МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

О.С. Костромина
О.А. Кузенков

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ ДЛЯ УСПЕШНОГО ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

ЧАСТЬ 2

МИНИМАЛЬНО НЕОБХОДИМЫЙ УРОВЕНЬ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.01 «Математика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
01.03.03 «Механика и математическое моделирование»,
01.05.01 «Фундаментальная математика и механика»,
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,
09.03.03 «Прикладная информатика»

Нижний Новгород
2021

УДК 517
ББК 22.161
К-72

К-72 Костромина О.С., Кузенков О.А. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ ДЛЯ УСПЕШНОГО ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ». ЧАСТЬ 2. МИНИМАЛЬНО НЕОБХОДИМЫЙ УРОВЕНЬ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 23 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **А.В. Грезина**

Учебно-методическое пособие содержит комплекс теоретических вопросов с ответами по дисциплине «Математический анализ», устанавливающий минимальные требования к знаниям и умениям студента, необходимые для успешного освоения данной дисциплины.

Пособие предназначено для преподавателей ИИТММ, ведущих дисциплину «Математический анализ», и студентов первого курса ИИТММ дневной формы обучения, изучающих данную дисциплину. Оно может быть использовано при проведении зачетов и экзаменов.

УДК 517
ББК 22.161

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Переход на новые образовательные стандарты высшего образования сопряжен с необходимостью разработки фонда оценочных средств для проверки сформированности предусмотренных стандартом компетенций обучающихся. Такие фонды должны обязательно включать шкалу оценок, позволяющую, в частности, идентифицировать минимальный уровень сформированности компетенции, соответствующий положительной оценке.

Согласно локальным нормативным актам ННГУ, минимальные требования относительно знаний в общем случае формулируются следующим образом: «Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок»; относительно умений – «Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме»; относительно навыков – «Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами». Совершенно очевидно, что для применения такого подхода в рамках каждой дисциплины необходимо конкретизировать, что понимается под грубыми и негрубыми ошибками, что относится к минимально допустимым знаниям и навыкам, основным умениям, типовым и стандартным задачам и т.п.

Первой работой авторов, призванной решить эти вопросы для важной, системообразующей дисциплины в математической подготовке студентов всех направлений института информационных технологий, математики и механики ННГУ – «Математический анализ», – стало учебно-методическое пособие «НЕОБХОДИМЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К УСПЕШНОМУ ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ». МИНИМАЛЬНО НЕОБХОДИМЫЙ УРОВЕНЬ»[1]. В этом пособии приведены основные теоретические вопросы (сформированные в шесть разделов) и типовые задачи по всему курсу математического анализа, читаемому студентам ИИТММ.

В настоящем пособии даны точные формулировки всех перечисленных в предыдущем пособии основных понятий и утверждений по двум разделам: интегральное исчисление функций одной переменной и дифференциальное исчисление функций многих переменных. Пособие предназначено для преподавателей ИИТММ, ведущих дисциплину «Математический анализ», и студентов первого курса ИИТММ, изучающих данную дисциплину. Оно может быть использовано как при подготовке к промежуточной аттестации, так и при проведении зачетов и экзаменов.

---

[1] Костромина О.С., Гордеева О.В., Киселева Т.П., Кузенков О.А., Малкин М.И. НЕОБХОДИМЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К УСПЕШНОМУ ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ». МИНИМАЛЬНО НЕОБХОДИМЫЙ УРОВЕНЬ: Учебно-методическое пособие. Нижегородский госуниверситет, 2019. Фундаментальная библиотека ННГУ им. Н.И. Лобачевского, рег. № 2334.19.06. URL: http://www.lib.unn.ru/students/index.html

I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Раздел 3. Интегральное исчисление функций одной переменной

3.1. Понятие неопределенного интеграла, его свойства.

3.2. Таблица интегралов.

3.3. Замена переменных в неопределенном интеграле.

3.4. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

3.5. Понятие определенного интеграла.

3.6. Основные свойства определенного интеграла.

3.7. Формула Ньютона-Лейбница.

3.8. Замена переменных в определенном интеграле.

3.9. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

3.10. Приложения определенного интеграла в геометрии: длина кривой, площадь криволинейной трапеции.

3.11. Несобственный интеграл 1-го рода: определение, признак сравнения.

3.12. Несобственный интеграл 2-го рода: определение, признак сравнения.

Раздел 4. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

4.1. Многомерное евклидово пространство, евклидово расстояние, скалярное произведение, норма. Последовательность точек в евклидовом пространстве, сходимость по расстоянию, покоординатная сходимость.

4.2. Понятие функции многих переменных (ФМП).

4.3. Определения предела ФМП.

4.4. Арифметические свойства предела ФМП.

4.5. Определения ФМП, непрерывной в точке. Арифметические свойства непрерывных ФМП.

4.6. Частные производные, дифференциал ФМП: определения, арифметические свойства дифференциала. Дифференцируемость ФМП.

4.7. Уравнение касательной плоскости к поверхности.

4.8. Дифференцируемость сложной ФМП.

4.9. Производная по направлению. Градиент.

4.10. Частные производные и дифференциалы высших порядков ФМП.

4.11. Формула Тейлора для ФМП с остаточным членом в форме Пеано.

4.12. Определение экстремума ФМП, необходимое условие экстремума.

II. ОТВЕТЫ НА ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

3.1. Функцию $F(x)$ называют *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если в любой точке $x\in(a,b)$ функция $F(x)$ дифференцируема и имеет место равенство $F'(x)=f(x)$.

Все множество первообразных на интервале (a,b) для функции $f(x)$ называют *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначают $\int f(x)dx$.

Если $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$ на интервале (a,b), то на этом интервале $\int f(x)dx=F(x)+C$, где C – произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла

1) $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$;

2) $\int dF(x)=F(x)+C$;

3) $\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx\ (k=const\neq 0)$;

4) $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

3.2. *Таблица интегралов*

1) $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq -1)$

2) $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C\quad(x\neq 0)$

3) $\int\dfrac{dx}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C\quad(a\neq 0)$

4) $\int\dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C\quad(x\neq\pm a,\ a\neq 0)$

5) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C\quad(-a<x<a,\ a>0)$

6) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$

7) $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$, $\left(a>0,\quad a\neq 1\right)$; $\int e^x\,dx=e^x+C$

8) $\int\sin x dx=-\cos x+C$

9) $\int\cos x dx=\sin x+C$

10) $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C\quad(x\neq\pi n,\ n\in Z)$

11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z)$

12) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$

13) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

14) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \quad (x \neq 0)$

15) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

3.3. *Поднесение под знак дифференциала*. Пусть известен неопределенный интеграл от функции $f(u)$ на интервале (α, β): $\int f(u)du = F(u) + C$. Если на интервале (a,b) определена дифференцируемая функция $u = \varphi(x)$ со значениями в интервале (α, β), то $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C$.

Метод подстановки. Пусть известен неопределенный интеграл от функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на интервале (α, β): $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C,$ где $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируемая функция на (α, β) со значениями в интервале (a,b), имеющая обратную функцию $t = \varphi^{-1}$, определенную на (a,b). Тогда неопределенный интеграл от функции $f(x)$ на интервале (a,b) можно найти с помощью подстановки $x = \varphi(t)$:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C.$$

3.4. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции на интервале (a,b), при этом на (a,b) существует неопределенный интеграл $\int v(x)du(x)$. Тогда на (a,b) существует неопределенный интеграл $\int u(x)dv(x)$ и справедливо равенство:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

3.5. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$. Разобьем $[a,b]$ произвольным образом на n частей точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и обозначим это разбиение через $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$.

Пусть $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$. На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ произвольным образом выберем точку ξ_i, обозначив множество выбранных точек $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, и составим сумму $\sigma(\tau, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Эта сумма называется *интегральной суммой Римана* для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, соответствующей разбиению τ и выбору промежуточных точек ξ (см. рис. 1).

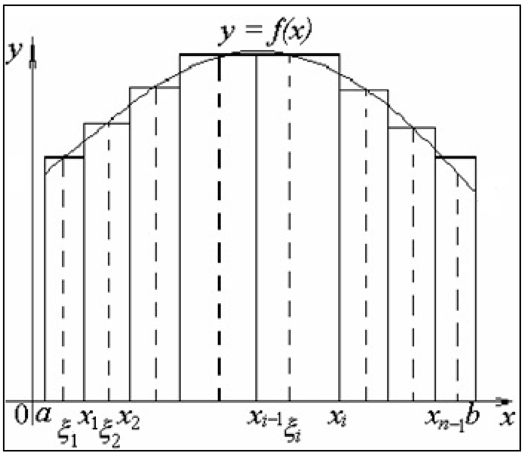


Рис. 1

Пусть $\lambda(\tau)=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\Delta x_i$ – длина наибольшего частичного отрезка разбиения τ, называемая *диаметром разбиения* τ. Если существует конечный предел интегральной суммы $\sigma(\tau,\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ при стремлении к нулю диаметра разбиения, не зависящий от способа разбиения τ отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки и выбора промежуточных точек ξ, то этот предел называют *определенным интегралом* (или *интегралом Римана*) от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sigma(\tau,\xi)=\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\,.$$

3.7. *Основные свойства определенного интеграла*

1) Если нижний и верхний пределы интегрирования равны, то интеграл равен нулю: $\int_a^a f(x)dx=0$.

2) При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на противоположный: $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

3) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[c,d]\subset[a,b]$.

4) Пусть $a<c<b$. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a,b]$, причем $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

5) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, $\alpha=const$, $\beta=const$, то

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

6) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

7) Если интегрируемые на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

8) Если интегрируемая на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a,b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

9) Теорема о среднем. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $\exists\, m, M : \forall x \in [a,b]\ m \leq f(x) \leq M$, тогда $\exists\, \mu \in [m,M]$: $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

3.8. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на **[**a,b**]** и $F(x)$ – её первообразная, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Эта формула называется *формулой Ньютона–Лейбница*.

3.9. *Замена переменных в определенном интеграле.* Если: 1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$; 2) функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, где $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$; 3) сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на $[\alpha,\beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

3.10. <u>*Вычисление длин дуг*</u>

Непрерывную кривую без точек самопересечения называют *простой дугой*.

1) *Длина дуги в прямоугольных координатах*

Длина дуги гладкой кривой $y = y(x)$ $(a \leq x \leq b)$ равна

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

2) *Длина дуги, заданной параметрически*

Если простая дуга задана уравнениями $x = x(t),\ y = y(t)$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$, причем функции $x(t)$, $y(t)$ имеют на отрезке $[t_1, t_2]$ непрерывные производные, то её длина находится по формуле

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt .$$

3) *Длина дуги в полярных координатах*

Если простая дуга задана уравнением $r = r(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$, где $r(\varphi)$ непрерывна вместе со своей производной на $[\alpha, \beta]$, то её длина находится по формуле

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi .$$

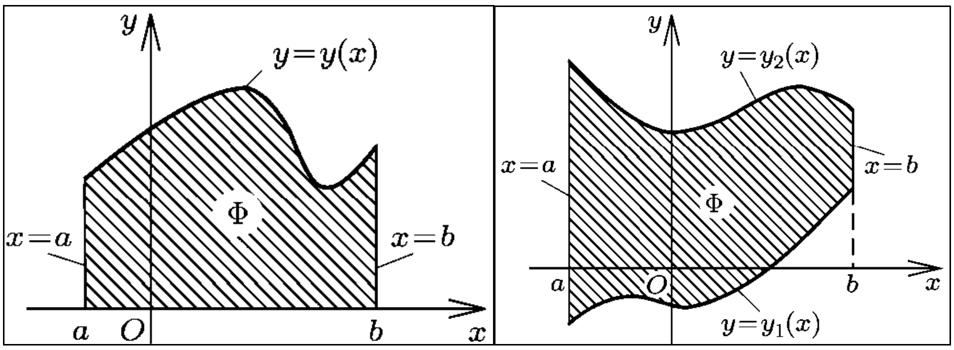
<u>*Вычисление площадей*</u>

1) *Площадь в прямоугольных координатах*

Площадь S криволинейной трапеции Φ, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной функции $y = y(x)$, осью Ox и двумя перпендикулярами к оси Ox: $x = a$ и $x = b$ (см. рис. 2a), находят по формуле: $S = \int_a^b y(x)dx$.

Если функция $y = y(x)$ не положительна на отрезке $[a,b]$, то $S = -\int_a^b y(x)dx$.

Площадь S криволинейной трапеции Φ, ограниченной графиками непрерывных функций $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ $(y_2(x) \ge y_1(x), x \in [a,b])$ и двумя перпендикулярами к оси Ox: $x = a$ и $x = b$ (см. рис. 2b), находят по формуле: $S = \int_a^b \left(y_2(x) - y_1(x)\right)dx$.

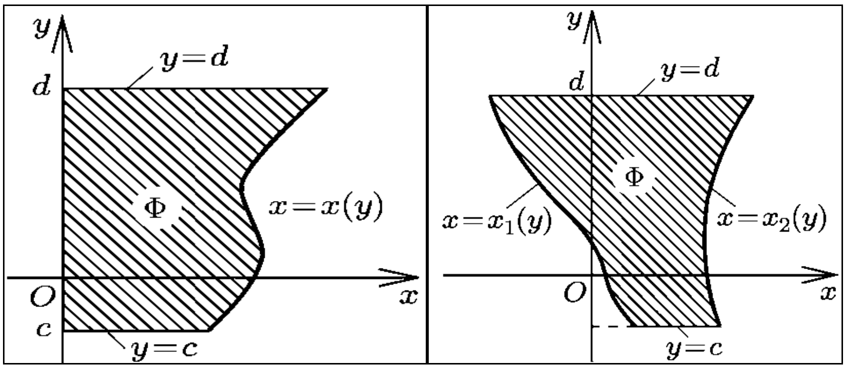


(a) (b)

Рис. 2

Площадь S криволинейной трапеции Φ, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной функции $x = x(y)$, осью Oy и двумя перпендикулярами к оси Oy: $y = c$ и $y = d$ (см. рис. 3a), находят по формуле: $S = \int_c^d x(y)dy$.

Площадь S криволинейной трапеции Φ, ограниченной графиками непрерывных функций $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ $(x_2(y) \ge x_1(y), y \in [c,d])$ и двумя перпендикулярами к оси Oy: $y = c$ и $y = d$ (см. рис. 3b), находят по формуле: $S = \int_c^d \left(x_2(y) - x_1(y)\right)dy$.



(a) (b)

Рис. 3

2) *Площадь фигуры, ограниченной параметрически заданной кривой*

Если $x = x(t),\ y = y(t)$ $(0 \le t \le T)$ – параметрические уравнения кусочно-гладкой простой замкнутой кривой C, пробегаемой против часовой стрелки и ограничивающей слева от себя фигуру с площадью S (см. рис. 4), то

$$S = -\int_0^T y(t)x'(t)dt = \int_0^T x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt$$

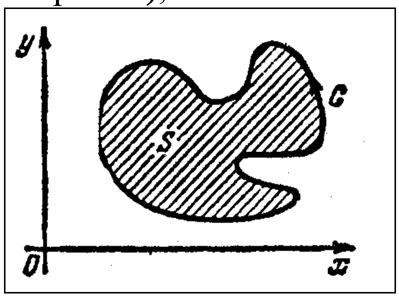


Рис. 4

3) *Площадь в полярных координатах*

Площадь S криволинейного сектора Φ, ограниченного непрерывной кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полупрямыми $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$ (см. рис. 5), находят по формуле: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$.

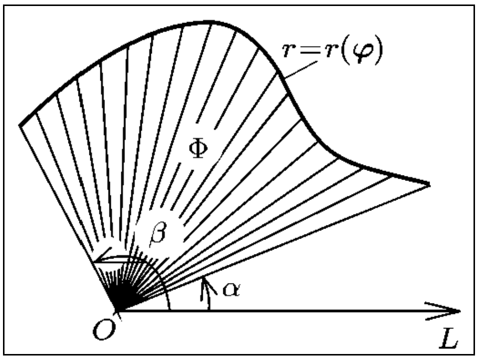


Рис. 5

3.11. Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x \ge a$ и интегрируема на любом отрезке $[a, B]$. Если существует $\lim\limits_{B \to +\infty} \int_a^B f(x)dx$, то этот предел называется *несобственным интегралом 1-го рода* от функции $f(x)$ на $[a, +\infty)$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.* Если предел $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^{B} f(x)dx$ бесконечный или не существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится.*

Аналогично можно определить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ для функции $f(x)$, определенной на $(-\infty, a]$, как предел $\lim\limits_{B\to-\infty}\int\limits_B^{a} f(x)dx$.

<u>*Признаки сходимости интеграла 1-го рода для положительных функций*</u>

Пусть функции $f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$ на $[a,+\infty)$ и интегрируемы на любом конечном отрезке $[a, B]$. Тогда верны следующие признаки сходимости.

1) Если на $[a,+\infty)$ $f(x)\le g(x)$, то из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

2) Если на $[a,+\infty)$ $f(x)\le g(x)$, то из расходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

3) Если $g(x) > 0$ на $[a,+\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k$, $k\ne 0$, $k\ne\infty$, то оба интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. В частности, если положительные функции $f(x)$ и $g(x)$ – эквивалентные бесконечно малые при $x\to+\infty$,то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно (ибо $k=1$).

3.12. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a,b)$, неограничена слева от b, интегрируема на любом $[c,d]\subset[a,b]$ и существует $\lim\limits_{d\to b-0}\int\limits_a^{d} f(x)dx$. Тогда этот предел называется *несобственным интегралом 2-го рода* от функции $f(x)$ на $[a,b)$ и обозначается $\int\limits_a^{b} f(x)dx$. В этом случае говорят, что несобственный

интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится.* Если предел $\lim\limits_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)dx$ бесконечный или не существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ *расходится.*
Если $f(x)$ неограничена только в окрестности точки a, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c\to a+0}\int\limits_c^b f(x)dx$.

Признаки сходимости интеграла 2-го рода для положительных функций

Пусть функции $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ на $[a,b)$ и интегрируемы на любом $[c,d]\subset[a,b]$. Тогда верны следующие признаки сходимости.

1) Если на $[a,b)$ $f(x)\leq g(x)$, то из сходимости $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$.

2) Если на $[a,b)$ $f(x)\leq g(x)$, то из расходимости $\int\limits_a^b f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^b g(x)dx$.

3) Если $g(x)>0$ на $[a,b)$ и существует $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$, $k\neq 0$, $k\neq\infty$, то оба интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. В частности, если положительные функции $f(x)$ и $g(x)$ – эквивалентные бесконечно малые при $x\to b-0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно (ибо $k=1$).

4.1. Пространством R^{n} называется множество наборов, состоящих из n действительных чисел, т.е. $\mathrm{R}^{\mathrm{n}} = \left\{(x_1,\ldots,x_n) : x_i \in \mathrm{R},\, i=\overline{1,n}\right\}$.

Во множестве R^{n} можно ввести операции сложения и умножения на число следующим образом.

Суммой элементов $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и $y=(y_1,\ldots,y_n)$ называется элемент $x+y=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$. Произведением элемента $x=(x_1,\ldots,x_n)$ на число α называется элемент $\alpha\cdot x=(\alpha\cdot x_1,\ldots,\alpha\cdot x_n)$. Действие сложения и умножения на число для любых $x,y,z\in\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ и любых $\alpha,\beta\in\mathrm{R}$ обладает следующими свойствами:

1) $x+y=y+x$ (коммутативность);

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность);

3) $\exists\vec{0}=(0,\ldots,0)$: $x+\vec{0}=x$ (существование нулевого элемента – нейтрального элемента по сложению);

4) $\exists(-x): x+(-x)=0$ (существование противоположного элемента);

5) $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$ (дистрибутивность относительно сложения элементов);

6) $\alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\cdot\beta)\cdot x$ (ассоциативность);

7) $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$ (дистрибутивность относительно сложения чисел);

8) $1\cdot x=x$ (правило умножения на число 1).

Из курса линейной алгебры известно, что если элементы некоторого множества удовлетворяют свойствам 1)–8), то это множество называется *линейным пространством* L. Элементы линейного пространства называют также векторами, а пространство – векторным.

Скалярным произведением в линейном пространстве L над полем R действительных чисел называется функция (x,y), ставящая в соответствие каждой паре элементов $x,y\in L$ единственное значение (x,y) из R и удовлетворяющая для любых $x,y,z\in L$ и любого $\lambda\in$ R следующим свойствам (аксиомам скалярного произведения):

1) $(x,x)\geq 0$; $(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$ (положительная определенность скалярного произведения);

2) $(x,y)=(y,x)$ (коммутативность или симметричность);

3) $(\lambda\cdot x,y)=\lambda\cdot(x,y)$ (однородность);

4) $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$ (дистрибутивность).

Линейное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется *евклидовым пространством.*

Пространство R^{n} можно сделать евклидовым, если ввести в нем скалярное произведение любых двух векторов $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и $y=(y_1,\ldots,y_n)$ по формуле

$$(x,y)=x_1\cdot y_1+\ldots+x_n\cdot y_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i.$$

Нормой в линейном пространстве L называется скалярная функция $\|x\|$, зависящая от одного векторного аргумента $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и удовлетворяющая для любых $x,y\in L$ и любого $\lambda\in$ R следующим аксиомам:

1) $\|x\|\geq 0$; $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$ (положительная определенность нормы);

2) $\|\lambda\cdot x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ (положительная однородность);

3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (полуаддитивность нормы).

В любом евклидовом пространстве можно ввести норму, если воспользоваться скалярным произведением: $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$. Такая норма называется *евклидовой*. В пространстве $\mathrm{R^n}$ евклидова норма элемента $x=(x_1,\ldots,x_n)$ вычисляется по формуле: $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$.

С помощью нормы можно задать *метрику* (расстояние между двумя элементами) по формуле: $\rho(x,y)=\|x-y\|$, удовлетворяющую для любых $x,\, y,\, z\in \mathrm{R^n}$ следующим аксиомам:

1) $\rho(x,x)\ge 0$; $\rho(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$;

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

3) $\rho(x,z)\le \rho(x,y)+\rho(y,z)$.

Евклидово расстояние $\rho(x,y)$ определяет расстояние между двумя точками $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и $y=(y_1,\ldots,y_n)$ в n-мерном пространстве по формуле:

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\,.$$

Если каждому натуральному числу k поставлена в соответствие точка $x^k=\left(x_1^k,x_2^k,\ldots,x_n^k\right)$ из пространства $\mathrm{R^n}$, то говорят, что задана *последовательность точек* $x^1,x^2,\ldots,x^k,\ldots$ пространства $\mathrm{R^n}$. Её обозначают $\left\{x^k\right\}$.

Покоординатная сходимость последовательности $\left\{x^k\right\}$ к точке $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in \mathrm{R^n}$:

$$\lim_{k\to\infty} x^k=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)\in \mathrm{N}:\forall k>N\ \ |x_i^k-a_i|<\varepsilon,\ i=\overline{1,n}.$$

Сходимость последовательности $\left\{x^k\right\}$ к точке $a\in \mathrm{R^n}$ *по расстоянию*:

$$\lim_{k\to\infty} x^k=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)\in \mathrm{N}:\forall k>N\ \ \rho(x^k,a)<\varepsilon.$$

4.2. Пусть $X\subset \mathrm{R^n}$ – произвольное множество точек пространства $\mathrm{R^n}$. Если правило f каждой точке $x(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in X$ ставит в соответствие единственное действительное число $u\in E$, то говорят, что на множестве X задана *числовая функция* f от n переменных, и пишут: $u=f(x)$, или $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Множество X называется *областью определения* ($X=D(f)$), а множество $E=\left\{u\in \mathrm{R}:\ u=f(x),\, x\in X\right\}$ – *множеством значений* функции $u=f(x)$.

4.3. Пусть функция $u=f(x)$ n переменных определена на множестве $X\subset \mathrm{R^n}$, и пусть a – предельная точка множества X, принадлежащая этому множеству.

Предел функции по Гейне. Число A называется пределом функции $u=f(x)$ в точке $a(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ (или пределом функции при $x\to a$), если для любой сходящейся к a последовательности $x^1,x^2,\ldots,x^k,\ldots$ точек множества X, элементы x^k которой отличны от a, соответствующая последовательность $f(x^1),\ f(x^2),\ldots,\ f(x^k),\ldots$ значений функции сходится к A:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow \forall x^k \in X:\ x^k \neq a, \lim_{k\to\infty} x^k = a \ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} f(x^k)=A.$$

Предел функции по Коши. Число A называется пределом функции $u=f(x)$ в точке $a(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ (или пределом функции при $x\to a$), если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что для всех точек x из области X определения функции, удовлетворяющих условию $0<\rho(x,a)<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x\in X,\ 0<\rho(x,a)<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

4.4. Арифметические операции над функциями n переменных, имеющими предел в точке $a\in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, приводят к функциям, также имеющим предельное значение в точке a.

Теорема. Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ n переменных существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$. Тогда существуют указанные ниже пределы и справедливы равенства:

1) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)=A\pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=A\cdot B$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, если $B\neq 0$.

4.5. Пусть функция $u=f(x)$ n переменных определена на множестве $X\subset \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ и пусть a – предельная точка множества X, принадлежащая этому множеству.

Непрерывность функции в точке. Функция $u=f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Непрерывность функции в точке по Гейне. Функция $u=f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если для любой сходящейся к a последовательности точек $\{x^k\}$ из области X, справедливо равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k)=f(a)$.

Непрерывность функции в точке по Коши. Функция $u=f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x\in X,\ \rho(x,a)<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Арифметические свойства непрерывных функций. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a множества X, то в этой точке непрерывны функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, а если, кроме того, $g(a)\neq 0$, то непрерывна и функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

4.6. Для простоты рассмотрим случай функции двух переменных. Все понятия легко распространяются на случаи трех и большего числа переменных. Пусть задана функция $z = f(x, y)$, определенная на множестве $D \subset \mathrm{R}^2$ и принимающая действительные значения. Пусть (x_0, y_0) – внутренняя точка области определения.

Частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ функции $z = f(x, y)$ по аргументу x в точке (x_0, y_0) называется предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$, если он существует:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ функции $z = f(x, y)$ по аргументу y в точке (x_0, y_0) называется предел $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$, если он существует:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке (x_0, y_0), если ее полное приращение в этой точке $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – расстояние между точками (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, $o(\rho)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем ρ при $\rho \to 0$.

Таким образом, если выполняется предельное равенство

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0, \qquad (*)$$

функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Если предельное равенство (*) не выполняется, то функция $z = f(x, y)$ не дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Линейная часть приращения функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) называется *дифференциалом* дифференцируемой функции в точке (x_0, y_0). Как и в случае функции одной переменной, приращения Δx, Δy независимых переменных называют их дифференциалами и обозначают dx, dy. Это позволяет записать дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) следующим образом:

$$dz(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy.$$

Арифметические свойства дифференциала

Для любых дифференцируемых функций $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ справедливы равенства:

1) $d(c\cdot u)=c\cdot du$, где $c=const$;

2) $d(u+v)=du+dv$;

3) $d(u\cdot v)=v\cdot du+u\cdot dv$;

4) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2}$, $v\neq 0$.

4.7. *Касательной плоскостью* к поверхности в некоторой ее точке называют плоскость, содержащую все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку (точку касания).

Пусть функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0) и $f(x_0,y_0)=z_0$, то в точке (x_0,y_0,z_0) существует касательная плоскость к поверхности (графику этой функции), причем уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

4.8. Пусть внешняя функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0). Внутренние функции $x=x(t)$, $y=y(t)$ дифференцируемы в точке t_0, причем $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$. Тогда сложная функция $f(t)=f(x(t),y(t))$ также дифференцируема в точке t_0, и ее производная вычисляется по формуле:

$$\frac{df}{dt}(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\frac{dx}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\frac{dy}{dt}(t_0).$$

Пусть внешняя функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0). Внутренние функции $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ дифференцируемы в точке (u_0,v_0), причем $x(u_0,v_0)=x_0$, $y(u_0,v_0)=y_0$. Тогда сложная функция $f(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$ также дифференцируема в точке (u_0,v_0), и ее частные производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0).$$

4.9. Производная по направлению – это обобщение понятия частной производной. Частная производная функции – это производная в направлении координатных осей.

Зафиксируем точку $M_0(x_0, y_0)$ области D. Зададим направление вектором, имеющим начало в этой точке $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0,\ y - y_0\}$, где $M(x, y)$– произвольная точка из области D, отличная от точки M_0.

Производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ *по направлению* $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M}$ называется величина $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}(M_0) = \lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f(M) - f(M_0)}{\| M_0M \|}$.

Производная по направлению является скоростью изменения функции $z = f(x, y)$ по направлению $\vec{l}$ в точке M_0.

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда у нее существует производная в этой точке по любому направлению, и она вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta,$$

где $\cos\alpha = \dfrac{x - x_0}{\| \vec{l} \|}$, $\cos\beta = \dfrac{y - y_0}{\| \vec{l} \|}$ – направляющие косинусы.

Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется вектор

$$grad\, z(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\,\vec{j} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(M_0); \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \right\}.$$

Вектор $grad\, z$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ указывает направление наибольшего роста функции $z = f(x, y)$ в этой точке, а $|grad\, z| = \sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ есть скорость роста функции в этом направлении.

4.10. *Частные производные высших порядков*

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) частные производные первого порядка $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Тогда можно определить в точке (x_0, y_0) производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Delta x, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\Delta x}$$ – вторая частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке (x_0, y_0);

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\Delta y}$$ – вторая частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной y в точке (x_0, y_0);

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\Delta x}$ – смешанная частная производная функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0);

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\Delta y}$ – смешанная частная производная функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Частные производные третьего порядка определяются как частные производные первого порядка от частных производных второго порядка и т.д.

Теорема *(о равенстве смешанных производных)*. Если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функция $z = f(x, y)$ имеет смешанные частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, непрерывные в точке (x_0, y_0), то они равны в этой точке:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

<u>Дифференциалы высших порядков</u>

Пусть функция $z = f(x, y)$ независимых переменных x, y имеет в точке (x_0, y_0) непрерывные производные второго порядка.

Дифференциалом $d^2 z$ второго порядка функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) называется дифференциал в точке (x_0, y_0) от дифференциала первого порядка $dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$ при фиксированных значениях dx, dy, причем дифференциалы функций $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ вычисляются при тех же самых приращениях независимых переменных, что и дифференциал первого порядка.

Справедлива формула для вычисления дифференциала второго порядка:

$$d^2 z(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\,dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\,dy^2.$$

Эту формулу можно записать в операторном виде:

$$d^2 z(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f\Bigg|_{(x_0, y_0)}.$$

Дифференциалом $d^n z$ n-го порядка функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) называется дифференциал в точке (x_0, y_0) от $(n-1)$-го дифференциала $d^{n-1} z$ при фиксированных значениях dx, dy, причем дифференциалы от частных производных $(n-1)$-го порядка функции $z = f(x, y)$ вычисляются при тех же самых приращениях независимых переменных, что и дифференциал $(n-1)$-го порядка.

Справедлива формула для вычисления дифференциала n-го порядка в операторном виде:

$$d^n z(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f \Bigg|_{(x_0, y_0)} .$$

4.11. Если функция $f(x, y)$ имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) непрерывные частные производные до $(n-1)$-го порядка включительно и производные порядка n, непрерывные в точке (x_0, y_0), то в этой окрестности справедлива *формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} d^i f(x_0, y_0) + o\left(\rho^n\right)$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $dx = \Delta x = x - x_0$, $dy = \Delta y = y - y_0$, а символ $o\left(\rho^n\right)$ обозначает бесконечно малую при $\rho \to 0$ функцию более высокого порядка малости, чем ρ^n.

4.12. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Говорят, что функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) *локальный максимум (минимум)*, если найдется такая окрестность точки (x_0, y_0), что для любой точки (x, y) из этой окрестности $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$). Говорят, что функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) *строгий локальный максимум (минимум)*, если найдется такая окрестность точки (x_0, y_0), что для точки $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ из этой окрестности $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$). Говорят, что функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) (строгий) *экстремум*, если она имеет в этой точке (строгий) локальный максимум/минимум.

Необходимое условие экстремума. Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и имеет в этой точке экстремум, то:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1) Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Том 1,2. – М.: Дрофа, 2003, 2004.
2) Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2,3. – М.: Физматлит, 2003.
3) Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1,2. – М.: Физматлит, 2003.
4) Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2005.
5) Галкина С.Ю., Галкин О.Е. Неопределенный интеграл: Учебно-методическое пособие. Нижегородский госуниверситет, 2015. Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ им. Н.И. Лобачевского, рег. № 951.15.06. URL: http://www.unn.ru/books/resources.html
6) Галкина С.Ю., Галкин О.Е. Определенный интеграл и его приложения: Учебно-методическое пособие. Нижегородский госуниверситет, 2015. Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ им. Н.И. Лобачевского, рег. № 950.15.06. URL: http://www.unn.ru/books/resources.html
7) Галкина С.Ю., Галкин О.Е. Дифференциальное исчисление функций многих переменных: Учебно-методическое пособие. Нижегородский госуниверситет, 2017. Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ им. Н.И. Лобачевского, рег. № 1468.17.06. URL: http://www.unn.ru/books/resources.html

Ольга Сергеевна **Костромина**
Олег Анатольевич **Кузенков**

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ ДЛЯ УСПЕШНОГО ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

ЧАСТЬ 2

МИНИМАЛЬНО НЕОБХОДИМЫЙ УРОВЕНЬ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.