождя? (3) Какова вероятность появления дождя в день с градом?

10.5. Имеется два набора карточек (А и В) с числами от 1 до 10. Из каждого набора наугад вынимается по одной карточке. Найти вероятность того, что сумма чисел на двух вынутых карточках будет равна:
(1) двум; (2) трем; (3) четырем; (4) девятнадцати.

10.6. Имеется набор из пяти карточек с буквами: О, П, Р, С, Т. Наугад выбираются 4 карточки, которые последовательно раскладываются на столе. Найти вероятность получения слова: (1) «СТОП»; (2) «ТОРС»; (3) «РОСТ».

10.7. Имеется длинная лента из N автобусных билетов, содержащая n «счастливых» билетов. Известно, что двух «счастливых» билетов подряд не бывает. Определить, каким способом выгоднее взять два билета из ленты с целью получения хотя бы одного «счастливого» билета: (1) брать билеты из разных участков ленты; (2) взять подряд два билета.

10.8. Имеется достаточно большая группа, состоящая из одинакового количества мужчин и женщин. Известно, что 5 % мужчин и 0,25 % женщин страдают дальтонизмом. Найти вероятность событий: (1) наудачу выбранный индивидуум –дальтоник; (2) выбранный дальтоник оказался мужчиной;
(3) выбранный дальтоник оказался женщиной.

10.9. Большая группа людей разбита на две одинаковые подгруппы А и Б. Подгруппа А находилась на специальной диете. В ней за определенный промежуток времени переболел каждый 10-й человек. Подгруппа Б находилась в обычных условиях, здесь болел каждый 5-й человек.

Найти: (1) вероятность заболевания во всей группе; (2) вероятность того, что болевший человек относится к: а) подгруппе А; б) подгруппе Б.

Случайные величины

10.10. Разыгрывается лотерея, в которой, в среднем, на каждый десятый билет приходится выигрыш. Остальные билеты без выигрыша. (1) Описать выигрыш, приходящийся на 1 билет, как случайную величину. (2) Найти вероятность выигрыша хотя бы на 1 билет из серии: а) в 3 билета; б) в 4 билета.

10.11. Случайная величина ξ является суммой трех независимых телеграфных случайных величин: $\xi = \xi_1+\xi_2+\xi_3$. Для каждой случайной величины ξ_k, $k = 1, 2, 3$, задана одна и та же таблица.

Таблица случайной величины ξ_k

x_i	0	1
p_i	0,2	**?**

(1) Дозаполнить таблицу. (2) Составить таблицу случайной величины ξ. (3) Найти вероятность события $\xi \leq 2$. (4) Найти вероятности событий: $\xi=1$; $\xi=2$.

10.12. Проводится серия из трёх независимых опытов. Вероятность удачного завершения каждого опыта составляет $p = 0{,}1$. Представить число ξ удачных опытов в серии как дискретную случайную величину. Определить вероятность того, что хотя бы один опыт завершится удачно.

10.13. В телевизионной студии стоят $n = 3$ передающие камеры. Вероятность отказа одной камеры есть $q = 0{,}1$. Найти: (1) вероятность безотказной работы:
а) всех трех камер; б) двух камер; в) не менее одной камеры. (2) Сколько надо камер, чтобы вероятность отказа сразу их всех была не больше, чем 10^{-4}.

10.14. В $n = 4$ пробирках выращиваются штаммы бактерий. Вероятность загрязнения составляет $q = (1/3)$. (1) Какова вероятность получения чистого штамма хотя бы в одной пробирке? (2) Какова вероятность получения не менее 50 % чистых штаммов? (3) Какова вероятность получения чистых штаммов во всех пробирках? (4) Сколько пробирок надо взять, чтобы вероятность получения чистого штамма хотя бы в одной пробирке была не ниже 0,99?

10.15. Вероятность некоторого неинфекционного заболевания в популяции из n особей ($n >> 1$) составляет p. Пусть $n = 2\cdot 10^4$, $p = 2\cdot 10^{-4}$. Какова вероятность следующих событий: (1) отсутствия заболевания в данной популяции;
(2) наличия одной больной особи, трёх больных особей;
(3) наличия не более трёх больных особей.

10.16. В поле зрения микроскопа наблюдается N равных участков, по которым случайным образом распределены n бактерий. Предложить метод оценки числа бактерий n путем определения числа пустых участков N_0. Считать N, $n >> 1$. Рассмотреть 75 пустых клеток в поле размером 30×30 клеток.

10.17. Веса животных, взятых для опытов, равномерно распределены в диапазоне от 1 кг до 2 кг. Требуется: (1) построить график плотности вероятности $p(x)$ для веса животных как случайной величины; (2) определить вероятность того, что наудачу выбранное животное весит больше чем $x_0 = 1{,}6$ кг; (3) определить вероятность того, что вес наудачу выбранного животного лежит в интервале от $x_1 = 1{,}4$ кг до $x_2 = 1{,}5$ кг; (4) определить вероятность того, что наудачу выбранное животное весит меньше 1,5 кг.

Среднее

10.18. Вычислить среднее значение для следующих величин.
(1) Телеграфной величины ξ_1, заданной таблицей 1.

Таблица 1

x_i	0	1
p_i	1/3	2/3

(2) Дискретной величины ξ_2, заданной таблицей 2.

Таблица 2

x_i	–2	–1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

(3) Суммы величин из пунктов 1 и 2: $\xi_3 = \xi_1 + \xi_2$. (4) Комбинации величин из пунктов 1 и 2: $\xi_4 = 3\xi_1 + 4\xi_2$. (5) Случайной величины, равномерно распределённой в интервале: а) $[-1; 2]$; б) $[-10; 10]$.

10.19. Количество пациентов, ежедневно поступающих в больницу, описывается распределением Пуассона с параметром $\alpha = 2$. Найти вероятность поступления $k = 0, 1, 2, 3$ пациентов в день. Построить гистограмму.

10.20. Найти среднее значение случайной величины, равномерно распределённой в интервале: (1) $0 \le x \le 3$; (2) $10 \le x \le 11$.

Дисперсия

10.21. Телеграфная случайная величина ξ принимает значение $x_0 = 0$ с вероятностью q и $x_1 = 1$ с вероятностью $p = 1 - q$. Требуется найти: (а) среднее значение $\bar{\xi}$; (б) среднеквадратическое значение $\overline{\xi^2}$, (в) дисперсию σ_ξ^2.

10.22. Дана биномиальная случайная величина

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i ,$$

где все ξ_i –независимые телеграфные случайные величины, определённые в Упражнении 10.21. Найти среднее значение $\bar{\eta}$ и дисперсию σ_η^2 этой величины.

10.23. При измерении некоторой величины α каждый раз возникает случайная погрешность, характеризуемая стандартом σ. Для повышения точности измерения производят n независимых отсчётов. В качестве приближённой оценки ξ измеряемой величины α используют среднее арифметическое полученных отсчётов: $\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, где ξ_i –результат единичного отсчёта номер i. Вследствие независимости отсчётов имеем: $\overline{\xi}_i = a$, $\sigma_{\xi i}{}^2 = \sigma^2$, –для всех $i = 1, \ldots, n$. Определить среднестатистическое значение $\overline{\xi}$ оценки и её стандарт σ_ξ.

10.24. Выход биомассы после процесса культивирования описывается гауссовым (нормальным) распределением:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right),$$

характеризующимся параметрами: $\alpha = 1$ *кг*, $\sigma = 0{,}01$ *кг*. Требуется определить:

(1) вероятность выхода биомассы в количестве от $(\alpha - \delta)$ до $(\alpha + \delta)$, то есть $(\alpha - \delta) < x < (\alpha + \delta)$ в двух случаях: (а) при $\delta = 15$ *г*; (б) при $\delta = 20$ *г*;

(2) вероятность выхода биомассы в количестве от 1000 *г* до 1020 *г*;

(3) величину максимального отклонения δ^*, за пределы которого количество биомассы не выйдет с доверительной вероятностью $p_д = 99\ \%$.

10.25. Известно, что в большой популяции животных 40 % особей имеют некоторые мутации. Требуется определить: (1) в каких пределах (с доверительной вероятностью $p_д = 0{,}95$) может варьировать число мутантов в случайной выборке из 100 особей; (2) какова вероятность того, что более 50 животных в случайной выборке из 100 особей обладают изменением генома.

10.26. В сеансе телепатической связи производится передача случайной последовательности из одинакового числа ($n_0 = n_1 = 50$) «нулей» и «единиц». В каких пределах (с доверительной вероятностью $p_д = 0{,}99$) следует считать число угаданных цифр случайным, а телепатический сеанс несостоявшимся.

Системы случайных величин. Корреляция

Элементы теории для дискретных случайных величин

Две дискретные случайные величины ξ и η задаются вероятностями p_{ij}, определяющими вероятность получения значения x_i для ξ и значения y_j для η.

1^0. Условие независимости ξ и η : $p_{ij} = p_i^{(\xi)} \cdot p_j^{(\eta)}$.

2^0. Условие нормировки: $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

3^0. Правило исключения «лишней» переменной: $p_i^{(\xi)} = \sum_j p_{ij}$.

4^0. Среднее от произведения: $\overline{\xi\eta} = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}$.

10.27. С помощью приведённой таблицы задана система случайных величин.

$y_j \backslash x_i$	-1	0	1
0	1/9	1/9	1/9
1	1/9	1/9	1/9
2	1/9	1/9	**?**

Требуется: (1) определить p_{33}; (2) составить отдельные таблицы для случайных величин ξ и η; (3) выяснить, зависимы ли величины ξ и η; (4) вычислить для каждой величины среднее и дисперсию; (5) вычислить среднее значение произведения случайных величин $\overline{\xi\eta}$ и коэффициент корреляции r, определяемый следующим соотношением:

$$r = \frac{\overline{\xi\eta} - \overline{\xi} \cdot \overline{\eta}}{\sqrt{\sigma_{\xi}^{2} \cdot \sigma_{\eta}^{2}}}.$$

10.28. С помощью приведённой таблицы задана система случайных величин.

$y_j \backslash x_i$	-1	0	1
0	1/3	0	0
1	0	1/3	0
2	0	0	**?**

Требуется: (1) определить p_{33}; (2) составить отдельные таблицы для случайных величин ξ и η; (3) выяснить, зависимы ли величины ξ и η; (4) вычислить для каждой величины среднее и дисперсию; (5) вычислить среднее значение произведения случайных величин $\overline{\xi\eta}$ и коэффициент корреляции r. Определение коэффициента корреляции дано в предыдущем Упражнении.

10.29. С помощью приведённой таблицы задана система случайных величин.

$y_j \backslash x_i$	-1	0	1
0	1/4	1/24	1/24
1	1/24	1/4	1/24
2	1/24	1/24	**?**

Требуется: (1) определить p_{33}; (2) составить отдельные таблицы для случайных величин ξ и η; (3) выяснить, зависимы ли величины ξ и η; (4) вычислить для каждой величины среднее и дисперсию; (5) вычислить среднее значение произведения случайных величин $\overline{\xi\eta}$ и коэффициент корреляции r. Определение коэффициента корреляции дано в Упражнении 10.27.

УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ УПРАЖНЕНИЙ И ОТВЕТЫ

1.1: $x = \rho\cdot\cos\varphi$, $y = \rho\cdot\sin\varphi$; $\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $\varphi = \mathrm{arctg}\,(y/x)$.

Примечание. Функция arctg (…) определена на половине окружности, от $-\pi/2$ до $+\pi/2$. Поэтому при переходе от декартовых прямоугольных координат к полярным координатам для точек, лежащих в третьем и четвёртом квадрантах надо полярный угол увеличивать на π, то есть $\varphi = \mathrm{arctg}\,(y/x) + \pi$.

1.2: (а) Окружность с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = R^2$.

(б) Луч из начала координат (из полюса) под углом φ_0 к полярной оси. Если $\varphi_0 \in (-\pi/2; +\pi/2)$, то $y = k\cdot x$ и $x \geq 0$; если $\varphi_0 \in (\pi/2; 3\pi/2)$, то $y = k\cdot x$ и $x \leq 0$; здесь $k = \mathrm{tg}\,\varphi_0$. Если $\varphi_0 = +\pi/2$, то $x = 0$ и $y \geq 0$; если $\varphi_0 = -\pi/2$, то $x = 0$ и $y \leq 0$.

1.3: (1) Верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$. (2) Луч $y = x$; $x \geq 0$.
(3) Луч $y = x/\sqrt{3}$; $x \geq 0$. (4) Спираль Архимеда. (5) Кардиоида.

1.4: (1) Правая полуокружность $x^2 + y^2 = 2^2$, $x \geq 0$. (2) $(x-1)^2 + y^2 = 1$. (3) $y = 2x - 3$.

1.5*: $r = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)]}$. **1.6:** (1) 5+5=10 –лежат. (2) Нет.

1.7: Поворачиваем систему Oxy на $\alpha = 45^0$. Поднимаем её на $y_0 = 2$. Получаем: $x' = (\sqrt{2}/2)\cdot(x + y - 2)$; $y' = (\sqrt{2}/2)\cdot(-x + y - 2)$. **1.8:** 13. **1.9:** (3; –4), (1; 10), (9; –2).

1.11: $A\cdot(x-1) + B\cdot(y-2) = 0$; $x = 1$; $y = 2$. **1.13:** (1) $y = x + 1$. (2) $y = -x + 1$. (3) $y = -x$.

1.14: (1) $\varphi = 0$. (2) $\varphi = \pi/4$. (3, 4) $\varphi = \pi/2$. **1.15:** $3(x - 1) + 2(y - 1) = 0$.

1.16: Вывести уравнение прямой в отрезках; $\pm x/a \pm y/b = 1$.

1.17: (1) $(3/5)x + (4/5)y - 2 = 0$. (2) $(12/13)x - (5/13)y + 3 = 0$. (3) Нормальный вид. (4) $(3/\sqrt{10})x + (1/\sqrt{10})y - (8/\sqrt{10}) = 0$. **1.18:** $d_A = d_B = 3{,}5$. **1.19:** $d = 3$.

1.20: (1) $C(4; -3)$, $R = 2$; $y = -5$. (2) $C(-0{,}5; 0{,}5)$, $R = 2{,}5$; $3x + 4y - 13 = 0$.
(3) $C = M_1$, $R = 0$ (окружность вырождена в точку).

1.21: (1) $5x \pm (2\sqrt{6})y = 0$. (2) $x = 0$; $y = 0$ –оси координат.

1.23: $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, $\varepsilon = 0{,}8$; $A_1F_1 = F_2A_2 = 1$, $A_1F_2 = F_1A_2 = 9$, $B_1F_1 = B_1F_2 = F_1B_2 = F_2B_2 = 5$. **1.24:** $c = \sqrt{(a^2 - b^2)} = 4$, $9x - 40y + 36 = 0$, $x = 4$.

1.25: (1) $x + 2y = 4$; (2) $2x - y = 3$. **1.26:** (1) $7x + 24y - 21 = 0$. (2) $3x - 4y + 16 = 0$.
(3) $16x + 12y + 27 = 0$. (4) $\mathrm{tg}\varphi = 3/4$, $\varphi \approx 37^0$. **1.27:** (1) $C(1; -2)$; $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$; $x = 4$.
(2) $C(-2; -1)$; $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{6}$; $x + 2y = 0$.

1.28: (1) $x^2/16 - y^2/9 = 1$, $c = 5$, $a = 4$, $b = \sqrt{(25-16)} = 3$; $\varepsilon = c/a = 1{,}25$; $y_{ac} = \pm(3/4)x$.
(2) $x^2/25 - y^2/75 = 1$, $a = 5$, $c = 2a = 10$, $b = \sqrt{(100-25)} = 5\sqrt{3}$; $\varepsilon = c/a = 2$; $y_{ac} = \pm(\sqrt{3})\cdot x$.

1.29: Точка пересечения $M_1(5/3; 4/3)$, касательные: $5x - 4y = 3$, $x + y = 3$, $\mathrm{tg}\,\varphi = 9$, $\varphi \approx 83^0\,40'$. **1.30:** $c = 3$, $y_1 = 1$; $x - 7y + 3 = 0$. **1.31:** (1) $C(1; -2)$, $a = 2$, $b = 3$.
(2) $C(-1; 1)$, $a = 2$, $b = 1$. **1.32:** (1) $p = 2\cdot3 = 6$, $y^2 = 12x$. (2) $p = 5$, $y^2 = 10x - 25$.
(3) $y = 8x^2$; (4) $y = -x^2/18$. **1.33:** $y_1 = \pm 6$, $p = 6$; $x \pm y + 3 = 0$. **1.34**: $a \leq 2$, $M(2; 2)$.

1.35: $c = 1$; $x = 1$, $y = 2$. **1.36:** (1) $(x-5)^2/16 + (y+1)^2/9 = 1$ –эллипс.
(2) $-(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ –гипербола. (3) $(y+1)^2 = -(5/3)(x+2)$ –парабола.
(4) $y - (c - b^2/a) = a(x + b/a)^2$ –парабола. (5) $(x - 1)^2/4 + (y + 2)^2/9 = 1$ –эллипс.

2.1: (а) $f(0) = 2$; $f(1) = f(2) = 0$; $f(3) = 2$. (б) $g_1(x) = x^2 + 3x + 2$; $g_2(x) = x^{-2} - 3x^{-1} + 2$; $g_3(x) = x^2 - x$. **2.2:** (а) $f(1) = 0$; $f(10) = 1$; $f(100) = 2$; $f(0{,}1) = -1$. (б) $g_1(x) = -\lg x$; $g_2(x) = 2\lg |x|$; $g_3(x) = 1 - 2\lg |x|$. **2.3:** (а) $f(1) = 0$; $f(2) = 2$; $f(8) = 3$; $f(1/16) = -4$. (б) $g_1(x) = 1 + \log_2 x$; $g_2(x) = 1 + 2\log_2 |x|$; $g_3(x) = -\log_2 x$. **2.4:** (а) $f(0) = 1$; $f(1) = 10$; $f(-1) = 0{,}1$; $f(-2) = 0{,}01$. (б) $g_1(x) = 10\cdot 10^x$; $g_2(x) = 0{,}1\cdot 10^x$; $g_3(x) = x$; $g_4(x) = x^2$.

2.5: (1) $y^{(0)} = 0$; $y^{(1)} = \sin x$. (2) $y^{(0)} = \cos x$; $y^{(1)} = 0$.
(3) $y^{(0)} = \sin 1\cdot\cos x$; $y^{(1)} = \cos 1\cdot\sin x$. (4) $y^{(0)} = \cos 2\cdot\cos x$; $y^{(1)} = \sin 2\cdot\sin x$.
(5) $y^{(0)} = 2$, $y^{(1)} = \sin x$. (6) $y^{(0)} = \cos x$; $y^{(1)} = x$. (7) $y^{(0)} = x^2 + 1$; $y^{(1)} = x$.
(8) $y^{(0)} = 1$; $y^{(1)} = 1/x$. (9) $y^{(0)} = 1/x^2 + 1$; $y^{(1)} = 1/x$. (10) $y^{(0)} = \mathrm{ch}(ax)$; $y^{(1)} = \mathrm{sh}(ax)$.
(11) $y^{(0)} = \sin^2 x$; $y^{(1)} = 0$. (12) $y^{(0)} = \sin(x^2)$; $y^{(1)} = 0$.

2.6: (1) $T = 2\pi$. (2) $T = \pi$. (3, 5) Периода нет. (4) $T = (2/3)\pi$. (5) $T = 4\pi$.

2.13: (1) $\ln[x + \sqrt{(x^2 + 1)}]$. (2) $\ln[x + \sqrt{(x^2 - 1)}]$ –верхняя ветвь.
(3) $(1/2)\ln[(1 + x)/(1 - x)]$. (4) $(1/2)\ln[(x + 1)/(x - 1)]$. **2.15:** (1) $(n+2)(n+1)$. (2) 101.
(3) n. (4) $(n+2)$. (5) 100. (6) $(n+1)$. (7) $4\cdot 2 = 8$. (8) $5\cdot 3 = 15$. (9) $(n - 1)!!$

2.16: (1) Отрезок прямой. (2, 5) Полуокружность. (3, 4) Часть параболы.

3.1: $|z_1| = 3$, $\varphi_1 = 0$; $|z_2| = 3$, $\varphi_2 = \pi/2 = 90^0$; $|z_3| = \sqrt{5}$, $\varphi_3 = \mathrm{arctg}\,2 \approx 63^0\,26'$; $|z_4| = |z_3|$, $\varphi_4 = -\varphi_3$; $|z_5| = 5$, $\varphi_5 = \pi - \mathrm{arctg}(3/4) \approx 143^0\,08'$; $|z_6| = |z_5|$, $\varphi_6 = -\varphi_5$; $|z_7| = \sqrt{5}$, $\varphi_7 = \pi - \mathrm{arctg}\,(1/2) \approx 153^0\,26'$; $|z_7| = |z_7|$, $\varphi_8 = -\varphi_7$.

3.2: $\mathrm{Re}\, z_1 = 2\cdot\cos(\pi/2) = 2$, $\mathrm{Im}\, z_1 = 2\cdot\sin(\pi/2) = 0$; $\mathrm{Re}\, z_2 = \mathrm{Re}\, z_1$, $\mathrm{Im}\, z_2 = -\mathrm{Im}\, z_1$;
$\mathrm{Re}\, z_3 = 3\cdot\cos(\pi/4) = (3\sqrt{2})/2$, $\mathrm{Im}\, z_3 = 3\cdot\sin(\pi/4) = \mathrm{Re}\, z_3$; $\mathrm{Re}\, z_4 = \mathrm{Re}\, z_3$, $\mathrm{Im}\, z_4 = -\mathrm{Im}\, z_3$;
$\mathrm{Re}\, z_5 = \cos(\pi/6) = (\sqrt{3})/2$, $\mathrm{Im}\, z_5 = \sin(\pi/6) = 1/2$; $\mathrm{Re}\, z_6 = \mathrm{Re}\, z_5$, $\mathrm{Im}\, z_6 = -\mathrm{Im}\, z_5$;
$\mathrm{Re}\, z_7 = \cos(3\pi/4) = (-\sqrt{2})/2$, $\mathrm{Im}\, z_7 = \sin(3\pi/4) = (\sqrt{2})/2$; $\mathrm{Re}\, z_8 = \mathrm{Re}\, z_7$, $\mathrm{Im}\, z_8 = -\mathrm{Im}\, z_7$.

3.3: $z_3 = 3 + 4i$; $z_4 = -1 - 2i$; $z_5 = -5 - 8i$; $z_6 = -1 + 5i$; $z_7 = (5 + i)/2$.

3.4: (1) $z = (4 - 3i)/25$. (2) Указание. Перейти к показательной форме:
$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\cdot\exp(\pi i/4)$; $z_n = (z_1)^n = 2^{n/2}\cdot\exp(\pi n i/4)$, $z_{12} = -2^6$, $z_{13} = -2^6\cdot(1 + i)$, $z_{14} = -2^7\cdot i$, $z_{15} = 2^7\cdot(1 - i)$. **3.8:** (1) $|z| = 1$, $\varphi = 0$, $y_{0,2} = \pm 1$, $y_{1,3} = \pm i$.
(2) $|z| = 5$, $\varphi = \mathrm{arctg}\,(4/3)$, $y_0 = (\sqrt{5})\cdot\exp(\varphi i/2)$, $y_1 = -y_0$; (3) $|z| = 8$, $\varphi = 0$, $y_0 = 2$, $y_1 = -1 + (\sqrt{3})\cdot i$, $y_2 = y_1^*$. (4) $|z| = 4$, $\varphi = -\pi$, $y_{0,1} = \pm 2i$. (5) $|z| = 1$, $\varphi = \pi/2$, $y_{0,1} = \pm(\sqrt{2}/2)\cdot(1 + i)$. (6) $|z| = 1$, $\varphi = \pi/2$, $y_{0,2} = \pm[\cos(\pi/8) + i\cdot\sin(\pi/8)]$, $y_{1,3} = \pm[-\sin(\pi/8) + i\cdot\cos(\pi/8)]$. (7) $|z| = 1$, $\varphi = -\pi$, $y_{0-3} = (\sqrt{2}/2)\cdot(\pm 1 \pm i)$.
(8) $|z| = 1$, $\varphi = -\pi/2$, $y_{0,2} = \pm[\cos(\pi/8) - i\cdot\sin(\pi/8)]$, $y_{1,3} = \pm[\sin(\pi/8) + i\cdot\cos(\pi/8)]$.

3.10: (1) $\cos x = (1/2)\cdot[\exp(ix) + \exp(-ix)]$; $\sin x = -(i/2)\cdot[\exp(ix) - \exp(-ix)]$.
(2) $\cos x = \mathrm{ch}(ix)$; $\sin x = -i\cdot\mathrm{sh}\, x$.
(3) $\cos(\alpha + i\beta) = \cos\alpha\cdot\mathrm{ch}\,\beta - i\cdot\sin\alpha\cdot\mathrm{sh}\,\beta$; $\sin(\alpha + i\beta) = \sin\alpha\cdot\mathrm{ch}\,\beta - i\cos\alpha\cdot\mathrm{sh}\,\beta$;
(4) $\mathrm{ch}(\alpha + \beta) = \mathrm{ch}\,\alpha\cdot\mathrm{ch}\,\beta + \mathrm{sh}\,a\cdot\mathrm{sh}\,\beta$; $\mathrm{sh}(\alpha + \beta) = \mathrm{sh}\,\alpha\cdot\mathrm{ch}\,\beta + \mathrm{ch}\,\alpha\cdot\mathrm{sh}\,\beta$.

3.11: $\Delta_1 = -2$. $\Delta_2 = 0$, строки: (2)=(1)·2. $\Delta_3 = -3$. $\Delta_4 = -1$. $\Delta_5 = -2$.
$\Delta_6 = 0$, строки: (2)=(1)·2.

3.12: $\Delta_1 = -8$. $\Delta_2 = 5$. $\Delta_3 = 0$, строки: (3)=(2)+(1). $\Delta_4 = 0$, столбцы:
(3)=(2)–(1)·2. $\Delta_5 = 7$. $\Delta_6 = 0$, строки: (3)=(2)+(1)·2.

3.13: (1) $x=1$, $y=-1$. (2) $x=0$, $y=1$. (3) $x=2$, $y=1$. (4) $x=i$, $y=1+i$. (5) $x=0$, $y=1$, $z=2$. (6) Система несовместна, левая часть: (3)=(2)–2·(1).
(7) Система вырождена: (3)=(1)–(2).

3.14: (1) $a\neq 2$. (2) $a\neq 1/3$. (3) $a\neq 7$. **3.18:** $|\vec a|=\sqrt{14}$, $\cos(\vec i,\vec a)=1/\sqrt{14}$, $\cos(\vec j,\vec a)=2/\sqrt{14}$, $\cos(\vec k,\vec a)=3/\sqrt{14}$; $|\vec b|=5\sqrt2$, $\cos(\vec i,\vec b)=4/(5\sqrt2)$, $\cos(\vec j,\vec b)=-3/(5\sqrt2)$, $\cos(\vec k,\vec b)=1/\sqrt2$; $|\vec c|=6$, $\cos(\vec i,\vec c)=-2/3$, $\cos(\vec j,\vec c)=1/3$, $\cos(\vec k,\vec c)=2/3$. **3.19:** (а) $\vec a=\vec i+2\vec j+3\vec k$, $\vec b=4\vec i-3\vec j+5\vec k$, $\vec c=-4\vec i+2\vec j+4\vec k$.
(б) $\vec a_1(0;-1;9)$, $\vec a_2(0;-11;-7)$, $\vec a_3(9;-3;4)$.

3.21: (1) $A=9$, $|\vec a|=|\vec b|=\sqrt{14}$, $\cos(\vec a,\vec b)=9/14$. (2) $A=7$, $|\vec a|=\sqrt5$, $|\vec b|=\sqrt{22}$, $\cos(\vec a,\vec b)=7/\sqrt{110}$. (3) $A=4$, $|\vec a|=2\sqrt2$, $|\vec b|=\sqrt2$, $\cos(\vec a,\vec b)=1$, векторы коллинеарны, $\vec a=2\vec b$. **3.22:** $a_b=\vec a\cdot\vec b/|\vec b|$. (1) $a_b=9/\sqrt{14}$. (2) $a_b=7/\sqrt{22}$. (3) $a_b=|\vec a|=2\sqrt2$.

3.24: $[\vec a\times\vec b]=\vec s$. (1) $\vec s(-3;6;-3)$. (2) $\vec s(3;-6;4)$. (3) $\vec s=0$.

3.25: $\vec a=\boldsymbol{AB}$, $\vec b=\boldsymbol{AC}$, $[\vec a\times\vec b]=\vec s$, $S=|\vec s|$. (1) $\vec a(1;2;0)$, $\vec b(-2;-4;0)$, $\vec b=-2\vec a$, $S=0$.
(2) $\vec a(2;2;0)$, $\vec b(1;1;-2)$, $\vec s(-4;-4;0)$, $S=4\sqrt2$. (3) $\vec a(0;-1;0)$, $\vec b(1;0;-1)$, $\vec s(1;0;1)$, $S=\sqrt2$. **3.26:** (1) $V=3$, правая. (2) Векторы компланарны, $\vec c=2\vec a+\vec b$.
(3) Векторы компланарны, $\vec a=\vec b+\vec c$; (4) $V=11$, левая.

3.27: $\vec a=\boldsymbol{AB}$, $\vec b=\boldsymbol{BC}$, $\vec c=\boldsymbol{CD}$. (1) $\vec a(1;1;-2)$, $\vec b(1;-1;5)$, $\vec c(-3;2;-10)$, $(\vec a\ \vec b\ \vec c)=-3$, не лежат. (2) $\vec a(1;2;1)$, $\vec b(2;-1;1)$, $\vec c(-2;-2;-1)$, $(\vec a\ \vec b\ \boldsymbol{c})=-1$, не лежат. Примечание: знак смешанного произведения зависит от способа выбора векторов, соединяющих заданные точки.

4.1: Использовать тригонометрические формулы:
$\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin(\Delta x/2)\cdot\sin(x+\Delta x/2)$,
$\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin(\Delta x/2)\cdot\cos(x+\Delta x/2)$.
4.3: (б) Использовать тождество $a^x\equiv\exp(x\cdot\ln a)$.
4.15: $A_1=1$; $A_2=a/b$; $A_3=1$; $A_4=0$; $A_5=e^a$; $A_6=0$; $A_7=1/2$; $A_8=e^a$.
4.16: (4) Геометрическая прогрессия.
4.18: (1) $4\cdot10^{10}$. (2) $2\cdot10^{-7}$. (3) $5\cdot10^{-5}$. (4) $5\cdot10^{-5}$. (5) 10^{-4}. (6) $1{,}3\cdot10^{-5}$.
4.19: (1) $1+x+x^2/2+x^3/6$. (2) $1\pm x^2/2$. (3) $x\pm x^3/3$. (4) $x-x^2/2+x^3/3-x^4/4$.
(5) $1-x+x^2-x^3+x^4$. (6) $1-x^2+x^4$.
4.20: (1) $y=(1/x)+x$; $y'=1-1/x^2$; $y''=2/x^3$. $x\neq0$. Нечётная. Непериодическая. Асимптоты: (L_1) $x=0$ –ось Oy, (L_2) $y=x$; при $x\to0$ функция ведёт себя как $1/x$. Корней нет. $y>0$ при $x>0$. $y'=0$ при $x=1$ (min). $y'<0$ при $x\in(0;1)$; $y'>0$ при $x>1$. Рекомендуемые характерные точки: $x=1/2$; $x=1$; $x=2$.
(2) $y'=-2x/(1+x^2)^2$; $y''=2\cdot(3x^2-1)/(1+x^2)^3$. $x\in(-\infty;\infty)$; $y\in(0;1]$. Чётная. Непериодическая. Асимптота: (L_1) $y=0$. Корней нет. $y'=0$ при $x=0$ (max). $y'<0$ при $x\in(0;\infty)$. $y''=0$ при $x=1/\sqrt3\approx0{,}58$ (перегиб). Рекомендуемые характерные точки: $x=0$; $x=1/\sqrt3$; $x=2$.

(3) $y' = (1-x^2)/(1+x^2)^2$; $y'' = 2x\cdot(x^2-3)/(1+x^2)^3$. $x \in(-\infty;\ \infty)$. Нечётная. Непериодическая. Асимптота: (L_1) y=0. y =0 при x =0 (перегиб). y' =0 при x =1 (max). y' >0 при $x \in[0;\ 1)$; y' <0 при x >1. y'' =0 при $x = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ (перегиб). Рекомендуемые характерные точки: x =0; $x = \sqrt{3}$; x =3.
(4) $x^2+y^2=1$. $y'_x = -\mathrm{ctg}\ t = -x/y$. $(x, y) \in[-1;\ 1]$. y'_x =0 при $t=\pi/2$ (max), $3\pi/2$ (min) или x=0; y'_x не существует при t=0, π или $x=\pm1$ (график идёт вертикально). Рекомендуемые характерные точки: t =0, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π, $\pi+\pi/4$, $\pi+\pi/2$, $\pi+3\pi/4$, 2π.
(5) $y \in[0;\ 2]$. $y'_x = \sin t/(1-\cos t)$. Периодическая, $T=2\pi$, так как $x(t+2\pi)=x(t)+2\pi$; $y(t+2\pi)=y(t)$, то есть $y(x(t)+2\pi)=y(x(t))$. y'_x =0 при $x=t=\pi$ (max). y'_x не существует при t=0, 2π или x=0, 2π (график идёт вертикально). На первом периоде график симметричен относительно точки максимума $x=t=\pi$, то есть $y(\pi-\Delta t)=y(\pi+\Delta t)$, $\Delta t\in[-\pi;\ \pi]$. Рекомендуемые характерные точки: t =0, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π.
(6) Уравнение в полярных координатах: $\rho=\varphi$; здесь $\rho=\sqrt{(x^2+y^2)}$, $\varphi=t$. $y'_x = (t+\mathrm{tg}\ t)/(1-t\cdot\mathrm{tg}\ t)$. Рекомендуемые характерные точки для первого витка $t \in [0;\ 2\pi]$: t =0, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π, $\pi+\pi/4$, $\pi+\pi/2$, $\pi+3\pi/4$, 2π. Расстояние от начала координат для точек второго витка, $t \in (2\pi;\ 4\pi]$ увеличивается на 2π.

5.2: (1) $z'_x = (1/2)\sqrt{(y/x)}$; $z'_x(M_1)$ =1; $d_x z(M_1) = dx$; $z'_y=(1/2)\sqrt{(x/y)}$; $z'_y(M_1)$ =(1/4); $d_y z(M_1) = (1/4)dy$. (2) $z'_x = 1/y$; $z'_x(M_2) = -1$; $d_x z(M_2) = -dx$; $z'_y = -x/y^2$; $z'_y(M_2) = -2$; $d_y z(M_2) = -2dy$. (3) $z'_x = -2x/(x^2+y^2)^2$; $z'_x(M_3) = 8/625$; $d_x z(M_3) = (8/625)dx$; $z'_y = -2y/(x^2+y^2)^2$; $z'_y(M_3) = -6/625$; $d_y z(M_3) = -(6/625)dy$. (4) $z'_x = x/\sqrt{(x^2+y^2)}$; $z'_x(M_4)$ =(3/5); $d_x z(M_4) = (3/5)dx$; $z'_y = y/\sqrt{(x^2+y^2)}$; $z'_y(M_4)$ =(4/5); $d_y z(M_4) = (4/5)dy$. (5) $z'_x = (2x+y)/(x^2+xy+y^2)$; $z'_x(M_4)$ =0; $d_x z(M_5)$ =0; $z'_y = (x+2y)/(x^2+xy+y^2)$; $z'_y(M_5) = -1$; $d_y z(M_5) = -dy$. (6) $z'_x = \cos(x\cdot\cos y)\cdot\cos y$; $z'_x(M_6)$ =0; $d_x z(M_6)$ =0, $z'_y = \cos(x\cdot\cos y)\cdot(-\sin y)$; $z'_y(M_6)$ =0, $d_y z(M_6)$ =0.
5.4: $(\partial/\partial x)(1/r) = -x/r^3$. **5.5:** 2/3. **5.8:** (1) $dr = (xdx + ydy + zdz)/\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$.
(2) $dz = -\mathrm{tg}\ (xy)\cdot(ydx + xdy)$. (3) $dz = x^y[(y/x)dx + (\ln x)dy]$.
(4) $du = y^2z^3dx + 2xyz^3dy + 3xy^2z^2dz$. (5) $dz = \exp(xy)\cdot(ydx + xdy)$.
(6) $dz = \cos(x + \cos y)\cdot(dx - \sin y\ dy)$.
5.9: (1) $z'_t = 4t^3 + 5t^4 + 6t^5$. (2) $z'_t = 1/(1+t^2)$. (3) $z'_t = 0$.
5.10: (1) $(u/v^2)(1 + 2\ln(uv))$; $(u^2/v^3)(1 - 2\ln(uv))$. (2) 0; 1.
5.12: (1) $y = \mathrm{const}/x$, $y' = -y/x$. (2) $y = \mathrm{const} - x$; $y' = -1$. (3) $F(x, y) = x^2 + y^2$; $C = R^2$; $y'_x = -F'_x/F'_y = -x/y$. (4) $F(x, y) = x^2/a^2 - y^2/b^2$; C =1; $y'_x = -F'_x/F'_y = b^2x/(a^2y)$.
(5) $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2axy$; C =0; $y'_x = -F'_x/F'_y = -(3x^2-2ay)/(3y^2-2ax)$.
(6) $F(x, y) = e^{xy} - x - y$, $C = 0$; $y'_x = -F'_x/F'_y = -(ye^{xy}-1)/(xe^{xy}-1)$.
5.13: (1) $z'_x = -(c^2x)/(a^2z)$; $z'_y = -(c^2y)/(b^2z)$. (2) $z'_x = 1$, $z'_y = y/(x-z)$.
(3) $z'_x = -(y+z)$; $z'_y = -1$. (4) $z'_x = -[yz\cdot\exp(xyz) - 1]/[xy\cdot\exp(xyz) - 1]$;
$z'_y = -[xz\cdot\exp(xyz) - 1]/[xy\cdot\exp(xyz) - 1]$.
5.14: (1) $dz = [(yz-1)\cdot dx + (xz-1)\cdot dy]/(1-xy)$.
(2) $dz = -[\sin(2x)dx + \sin(2y)dy]/\sin(2z)$. (3) $dz = -[dx + (x+z)\cdot dy]/(x+z+1)$.

(4) $dz = -[(yz+1)\cdot dx + (xz+1)\cdot dy]/(xy+1)$.
5.15: (1) $z'_x = y^2$, $d_xz = y^2\cdot dx$; $z'_y = 2xy$; $d_yz = 2xy\cdot dy$, $z''_{yy} = 2x$; $d^2_{yy}z = 2x\cdot dy^2$, $z''_{xy} = 2y$; $d^2_{xy}z = 2y\cdot dx\cdot dy$; $z'''_{xyy} = 2$; $d^3_{yyx}z = 2\cdot dx^2\cdot dy$. (2) $z'_x = 2x$; $d_xz = 2x\cdot dx$; $z'_y = 2y$; $d_yz = 2y\cdot dy$; $z''_{xx} = z''_{yy} = 2$; $d^2_{xx}z = 2dx^2$, $d^2_{yy}z = 2dy^2$. (3) $z'_x = z'_y = 2(x+y)$; $d_xz = 2(x+y)\cdot dx$; $d_yz = 2(x+y)\cdot dy$; $z''_{xx} = z''_{yy} = z''_{xy} = 2$; $d^2_{xx}z = 2dx^2$; $d^2_{yy}z = 2dy^2$; $d^2_{xy}z = 2\cdot dx\cdot dy$. **5.16:** (1) $z'_x = y\cdot\cos(xy)$; $z'_y = x\cdot\cos(xy)$, $z''_{xx} = -y^2\cdot\sin(xy)$; $z''_{yy} = -x^2\cdot\sin(xy)$, $z''_{xy} = \cos(xy) - xy\cdot\sin(xy)$. (2) $z'_x = z'_y = 1/(x+y)$; $z''_{xx} = z''_{yy} = z''_{xy} = -1/(x+y)^2$. (3) $u'_x = y^2z^3$; $u'_y = 2xyz^3$; $u'_z = 3xy^2z^2$; $u''_{xx} = 0$; $u''_{yy} = 2xz^3$; $u''_{zz} = 6xy^2z$; $u''_{xy} = 2yz^3$; $u''_{xz} = 3y^2z^2$; $u''_{yz} = 6xyz^2$. (4) $r'_x = x/r$; $r'_y = y/r$; $r'_z = z/r$; $r''_{xx} = (y^2+z^2)/r^3$; $r''_{yy} = (x^2+z^2)/r^3$; $r''_{zz} = (x^2+y^2)/r^3$; $r''_{xy} = -xy/r^3$; $r''_{xz} = -xz/r^3$; $r''_{yz} = -yz/r^3$. (5) $z'_x = z'_y = \mathrm{tg}(x+y)$; $z''_{xx} = z''_{yy} = z''_{xy} = 1/\cos^2(x+y)$; (6) $z'_x = \ln y$; $z'_y = x/y$; $z''_{xx} = 0$; $z''_{yy} = -x/y^2$; $z''_{xy} = 1/y$.
5.18: (1) $d^2z = -(1/x)\cdot d^2x + (2/y)\cdot dxdy - (x/y^2)\cdot d^2y$.
(2) $d^2z = e^x[\cos y\cdot(d^2x - d^2y) - 2\sin y\cdot dxdy]$. (3) $d^2z = 6(x\cdot d^2x + dxdy + y\cdot d^2y)$.
5.20: 0. **5.21:** $(\sqrt{2})/3$. **5.23:** $x^2 + y^2 = (2/3)^2$. **5.26:** Разложить векторное поле $\vec{V}$ по ортам: $\vec{V} = \vec{i}\,X + \vec{j}\,Y + \vec{k}\,Z$. Последовательно выполнить все вычисления.
5.27: $2x - 4y - z = 5$; $(x-1)/2 = (y+2)/(-4) = (z-5)/(-1)$. **5.29:** $0{,}69 \pm 0{,}05$.
5.30: $7{,}4 \pm 0{,}1$. **5.31:** 2 ± 10^{-2}. **5.32:** $6{,}2 \pm 0{,}5$. **5.33:** (1) 3,0. (2) 0,70. (3) $(-0{,}1 \ldots +0{,}3)$. **5.34:** (1) 2,0. (2) $10 \pm 0{,}25$. (3) $5{,}1 \pm 0{,}3$. (4) $2 \pm 0{,}3$. (5) $-0{,}2 \pm 0{,}2$. **5.35:** $y = \mathrm{tg}\,x$; $x = \pi/4$; $y = 1$; $\Delta x = \pi/60 \approx 0{,}05$; $\Delta y = 0{,}1$.
5.36: $\delta S = (0{,}01/1{,}5) + (0{,}01/0{,}5) = 0{,}08$; $S = 0{,}75 \pm 0{,}02$ м^2.
5.37: $v = s/t$; $\delta v = \delta s + \delta t = 10^{-4} + 10^{-2} = 10^{-2}$; $\Delta v = 1$ м/с.
5.38: $\rho = m/a^3$; $\delta\rho = \delta m + 3\delta a = 0{,}004 + 0{,}01$; $\Delta\rho = 0{,}04$ *г*/см^3.
5.39: (10 ± 1) Ом. **5.40:** $\delta m = \delta m_0 + r\cdot\Delta t$; $m = (740 \pm 50)$ *г*.

6.1: $I_1 = (x^4/4) - \cos x + C$; $I_2 = (x^2/2) + \ln(x^2) + C$; $I_3 = x - \mathrm{arctg}\,x + C$; $I_4 = x + \mathrm{arctg}\,x + C$; $I_5 = \mathrm{arctg}\,x + \ln\sqrt{(1+x^2)} + C$; $I_6 = x + \ln(1+x^2) + C$.
6.2: $I_1 = (1/6)\cdot(x+2)^6 + C$; $I_2 = \ln|1+x| + C$; $I_3 = \ln(1+x^2) + C$; $I_4 = -(1/7)\cdot\cos^7 x + C$; $I_5 = (1/5)\cdot\cos^5 x + C$; $I_6 = -\ln|\cos x| + C$; $I_7 = \ln|\sin x| + C$; $I_8 = -\sqrt{(1-x^2)} + C$; $I_9 = (1/2)\cdot\sin(2x+1) + C$. **6.3:** $I_1 = -x\cdot\cos x + \sin x + C$; $I_2 = x\cdot\ln x - x + C$; $I_3 = x\cdot\mathrm{arctg}\,x - (1/2)\cdot\ln(1+x^2) + C$; $I_4 = (x^2 + x - 2)\cdot\sin x + (2x+1)\cdot\cos x + C$.
6.4: $I_1 = -\cos(2x)/2 + C$; $I_2 = (1/2)\cdot\mathrm{tg}(2x+1) + C$; $I_3 = \ln \mathrm{ch}\,x + C$; $I_4 = -(1+x)\cdot\cos x + \sin x + C$; $I_5 = (x-1)\cdot\exp x + C$; $I_6 = x^2/2 - x + \ln|1+x| + C$; $I_7 = -(1/2)\cdot\cos(x^2+1) + C$; $I_8 = (x^2 - 2x + 3)\cdot\exp x + C$.
6.5: Использовать метод циклического интегрирования, либо формулу Эйлера для экспоненты с мнимым показателем степени. $I_c = (e^x/2)\cdot(\sin x + \cos x) + C$; $I_s = (a\cdot\sin x - \cos x)\cdot e^{ax}/(1+a^2) + C$. **6.6:** $I_1 = (1/2)\cdot\ln^2 x + C$; $I_2 = (1/2)\cdot\mathrm{tg}^2 x + C$; $I_3 = \exp(\sin x) + C$; $I_4 = (1+\cos x)^4/4 + C$.
6.7: $I_1 = (b-a)^{-1}\ln[C(x+a)/(x+b)]$; $I_2 = (a-b)^{-1}(a\cdot\ln|x+a| - b\cdot\ln|x+b|) + C$; $I_3 = (1/2)\cdot\ln|1+x| - (1/4)\cdot\ln(1+x^2) + (1/2)\cdot\mathrm{arctg}\,x + C$;

$I_4 = (1/4)\cdot\ln(1 + x^2) - (1/2)\cdot\ln|1 + x| + \mathrm{arctg}\, x + C$; $I_5 = \ln(Cx) - (1/2)\cdot\ln(1 + x^2)$;
$I_6 = (1/2)\cdot\mathrm{arctg}\, x + (1/2)\cdot\ln[|1 + x|\cdot\sqrt{(1 + x^2)}] + C$.
6.8: $I_1 = [x/(1 - x^2)]/2 + (1/4)\cdot\ln[C\cdot(1 + x)/(1 - x)]$; $I_2 = (1/a)\cdot\mathrm{arctg}(x/a) + C$;

$$I_3 = \int\frac{\cos x\cdot dx}{\cos^2 x} = \int\frac{d\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C;\ I_4 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C;$$

$I_5 = 2\cdot\exp(\sqrt{x}) + C$; $I_6 = -(1/3)\cdot\ln|\cos(3x)| + C$; $I_7 = (1/2)\cdot\sin(2x - 1) + C$;

$I_8 = (x/2)\cdot\sin(2x) + (1/4)\cdot\cos(2x) + C$; $I_9 = (1/2)\cdot[x\cdot\ln x - x] + C$; $I_{10} = \ln\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right| + C$;

$I_{11} = \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| + C$; (14–18) Использовать тригонометрические соотношения:
$2\cdot\cos^2\alpha = 1 + \cos(2\alpha)$; $2\cdot\sin^2\alpha = 1 - \cos(2\alpha)$; $2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$;
$2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$; $2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.
6.9: $I_1 = (1/2)\ln[C\cdot(\sin x - \cos x + 1)/(\sin x - \cos x - 1)]$, вводим новую переменную $t = (\sin x - \cos x)$, приводим интеграл к виду I_1 из Упражнения 6.7;
$I_2 = (1/10)\cdot\ln[C\cdot(3\cdot\cos x - 4\cdot\sin x - 5)/(3\cdot\cos x - 4\cdot\sin x + 5)]$; $I_3 = \arcsin(x/3) + C$;
$I_4 = \sqrt{(x^2 + 1)} + C$; $I_5 = \mathrm{arctg}(x - 1) + C$; $I_6 = \arcsin(x - 1) + C$.
6.10: (1) $S = 0$, положительная площадь при $x \in [0; x_1]$ компенсируется отрицательной площадью при $x \in [-x_1; 0]$. (2) Если v –скорость колебаний математического маятника, то интеграл даёт смещение $x = X_0\cdot\cos(\omega_0 t_1)$, где $X_0 = (X_0/\omega_0)$ –амплитуда колебаний. (3) $S = \ln 2$. (4) $S = \pi/(2a)$.
6.11: (1) $\sqrt{(1 + x^3)}$. (2) $\ln(1 + x^2)$. (3) $-\exp(x^2)$. (4) $2\cdot\sin(x^2)/x$. (5) $-3x^2\cdot\sin(1 + x^6)$. (6) $-2\cdot\cos(4x^2)$. (7) $2x\cdot\ln|x|$. (8) $-\cos(\cos x)\cdot\sin x$. **6.12:** $S_1 = \mathrm{sh}\, x$; $S_2 = 0$.
6.13: $I_1 = \pi/4 + \ln\sqrt{2}$ –по частям; $I_2 = -2\pi$; $I_3 = (e^4 - 1)/2$; $I_4 = e - 1$; $I_5 = 1/2$; $I_6 = 1/6$; $I_7 = 1$; $I_8 = \ln 2$.
6.14: (1, 2, 5, 7, 8, 11, 12) –расходятся; $I_3 = \pi/2$; $I_4 = I_6 = -\ln 2$ (главное значение); $I_9 = 2$; $I_{10} = 3/8$ (главное значение). **6.15:** $I_1 = 1$; $I_2 = 1/2$; $I_3 = \pi/2$;
(4, 5, 6) –расходятся; $I_7 = 1$; $I_8 = -1$. **6.16:** $D = D_{1+2} - D_1$, $D_{1+2} = \{\varphi \in [2\pi; 4\pi]\}$ – первый и второй витки, $D_1 = \{\varphi \in [0; 2\pi]\}$ –первый виток; $dS = (\rho^2/2)\cdot d\varphi$ – площадь треугольника с высотой ρ и основанием $\rho\cdot d\varphi$;
$S = S_{1+2} - S_1 = (28/3)\pi^3 a^2 - (4/3)\pi^3 a^2 = 8\pi^3 a^2$.
6.17: $D = \{\varphi \in [0; 2\pi]\}$, $dS = (1/2)\cdot d\varphi$, $S = \pi$. **6.18:** $D/2 = \{\varphi \in [\pi/4; \mathrm{arctg}\, 2]\}$, $dS = (1/2)\cdot d\varphi$, $S = \mathrm{arctg}\, 2 - \pi/4$. **6.19:** $S = 2\pi$. **6.20.** $(4/3)\sqrt{2}$.
6.21: $D = \{z \in [-R; R]\}$; $dV = \pi r^2 dz$, $r^2 = R^2 - z^2$; $V = (4\pi/3) R^3$.
6.22: Поместим основание конуса на плоскость $z = 0$, а вершину – в точку $z = H$ на оси Oz. Тогда $D = \{z \in [0; H]\}$; $dV = \pi r^2 dz$, $r = (1 - z/H)R$;
$V = (\pi/3)R^2 H = (1/3)S_{\text{осн}} H$.
6.23: $D = \{x \in [1; 8]\}$; $dL = (1/x)\cdot\sqrt{(1+x^2)}\cdot dx$; замена: $t = (1+x^2)$;
$L = \sqrt{65} - \sqrt{2} + \ln[(\sqrt{65} - 1)(\sqrt{2} + 1)/8] \approx 7{,}40474$.
6.24: $D = \{\varphi \in [0; 4\pi]\}$, $dL = \sqrt{[(d\rho)^2 + (\rho\cdot d\varphi)^2]} = a\sqrt{(1+\varphi^2)}\cdot d\varphi$.

Замена: $\varphi = \operatorname{sh} t$, $t \in [0; \operatorname{arcsh} 4\pi]$; используем формулу: $2\cdot\operatorname{ch}^2 t = 1 + \operatorname{ch}(2t)$;
$L = (a/2)\cdot\operatorname{arcsh}(4\pi) + (a/4)\cdot\operatorname{sh}(8\pi)$. **6.25:** $D = \{t \in [0; \pi]\}$,
$dL = \sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]} = t^2\cdot dt$; $L = \pi^3/3$. **6.26:** $dL = \sqrt{(1+x)}\cdot dx/\sqrt{x}$, $x = \operatorname{sh}^2 t$;
$L = 2 \operatorname{arcsh} 1 + \operatorname{sh}(2 \operatorname{arcsh} 1)$. **6.27:** $L = \operatorname{sh} a$. **6.28:** $L = 2\pi a$ –окружность.
6.30: $I_1 = (e-1)^2$. $I_2 = \pi - 2$. **6.31:** $I_1 = (\pi/4)\,[(1 + R^2)\cdot\ln(1 + R^2) - R^2]$. $I_2 = (2\pi/3)R^3$.
6.32: $D = \{x \in [0; 1]; y \in [x^2; \sqrt{x}]\}$. **6.33:** $I = 0$. **6.34:** $S = 1/2$. **6.35:** $S = 14$.
6.36: $S = 16$. **6.37:** πR^3. **6.38:** $x_0 = (1+\sqrt{2})(1-\pi/4)$; $y_0 = (2+\sqrt{2})(\pi-2)/16$. **6.39:** $I_1 = 6$;
$I_2 = abc(a+b+c)/2$; $I_3 = a^6/48$; $I_4 = a^{11}/110$. **6.40:** $I_1 = [\ln 2 - (5/8)]/2$; $I_2 = \pi^2/8 - 1/2$.
6.41: $I_1 = \pi a/2$; $I_2 = (4\pi/15)(R^5 - r^5)$; $I_3 = (2\pi/3)$; $I_4 = (4/15)\pi R^5$.
6.42: $I_1 = (\sqrt{5}) \ln 2$; $I_2 = p^2(5\sqrt{5} - 1)/3$; $I_3 = (R^4\sqrt{3})/32$. **6.43:** $M = (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})/3$.
6.44: $M = R^2$. **6.45:** $S = 2R^2$. **6.46:** $I = \pi R^7/210$.

7.1: $u_n = n/2^n; \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ –ряд может сходиться; достаточный признак Даламбера: $q = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} < 1$ –ряд сходится.
7.2: Достаточный признак Даламбера: $q = (1/3) < 1$ –ряд сходится.
7.3: Достаточный признак Даламбера: $q = 0 < 1$ –ряд сходится; $S = e^1$.
7.4: Расходится по интегральному признаку Коши. **7.5:** Сходится по интегральному признаку Коши. **7.6:** Достаточный признак Даламбера: $q = (1/3) < 1$ –ряд сходится. **7.7:** Интегральный признак Коши: (1) сходится; (2) расходится.
7.8: Указание. Обозначить через v_n модуль общего члена.
S_1 –расходится; S_2, S_3 –сходятся условно; $S_4 = e^{-2}$, сходится абсолютно, при проверке признака Лейбница использовать формулу Стирлинга: $n! = (n/e)^n\sqrt{(2\pi n)}$;
S_6 –сходится абсолютно.
7.9: (1) $R = 1$, $S_1(x) = 1/(1+x)$, при $x = \pm 1$ расходится. (2) $R = 1$, $S_2(x) = \ln(1+x)$, при $x = -1$ расходится. (3) $R = \infty$, $S_3(x) = e^{-x}$. (4) $R = 2$; $S_4(x) = x/(2+x)$, при $x = \pm 2$ расходится. (5) $R = \infty$, $S_5(x) = e^{-2x} - 1$. (6) $R = 1$, $S_6(x) = (1/2)\ln(1 - x)$, при $x = 1$ расходится; (7) $R = \infty$. (8) $R = 1/2$, $S_8(x) = 1/(1-2x)$, при $x = \pm(1/2)$ расходится;
(9) $R = \infty$, $S_9(x) = (e^x - 1)/x$. **7.10:** (1) $\dfrac{dS_1(x)}{dx} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\cdot x^{n-1} = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$,
$\int\limits_0^x S_1(x)dx = S_2(x)$. (2) $\dfrac{dS_2(x)}{dx} = S_1(x)$. (3) $\dfrac{dS_3(x)}{dx} = -e^{-x}$, $\int\limits_0^x S_3(x)dx = 1 - e^{-x}$.
(4) $\dfrac{dS_4(x)}{dx} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot(-x/2)^n = -\dfrac{2}{(x+2)^2}$. (5) $\dfrac{dS_5(x)}{dx} = -2e^{-x}$.
(6) $\dfrac{dS_6(x)}{dx} = \dfrac{1}{2(x-1)}$. (7) $\dfrac{dS_7(x)}{dx} = S_9(x)$. (8) $\int\limits_0^x S_8(x)dx = -\dfrac{1}{2}\ln(1-2x)$.
7.11: (1) $T = 2\pi$. (2) $T = \pi$; (3) $T = 1$. (4) $T = 2$. (5) $T = 2\pi$. (6) $T = 2\pi$. (7) $T = 1$.
$\|u_0\|^2 = T$; $\|u_{nC}\|^2 = \|u_{nS}\|^2 = T/2$, $\|u_n\|^2 = T$ при всех значениях n.

7.12: (1) Тестовое упражнение. $T = 2\pi$; $b_1 = 1$, остальные – ноль.
(2) Тестовое упражнение. $T = 2\pi$; $a_1 = 1$, остальные – ноль.
(3) $f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$. (4) $f(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$.
(5) Тестовое упражнение. $T = \pi$; $a_0 = -a_1 = 1/2$, остальные – ноль.
(6) Тестовое упражнение. $T = \pi$; $a_0 = a_1 = 1/2$, остальные – ноль.
(7) Тестовое упражнение. $T = 2\pi$; $a_1 = \cos\alpha$, $b_1 = \sin\alpha$, остальные – ноль.
(8) Тестовое упражнение. $T = 2\pi$; $a_1 = \sin 2$, $b_1 = \cos 2$, остальные – ноль.
(9) Тестовое упражнение. $T = \pi$; $a_0 = a_1 = 1$, остальные – ноль.
7.13: (1) $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\cos(\pi(2n-1)t)}{2n-1}$.
(2) $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\pi(2n-1)t\right)}{2n-1}$. (3) $f(t) = (|\sin t| + \sin t)/2$, см. 7.12(3).
(4) $f(t) = (|\cos t| + \cos t)/2$, см. 7.12(4). **7.14:** (1) $f(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin(nt)}{n}$.
(2) (1) + ($a_0 = 1$). **7.15:** $|b_n| = 2/n$; (1) $\omega_1 = 0{,}5$; (2) $\omega_1 = 2$.

8.1: (1) $y = C\cdot(x+1)e^{-x}$; $x = -1$. (2) $\ln(Cx) = \sqrt{(y^2+1)}$; $x = 0$.
(3) $y\cdot(\ln|x^2-1| + C) = 1$; $C = 1$. (4) $y = 2 + C\cdot\cos x$, $C = -3$. **8.2:** (1) $y = Cx^2 - x$; $x = 0$.
(2) $\ln(x^2+y^2) + 2\,\mathrm{arctg}(y/x) = C$. (3) $Cy = x\cdot(y-x)$, $y = 0$. (4) $y = x\cdot(C + \ln|x|)$, $C = 1$.
8.3: (1) $x^2y - y^3/3 = C$. (2) $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C$. (3) $x\,e^{-y} - y^2 = C$.
8.4: (1) $y = Cx^2 + x^4$. (2) $y = \sin x + C\cdot\cos x$. (3) $y = C\cdot\ln^2 x - \ln x$.
(4) $xy = (x^3 + C)\,e^{-x}$.
8.5: (1) $y^2 = 2\cdot\ln(1+e^x) + C$; $C = 1$. (2) $Cx = y/(1+y^2)$. (3) $y = -x\cdot\ln(Cx)$.
(4) $x\cdot(x^2 + 3y^2) = C$; $C = 4$. (5) $y = \ln(C\cdot\sin x)$. (6) $y = -(x/2) + C/x$.
8.6: $x = (\alpha/\varepsilon)\cdot[1 - \exp(-\varepsilon t)]$; $t_0 = 1/\varepsilon$. **8.7:** (1) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$. (2) $y = C_1 e^{2x} + C_2$.
(3) $y = e^{-x}[C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)]$. (4) $y = (C_1 + C_2 x)\,e^{-x}$.
8.8: (1) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{x} + x^2 + 2x + 2$. (2) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 2x$.
(3) $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{x} - x - 1$. **8.9:** (1) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + e^{4x}$.
(2) $y = C_1 e^{3x} + (C_2 - x)\,e^{-x}$. (3) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + (5x - 6)\,e^{4x}$.
(4) $y = (C_1 + x)\,e^{3x} + C_2 e^{-x}$. **8.10:** $y = (C_1 + C_2 x + x^2/2)\,e^{x}$.
8.11: (1) $y = -(1/3)\sin(2x)$. (2) $y = -(x/2)\cos x$.
8.12: (1) $y = e^x$; (2) $y = \cos x$. **8.13:** (1) $y = (C_1 + C_2 x)\,e^{3x}$; $z = (-C_1 + C_2 - C_2 x)\,e^{3x}$.
(2) $x = (1 - 2t)\,e^{-2t}$; $y = (1 + 2t)\,e^{-2}$. (3) Уравнения не связаны: $x = C_1 e^{t}$; $y = C_2 e^{t}$.
(4) $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - e^{-t}$; $y = C_1 e^{2t} + (1/3)C_2 e^{4t} - 2e^{-t}$.
(5) $x = -(5/2)\,e^{t} - (1/2)\,e^{3t} + e^{t}(2\cos t - \sin t)$; $y = -(5/2)e^{t} - (1/2)\,e^{3t} + e^{t}(3\cos t + \sin t)$.
(6) $x = \sin(2t)$; $y = \cos(2t)$. **8.14:** $x_0 = \alpha/\varepsilon$, устойчивая. **8.15:** $M_1(0;\,0)$ –седло;
$M_2(\varepsilon_2/\delta_2;\ \varepsilon_1/\delta_1)$ –центр. **8.16:** Везде $O(0;\,0)$: (1) $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 1$; $p = 0$,
$q = 1 > 0$; $dx/dy = -y/x$; $x^2 + y^2 = R^2$; центр, против часовой стрелки. (2) $a_{11} = a_{22} = 1$,

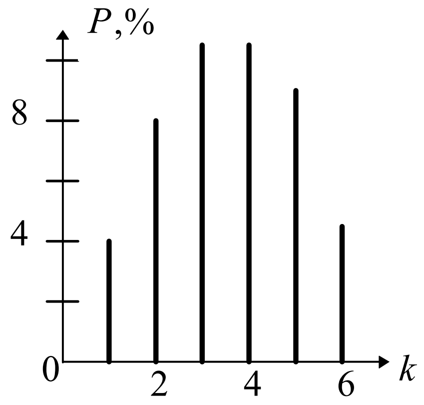
$a_{12} = a_{21} = 0$; $p = -2 < 0$, $q = 1$, $4q = p^2$; $dx/dy = x/y$; $y = Cx$, $x = 0$; неустойчивый узел.
(3) $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = a_{21} = 1$; $p = 0$, $q = -1$; $dx/dy = y/x$; $x^2 - y^2 = C$; седло.
(4) $a_{11} = -1$, $a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$; $p = 0$, $q = -1$; $dx/dy = -x/y$; $xy = C$; седло.
8.17: Везде $O(0;\ 0)$: (1) $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = -1$; $p = 0$, $q = 1 > 0$; $x = A\cdot\cos(t+\varphi_0)$, $y = A\cdot\sin(t+\varphi_0)$; $dx/dy = -y/x$; $x^2 + y^2 = R^2$, $R = A$; центр, по часовой стрелке.
(2) $a_{11} = a_{22} = -1$, $a_{12} = a_{21} = 0$; $p = 2 > 0$, $q = 1$, $4q = p^2$; $x = C_1 e^{-t}$; $y = C_2 e^{-t}$; $dx/dy = x/y$; $y = Cx$, $x = 0$; устойчивый узел; (3) $a_{11} = a_{21} = a_{22} = 1$, $a_{12} = -1$; $p = -2$, $q = 2$, $4q > p^2$; $x = A\cdot e^{t}\cdot\cos(t+\varphi_0)$, $y = A\cdot e^{t}\cdot\sin(t+\varphi_0)$; переходим к полярным координатам:
$\rho = r_0\, e^{\varphi}$, $r_0 = A\cdot\exp(-\varphi_0)$; неустойчивый фокус.
(4) $a_{11} = a_{12} = a_{22} = -1$, $a_{21} = 1$; $p = 2$, $q = 2$, $4q > p^2$; $x = A\cdot e^{-t}\cdot\cos(t+\varphi_0)$, $y = A\cdot e^{-t}\cdot\sin(t+\varphi_0)$; переходим к полярным координатам:
$\rho = r_0\, e^{\varphi}$, $r_0 = A\cdot\exp(-\varphi_0)$; устойчивый фокус.

10.1: <u>Метод шансов</u>. A –цифра «5» присутствует в выбранном числе; $\overline{A}$ –этой цифры нет. Тогда $\boldsymbol{P}\{A\} = n_A/n$, где $n = 100$ –полное количество шансов (чисел), n_A – количество чисел с цифрой «5». Простым перебором находим $n_A = 19$.
<u>Метод алгебры логики</u>. E –цифра «5» содержится в разряде единиц, $Д$ –она содержится в разряде десяток. Тогда $A = E + Д$ –пятерка содержится в единицах ИЛИ в десятках. $\boldsymbol{P}\{A\} = \boldsymbol{P}\{E\} + \boldsymbol{P}\{Д\} - \boldsymbol{P}\{Д\times E\}$; $\boldsymbol{P}\{E\} = \boldsymbol{P}\{Д\} = 0{,}1$; $Д\times E$ –пятерка содержится в единицах И в десятках (число «55»), $\boldsymbol{P}\{Д\times E\} = 0{,}01$.
10.2: $\boldsymbol{P}${О}=$\boldsymbol{P}${П}=$\boldsymbol{P}${Р}=$\boldsymbol{P}${С}=$\boldsymbol{P}${Т}=1/5; СПОРТ=С×П×О×Р×Т, все испытания независимы, формула умножения вероятностей дает: $\boldsymbol{P}${СПОРТ}=$\boldsymbol{P}${ТОПОР}= $(1/5)^5 \approx 3\cdot10^{-4}$; $\boldsymbol{P}${ТРОС}=$\boldsymbol{P}${СОРТ}=$(1/5)^4 \approx 1{,}5\cdot10^{-3}$.
10.3: Исход предыдущего испытания влияет на результат следующего, так как карточек становится меньше. Необходимо использовать условные вероятности. По-прежнему, СПОРТ=С×П×О×Р×Т, но
$\boldsymbol{P}${СПОРТ}=$\boldsymbol{P}${С}·$\boldsymbol{P}${П/С}·$\boldsymbol{P}${О/СП}·$\boldsymbol{P}${Р/СПО}· $\boldsymbol{P}${Т/СПОР}=
(1/5)·(1/4)·(1/3)·(1/2)·1=1/5!=1/120≈0,008. <u>Вывод</u>: вероятность получения слова «СПОРТ» выбиранием 5 карточек выше, чем при случайной печати!
$\boldsymbol{P}${ТОПОР}=0 – имеется только 1 карточка с буквой «О».
10.4: $\boldsymbol{P}${Д}=0,25; $\boldsymbol{P}${Г}=0,1; $\boldsymbol{P}${Г/Д}=0,3. (1) $\boldsymbol{P}${Г}≠$\boldsymbol{P}${Г/Д}, «Г» и «Д» – зависимые события; (2) по формуле полной вероятности имеем

$\boldsymbol{P}${Г}=$\boldsymbol{P}${Г/Д}·$\boldsymbol{P}${Д}+ <u>$\boldsymbol{P}$\{Г/$\overline{\text{Д}}$\}</u>·$\boldsymbol{P}$\{$\overline{\text{Д}}$\}, находим $\boldsymbol{P}$\{Г/$\overline{\text{Д}}$\}=1/30.
(3) <u>$\boldsymbol{P}$\{Д/Г\}</u>·$\boldsymbol{P}${Г} = $\boldsymbol{P}${Г/Д}·$\boldsymbol{P}${Д}, $\boldsymbol{P}${Д/Г}= 0,75 >$\boldsymbol{P}${Д}.
10.5. «2»=«1/А»×«1/В» –первый сомножитель означает число из 1-го набора (А), второй – из 2-го (В); $\boldsymbol{P}${«2»}=$\boldsymbol{P}${«1/А»}·$\boldsymbol{P}${«1/В»}=0,01;
$\boldsymbol{P}${«3»}=$\boldsymbol{P}${«1/А»}·$\boldsymbol{P}${«2/В»}+ $\boldsymbol{P}${«2/А»}·$\boldsymbol{P}${«1/В»}=0,02; $\boldsymbol{P}${«4»}=0,03;
$\boldsymbol{P}${«19»}=0,02. **10.6:** $\boldsymbol{P}${СТОП} = $\boldsymbol{P}${ТОРС} = $\boldsymbol{P}${РОСТ} = 1/5!

10.7: A –счастливый 1-й билет, B –счастливый 2-й билет. Вероятность выбора хотя бы одного счастливого билета есть $\boldsymbol{P}\{A+B\}=\boldsymbol{P}\{A\}+\boldsymbol{P}\{B\}-\boldsymbol{P}\{A\times B\}$. Здесь $\boldsymbol{P}\{A\}=\boldsymbol{P}\{B\}=\boldsymbol{P}_1=n/N$ –вероятность вытащить счастливый билет с одного раза; $\boldsymbol{P}\{A\times B\}$ – вероятность двух счастливых билетов.
(1) $\boldsymbol{P}\{A\times B\}=\boldsymbol{P}\{B/A\}\cdot\boldsymbol{P}\{A\}=(n/N)\cdot[(n-1)/(N-1)]$.
(2) $\boldsymbol{P}\{A\times B\}=0$ –подряд двух счастливых билетов не бывает.
Для получения хотя бы одного счастливого билета надо билеты брать подряд!
10.8: Нарисовать граф задачи. $\boldsymbol{P}\{\text{М}\}=\boldsymbol{P}\{\text{Ж}\}=1/2$, $\boldsymbol{P}\{\text{Д/М}\}=5/100$, $\boldsymbol{P}\{\text{Д/Ж}\}=1/400$.
(1) $\boldsymbol{P}\{\text{Д}\}=\boldsymbol{P}\{\text{Д/М}\}\cdot\boldsymbol{P}\{\text{М}\}+\boldsymbol{P}\{\text{Д/Ж}\}\cdot \text{P}\{\text{Ж}\}=21/800$.
(2) $\boldsymbol{P}\{\text{М/Д}\}=\boldsymbol{P}\{\text{Д/М}\}\cdot\boldsymbol{P}\{\text{М}\})/\boldsymbol{P}\{\text{Д}\}=20/21$. (3) $\boldsymbol{P}\{\text{Ж/Д}\}=1-\boldsymbol{P}\{\text{М/Д}\}=1/21$.
10.9: (1) 3/20; (2) 1/3; 2/3. **10.10:** (1) $p=0{,}1$; $q=0{,}9$. (2) $p_3=1-0{,}9^3=0{,}271$; $p_4=1-0{,}9^4=0{,}3439$. **10.12:** $q=1-p=0{,}9$; $\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3$; $p_3=p^3=10^{-3}$; $p_2=3p^2q=2{,}7\cdot10^{-2}$;

$p_1=3pq^2=0{,}243$; $p_0=q^3=0{,}729$; $\Sigma p_i=1$; $\boldsymbol{P}\{\overline{A}_0\}=1-0{,}729=0{,}271>p=0{,}1$.
10.13: (1) $\boldsymbol{P}\{3\}=(1-q)^3=0{,}729$; $\boldsymbol{P}\{2\}=3(1-q)^2q=0{,}243$; $\boldsymbol{P}\{\geq1\}=1-q^3=0{,}999$.
(2) $n=4$. **10.14:** (1) $\boldsymbol{P}\{\geq1\}=1-q^4=80/81$. (2) $\boldsymbol{P}\{\geq2\}=1-[q^4+4q^3(1-q)]=8/9$.
(3) $\boldsymbol{P}\{4\}=(1-q)^4=16/81$. (4) $n=5$; $\boldsymbol{P}\{0\}=q^5=1/243<1/100=1-0{,}99$.
10.15: Вводим случайную величину ξ –число заболевших особей. Поскольку $n\gg1$, эта величина подчиняется распределению Пуассона: $P(k)=(\alpha^k/k!)\cdot\exp(-\alpha)$, где $\alpha=np=4$. Отсюда $P(0)=e^{-4}\approx1\%$; $P(1)\approx4\%$; $P(2)\approx8\%$; $P(3)\approx11\%$; $P(4)\approx11\%$; $P(5)\approx8{,}5\%$; $P(6)\approx4{,}7\%$ (см. рисунок рядом).



10.16: Вводим случайную величину ξ –число бактерий в одной клетке. Тогда среднее число бактерий в одной клетке есть $\alpha=n/N$, а их число подчиняется распределению Пуассона с параметром α. Вероятность клетки быть пустой есть $P(0)=e^{-\alpha}=e^{-n/N}$. С другой стороны, эту же вероятность можно оценить по числу N_0 пустых клеток: $P(0)\approx N_0/N$. Отсюда находим: $n\approx N\cdot\ln(N/N_0)$.

Если $N=900$ и $N_0=75$, то $n\approx2240$. **10.18**: $\overline{\xi}_1=2/3$; $\overline{\xi}_2=0$. **10.19:** $P(k)=(\alpha^k/k!)\,e^{-\alpha}$. $P(0)=e^{-2}\approx14\%$; $P(1)=2e^{-2}\approx28\%$;

$P(2)=P(1)$; $P(3)=(4/3)e^{-2}\approx18\%$. **10.21:** $\overline{\xi}=p$; $\overline{\xi^2}=p$; $\sigma^2_\xi=pq$.

10.22: $\overline{\xi}=np$, $\sigma_\xi^2=npq$. **10.23:** $\overline{\eta}=\overline{\xi}_i=a$, $\sigma_\eta=\sigma/\sqrt{n}$.

10.24: $\boldsymbol{P}\{\alpha-\delta\leq x\leq\alpha+\delta\}\equiv p_{\text{д}}=2\Phi_0(\delta/\sigma)$, где $\Phi_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ –функция вероятности ошибок. (1) 0,87(а); 0,95(б). (2) 0,475. (3) $\delta^*=26$ *г*.

10.25: p=0,4; q=0,6. $\overline{\xi}$=np=40; σ_ξ^2=npq=24. Используем гауссово приближение: (1) δ=$2\sigma_\xi\approx$10. (2) $\boldsymbol{P}\{>50\}$=0,5–Φ_0(2)=0,025. **10.26:** Вводим случайную величину ξ_i, описываемую вероятностями: q=$\boldsymbol{P}\{\xi_i=0\}$=0,5 –«не угадал», p=$\boldsymbol{P}\{\xi_i=1\}$=0,5 –«угадал», $i=\overline{1,n}$, $n=n_0+n_1$=100. Находим $\overline{\xi}_i$=0,5, σ_ξ^2=qp=0,25; $\xi=\sum\xi_i$, $\overline{\xi}$=np=50, $\sigma_\xi=\sqrt{(npq)}$=5; δ=2,6$\cdot\sigma_\xi\approx$13. Границы случайного угадывания: $37\le\xi\le 63$. **10.27:** (1) p_{33}=1/9. (2) p_i=p_j=1/3; i,j=1,2,3. (3) Независимые. (4) $\overline{\xi}$=0, $\overline{\eta}$=1, $\sigma_\xi^2=\sigma_\eta^2$= 2/3. (5) $\overline{\xi\eta}$=0, r=0. **10.28:** (1) p_{33}=1/9. (2) p_i=p_j=1/3; i,j=1,2,3. (3) Зависимые. (4) $\overline{\xi}$=0, $\overline{\eta}$=1, $\sigma_\xi^2=\sigma_\eta^2$=2/3. (5) $\overline{\xi\eta}$=2/3, r=1, $\eta=\xi+1$. **10.29:** (1) p_{33}=1/4. (2) p_i=p_j= 1/3; i,j=1,2,3. (3) Зависимые. (4) $\overline{\xi}$=0, $\overline{\eta}$=1, $\sigma_\xi^2=\sigma_\eta^2$=2/3. (5) $\overline{\xi\eta}$=1/6, r=1/4.

ВОПРОСЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ

1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1. Уравнение прямой линии (любое) и его смысл.
1.2. Уравнение окружности с произвольным центром, её касательной.
1.3. Уравнение и график эллипса.
1.4. Уравнение и график гиперболы.
1.5. Уравнение и график параболы.

2. ФУНКЦИЯ

2.1. Графики элементарных функций (не менее четырех на память).
2.2. Функция–факториал и её модификации.
2.3. Асимптоты вертикальные и невертикальные.

3. ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

3.1. Комплексное число, действительная и мнимая части.
3.2. Показательная форма записи комплексного числа.
3.3. Определения модуля и аргумента комплексного числа.
3.4. Вычисление определителя второго порядка.
3.5. Правило Крамера для решения системы линейных уравнений.
3.6. Сложение и вычитание векторов.
3.7. Скалярное произведение векторов.
3.8. Векторное произведение векторов.

4. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

4.1. Определение и геометрический смысл производной.
4.2. Пять правил дифференцирования.
4.3. Производная обратной функции.
4.4. Производная сложной функции.
4.5. Производная функции, заданной параметрически.

4.6.Таблица производных и дифференциалов (не менее 6 наизусть).
4.7.Геометрический и физический смысл второй производной.
4.8.Связь между производной и дифференциалом.

5. ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1.Правила вычисления частных производных и дифференциалов.
5.2.Полный дифференциал и его связь с частными дифференциалами.
5.3.Производная неявно заданной функции.
5.4.Необходимое условие экстремума функции нескольких переменных.
5.5.Понятия абсолютной и относительной погрешностей.
5.6.Погрешность суммы и разности приближенных чисел.
5.7.Погрешность произведения и отношения приближенных чисел.

6. ИНТЕГРАЛЫ

6.1.Первообразная и её связь с неопределенным интегралом.
6.2.Пять основных свойств неопределенного интеграла.
6.3.Простейшие преобразования дифференциала (не менее 5 наизусть).
6.4.Таблица неопределенных интегралов (не менее 6 наизусть).
6.5.Вычисление неопределенного интеграла методом замены переменной.
6.6.Вычисление неопределенного интеграла по частям.
6.7.Геометрический смысл определенного интеграла.
6.8.Формула Ньютона–Лейбница для определенного интеграла.

7. РЯДЫ

7.1.Понятие бесконечного ряда, его условной и абсолютной сходимости.
7.2.Знакопостоянный числовой ряд, необходимый признак сходимости.
7.3.Знакочередующийся ряд, достаточный признак сходимости.
7.4.Понятие и вид степенного ряда.
7.5.Понятие и вид тригонометрического ряда Фурье.

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8.1.Понятие дифференциального уравнения; общее и частное решения.
8.2.Вид дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
8.3.Понятие однородного дифференциального уравнения.
8.4.Уравнение экспоненты и его общее решение.
8.5.Решение однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
8.6.Понятие особой точки дифференциального уравнения 1-го порядка.

9. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

9.1.Пять основных свойств вероятности.
9.2.Формула сложения вероятностей, условие применимости.
9.3.Правило умножения вероятностей, условие применимости.
9.4.Формула полной вероятности.
9.5.Формула вероятностей гипотез (Байеса).
9.6.Дискретная случайная величина и способы её задания.
9.7.Непрерывная случайная величина; свойства плотности вероятности.

9.8. Вид плотности вероятности гауссовой случайной величины с заданными значениями среднего и дисперсии.
9.9. Пять свойств математического ожидания случайной величины.
9.10. Дисперсия случайной величины и её свойства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Якимов А.В. Функция и методы её анализа в высшей математике: Учебное пособие. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 1991. 163 с.
2. Якимов А.В., Черепенников В.В. Анализ функциональных и вероятностных связей в высшей математике: Учебное пособие. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 1992. 143 с.
3. Агудов Н.В., Пашев А.Г., Черепенников В.В., Якимов А.В. Высшая математика. Упражнения. Издание 3-е (дополненное и переработанное). Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2002. 48 с.
4. Клюев А.В., Черепенников В.В., Якимов А.В. Математика. Упражнения: Практикум. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2014. 44 с.
5. Клюев А.В., Черепенников В.В., Якимов А.В. Математика. Упражнения: Учебное пособие. Нижний Новгород: Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2014. 44 с. URL: http://www.unn.ru/books/met_files/Math-Bio-exers-2014-e.pdf (дата обращения 23.01.2018).

СОДЕРЖАНИЕ

1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ 3
Системы координат 3
Прямая линия 3
Кривые второго порядка 4
2. ФУНКЦИЯ 6
3. ВЫСШАЯ АЛГЕБРА 7
Комплексные числа 7
Определители. Правило Крамера 8
Векторы и их свойства 9
4. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ 10
Таблица производных и дифференциалов 10
Правила дифференцирования 10
Ряд Маклорена. Исследование графика функции 11
5. ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ 12
Общий анализ 12
Элементы векторного анализа 13
Вычисление погрешностей 13
6. ИНТЕГРАЛЫ 14
Методы вычисления неопределённого интеграла 14
Определённый интеграл 15
Многомерные и криволинейные интегралы 17
7. РЯДЫ 19
Числовые ряды 19
Функциональные ряды 20
8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 21
Уравнения первого порядка 21
Дифференциальные уравнения второго порядка 22
Особые точки в решениях дифференциальных уравнений 23
9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 24
Метод Даламбера 24
Метод Фурье 24
10. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ 25
Случайные события. Вероятность 25
Случайные величины 26
Среднее 27
Дисперсия 27
Системы случайных величин. Корреляция 28
УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ УПРАЖНЕНИЙ И ОТВЕТЫ 30
ВОПРОСЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ 40
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 42

МАТЕМАТИКА. УПРАЖНЕНИЯ

Составители:
Алексей Викторович **Клюев**
Аркадий Викторович **Якимов**

Практикум

Компьютерная верстка – А.В. Якимов

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.