

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

С.Н. Стребуляев
Д.В. Воробьев

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института ИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
09.03.03 «Прикладная информатика»,
09.03.04 «Программная инженерия»

Нижний Новгород
2020

УДК 519. (075)

ББК В19

С-84

С-84 Стребуляев С.Н., Воробьев Д.В., ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 38 с.

Рецензент: доктор ф.-м., наук, профессор **Г.В. Осипов**

Методические указания предназначены для студентов и специалистов, занимающихся математическим моделированием и исследованием решений и устойчивости динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами и отклонениями аргумента.

Изложены теоретические положения Флоке-Хана об особенностях получения матрицы монодромии и характеристического уравнения для указанного класса систем. Дана оценка устойчивости на основе анализа вспомогательного годографа, определяющего расположение мультипликаторов на комплексной плоскости.

Описаны алгоритм и программное обеспечение, выполненное с использованием современных средств – языков Go и Python, позволяющие, в автоматическом режиме строить границы областей устойчивости в плоскостях различных параметров рассматриваемой системы и анализировать решение.

В учебно-методическом пособии, в отличие от предыдущего издания, приведен более обширный перечень примеров исследования параметрического возбуждения колебаний в конкретных динамических системах, в том числе и системах с запаздыванием.

УДК 519. (075)

ББК В19

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2020

Содержание

Введение.....	4
1. Теоретические положения по исследованию устойчивости дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием	7
2. Алгоритмы расчета границ областей устойчивости и нахождения решений	15
2.1. Алгоритм расчета границ областей устойчивости.....	15
2.2. Алгоритм построения решения (Метод шагов).....	17
2.3. Алгоритм метода Рунге-Кутты-Мерсона	17
2.4. Алгоритм автоматического анализа годографа.....	18
3. Описание комплекса программ и руководство пользователя.....	20
4. Примеры использования комплекса программ для исследования конкретных динамических систем.	25
Пример 1. Уравнение Матье-Хилла с трением.....	25
Пример 2. Маятник с колеблющейся точкой подвеса.	26
Пример 3. Колебания массы на упругом стержне с дополнительной опорой в виде втулки.....	27
Пример 4. Колебания невесомого жесткого стержня с массой на конце	29
Пример 5. Параметрические колебания в системах с запаздыванием: резание металлов.....	31
Список литературы	34
Приложение А.....	35

Введение

Периодический характер работы большинства машин предопределяет периодичность нагружения и деформации, как отдельных звеньев, так и тех конструкций, которые служат опорами или фундаментами. Практически во всех случаях упругие колебания сопутствуют работе различных машин.

В ряде случаев колебания, возникают и при отсутствии периодического возмущения. При этом параметры механической системы не остаются неизменными, а являются некоторыми заданными функциями времени.

Если нарушить состояние равновесия такой системы, то будут совершаться своеобразные колебания: с одной стороны, их нельзя назвать свободными, поскольку система испытывает определённое внешнее воздействие в виде изменения жёсткости или другого параметра, а с другой стороны, они не являются вынужденными, так как внешнее воздействие не проявляется в виде заданной силы. Эти колебания называются параметрическими и в зависимости от свойств системы и характера изменения её параметров могут иметь ограниченные или возрастающие амплитуды; последний, очевидно, опасный случай, называется параметрическим резонансом.

Трудно назвать такую область техники, в которой не была бы актуальной проблема изучения упругих колебаний. Большое внимание исследователей привлечено к вопросам колебаний конструкций самых различных назначений: роторов турбин, валов двигателей внутреннего сгорания, турбинных лопаток, воздушных и гребных винтов, автомобилей и железнодорожных вагонов, кораблей, инженерных сооружений, перекрытий промышленных зданий, деталей, обрабатываемых на металлорежущих станках и т.п. В ряде случаев колебания мешают нормальной эксплуатации или даже непосредственно угрожают прочности, постепенно подготавливая усталостное разрушение; в таких случаях теория может указать пути для уменьшения вредных колебаний. Наряду с этим она позволяет обосновать и оптимизировать технологические процессы, в которых колебания используются целенаправленно.

Можно указать, по крайней мере, следующие четыре категории различных по своей природе колебательных процессов:

свободные колебания, т. е. колебания, совершаемые механической системой, лишённой притока энергии извне, если система выведена из состояния равновесия и затем предоставлена самой себе;

- вынужденные колебания, которые возникают вследствие действия на механическую систему внешних переменных сил (возмущающих сил);
- параметрические колебания, вызываемые периодическими изменениями параметров системы (например, её жёсткости);

- автоколебания – колебательные процессы, поддерживаемые постоянными источниками энергии не колебательного характера.

Параметрические колебания в динамических системах описываются дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. Такие колебания можно наблюдать в таких процессах, как обработка металлов резанием, в процессе долгосрочного прогнозирования в экономике, биофизических процессах и других. Исследование устойчивости таких динамических систем представляет достаточно сложную в теоретическом плане задачу. Параметрические колебания вызываются и поддерживаются изменением во времени параметров системы. Такими параметрами могут быть периодическое изменение жесткости, периодическое изменение параметрических нагрузок, периодическое изменение инерции системы. Так, например, при вращении вала, сечение которого имеет неодинаковые главные жесткости при изгибе, могут возникнуть параметрические колебания. Причиной их возникновения является периодическое изменение изгибной жесткости вращающегося вала относительно неподвижных осей координат. А, например, в процессе фрезерования причиной неустойчивости может стать некоторая периодическая сила, возникающая при обработке детали с помощью фрезы, имеющей несколько зубьев.

Другие достаточно распространенные динамические системы – системы с отклонением аргументов, запаздывающего типа. В биологии и физиологии известны динамические системы с запаздывающим аргументом, описывающие изменение численности популяций, регенерацию белых кровяных клеток, нелинейную динамику воздухообмена в легких. Подобные бесконечномерные динамические системы чаще всего представляются дифференциальными или разностными уравнениями с запаздыванием, каждое состояние которых задается непрерывной функцией на интервале времени равном длительности запаздывания. При численном расчете и представлении сложных нелинейных процессов естественно возникает проблема конечномерного описания динамических систем с запаздыванием.

Наличие запаздывания в динамических системах является часто дополнительной причиной возникновения неустойчивых режимов работы. Так одной из причин неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях является наличие времени запаздывания, необходимого для превращения топливной смеси в продукты сгорания.

Параметрические колебания в динамических системах с переменными коэффициентами и запаздыванием описываются дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами и отклоняющимся аргументом. Исследование их устойчивости представляет собой достаточно сложную в теоретическом плане задачу.

Излагаемый материал можно условно разделить на три взаимосвязанные части.

В первой части изложены теоретические результаты Флоке и Хана для уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием. Во второй части описан алгоритм и комплекс программ, позволяющие в диалоговом режиме строить диаграммы устойчивости в пространстве параметров системы. В третьей части разработанный комплекс программ применен для исследования параметрической неустойчивости конкретных динамических систем.

В отличие от предыдущих методических указаний [1], в настоящей разработке рассмотрено большее число примеров и приведены контрольные задания для выполнения лабораторной работы на ЭВМ. Кроме того, предлагаемое программное обеспечение выполнено на более высоком уровне с использованием современных компьютерных технологий.

Учебно-методическое пособие позволяет более детально разобраться в теоретическом материале, дает навыки работы на персональном компьютере в режиме диалога и может быть использована для решения практических задач в технических системах, где наблюдается явление параметрического резонанса

1. Теоретические положения по исследованию устойчивости дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием

В связи со спецификой и сложностью рассматриваемых дифференциальных уравнений (наличием запаздывания и периодических коэффициентов) теоретическую часть методических указаний целесообразно разбить на три этапа. На первом этапе необходимо рассмотреть задачу исследования устойчивости уравнений с запаздыванием, далее с периодическими коэффициентами и наконец уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием.

Для линейного дифференциального уравнения [2] с постоянными коэффициентами и с постоянными отклонениями аргумента

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m a_{ki} \frac{d^k x(t-\tau_i)}{dt^k} = f(t) \quad (1)$$

(k – индекс параметра a и порядок производной от x).

Основная начальная задача заключается в определении непрерывного решения $x(t)$ при $t > t_0$ при условии, что $x(t) = \phi(t)$ при $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$, где $\phi(t)$ – заданная непрерывная функция, называемая начальной (рис. 1).

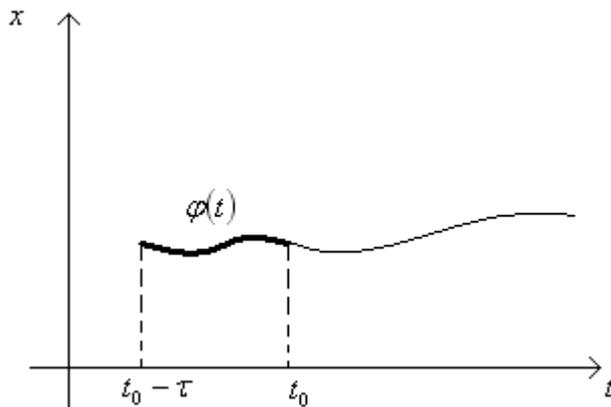


Рис. 1. Начальная задача для определения непрерывного решения

Отрезок $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$, на котором задана начальная функция, называется начальным множеством и обозначается E_{t_0} : точка t_0 называется начальной точкой. Обычно предполагается, что $x(t_0 + 0) = \phi(t_0)$.

В [3] доказывается существование решения начальной задачи, которое обозначается $x(t)$.

Для исследования устойчивости решений уравнения (1) рассмотрим соответствующему ему однородное уравнение:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m a_{ki} \frac{d^k x(t-\tau_i)}{dt^k} = 0 \quad (2)$$

Ищем частное решение уравнения (2) в виде

$$x(t) = ce^{zt}, \quad (3)$$

где c – произвольная постоянная, $\operatorname{Re} z > 0$.

Подставляя (3) в (2) и сокращая на e^{zt} получим для определения z характеристическое уравнение:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m a_{ki} z^k e^{-z\tau_i} = 0 \quad (4)$$

Левая часть уравнения (4)

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m a_{ki} z^k e^{-z\tau_i} \quad (5)$$

называется характеристическим квазиполиномом. Уравнение (4) является трансцендентным относительно z и имеет бесконечное множество корней. Каждому корню z_i^0 соответствует решение $e^{z_i^0 t}$. Линейные комбинации решений $\sum_{j=0}^q c_j e^{z_j t}$ с постоянными коэффициентами c_j также являются решениями уравнения (2).

Если все коэффициенты a_{ki} действительны, то комплексным корням

$z_i = \delta_i \pm \omega_i j$ (j – комплексная единица) характеристического уравнения (4)

соответствуют комплексные решения $e^{(\delta_i \pm \omega_i j)t}$ или действительные решения $e^{\delta_i t} \cos(\omega_i t)$ и $e^{\delta_i t} \sin(\omega_i t)$, являющиеся, соответственно действительной и мнимой частями решения $e^{(\delta_i \pm \omega_i j)t}$. Доказано, что кратным корням z_i уравнения (4) кратности α_i соответствует не только решение $e^{z_i t}$, но и $t e^{z_i t}$, $t^2 e^{z_i t}$... $t^{\alpha_i - 1} e^{z_i t}$ и, следовательно, если ряд

$$\sum_{i=1}^n P_i(t) e^{-\tau_i z}, \quad (6)$$

где $P_i(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_{\alpha_i - 1} t^{\alpha_i - 1}$, $b_i = \text{const}$, сходится и допускает n – кратное, почленное дифференцирование, то его сумма является решением уравнения (2).

Введем определения устойчивости в малом и асимптотической устойчивости применительно к дифференциальному уравнению с отклоняющимся аргументом [2,3].

Решение $x_\phi(t)$ уравнения (1) называется устойчивым, если для каждого

$\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $|\phi(t) - \psi(t)| < \delta(\varepsilon)$

на начальном множестве следует $\left| x_\phi(t) - x_\psi(t) \right| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$, где $\psi(t)$ – любая непрерывная начальная функция.

Не обладающие этим свойством решения называются неустойчивыми.

Устойчивое решение $x_\phi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| x_\phi(t) - x_\psi(t) \right| = 0 \text{ для любой непрерывной начальной функции } \psi(t).$$

Таким образом, для определения устойчивости дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и запаздывающим аргументом необходимо знать расположение на комплексной плоскости корней квазиполинома

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m a_k z^k e^{-z\tau_i} \quad (7)$$

Если функция $\Phi(z)$ не вырождается в полином, т.е. если в уравнение (1) существенно входит отклонение аргумента, то $\Phi(z)$ имеет бесконечное множество нулей, единственной предельной точкой которых является бесконечность. В общем случае, для уравнения с запаздывающим аргументом все корни z_i квазиполинома $\Phi(z)$ лежат в левой полуплоскости: $Re z_i \leq N$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и без запаздывания, следующего вида

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = [A(t)]\bar{x}, \quad (8)$$

где $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $[A(t)]$ – непрерывная (или кусочно-непрерывная) на $(-\infty, +\infty)$ периодическая матрица: $[A(t + \omega)] = [A(t)]$, $\omega > 0$

Совокупность n независимых решений системы (8) образует фундаментальную матрицу $[x(t)] = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$.

Фундаментальная матрица, удовлетворяющая начальному условию $[x(0)] = [E]$, называется фундаментальной матрицей Коши или матрицантом. Значения матрицанта в конце первого периода называется матрицей монодромии.

Теорема Флоке [5]

Для линейной системы (8) с ω – периодической матрицей $[A(t)]$ фундаментальная матрица Коши имеет вид

$$[x(t)] = [\Phi(t)]e^{[z]t}, \quad (9)$$

где $[\Phi(t)]$ – класса C' (или кусочно-гладкая) ω – периодическая неособенная матрица, причем $[\Phi(0)] = [E]$ и $[z]$ – некоторая постоянная матрица, $[E]$ – единичная матрица.

Доказательство. Пусть $[x(t)]$ – нормированная фундаментальная матрица решений системы (8)

$$[x(0)] = [E] \quad (10)$$

Матрица $[x(t + \omega)]$ также является фундаментальной. Действительно, на основании тождества $\frac{d[x(t)]}{dt} = [A(t)][x(t)]$ имеем

$$\frac{d[x(t+\omega)]}{dt} = \frac{d[x(t+\omega)]}{d(t+\omega)} \frac{d(t+\omega)}{dt} = [A(t+\omega)][x(t+\omega)] = [A(t)][x(t+\omega)],$$

т.е. $[x(t+\omega)]$ – фундаментальная матрица решений для системы (8).

Отсюда имеем

$$[x(t+\omega)] = [x(t)][c], \quad (11)$$

где $[c]$ – постоянная неособенная матрица.

При подстановке $t = 0$ в (11) и учитывая (10), получим $[c] = [x(\omega)]$.

Следовательно, фундаментальная матрица решений для системы (8) имеет вид $[x(t+\omega)] = [x(t)][x(\omega)]$, где $[x(\omega)]$ – матрица монодромии.

Очевидно, $\det[x(\omega)] \neq 0$.

Пусть $\frac{1}{\omega} \ln[x(\omega)] = [z]$, тогда $[x(\omega)] = e^{[z]\omega}$.

Имеем тождество

$$[x(t)] \equiv [x(t)]e^{-[z]t}e^{[z]t} = [\Phi(t)]e^{[z]t}, \quad (12)$$

где $[\Phi(t)] = [x(t)]e^{-[z]t}$.

Имеем

$$[\Phi(t+\omega)] = [x(t+\omega)]e^{-[z](t+\omega)} = [x(t+\omega)]e^{-[z]\omega}e^{-[z]t}.$$

С учетом предыдущего получаем:

$$[\Phi(t+\omega)] = [x(t)]e^{[z]\omega}e^{-[z]\omega}e^{-[z]t} = [x(t)]e^{-[z]t} = [\Phi(t)],$$

т.е. матрица $[\Phi(t)]$ – периодическая с периодом ω . Кроме того, если $[A(t)] \in C(-\infty, +\infty)$, то из (12) выводим $[\Phi(t)] = [x(t)]e^{-[z]t} \in C'(-\infty, +\infty)$, причем $[\Phi(0)] = [E]$ и $\det[\Phi(t)] = \det[x(t)] \det e^{-[z]t} \neq 0$.

Теорема доказана.

Таким образом, полагаем доказанным, что для исследуемой системы дифференциальных уравнений (8) фундаментальная матрица решений представима в виде $[x(t)] = [\Phi(t)]e^{[z]t}$, где $[\Phi(t)]$ – ω – периодическая матрица и $[z]$ – постоянная матрица.

Прежде чем перейти к выявлению условий устойчивости системы уравнений (8) дадим определения.

Собственные значения z_i матрицы $[z]$ т.е. корни векового уравнения $\det([z] - z[E]) = 0$, называются характеристическими показателями системы (8).

Собственные значения ρ_i ($i = \overline{1, n}$) матрицы монодромии $[x(\omega)]$, т.е. корни векового (характеристического) уравнения

$$\det([x(\omega)] - \rho[E]) = 0 \quad (13)$$

называются мультипликаторами.

Условия устойчивости систем дифференциальных уравнений (8) следующие: решение $\bar{x} = 0$ устойчиво по Ляпунову, если все мультипликаторы $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ лежат в единичном круге $|\rho| \leq 1$, причем мультипликаторы, лежащие на граничной окружности $|\rho| = 1$ – либо простые корни уравнения (13), либо имеют простые элементарные делители. Решение $\bar{x} = 0$ уравнения (8)

асимптотически устойчиво, если все мультипликаторы лежат внутри единичного круга $|\rho| < 1$. Решение $\bar{x} = 0$ неустойчиво, если среди мультипликаторов имеется хотя бы один, по модулю больший единицы, или найдутся кратные

$|\rho| = 1$ с непростыми элементарными делителями.

Для исследования условий устойчивости дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием рассмотрим матричное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= [A_0(t)]\bar{x}(t) + [A_1(t)]\bar{x}(t - \tau_1) + \dots + [A_m(t)]\bar{x}(t - \tau_m), \\ [A_i(t + \omega)] &= [A_i(t)], \quad \tau_i = k_i\omega \end{aligned} \quad (14)$$

k_i – целое положительное число $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$.

В работе [4] Ханом дано расширение теоремы Флоке на случай систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием. Основные принципы доказательства состоят в следующем. Поскольку коэффициенты уравнения (14) периодические, то новое решение $\tilde{x}(t)$ получаем в виде $\tilde{x}(t) = x(t + \omega)$. Замена $t \rightarrow t + \omega$ индуцирует линейный оператор L , который действует в пространстве решений $\tilde{x} = Lx$.

В дальнейшем, в процессе доказательства вводится понятие сопряженного уравнения. Уравнение, сопряженное (14), записывается в следующем виде:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = -[A_0(t)]^T \bar{y}(t) - [A_1(t)]^T \bar{y}(t + \tau_1) - \dots - [A_m(t)]^T \bar{y}(t + \tau_m), \quad (15)$$

где $[A_i(t)]^T$ – транспонированная матрица $[A_i(t)]^T$. Тогда соответствующий оператор L^* получается заменой $t \rightarrow t - \omega$. Оба оператора L и L^* имеют одни и те же собственные значения, определяемые как нули функции:

$$f(z) = \det(z[E] - [\Phi_0^\omega([A_0(t)] + z^{-k_1}[A_1(t)] + \dots + z^{-k_m}[A_m(t)])]).$$

При этом фундаментальная матрица решений для системы уравнений (14) будет зависеть не только от времени t , но и от комплексного параметра z , т.е. $[\Phi(t, z)]$.

В [4] также доказано, что система уравнений (14) асимптотически устойчива, если все мультипликаторы соответствующего характеристического уравнения лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости.

Очевидно, что определение мультипликаторов характеристического уравнения, получение вспомогательного годографа и его анализ затруднителен без использования ЭВМ.

Для нахождения решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и запаздыванием используется метод шагов.

Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (16)$$

где запаздывание τ будем считать положительной постоянной, основная начальная задача заключается в определении непрерывного решения $x(t)$ уравнения (16) при $t > t_0$, при условии, что $x(t) = \phi(t)$ при $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$, где $\phi(t)$ – заданная непрерывная функция, называемая начальной рис.1.

Отрезок $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$, на котором задана начальная функция, называется начальным множеством и обозначается E_{t_0} . Обычно предполагается, что $\phi(t_0) = x(t_0 + 0)$.

Если в уравнении (16) и в начальных условиях $x(t)$, f и $\phi(t)$ считать вектор-функциями, то мы получим постановку основной начальной задачи для систем уравнений.

В случае переменного запаздывания $\tau(t)$ в уравнении

$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t)))$ также требуется найти решение этого уравнения при

$t > t_0$, причем на начальном множестве E_{t_0} , состоящем из точки t_0 и из тех значений $t - \tau(t)$, которые меньше t_0 при $t \geq t_0$, $x(t)$ считается совпадающим с заданной начальной функцией $\phi(t)$. Обычно предполагается, что

$$x(t_0 + 0) = \phi(t_0).$$

Например, в уравнении $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \cos^2 t))$ при $t_0 = 0$ начальная функция должна быть задана на начальном множестве E_0 , являющемся отрезком $-1 \leq t \leq 0$. В уравнении $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\frac{t}{2}))$ при $t_0 = 0$ начальное множество состоит из одной точки t_0 . В том же уравнении при $t_0 = 1$ начальное множество E_1 является отрезком $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

В прикладных задачах начальную функцию часто находят экспериментально. Нередко начальная функция определяется из другого дифференциального уравнения без отклонения аргумента, которое, например, в некоторых задачах автоматического регулирования описывает процесс до момента начала действия обратной связи.

Уравнения n -го порядка с отклоняющимся аргументом можно заменить, так же как и для уравнений без отклонений аргумента, соответствующей системой уравнений, однако при некоторых постановках задач при этом не будет полной эквивалентности.

Для уравнений n -го порядка с запаздывающим аргументом

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t), x(t - \tau), \dot{x}(t - \tau), \dots, x^{(n-1)}(t - \tau)) \quad (17)$$

или для уравнений нейтрального типа

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t), x(t - \tau), \dot{x}(t - \tau), \dots, x^{(n-1)}(t - \tau)) \quad (18)$$

где для простоты пока считаем τ постоянным, $\tau > 0$, в основной начальной задаче требуется определить $(n - 1)$ раз непрерывно дифференцируемое решение $x(t)$ при $t > t_0$, причем на начальном множестве $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ $x_k(t)$

считаются равными заданным начальным функциям $\phi_k(t)$ (для уравнения (17) $k = 0, 1, \dots, (n - 1)$, а для уравнения (18) $k = 0, 1, \dots, n$). Обычно требуется, чтобы $\phi_k(t_0) = x^{(k)}(t_0 + 0)$ $k = 0, 1, \dots, (n - 1)$.

При такой постановке начальной задачи уравнение (17) может быть заменено эквивалентной системой:

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = x_1(t), \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dots \\ \dot{x}_{n-2}(t) = x_{n-1}(t) \\ \dot{x}_{n-1}(t) = f\left(t, x_0, x_1(t), \dots, x_{n-1}(t), x_0(t - \tau), \dots, x_{n-1}(t - \tau)\right) \end{cases} \quad (19)$$

с начальными условиями

$$x_k(t) = \phi_k(t) \text{ на } E_{t_0} \quad (k = 0, 1, \dots, (n - 1)) \quad (20)$$

(аналогичную систему получим и для уравнения (18)).

Однако в приложениях часто функции $\phi_k(t)$ для уравнения n -го порядка должны быть производными одной и той же функции $\phi(t)$

$$\phi_k(t) = \phi^{(k)}(t) \quad (k = 0, 1, \dots, (n - 1)) \quad (21)$$

Очевидно, что уравнение n -го порядка (17) с начальными условиями (21) не эквивалентно системе (19) с условиями (20). Оно эквивалентно системе (19) с условиями (21), но эти условия обычно не естественны для систем.

Все сказанное, очевидно, распространяется и на случай переменного запаздывания $\tau(t)$, но только начальные функции при этом задаются на начальном множестве E_{t_0} , состоящем из точки t_0 и из тех значений $t - \tau(t)$, которые меньше t_0 при $t \geq t_0$, $x(t)$ считается совпадающим с заданной начальной функцией $\phi(t)$.

Если уравнение первого или более высокого порядка содержит несколько отклонений аргумента $\tau_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), например

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), x(t - \tau_2(t)), \dots, x(t - \tau_m(t))\right), \quad \text{то}$$

начальное множество E_{t_0} состоит из точки $t = t_0$ и из всех значений $t - \tau_i(t)$, которые, при $t \geq t_0$, меньше t_0 ($i = 1, 2, \dots, m$).

В частности, если все τ_i постоянны, то начальным множеством является отрезок $t_0 - \max_{1 \leq i \leq m} \tau_i \leq t \leq t_0$

Рассмотрим основную начальную задачу для простейшего дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (22)$$

где постоянное запаздывание $\tau > 0$, $x(t) = \phi_0(t)$ при $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$

Наиболее естественным методом решения этой задачи является так называемый метод шагов (или метод последовательного интегрирования),

закрывающийся в том, что непрерывное решение $x(t)$ рассматриваемой задачи определяется из дифференциальных уравнений без запаздывания $\dot{x}(t) = f(t, x(t), \phi_0(t - \tau))$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, $x(t_0) = \phi(t_0)$, так как при $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ аргумент $t - \tau$ изменяется на начальном множестве $[t_0 - \tau, t_0]$ и, следовательно, третий аргумент $x(t - \tau)$ функции f равен начальной функции $\phi_0(t - \tau)$. Предполагая существования решения $x = \phi_1(t)$ этой начальной задачи на всем отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$, аналогично получим:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \phi_1(t - \tau))$$

$$\text{при } t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau, \quad x(t_0 + \tau) = \phi_1(t_0 + \tau),$$

.....

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \phi_n(t - \tau))$$

$$\text{при } t_0 + n\tau \leq t \leq t_0 + (n + 1)\tau, \quad x(t_0 + n\tau) = \phi_n(t_0 + n\tau),$$

где $\phi_j(t)$ – решение рассматриваемой начальной задачи на отрезке

$$t_0 + (j - 1)\tau \leq t \leq t_0 + j\tau.$$

Этот метод дает возможность определить решение $x(t)$ на некотором конечном отрезке и одновременно доказывает существование решения в окрестности точки $(t_0, \phi(t_0))$, если функции ϕ и f непрерывны в рассматриваемой области изменения переменных, и его единственность, если функция f удовлетворяет одному из условий, обеспечивающих единственность решения уравнения $\dot{x}(t) = f(t, x(t), \phi_0(t - \tau))$ без отклонений аргумента, например условию Липшица по второму аргументу.

Таким образом, в настоящем разделе рассмотрены основные теоретические положения исследования устойчивости и нахождения решений дифференциальных уравнений указанного класса. В дальнейшем, на основе этого материала разработаны алгоритм и программное обеспечение расчета указанных динамических характеристик

2. Алгоритмы расчета границ областей устойчивости и нахождения решений

2.1. Алгоритм расчета границ областей устойчивости

Рассмотрим исследуемое дифференциальное уравнение в матричном виде:

$$W \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = [A_0]\bar{r}(t) + [A_1][-\bar{r}(t) + \alpha\bar{r}(t - \Delta)], \quad (23)$$

где $\bar{r}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$, $[A_0] = const$, $\Delta = const$, $[A_1(t + \Delta)] = [A_1(t)]$,

W – постоянный параметр.

Согласно теоретическим положениям, описанным в предыдущем разделе, для определения устойчивости необходимо знать корни характеристического уравнения. Введем [4] уравнение, сопряженное (23) в следующем виде:

$$\frac{d\bar{s}(t)}{dt} = [Q(z)]\bar{s}(t), \quad (24)$$

где $[Q(z)] = \frac{1}{W} ([A_0] + [A_1(t)](-1 + \alpha z))$, z – некоторый комплексный параметр, $\bar{s}(t)$ – вектор с комплексными компонентами. Характеристическое уравнение, соответствующее (23), представимо в виде

$$f(z) = \det(z[E] - [\Phi_{t_0}^{t_0+\Delta}(Q(z^{-1}))]), \quad (25)$$

где z – комплексный параметр.

$[\Phi_{t_0}^{t_0+\Delta}(Q(z^{-1}))]$ – фундаментальное матричное решение векторного дифференциального уравнения (24) при значении аргумента, равного Δ .

Для асимптотической устойчивости решений уравнения (23) все корни (25) должны находиться внутри единичного круга на комплексной плоскости. Наличие хотя бы одного корня вне круга свидетельствует о неустойчивости системы дифференциальных уравнений (23). Так как уравнение (25) трансцендентное и имеет бесконечное число корней, то нахождение и рассмотрение на комплексной плоскости всех корней не представляется практически возможным.

Рассмотрим преобразование $\lambda = z^{-1}$.

Пусть $f(z^{-1}) = q(z)$, тогда

$$q(z) = \det(z^{-1}[E] - [\Phi_{t_0}^{t_0+\Delta}(Q(z))])$$

$$q(z) = z^{-n} \det([E] - z[\Phi_{t_0}^{t_0+\Delta}(Q(z))])$$

$$q(z) = z^{-n}h(z),$$

$$\text{где } h(z) = \det([E] - z[\Phi_{t_0}^{t_0+\Delta}(Q(z))]), \quad (26)$$

n – порядок фундаментальной матрицы решений.

Для $z = 0$ имеем $h(0) = 1$, т.е. нули $h(z)$ и $q(z)$ идентичны внутри единичного круга.

Итак, система (23) асимптотически устойчива, если $h(z)$ определенная в (26), не имеет нулей внутри и на границе единичного круга комплексной плоскости.

Для определения наличия нулей $h(z)$ внутри единичного круга применяется метод, состоящий в отображении единичного круга комплексной плоскости Z на плоскость H с помощью преобразования $h(z)$.

Для устойчивости системы (23) при заданных значениях коэффициентов образ кривой на плоскости H не должен содержать внутри себя начало координат (рис. 2, кривая I). В случае неустойчивости системы годограф охватывает начало координат (рис. 2, кривая II).

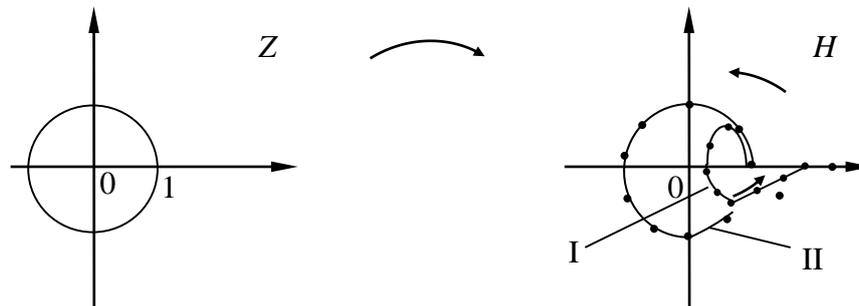


Рис. 2

Таким образом, алгоритм получения годографа составляет следующие шаги:

- 1) выбирается типовая точка $z = e^{i\psi} = \cos \psi + j \sin \psi$ комплексной плоскости Z ;
- 2) определяется величина $-1 + \alpha e^{i\psi} = c + j\alpha$;
- 3) вычисляется фундаментальная матрица решений для значения $t = \Delta$:

$$[\Phi_{t_0}^{t_0+\Delta}(Q(z))] = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 \\ y_2^1 & y_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_3^1 & y_3^2 \\ y_4^1 & y_4^2 \end{pmatrix}, \text{ где } y_l^k \text{ – решения системы}$$

дифференциальных уравнений четвертого порядка, полученной из (23) разделением действительной и мнимой частей. Эта система решается

$$\begin{aligned} & y_{10}^1 = 1 & y_{10}^2 = 0 \\ & y_{20}^1 = 0 & y_{20}^2 = 1 \\ & y_{30}^1 = 0 & y_{30}^2 = 0 \\ & y_{40}^1 = 0 & y_{40}^2 = 0 \end{aligned}$$

дважды при начальных условиях:

- 4) Находится значение:

$$h(z) = \det \left([E] - z \left[\begin{array}{c} \Phi \\ t_0 \end{array} \right]^{t_0 + \Delta} (Q(z)) \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) - (\cos \psi + j \sin \psi) \begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 \\ y_2^1 & y_2^2 \end{pmatrix} + (\sin \psi - j \cos \psi) \begin{pmatrix} y_3^1 & y_3^2 \\ y_4^1 & y_4^2 \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

Для получения точек вспомогательного годографа на комплексной плоскости H необходимо выполнить этапы 1) – 4) алгоритма при различных значениях $\psi \in [0, \pi]$ с некоторым постоянным шагом.

2.2. Алгоритм построения решения (Метод шагов)

В основу алгоритма нахождения решения указанных дифференциальных уравнений положен метод шагов [2, 3].

На первом шаге алгоритма ($x \in (0, \tau)$) в исследуемое уравнение вместо $y(x - \tau)$ подставляется начальная функция $\phi(x)$, которая задается пользователем. Начальные условия определяются так: $y(x_0) = \phi(x_0)$, $y'(x_0) = \phi'(x_0)$. Полученное уравнение решается методом Рунге-Кутты-Мерсона пятого порядка с переменным шагом. В ходе решения заполняется массив значений y_i и x_i .

На следующих шагах каждый раз $y(x_i - \tau)$ отыскивается с помощью интерполяционного полинома, построенного на основе значений y , полученных на предыдущем шаге. Полином строится по трем точкам: $x_k < x_i - \tau$, $x_{k+1} > x_i - \tau$, x_{k+2} , y_k , y_{k+1} , y_{k+2} по формуле Лагранжа $y(x_i - \tau) = \sum_{j=0}^2 y(x_{k+j}) L_{2,j}(x_i - \tau)$ где $L_{n,j}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$

Полученное значение $y(x_i - \tau)$ используется в шаге метода Рунге-Кутты-Мерсона. По завершении работы метода шагов на выходе получаем массив значений y_i, x_i , по которым строится график решения.

2.3. Алгоритм метода Рунге-Кутты-Мерсона

При проведении расчетов точек вспомогательного годографа и нахождения решения дифференциальных уравнений используются численные методы Рунге-Кутты-Мерсона [6].

Метод Рунге-Кутты, в модификации Мерсона в общем виде выглядит следующим образом: требуется интегрировать систему вида

$$\dot{x} = f(t, x)$$

(x является вектором).

Погрешность на шаге интегрирования метода n -ого порядка равна kh^{n+1} , k – некоторая постоянная, h – шаг интегрирования.

Расчетные формулы имеют вид:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2}(k_1 + 4k_4 + k_5) \\
 \delta &= k_1 - \frac{9}{2}k_3 + 4k_4 - \frac{1}{2}k_5 \\
 k_1 &= \frac{1}{3}hf(t_n, x_n) \\
 k_2 &= \frac{1}{3}hf\left(t_n + \frac{1}{3}h, x_n + k_1\right) \\
 k_3 &= \frac{1}{3}hf\left(t_n + \frac{1}{3}h, x_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right) \\
 k_4 &= \frac{1}{3}hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{3}{8}k_1 + \frac{9}{8}k_3\right) \\
 k_5 &= \frac{1}{3}hf\left(t_n + h, x_n + \frac{3}{2}k_1 - \frac{9}{2}k_3 + 6k_4\right)
 \end{aligned}$$

δ – погрешность на шаге.

Критерий изменения шага интегрирования h следующий: если ошибка на шаге δ в пять раз превосходит предписанную погрешность ε , то вычисления снова повторяются от прежней точки с уменьшенным вдвое шагом $h/2$. При выполнении неравенства $\delta < \frac{5}{32}\varepsilon$, интегрирование продолжается от новой точки с удвоенным шагом. Если $\frac{5}{32}\varepsilon \leq \delta \leq 5\varepsilon$, то шаг не меняется.

Рассмотренные выше алгоритмы позволили, с учетом особенностей языков программирования Go и Python, создать достаточно универсальное программное обеспечение, реализующее анализ устойчивости и нахождение решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и запаздыванием.

2.4. Алгоритм автоматического анализа годографа

Анализ положения годографа на комплексной плоскости относительно начала координат (охватывает или не охватывает) может осуществляться пользователем визуально. Необходимо отметить, что в силу специфики рассматриваемой задачи начальная и конечная точка годографа лежат на вещественной оси. Более детально определить положение годографа можно, используя колесо мыши на области графика. Кроме этого, существует автоматический режим анализа положения годографа, алгоритм которого состоит из следующих шагов:

- нумерация точек годографа, в зависимости от того, к какому квадранту комплексной плоскости они принадлежат;
- формирование строки, состоящей из номеров точек по следующей схеме:
 - а) берем первую точку годографа и смотрим к какому квадранту она принадлежит и заносим ее номер в строку S ,
 - б) берем следующую точку, если ее номер совпадает с последним номером в строке, то S не меняется, иначе добавляем номер в конец строки
 - в) выполняем пункт б) до тех пор, пока не просмотрим все точки.

Если полученная строка S содержит подстроку «12341» или «14321» или «23412» или «21432», значит годограф охватывает начало координат.

В ходе тестирования описанного алгоритма возникла проблема: i – я точка попадала, например, в первый квадрант, а $(i + 1)$ -я – в третий, и тогда неясно: отрезок, соединяющий эти точки, находится выше или ниже начала координат (рис.3).

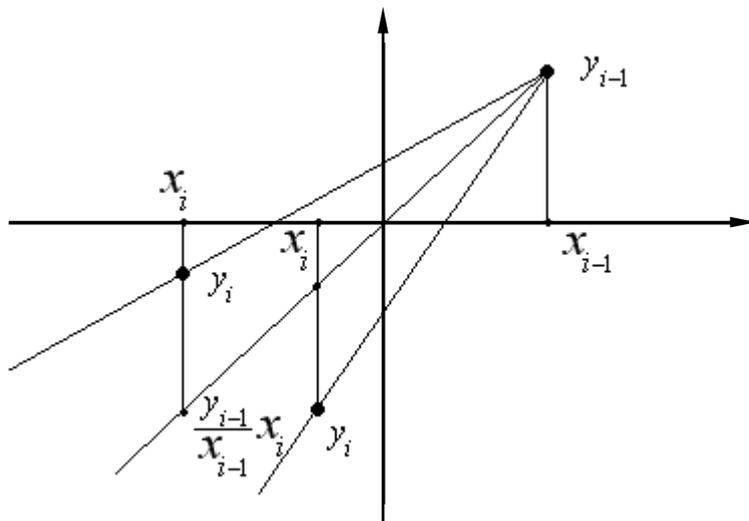


Рис. 3

Эта ситуация была разрешена следующим образом: при добавлении номера точки в строку S вводим дополнительные условия - если предыдущая точка y_{i-1} принадлежит противоположному по диагонали квадранту, то если $y_i < \frac{y_{i-1}}{x_{i-1}} x_i$, то отрезок соединяющий предыдущую и текущую точки лежит ниже начала координат, иначе отрезок лежит выше начала координат

3. Описание комплекса программ и руководство пользователя

Для исследования устойчивости дифференциального уравнения необходимо его сформировать. Для этого, на вкладке «Корректировка данных», нужно заполнить соответствующие параметры (рис. 4).

Рис. 4

После этого перейдите на вкладку «Построение годографа». Здесь можно изменить количество точек годографа, а также номер начальной и конечной точки. Для этого в соответствующие поля введите целые числовые значения. Затем нажмите кнопку «Построить». После необходимых расчетов на экран будет выведено изображение годографа. Заданное уравнение будет устойчиво, если годограф не охватывает начало координат. Чтобы визуально определить - охватывает годограф начало координат или нет, можно воспользоваться следующими средствами: построение части годографа, задавая

соответствующие начальную и конечную точки; или использовать колесо мыши для увеличения годографа в масштабе. Также, можно воспользоваться кнопкой «Автоматический анализ», после нажатия будет выдано сообщение: «система устойчива» или «система неустойчива» (рис. 5).

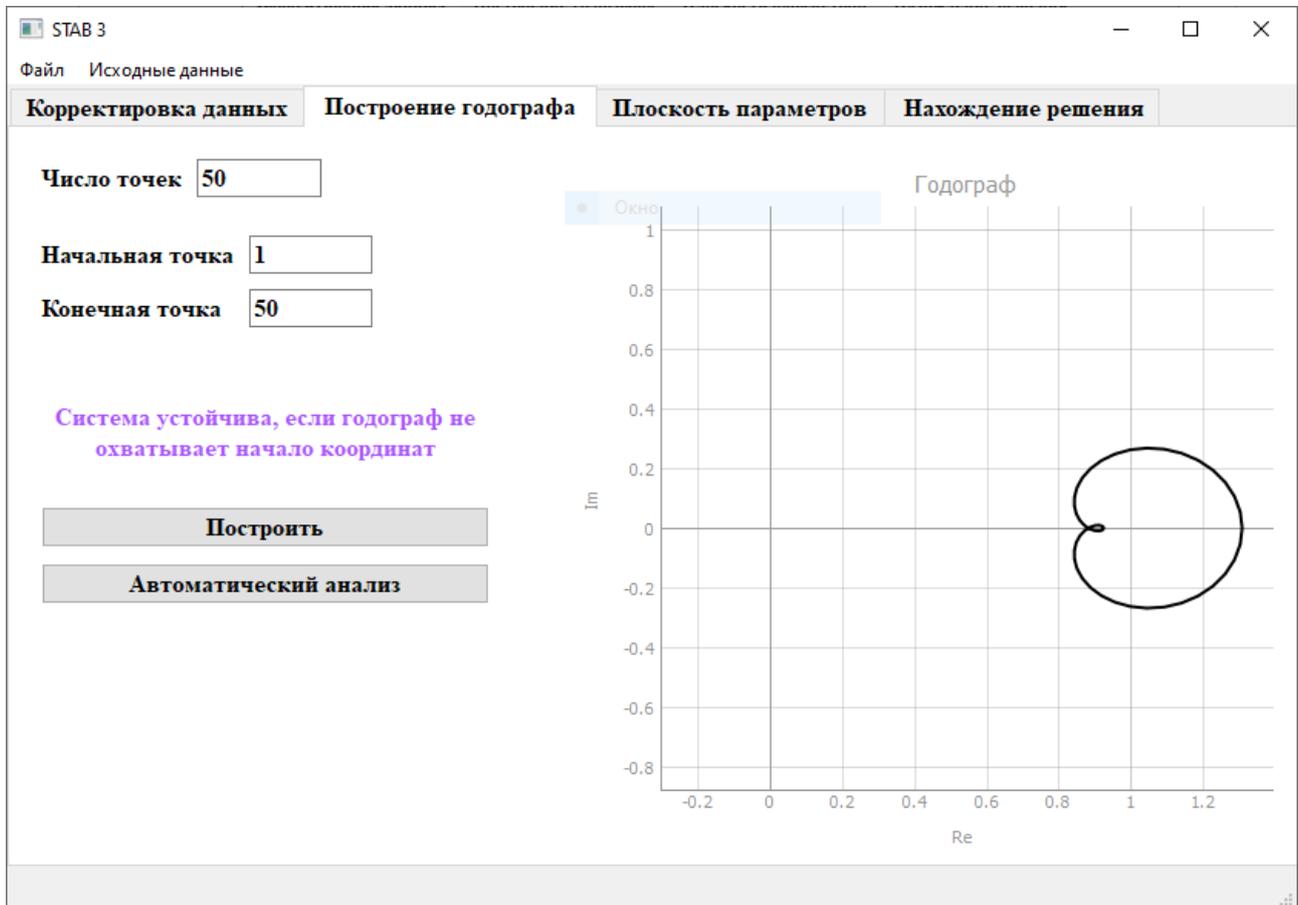


Рис. 5

Для исследования дифференциального уравнения в плоскости параметров надо сначала задать уравнение, затем перейти на вкладку «Плоскость параметров» (рис. 6).

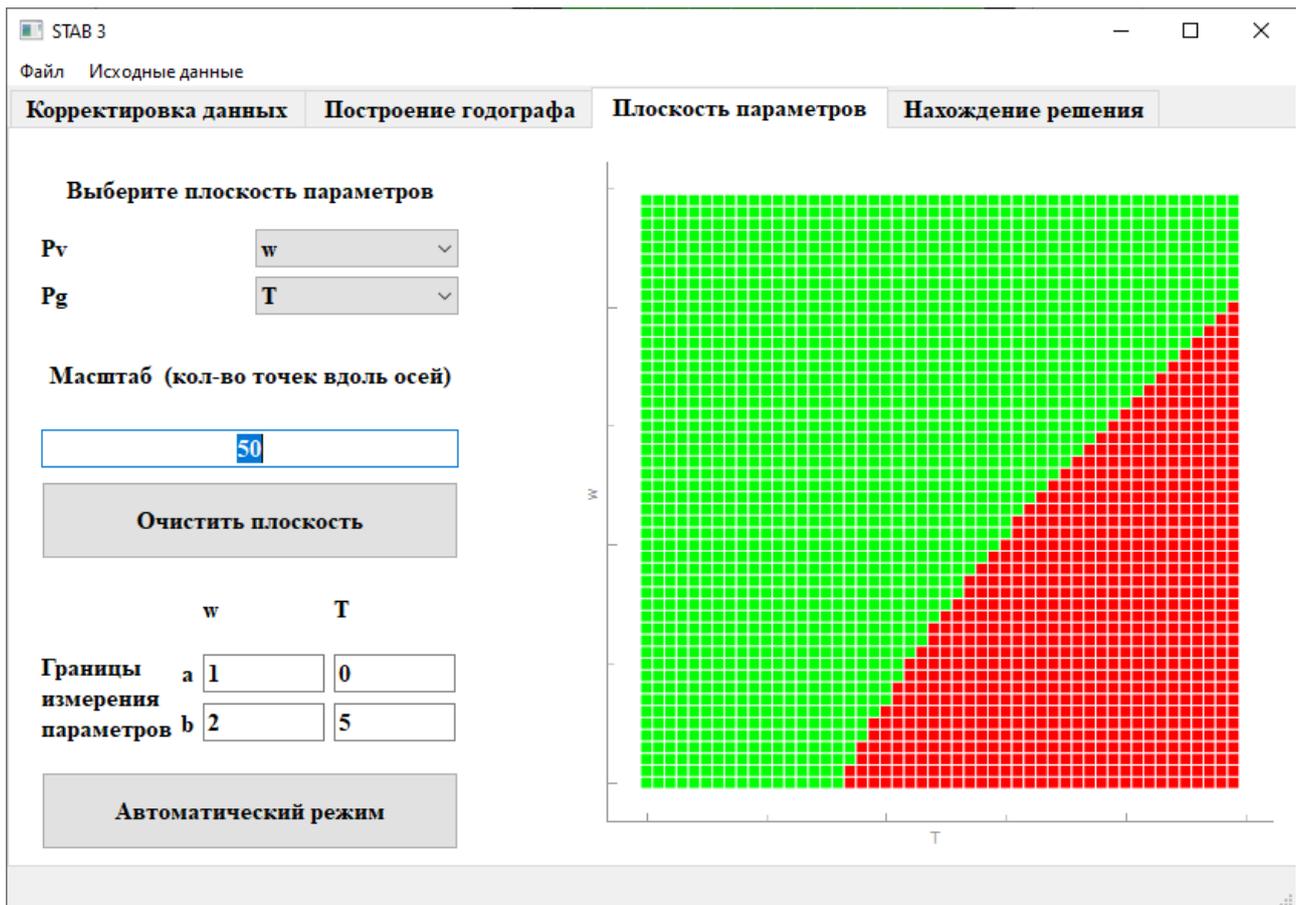


Рис. 6

Здесь надо выбрать параметры Pv (вдоль оси OY) и Pg (вдоль оси OX), а также масштаб, т. е. кол-во точек по обеим осям. Чем больше масштаб, тем точнее будет график. Далее надо задать границы изменения параметров. Теперь нужно нажать кнопку «Автоматический режим», в котором будет происходить расчет устойчивости в выбранной плоскости параметров. Через некоторое время плоскость будет заполнена зелеными и красными квадратиками: устойчивой и неустойчивой областями, соответственно. Задание большого числа точек разбиения по осям координат требует большого времени счета и оправдано, если у вас достаточно мощный процессор.

Для построения графика численного решения необходимо задать исследуемое уравнение, для чего заполнить необходимые параметры на вкладке «Корректировка данных», затем перейти на вкладку «Нахождение решения» и задать вид начальной функции, задать число шагов интегрирования. Величина запаздывания будет $\tau = xk - xh$. Теперь нажав на кнопку «Построить график» вы увидите график численного решения (рис. 7).

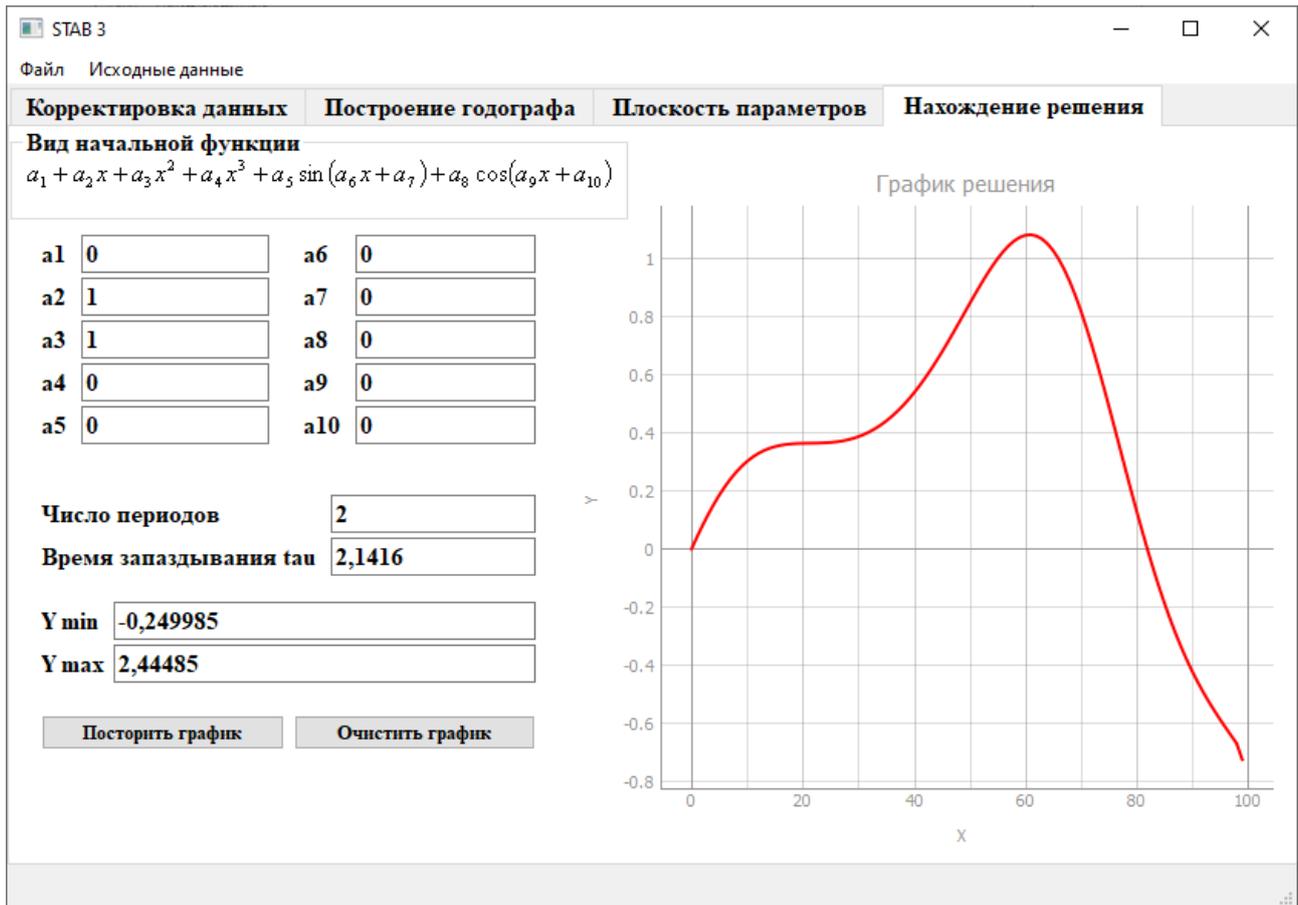


Рис. 7

После проведенных расчетов можно сохранить расчетный лист, т.е. вид дифференциального уравнения, в формате JSON. Для этого в меню "Файл" надо выбрать пункт «Сохранить как...», далее, в открывшемся диалоговом окне ввести имя файла и нажать кнопку "Сохранить" (рис. 8).

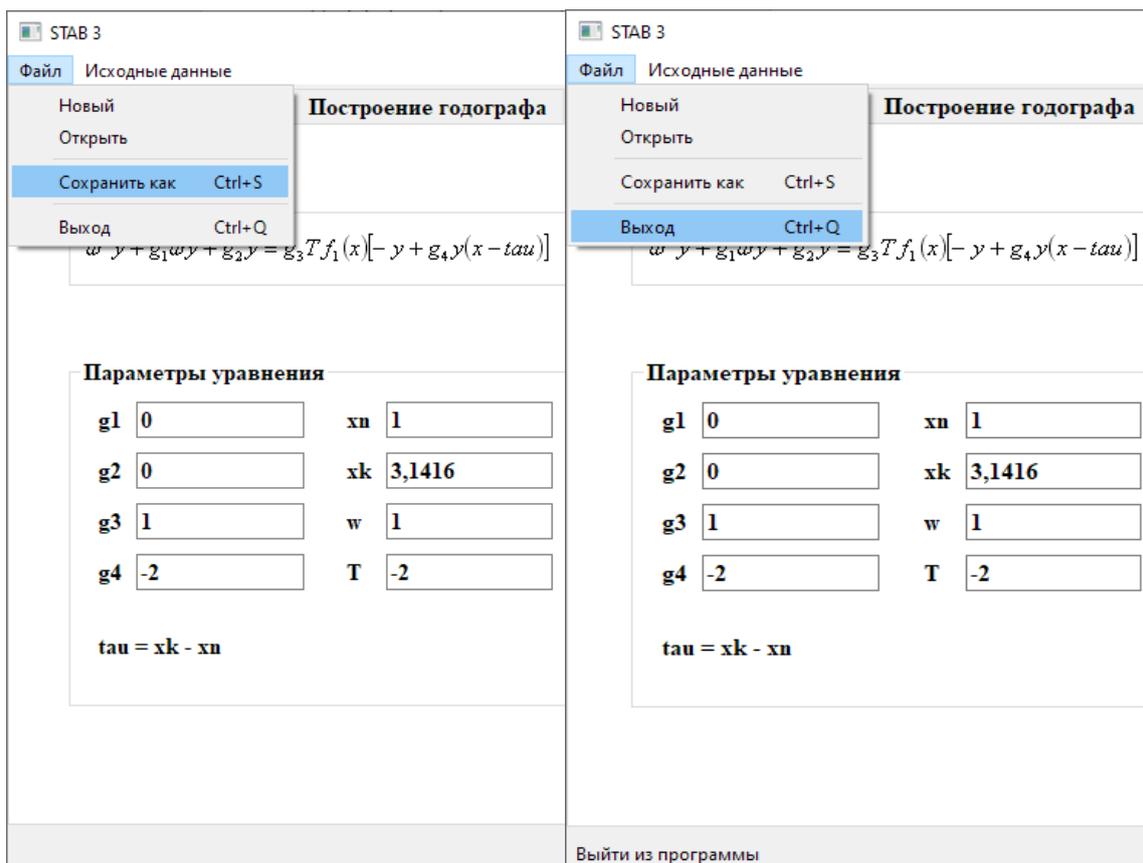


Рис. 8

Рис. 9

Завершение работы осуществляется при выполнении команды «Выход» в меню «Файл» (рис.9)

4. Примеры использования комплекса программ для исследования конкретных динамических систем

Примеры динамических колебательных систем, описываемых уравнениями типа Матье-Хилла, а также уравнения с запаздыванием приведены в работах И.И. Вульфсона, В.Л. Бидермана, П.Л. Капицы, Я.Г. Пановко, Ю.И. Городецкого и других исследователей.

Рассмотренные в научной литературе примеры механических систем показывают, что во многих случаях их математическая модель представляется в виде системы дифференциальных уравнений с переменными периодическими коэффициентами и запаздыванием. Исследование устойчивости динамических систем с переменными коэффициентами впервые проводилось Эмилем Матье и Джоном Хиллом. Один из способов нахождения границ областей устойчивости основан на использовании диаграммы Айнса-Стретта. Однако не все динамические системы могут быть описаны уравнением типа Матье-Хилла. Кроме того, даже если удалось описать динамическую систему уравнением Матье-Хилла, то провести анализ конструктивных параметров системы: масс, длин, диаметров, амплитуд колебаний и других довольно-таки затруднительно. Связано это с тем, что параметры в записи указанного уравнения представляют собой некоторое обобщение конструктивных параметров системы. Особую важность представляет собой задача исследования влияния характеристик трения на изменение границ областей устойчивости параметрических колебаний.

Разработанное выше программное обеспечение позволяет успешно решать задачи нахождения решений и расчета границ областей устойчивости в пространстве различных конструктивных параметров системы.

Пример 1. Уравнение Матье-Хилла с трением

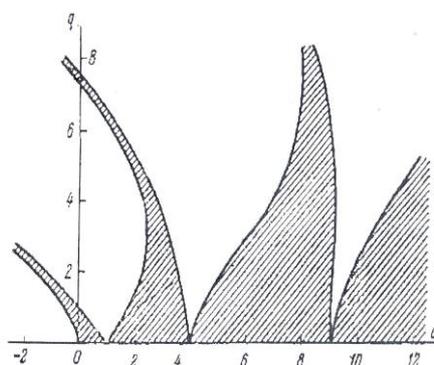


Рис. 10

Пример 2. Маятник с колеблющейся точкой подвеса.

Рассмотрим [8] маятник с колеблющейся точкой подвеса (рис.11).

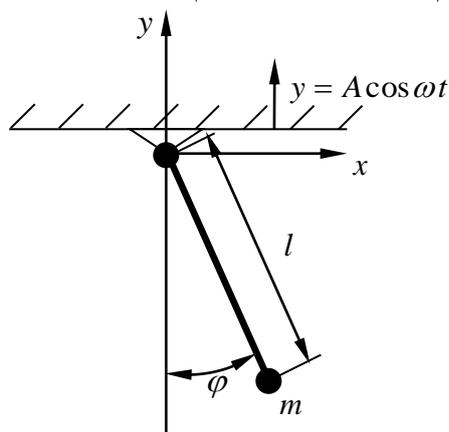


Рис.11

Если точка подвеса неподвижна, создающей момент относительно точки подвеса, является вес груза mg и уравнение малых колебаний маятника в этом случае имеет вид $-mgl\phi = ml^2 \frac{d^2\phi}{dt^2}$. Если же точка подвеса колеблется вдоль оси y по закону $y = A \cos \omega t$, то при составлении уравнения моментов нужно учесть переносную силу инерции $-m\ddot{y} = mA\omega^2 \cos \omega t$; ее момент равен $mA\omega^2 l\phi \cos \omega t$, и уравнение колебаний маятника запишется в виде:

$-mgl\phi + mA\omega^2 l\phi \cos \omega t = ml^2 \frac{d^2\phi}{dt^2}$ или $\frac{d^2\phi}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} - \frac{A\omega^2}{l} \cos \omega t\right) \phi = 0$. Делая замену $\omega t = 2t'$, $a = \frac{4g}{\omega^2 l}$, $q = \frac{2A}{l}$ получим уравнение Матье-Хилла

$$\frac{d^2\phi(t')}{dt} + (a - 2q \cos 2t')\phi(t') = 0 \quad (27)$$

Из научной литературы известны диаграммы устойчивости (так называемые диаграммы Айнса-Стретта), построенные для уравнения Матье-Хилла в плоскости параметров (a, q) .

Для формирования уравнения Матье-Хилла на вкладке «Корректировка данных» задаем параметры $g_1 = 0$, $g_3 = -2$, $g_4 = 0$, $w = 1$ и функцию $f_1(x) = \cos 2x$.

Результаты расчетов в плоскости параметров (g_2, T) (эквивалентных параметрам (a, q) уравнения Матье-Хилла) приведены на рис. 12.

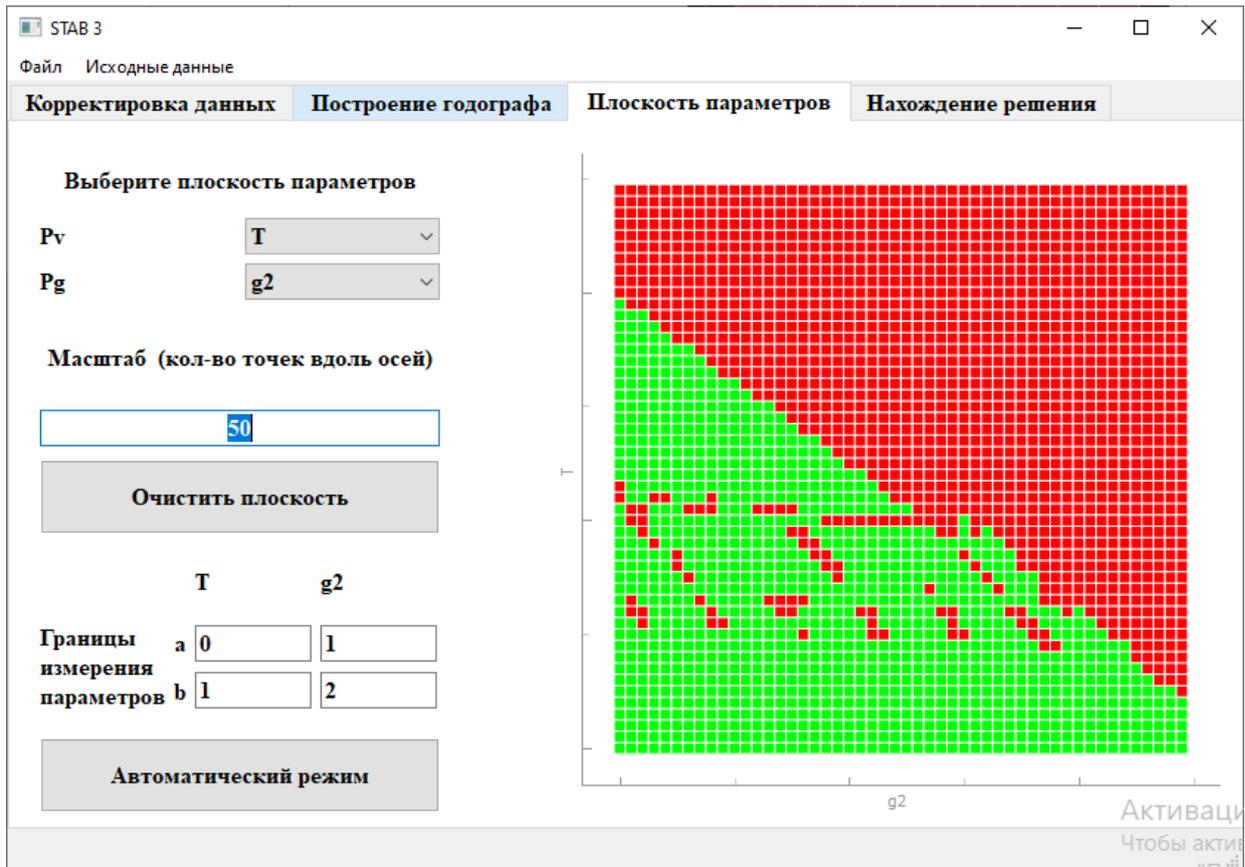


Рис.12

Эти области устойчивости совпадают с диаграммой Айнса-Стретта.

Пример 3. Колебания массы на упругом стержне с дополнительной опорой в виде втулки

Рассмотрим математическую модель, описывающую колебания системы, состоящей из груза, закрепленного на конце невесомого стержня, который шарнирно закреплен на верхнем конце (рис.13).

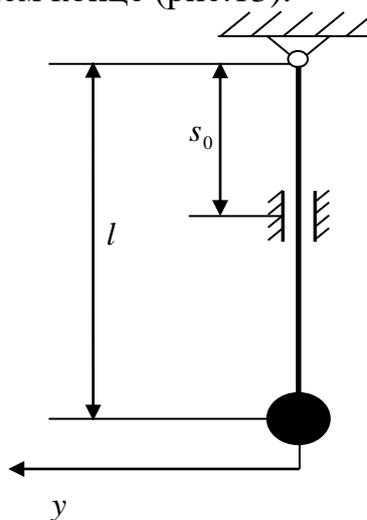


Рис.13

Эта система может совершать колебания в плоскости чертежа; при этом груз будет двигаться вдоль оси, а стержень – изгибаться по схеме двухопорной балки с консолью. Рассмотрим свободные колебания, которые вызваны некоторым начальным возмущением равновесного состояния. Пренебрегая восстанавливающим действием силы тяжести, то есть считая, что восстанавливающей силой является только сила упругости стержня, можно записать дифференциальное уравнение: $m \frac{d^2 y}{dt^2} + cy = 0$, где m – масса груза,

c – коэффициент жесткости стержня. Втулка, если она достаточно короткая, создает условия, близкие к условиям шарнирного опирания стержня, соответственно коэффициент жесткости c можно определить по известной формуле сопротивления материалов: $c = \frac{3EJ}{l(l-s)^2}$. Здесь предполагается, что стержень имеет постоянное поперечное сечение с моментом инерции J ; через E обозначен модуль упругости материала стержня.

Таким образом, дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{3EJ}{ml(l-s)^2} y = 0 \quad (28)$$

Если расстояние s постоянно, то дифференциальное уравнение (28) описывает свободные колебания массы около ее среднего положения, причем дробь $\frac{3EJ}{ml(l-s)^2}$ представляет собой квадрат частоты свободных колебаний. Допустим теперь, что втулка скользит вдоль стержня, следуя заданному закону $s = s_0 - A \cos \omega t$, т.е. совершает гармонические колебания с амплитудой A и круговой частотой ω ; здесь s_0 – среднее расстояние от втулки до верхнего шарнира. В этом случае коэффициент жесткости оказывается функцией времени: $c(t) = \frac{3EJ}{l(l-s_0 + A \cos \omega t)^2}$ и уравнение становится уравнением с переменными коэффициентами:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{3EJ}{ml(l-s_0 + A \cos \omega t)^2} y = 0 \quad (29)$$

Уравнение (29), описывающее колебания динамической системы (рис. 13) не является уравнением типа Матье-Хилла. В данном случае функция жесткости $c(t)$ является периодической функцией периода $\frac{2\pi}{\omega}$. Далее сделаем переход от дифференциального уравнения с переменной жесткостью $c(t)$ к уравнению Матье-Хилла.

Пример 4. Колебания невесомого жесткого стержня с массой на конце

Для иллюстрации достаточно общих закономерностей рассмотрим в несколько упрощенной форме возбуждение параметрического резонанса на модели (рис.14, а), состоящей из невесомого жесткого стержня с массой на конце, опирающейся на упруго диссипативный элемент [9]. Другой конец стержня шарнирно соединен с основанием, которое перемещается в горизонтальном направлении по периодическому закону $x_0(t)$ с периодом τ . Рассмотрим малые колебания стержня в системе координат, жестко связанной с основанием. Тогда к массе приложена сила инерции $F = -m\ddot{x}_0$. Закон движения основания $x_0(t)$ может быть выбран таким образом, чтобы при свободных колебаниях стержня сила инерции F оказывала бы раскачивающее воздействие [9].

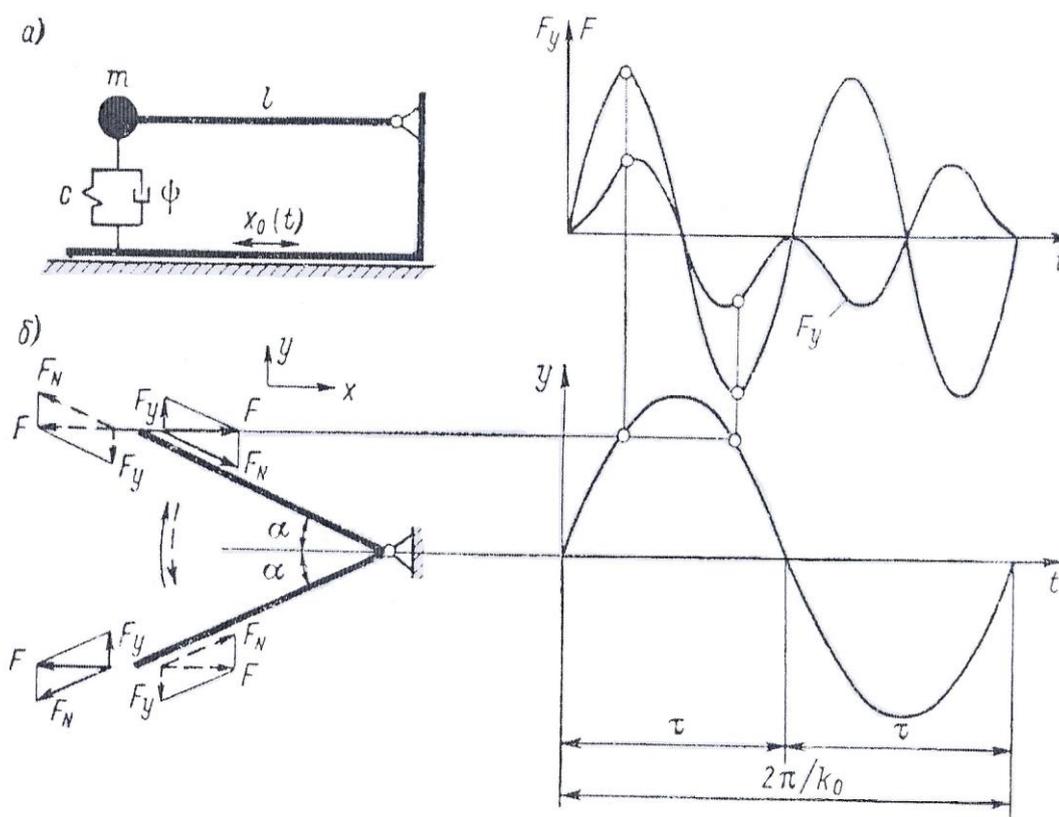


Рис. 14

Пусть $y = A \sin k_0 t$, а сила F отвечает, например, графику, показанному на рис.14,б, что соответствует $x_0 = x_0^* \sin w t$ при $w = 2k_0$, где $k_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$. После разложения силы F на составляющие F_y и F_n (рис. 14, б) легко убедиться в том, что сила F_y на всех фазах колебаний массы m имеет общее направление со скоростью колебаний, т.е. стремится увеличить амплитуду колебаний. Поскольку $F_y = Ftg\alpha \approx F \frac{y}{l}$, дифференциальное уравнение может быть записано следующим образом

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = F \frac{y}{l}, \quad (30)$$

или

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k_0^2[1 - \varepsilon_0(t)]y = 0 \quad (31)$$

где $n = \frac{b}{2m}$; $k_0^2 = \frac{c}{m}$; $\varepsilon_0(t) = \frac{F}{cl}$; $F(t) = -m\ddot{x}_0 = mx_0^*w^2 \sin w t$.

Уравнение (31) при периодической функции $\varepsilon_0(t)$ носит название *уравнения Хилла*.

Общий вид уравнения (31), согласно [9], запишется как:

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0 \quad (32)$$

где

$$a(t) = 2n;$$

$$b(t) = k_0^2[1 - \varepsilon_0(t)];$$

$$b(t) \in C^1(-\infty, +\infty);$$

$$b\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = b(t).$$

Общеизвестно, что нарушение условий динамической устойчивости для рассмотренной выше модели возможно при определенном соотношении между частотой собственных колебаний (k_0) и частотой параметрического возмущения (w) [1].

Это соотношение имеет вид: $w = \frac{2k_0}{i}$, где i – целое число. С учетом этого факта был проведен вычислительный эксперимент на персональном компьютере.

Пример 5. Параметрические колебания в системах с запаздыванием: резание металлов.

Рассмотрим [1] пример процесса фрезерования (обработки металлов резанием инструментом, имеющим несколько режущих зубьев – фрезой), который соответствует системе, конструкция которой имеет лишь одну форму колебаний и состоит из обрабатываемой детали и подвеса (рис. 15).

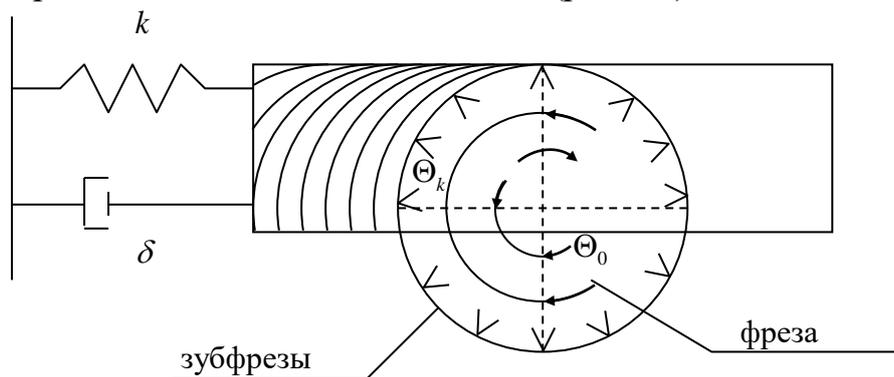


Рис.15

В результате вращения фрезы каждый ее зуб снимает с детали определенную часть металла. За первым зубом идет второй зуб и так далее. В результате возникает некоторая периодическая сила, действующая на деталь спустя промежуток времени (запаздывание), равный времени поворота зуба на угол

$\Delta = 2\pi/z$, где z – число всех зубьев фрезы (в рассматриваемом примере их десять).

Математическая модель системы имеет вид:

$$\Omega^2 \frac{d^2x(\theta)}{d\theta^2} + 2\delta\omega\Omega \frac{dx(\theta)}{d\theta} + \omega^2 x(\theta) = \frac{\omega^2}{k} k^c f(\theta)[-x(\theta) + \alpha x(\theta - \Delta)] \quad (33),$$

где θ – угол поворота зуба фрезы, рад,

Ω – скорость вращения фрезы, рад/с,

δ – коэффициент затухания, б/р,

ω – собственная круговая частота колебаний системы, рад/с,

k – статическая жесткость конструкции, Н/м,

k^c – жесткость резания системы «инструмент - обрабатываемая деталь» Н/м,

$f(\theta)$ – периодическая функция, определяющая сумму сил резания по всем зубьям, б/р.

Для случая, приведенного на рис.15, функция $f(\theta)$ имеет вид

$f(\theta) = \sin \theta \sin(\theta + 1.05) + \sin(\theta + 0.63) \sin(\theta + 1.68)$ и задается на интервале от θ_0 до θ_k .

На рис. 16-18 приведены границы областей устойчивости в плоскости параметров (W, T) , соответствующих параметрам (Ω, k^c) уравнения (33).

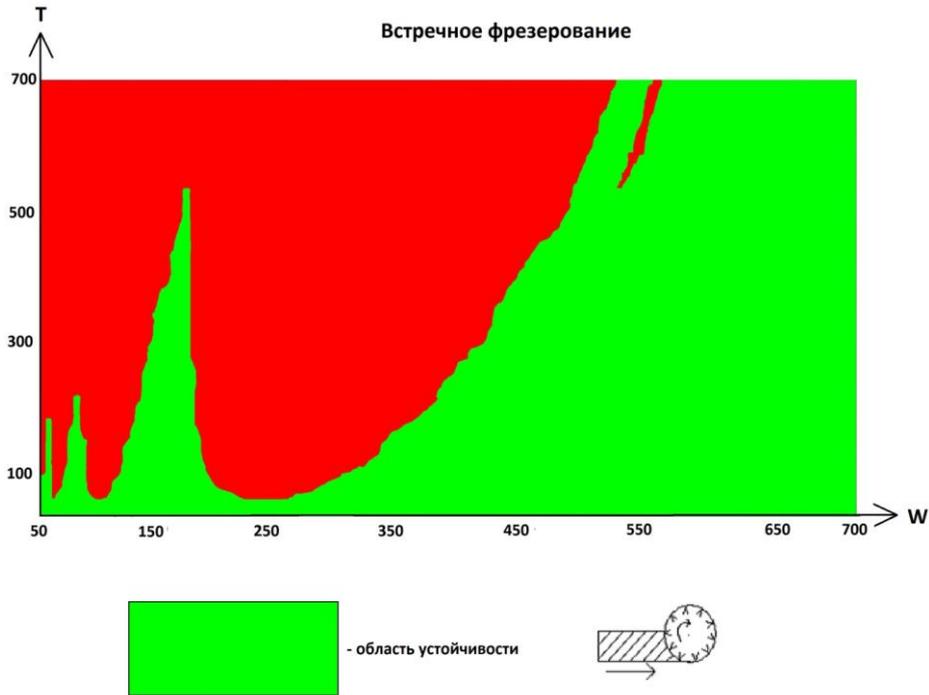


Рис. 16

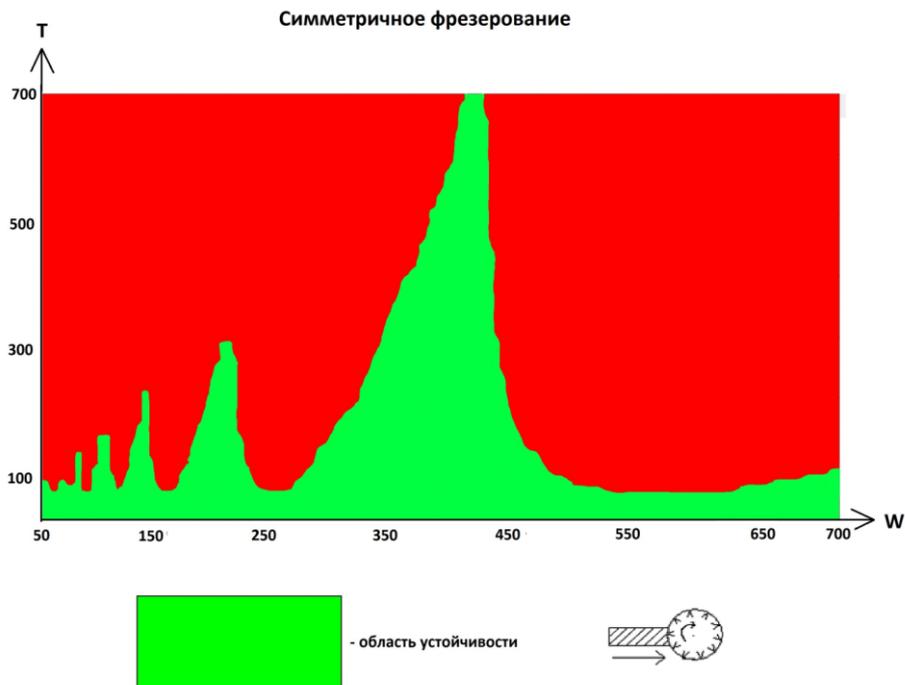


Рис. 17

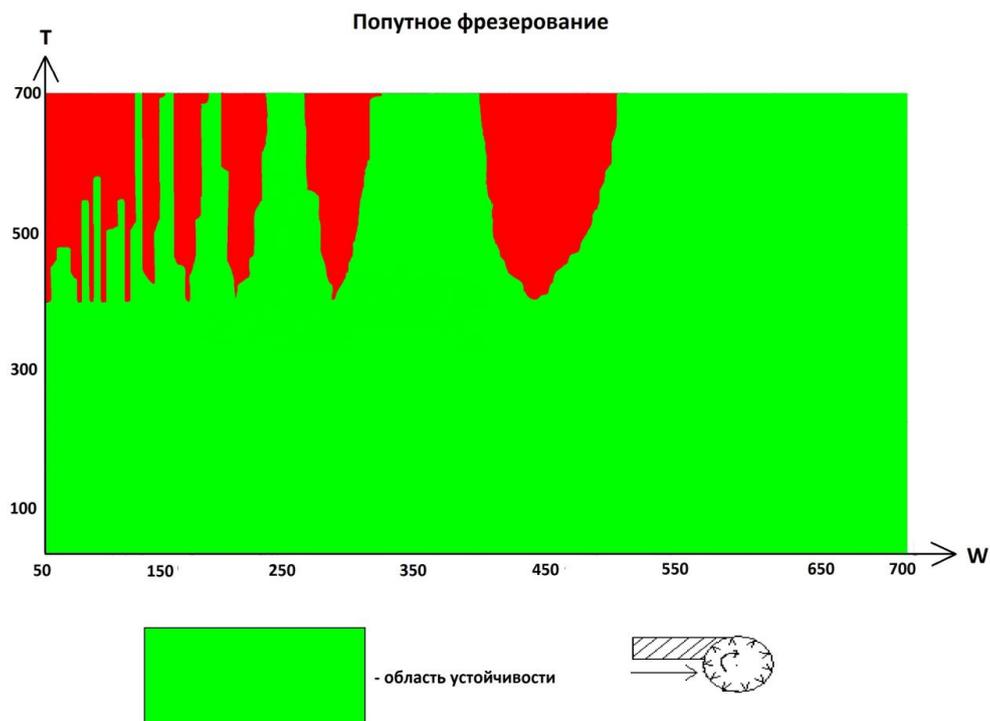


Рис. 18

Приведены три случая (три схемы металлообработки): так называемое «встречное» (рис. 16), «симметричное» (рис. 17) и «попутное» (рис. 18) фрезерование. Протоколы вычислительного эксперимента для этих трех случаев приведены в Приложении 1. Различие входных параметров для этих случаев состоит в задании разных значений углов θ_0 и θ_k .

Из анализа областей устойчивости для рассмотренных случаев (рис. 16-18) следует немаловажный для практики резания металлов факт, что при «попутном» фрезеровании область устойчивости (где не возникают вибрации в процессе обработки резанием) наибольшая. Граница области устойчивости имеет сложный нелинейный вид.

Протоколы проведенного вычислительного эксперимента приведены в Приложении.

Список литературы

1. Городецкий Ю.И., Стребуляев С.Н. Параметрическое возбуждение колебаний в линейных системах с запаздыванием: Методические указания по выполнению лабораторной работы. – Н. Новгород: ННГУ, 1991. – 49 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1964. – 128 с.
3. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – Л.: ГИТТЛ, 1951. – 254 с.
4. Hahn W. On difference – differential equation with periodic coefficients, – J. of Mathematical Analysis and Applications – v. 3, 1967. – p.70 - 101.
5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
6. Айзерман М.А. Теория автоматического регулирования. – М.: Наука, 1966. – 452 с.
7. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, Т.2. – М.: Наука, 1966. – 620 с.
8. Сридхар Р., Хон. Р., Лонг Д. «К вопросу об автоколебаниях металлорежущих станков» – Конструирование и технология машиностроения: Пер. с англ. М.: Мир 1968 - №2 – с. 102 – 120.
9. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. – М.: Машиностроение, 1967. – 321 с.
10. Вульфсон И.И. Динамические расчеты цикловых механизмов. – Л.: Машиностроение (Ленингр. Отд-ние), 1976 – 328 с.

Приложение А

Протоколы вычислительного эксперимента для трех различных видов фрезерования:

1. «Встречное фрезерование»:

вид функции: $f(\theta) = 0.501 + 0.496 \cdot \cos(2 \cdot \theta + 2.092)$

плоскость параметров: (T, w)

параметры уравнения:

$$g_1 = 2\delta\omega = 282.73$$

$$g_2 = \omega^2 = 11492000$$

$$g_3 = \omega^2/k = 16186$$

$$g_4 = \alpha = 1$$

$$x_k = 2.1$$

$$x_n = 1.8$$

$$\Delta = x_k - x_n = 1.31$$

параметры функции:

$$c_1 = 0.501$$

$$c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$$

$$c_7 = 0.496$$

$$c_8 = 2$$

$$c_9 = 3.092$$

2. «Симметричное фрезерование»

плоскость параметров: (T,w)

параметры уравнения:

$$\begin{aligned}g_1 &= 2\delta\omega = 282.73 \\g_2 &= \omega^2 = 11492000 \\g_3 &= \omega^2/k = 16186 \\g_4 &= \alpha = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_H &= 1.15 \\x_K &= 1.887 \\ \Delta &= x_K - x_H = 0.737\end{aligned}$$

параметры функции:

$$\begin{aligned}c_1 &= 0.501 \\c_2 &= c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0 \\c_7 &= 0.496 \\c_8 &= 2 \\c_9 &= 2.092\end{aligned}$$

вид функции: $f(\theta) = 0.501 + 0.496 \cdot \cos(2 \cdot \theta + 2.092)$

3. «Попутное фрезерование»

плоскость параметров: (T,w)

параметры уравнения:

$$\begin{aligned}g_1 &= 2\delta\omega = 282.73 \\g_2 &= \omega^2 = 11492000 \\g_3 &= \omega^2/k = 16186 \\g_4 &= \alpha = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_H &= 1.8816 \\x_K &= 3.1416 \\ \Delta &= x_K - x_H = 1.26\end{aligned}$$

параметры функции:

$$\begin{aligned}c_1 &= 0.501 \\c_2 &= c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0 \\c_7 &= 0.496 \\c_8 &= 2 \\c_9 &= 2.092\end{aligned}$$

вид функции: $f(\theta) = 0.501 + 0.496 \cdot \cos(2 \cdot \theta + 2.092)$

Сергей Николаевич Стребуляев
Дмитрий Владимирович Воробьев

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.