МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ: ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Практикум

Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям:
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
02.03.02 «Фундаментальная информатика и
информационные технологии»,
09.03.04 «Программная инженерия».

Нижний Новгород
2015

УДК 517

Контрольные работы математическому анализу: функции многих переменных. Составители: Гордеева О.В., Лукъянов В.И.– Практикум. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. - 28 с.

Рецензент: к. ф-м. н. , доц. **А.В. Зорин**

Методическая разработка содержит комплекс контрольных заданий, предлагавшихся авторами в течение ряда лет для самостоятельной работы студентам первого курса факультета ВМК, обучающимся по направлениям: «Прикладная математика и информатика», «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Программная инженерия», для подготовки к зачетам и экзаменам по математическому анализу в соответствии с учебным планом института ИТММ.

Ответственный за выпуск: зампредседателя методической комиссии факультета
ВМК ННГУ к.т.н. доцент В.М. Сморкалова

УДК 517

Вариант 1

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}} (xy)$.

2. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}0, x^2+y^2>16\\ \sqrt{16-x^2-y^2}, x^2+y^2\le 16\end{cases}.$$

3. Найти du и d^2u, где $u=f(\frac{x}{z},\frac{y}{z})$.

4. Найти $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ по определению и исследовать $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$ на дифференцируемость в точке O(0,0).

5. Найти градиент $f(x,y)=\ln\left(1-x^2-2y^2-3z^2\right)$ в точке $M\left(x_0,y_0,z_0\right)$, причем $x_0{}^2+2y_0{}^2+3z_0{}^2<1$.

6. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=arctg\,\frac{y}{x}$ в точке $\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=xy+x+y$ на множестве $-2\le x\le 2$, $-2\le y\le 4$.

Вариант 2

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x+y+2x^2+2y^2}{x^3+y^3}$.

2. Исследовать на непрерывность в точках (1,1) и (0,0)

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2xy-3y^2}{x^3-y^3}, x\neq y \\ A, x=y=0 \\ B, x=y=1 \end{cases}.$$

3. Найти du и d^2u, где $u=f(xyz, xy^2, xz^2)$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) и найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению: $f(x,y)=x+y+\sqrt{|xy|}$.

5. Найти угол между градиентами функций $z=\sqrt{x^2-y^2}$ и $z=x^3+y^3-3xy$ в точке $(4,3)$.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ в точке $(0,1,0)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+y-xy$ на множестве $|x|\leq 2$, $|y|\leq 3$.

Вариант 3

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x+\sqrt{y}}{x^2+y}$.

2. Исследовать на непрерывность $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{xy}}}{xy}, xy\neq 0 \\ 0, xy=0 \end{cases}$.

3. Найти du и d^2u, где $u=f(x^2+y^2,x^2y)$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) и найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y+\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0 \\ 0, x=y=0 \end{cases}$$

5. Найти производную функции $f=x^2+y^2+z^2+u^2$ по направлению вектора $\bar{l}(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0,-\frac{2}{3})$ в точке $(1,3,2,1)$.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=e^{x\cos y}$ в точке $(1,0,e)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=3+2xy$ на множестве $x^2+y^2\leq 1$.

Вариант 4

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{(x+y)^2}{(x^2+y^4)^2}$.

2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x=y=0 \end{cases}$.

а) по совокупности переменных x и y.

б) по координате x и по координате y.

3. Найти du и d^2u, где $u=f(\sqrt{x+y},\dfrac{x}{y})$.

4. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x,y)=\sqrt[3]{y^2\sin x}$ в точке O(0,0) и найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению.

5. Найти градиент $f(x,y)=arctg\dfrac{xy}{z^2}$ в точке $M(0,1,2)$.

6. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\ln\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ в точке $(1,1,0)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=3+2xy$ на множестве $4\le x^2+y^2\le 9$.

Вариант 5

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to \infty}} x^y$.

2. Можно ли доопределить до непрерывности функцию $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ в точке (0,0)

а) по переменной x.

б) по совокупности переменных (x,y).

3. Найти du и d^2u, где $u = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x})$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) и найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, x = y = 0 \end{cases}.$$

5. Найти градиент $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ в точке $M(1,2,3)$.

6. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x - y + \sqrt{|xy|}$ в точке $(0,0,0)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = (x-6)^2 + (y+8)^2$ на множестве $x^2 + y^2 \le 25$.

Вариант 6

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x}{y}$

2. Исследовать на непрерывность

$$f(x,y)=\begin{cases}0, x^2+y^2>9\\ \sqrt{9-x^2-y^2}, x^2+y^2\le 9\end{cases}.$$

3. Найти du и d^2u, где $u=f(\frac{x}{z},\frac{z}{y})$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) и найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению: $f(x,y)=\sqrt[3]{xy^2}$.

5.Найти угол между градиентами функции $z=\sin\left(x^2+y^2-z^2\right)$ в точках $A(a,-2a,a)$ и $B(b,b,b)$.

6.Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=\sin\dfrac{x}{y}$ в точке $(\pi,1,0)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2-y^2$ на множестве $x^2+y^2\le 2x$.

Вариант 7

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{y}{x}$

2. Исследовать на непрерывность в точках

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{-x^2+2xy+3y^2}{x^3+y^3}, -x\neq y \\ a, x=y=0 \\ b, x=-y=\pm 1 \end{cases}.$$

3. Найти du и d^2u, где $u=f(xz,xy,xy^2z^3)$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) и найти $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$ по определению: $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$.

5. Найти производную функции $f=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ по направлению вектора $\bar{l}(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ в точке $(1,2,1)$.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=e^{x+\cos y}$ в точке $(1,0,e^2)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2y$ на множестве $x^2+y^2\leq 1$.

Вариант 8

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^y$.

2. Найти значения a, при которых функция непрерывна

$$f(x,y)=\begin{cases} a, x+y=0 \\ \dfrac{1}{x+y}\cdot e^{-\frac{1}{|x+y|}}, x+y\neq 0 \end{cases}.$$

3. Найти du и d^2u, где $u=arctg\left(x^2+y^2\right)$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) и найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению: $f(x,y)=|y|\cdot\sin x$.

5. Найти производную функции $u=xyz$ в точке A(1, -2, 1) в направлении градиента функции $u=\ln(x+y)+xyz^3$ в точке A.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=\cos\dfrac{x}{y}$ в точке $(\pi,1,-1)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=y^4-x^4$ на множестве $x^2+y^2\leq 9$.

Вариант 9

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{y}$.

2. Найти значения a, при которых функция непрерывна

$$f(x,y)=\begin{cases} a, x^2+y^2=0 \\ \dfrac{x^3-xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0 \end{cases}.$$

3. Найти du и d^2u, где $u=f\left(x^2+y, xy, xyz\right)$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) и найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению: $f(x,y)=ch\sqrt[5]{x^2y}$.

5. Найти значение производной $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ в точке $(0,0,0)$, где $u=\ln(e^x+e^y+e^z)$, по направлению луча, образующего с осями координат (x,y,z) соответственно $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3})$.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=arctg\dfrac{x}{y}$ в точке $(\pi,4,1)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u=x+y+z$ на множестве $x^2+y^2\leq z\leq 1$.

Вариант 10

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to 0}} x^y$.

2. Найти значения a и b, при которых функция непрерывна

$$f(x,y)=\begin{cases} a, x^2+y^2\le 4 \\ \sqrt{9-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2-4}, 4<x^2+y^2\le 9 \\ b, x^2+y^2>9 \end{cases}.$$

3. Найти du и d^2u, где $u=arctg\dfrac{y}{x}$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) и найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению:

$$f(x,y)=x\left(\sqrt{1+\sqrt{|y|}}-1\right).$$

5.Найти наибольшее значение производной $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ от функции

$u=tgx-x+3\sin y-\sin^3 y+ctgz+2z$ в точке $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ в точке $(-3,4,17)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+y^2-4x$ на множестве $-2\le x\le 1,\ -1\le y\le 3$.

Вариант 11

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x-y)$.

2. Найти значения a, при которых функция непрерывна $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ a, x=y=0\end{cases}$.

3. Найти du и d^2u, где $u=f(\sqrt{x+y},xy)$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) $f(x,y)=\ln(3+\sqrt[3]{x^2y^2})$, найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению.

5. Найти наибольшее значение производной $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ от функции $u=\dfrac{x+\sqrt{y}}{y}$ в точке $(2,1)$.

6. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\sqrt{x^4+y^4}$ в точке $(0,0,0)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^3+y^3-3xy$ на множестве $0\le x\le 2$, $-1\le y\le 2$.

Вариант 12

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

2. Найти все точки разрыва функции и указать точки устранимого разрыва $f(x,y)=\dfrac{\sin^2 x\cdot \sin y}{\sin^4 x+\sin^2 y}$

3. Найти du и d^2u, где $u=tg\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) $f(x,y)=2y\cdot\cos\sqrt[3]{xy}$, найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению.

5. Найти производную функции $u=tg(xz)$ в точке $M(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},1)$ в направлении градиента функции $u=\sin(yz)$ в точке M.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}-x+y$ в точке $(-3,4,12)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^3+8y^3-6xy+1$ на множестве $0\le x\le 2$, $|y|\le 1$.

Вариант 13

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{y^2}$.

2. Найти все точки разрыва функции и указать точки устранимого разрыва $f(x,y)=x\sin\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$.

3. Найти du и d^2u, где $u=f(arctgx, arctg(x+y))$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0)
$$f(x,y)=\begin{cases}0, x^2+y^2=0\\ \left(x^2+y^2\right)\cdot\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\end{cases},$$
найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению.

5. Найти производную функции $u=3x^4+y^3+xy$ в точке $M(1,2)$ по направлению луча, образующего с осью OX угол 135°.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=y+\ln\dfrac{x}{y}$ в точке $(1,1)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x+|x-y|$ на множестве $|x|\leq 1$, $|y|\leq 2$.

Вариант 14

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x+y+3x^2+3y^2}{x^2+y^2}$.

2. Исследовать на непрерывность $f(x,y)=\begin{cases} a, x^2+y^2=1 \\ \left(x^2+y^2-1\right)\cdot \sin\dfrac{1}{1-x^2-y^2}, x^2+y^2\neq 1. \end{cases}$

3. Найти du и d^2u, где $u = tgx\cdot\cos y$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) и найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению: $f(x,y)=\sqrt[5]{x^4}\left(\cos\sqrt[5]{y}-1\right)$.

5. Найти производную функции $u=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точке $M_0(1,1,1)$ по направлению вектора $\overline{M_0M}$, образующего с осью, где $M(1,5,4)$.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости. к поверхности $z=3+e^{\frac{x}{y}}$ в точке $(1,1)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+y^2-xy$ на множестве $|x|+|y|\le 1$.

Вариант 15

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{(x-y)^2}{(x^2+y^4)^2}$.

2. Является ли функция непрерывной $f(x,y)=\begin{cases} a, x\neq y^2 \\ \dfrac{x+y^2}{x-y^2}, x=y^2 \end{cases}$

3. Найти du и d^2u, где $u=\arcsin(x\cdot y)$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) $f(x,y)=2\sqrt{|xy|}$, найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению.

5. Найти наибольшее значение производной $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ от функции $u=\ln(xyz)$ в точке $(1,-2,-3)$.

6. Найти углы, которые образует нормаль к поверхности $z=arctg\dfrac{x}{y}$ в точке $(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{\pi}{4})$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=(x+y)\cdot e^{xy}$ на множестве $-2\leq x+y\leq 1$.

Вариант 16

1. Найти предел или доказать, что его не существует:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y-2x^2}{y-x^2}.$$

2. Является ли функция непрерывной

$$f(x,y)=\begin{cases}3, x+y=0\\ \dfrac{x^3+y^3}{x+y}, x+y\neq 0\end{cases},$$

3. Найти du и d^2u, где $u=f\left(\ln\left(x+y+z\right)\right)$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) $f(x,y)=x+\sqrt{|xy|}$, найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению.

5. Найти направляющие косинусы единичного вектора $\bar{l}$, по направлению которого производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ функции $u=x^2-xy+y^2$ в точке $M(-1,2)$ достигает наибольшего значения.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости. к поверхности $z=arctg\frac{y}{x}$ в точке $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{\pi}{4})$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u=x^2+2y^2+3z^2$ на множестве $x^2+y^2+z^2\leq 100$.

Вариант 17

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{y^2+x^2}$.

2. Найти все точки разрыва функции и указать точки устранимого разрыва $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin^2 x+\sin^2 y}$.

3. Найти du и d^2u , где $u=f(\ln(x+y+z))$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) $f(x,y)=y+\sqrt{|xy|}$, найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению.

5. Найти длину градиента функции

$u=10^{-3}\cdot\sin\left(\pi\cdot 10^6\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ в точке $M(2,1,2)$.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=\ln(xy)+\ln\dfrac{x}{y}$ в точке $(1,1)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x+y$ на множестве $x^2+y^2\le 1$.

Вариант 18

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} e^{x^2-y^2}\cdot\sin 2xy$.

2. Найти все точки разрыва функции и указать точки устранимого разрыва $f(x,y)=\dfrac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$.

3. Найти du и d^2u, где $u=f\left(\sin(xy),\cos(x+y)\right)$.

4. Исследовать на дифференцируемость $f(x,y)=x|y|+y|x|$, найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению.

5. Найти градиент функции $u=1+x^2y^3$ в точке $M(-1,-2)$.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=(x-y)^2+\ln\dfrac{x}{y}$ в точке $(1,1,0)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=\left(y^2-x^2\right)\cdot e^{1-x^2+y^2}$ на множестве $x^2+y^2\le 4$.

Вариант 19

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} e^{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}$.

2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x,y)=\begin{cases} a, x^3y^3\neq 0 \\ e^{\frac{1}{x^3y^3}}, x^3y^3=0 \end{cases}$.

3. Найти du и d^2u, где $u=f\left(x^3+y^2,\cos(x+y)\right)$.

4. Исследовать на дифференцируемость $f(x,y)=y\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}$, найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению.

5. Найти градиент функции $u=e^{x+xy+xyz}$ в точке $M(-1,-2,2)$.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=2^{\frac{x}{y}}+2^{\frac{y}{x}}$ в точке $(1,1)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+y^2$ на множестве $x^4+y^4\leq 1$.

Вариант 20

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{1-\sqrt[3]{1+xy}}$.

2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x,y)=\begin{cases} x^2-5x+6, x\neq y \\ e^{-\frac{1}{|x-y|}}, x=y \end{cases}$.

3. Найти du и d^2u, где $u=f\left(y^2, arctg(x+y)\right)$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) $f(x,y)=2y+x\cos\sqrt[3]{xy}$, найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению.

5. Найти угол между градиентами функции $z=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$ в точках $A(1,1)$ и $B(3,4)$.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=x^y$ в точке $(1,1)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u=x^2+y^2+z^2$ на множестве $x^4+y^4+z^4\leq 1$.

Вариант 21

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^3}{\sqrt{x^2+y^3+25}-5}$.

2. Является ли функция непрерывной в своей области определения $f(x,y)=\begin{cases} 2arctg\dfrac{1}{x^2-y^2}, x+y\neq 0 \\ \pi, x+y=0 \end{cases}$.

3. Найти du и d^2u, где $u=f\big(x,\ln(x+y)\big)$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) $f(x,y)=arctg\left(y+xy+\sqrt[3]{x^2y}\right)$, найти $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$ по определению.

5. Найти угол между градиентами функции $z=\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|$ в точках $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ и $B(1,-1)$.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=xy+e^{\sin(xy)}$ в точке $(1,\pi)$.

7. Данное число a разложить на сумму n слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

Вариант 22

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y+9}-3}$.

2. Найти и нарисовать область определения функции $f(x,y)=\arccos\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$. Является ли эта функция непрерывной в своей области определения.

3. Найти du и d^2u, где $u=f\left(\ln x, \ln(x\cdot y)\right)$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) $f(x,y)=\begin{cases} 0, x^2+y^2=0 \\ \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & , x^2+y^2\neq 0 \end{cases}$, найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению.

5. Найти угол между градиентами функций $f_1=\sin(xz+y)$ и $f_2=\cos(x-yz)$ в точке (x_0,y_0,z_0).

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=x^2y^2+y^3$ в точке $(1,0)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u=3xy$ на множестве $x^2+y^2\le 2$.

Вариант 23

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} e^{x+y}\cdot\ln(x+y)$.

2. Можно ли доопределить функцию $f(x,y)=\dfrac{\sqrt[3]{\sin x(1-\cos(xy))}}{\sin x}$ в точке O(0,0), чтобы полученная функция была непрерывной в этой точке.

3. Найти du и d^2u, где $u=f(tgx, x\cdot y)$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) $f(x,y)=\begin{cases} 0, x^2+y^2=0 \\ \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & , x^2+y^2\neq 0 \end{cases}$, найти $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ по определению.

5. Найти угол между градиентами функций $f_1=x^2-4y^2+z^2$ и $f_2=(xyz)^2$ в точке (x_0,y_0,z_0).

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=\sin\dfrac{y}{x}+e^{\sin(xy)}$ в точке $(1,\pi)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u=xy$ на множестве $x^2+y^2\leq 1$.

Вариант 24

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \ln\left(\frac{1}{x}+e^{\frac{1}{y}}\right)$.

2. Можно ли доопределить функцию $f(x,y)=\frac{1-\cos(xy)}{\sin x}$ в точке O(0,0), чтобы полученная функция была непрерывной в этой точке.

3. Найти du и d^2u, где $u=tgx\cdot\cos y^2$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) $f(x,y)=\sqrt[3]{\sin x(1-\cos(xy))}$, найти $f'_x(0,0),\ f'_y(0,0)$ по определению.

5. Найти наибольшее значение производной $\frac{\partial u}{\partial l}$ от функции $u=\ln\left(x^2y^2z^2\right)$ в точке $(1,2,1)$.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=e^{tg(xy)}$ в точке $(2,\frac{\pi}{2})$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=(x-3)^2+(y-4)^2$ на множестве $x^2+y^2\le 36$.

Вариант 25

1. Найти предел или доказать, что его не существует: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} xy\sin\frac{\pi}{xy}$.

2. Можно ли доопределить функцию $f(x,y)=\frac{1-\cos(xy)}{\sin y^2}$ в точке O(0,0), чтобы полученная функция была непрерывной в этой точке.

3. Найти du и d^2u, где $u=tgx\cdot\sin y+\ln(xy)$.

4. Исследовать на дифференцируемость в точке O(0,0) $f(x,y)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt[3]{xy^2}\right)$, найти $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по определению.

5. Найти производную функции $f=\sum\limits_{k=1}^{n}\arcsin x_k$ по направлению вектора $\bar{l}(\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},...\frac{1}{\sqrt{n}})$ в точке $M(\frac{1}{n},\frac{1}{n},...\frac{1}{n})$.

6. Найти уравнение нормали и касательной плоскости к поверхности $z=\sqrt{xy+e^{(xy)}}$ в точке $(1,1)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2-y^2+2$ на множестве $x^2+y^2\le 1$.

Литература

1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. – М.: Издательство МГУ, 1988.

2. Демидович В.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.:АСТ: Астрель, 2006.

3. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1969.