МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет**

**Д.С. Малышев
Д.Б. Мокеев**

ЭЛЕМЕНТЫ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЛОГИК И МОДЕЛЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика» и
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные
технологии»

Нижний Новгород
2015

УДК 510.64
ББК В22.12
М-20

М-20 Малышев Д.С., Мокеев Д.Б. ЭЛЕМЕНТЫ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЛОГИК И МОДЕЛЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЙ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 33 с.

Рецензент: д. т. н., проф. **В. Е. Турлапов**

В настоящем учебно-методическом пособии представлен необходимый теоретический материал для решения ряда задач из различных разделов неклассических логик. Для самостоятельной работы студентов в него включено множество заданий разных типов и уровня сложности.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов-бакалавров, обучающихся по направлениям подготовки «прикладная математика и информатика» и «фундаментальная информатика и информационные технологии». Рекомендуется при изучении дисциплины «математическая логика и теория алгоритмов».

УДК 510.64
ББК В22.12

Оглавление

1. Модель Крипке для интуиционистской логики высказываний

Одной из моделей пропозиционального языка L (т.е. языка высказываний) интуиционистской логики со множеством связок $\{\vee, \wedge, \to, \neg\}$ является модель Крипке. Разумеется, для интуиционистского случая смысл операций $\vee, \wedge, \to, \neg$ отличен от классического. Для того, чтобы понять смысл модели, обратимся к следующему содержательному примеру. Имеется совокупность моментов времени, каждый из которых характеризуется состоянием знаний. Когда мы находимся в моменте времени x, то можем сказать, какие знания сейчас известны. Вместе с тем, естественно предполагать, что на следующем моменте времени y все знания, известные для x, остаются таковыми и для y. Однако, если какой-то результат не доказан (не известен) для x, то его нельзя воспринимать как ложный, поскольку его могут доказать на следующих моментах времени. Поэтому «временная шкала», вообще говоря, не является линейно упорядоченным множеством, ибо в будущем развитие знаний может пойти разными путями.

Интуиционистским фреймом (шкалой) Крипке называется пара $F = (W, R)$, где R — частичный порядок на непустом множестве W. Элементы множества W называются **точками** в фрейме F, xRy читается как «y **доступен** из x» или «x **видит** y».

Подмножество $A \subseteq W$ называется **замкнутым сверху**, если для любых $x \in A$ и $y \in W$ выполняется импликация $xRy \to y \in A$.

Пример 1.1. Пусть $W = \{A, B, C, D, E, F\}$, $R = \big\{(A, A),\ (A, B),\ (A, C),\ (A, D),\ (A, E),\ (B, B),\ (B, C),\ (B, D),\ (C, C),\ (C, D),\ (D, D),\ (E, E),\ (F, E),\ (F, F)\big\}$.
Диаграмма Хассе для заданного порядка изображена на рисунке 1.

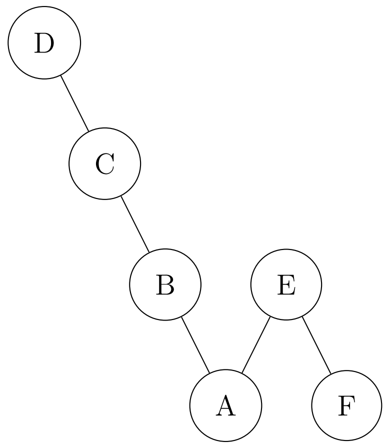

рис. 1

Замкнутыми множествами здесь являются, например, множества $X_1 = \{C, D, E\}$ и $X_2 = \{F, E\}$. Множество $X_3 = \{A, E\}$ не является замкнутым, так как, например, D является потомком A, но не входит в X_3. Его замыканием является множество $\{A, B, C, D, E\}$

Означиванием языка L во фрейме F называется отображение D, которое любой атомарной переменной p языка L сопоставляет некоторое замкнутое сверху подмножество (возможно, пустое) $D(p) \subseteq W$.

Интуиционистская модель Крипке языка L — пара $M = (F, D)$, где F — фрейм Крипке, а D — означивание L.

Имея в виду интерпретацию точек на фрейме как стадий накопления информации, естественным образом положить, что некоторое атомарное предложение p истинно на x в M, если $x \in D(p)$. Иными словами, $D(p)$ — множество точек истинности p в модели M. В общем виде, индукцией по построению формулы $\varphi \in L$ определяется отношение $(M, x) \vDash \varphi$, которое читается «φ истинно на x в M»:

1. $(M, x) \vDash p$, если $x \in D(p)$,

2. $(M, x) \vDash \varphi \wedge \psi$, если $(M, x) \vDash \varphi$ и $(M, x) \vDash \psi$,

3. $(M,x) \vDash \varphi \vee \psi$, если $(M,x) \vDash \varphi$ или $(M,x) \vDash \psi$,

4. $(M,x) \vDash \varphi \to \psi$, если для всех $y \in W$, видимых из x, имеет место импликация $\big((M,y) \vDash \varphi\big) \to \big((M,y) \vDash \psi\big)$,

5. $(M,x) \nvDash \perp$, где $\perp$ — тождественно ложная формула, для которой $D(\perp)$ полагается равным $\emptyset$.

Будем обозначать множество точек истинности некоторой формулы так же, как означивание переменных, то есть для некоторой формулы φ $D(\varphi) = \{x : (M,x) \vDash \varphi\}$

Формула $\neg\varphi$ по определению полагается равной формуле $\varphi \to \perp$.

Формула φ называется **выполнимой в модели** M, если для некоторой точки x на фрейме имеет место отношение $(M,x) \vDash \varphi$. Формула называется **общезначимой в модели** M, если указанное отношение имеет место для любой точки на фрейме.

Формула называется **выполнимой на фрейме** F, если она выполнима для некоторой модели, основанной на данном фрейме.

Формула φ называется **истинной в точке** x фрейма F, если отношение $(M,x) \vDash \varphi$ имеет место для любой модели M, основанной на F.

Формула называется **общезначимой на фрейме** F, если она выполнима в любой модели, основанной на данном фрейме.

Две формулы называются **равносильными в модели**, если множества их точек истинности совпадают.

Две формулы называются **равносильными на фрейме**, если множества их точек истинности совпадают в любой модели, основанной на этом фрейме.

Пример 1.2. На фрейме, определённом в примере 1.1, рассмотрим интуиционистскую модель $M = \big((W,R),D\big)$, где D – означивание языка, заданное для переменных p_1, p_2, p_3 соотношениями:

$$D\left(p_1\right) = \{C, D, E\}, D\left(p_2\right) = \{F, E\}, D\left(p_3\right) = \{B, C, D, E\}.$$

Пусть $\varphi_1 = p_1 \wedge p_2$, $\varphi_2 = p_3 \to p_1$, $\varphi_3 = \neg p_2$, $\varphi_4 = \neg p_3$, $\varphi_5 = \neg\neg p_3$, тогда данные предложения будут истинны в следующих точках данной модели:

$D\left(\varphi_1\right) = D\left(p_1\right) \cap D\left(p_2\right) = \{E\}$

$D\left(\varphi_2\right) = \Big\{x \in W : \forall y \in W\big[xRy \ \& \ [(M,y) \vDash p_3] \to [(M,y) \vDash p_1]\big]\Big\} = \{C, D, E, F\}$

$D\left(\varphi_3\right) = \Big\{x \in W: \ \forall y \in W \ \big[\, xRy \ \& \ [(M,y) \nvDash p_2]\big]\Big\} = \{B, C, D\}$

$D\left(\varphi_4\right) = \Big\{x \in W: \ \forall y \in W \ \big[\, xRy \ \& \ [(M,y) \nvDash p_3]\big]\Big\} = \emptyset$

$D\left(\varphi_5\right) = \Big\{x \in W: \ \forall y \in W \ \big[\, xRy \ \& \ [(M,y) \nvDash \varphi_4]\big]\Big\} = W$

Таким образом, в данной модели формулы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_5$ выполнимы, формула φ_4 невыполнима, а формула φ_5 является общезначимой.

ЗАДАЧИ

1.1. Для заданного частичного порядка (W,R) изобразить диаграмму непосредственных предшествований (диаграмму Хассе), найти несколько множеств, являющихся замкнутыми сверху:

(a) $W = \{A, B, C\}$,
$R = \big\{(A,A),(A,B),(A,C),(B,B),(B,C),(C,C)\big\}$.

(b) $W = \{A, B, C, D, E\}$,
$R = \big\{(A,A),(A,C),(A,D),(A,E),(B,B),(C,C),(D,D),(E,E)\big\}$.

(c) $W = \{A, B, C, D, E\}$,
$R = \big\{(A,A),(A,E),(B,B),(B,E),(C,C),(C,A),(C,E),(D,D),(D,E),(E,E)\big\}$.

(d) $W = \{A, B, C, D, E\}$,
$R = \big\{(A,A),(A,C),(A,D),(A,E),(B,B),(B,C),(B,D),(C,C),(D,D),(E,E)\big\}$.

(e) $W = \{A, B, C, D, E, F\}$,
$R = \big\{(A,A),(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(B,B),(B,C),(B,D),(C,C),(D,D),(E,E),(F,E),(F,F)\big\}$.

(f) $W = \{A, B, C, D, E, F, G\}$,
$R = \{(A, A), (A, C), (A, E), (B, B), (B, C), (B, D), (B, G), (C, C),$
$(D, D), (D, G), (E, E), (F, E), (F, F), (G, G)\}$.

(g) $W = \{A, B, C, D, E, F, G\}$,
$R = \{(A, A), (A, E), (B, B), (B, C), (B, D), (B, E), (B, G), (C, C),$
$(C, G), (D, D), (D, E), (E, E), (F, A), (F, E), (F, F), (F, G), (G, G)\}$.

1.2. Для заданного частичного порядка $(\{A, B, C, E, G, H, K, N,\ Q, S\},$ $\{(A, A), (A, B), (A, C), (A, E), (A, G), (A, N), (B, B), (B, E), (B, G),$ $(C, C), (C, N), (E, E), (E, G), (G, G), (H, E), (H, H), (H, K), (K, E),$ $(K, K), (N, N), (Q, N), (Q, Q), (Q, S), (S, S)\})$ изобразить диаграмму непосредственных предшествований (диаграмму Хассе). Являются ли заданные множества замкнутыми сверху?

(a) $\{N\}$
(b) $\{A, S\}$
(c) $\{A, B, C\}$
(d) $\{E, G, K\}$
(e) $\{C, H, S\}$
(f) $\{B, C, K, Q\}$
(g) $\{B, C, E, G, K, N\}$
(h) $\{A, B, C, E, G, N, Q, S\}$

1.3. Для частичного порядка из задачи 1.2 найти верхние замыкания множеств:

(a) $\{B\}$
(b) $\{A, S\}$
(c) $\{E, G, K\}$
(d) $\{C, H, S\}$
(e) $\{B, E, K\}$
(f) $\{B, C, K, Q\}$
(g) $\{A, B, C, E, G, H\}$

1.4. Рассмотрим модель $M = \big((W, R), D\big)$, где $W = \{A, B, C, D, E, F\}$, $R = \big\{(A, A),\ (A, B),\ (A, C),\ (A, D),\ (A, E),\ (B, B),\ (B, C),\ (B, D),$ $(C, C),\ (D, D),\ (E, E),\ (F, E),\ (F, F)\big\}$, D – означивание языка, заданное для переменных p_1, p_2, p_3 соотношениями: $D\,(p_1) = \{C, D\}\,, D\,(p_2) = \{E, F\}$, $D\,(p_3) = \{B, C, D, E\}$. Найти $D(\varphi)$, где:

(a) $\varphi = p_1 \wedge p_3$;

(b) $\varphi = \neg p_2 \vee p_3$;

(c) $\varphi = p_1 \to p_2 \wedge p_3$;

(d) $\varphi = \neg p_1 \vee p_1$;

(e) $\varphi = \neg p_3 \vee p_3$.

1.5. Рассмотрим модель $M = \big((W,R),D\big)$, где $W = \{A,B,C,D,E,F,G\}$, $R = \big\{(A,A),\ (A,C),\ (A,E),\ (B,B),\ (B,C),\ (B,D),\ (B,G),\ (C,C),\ (D,D),\ (D,G),\ (E,E),\ (F,E),\ (F,F),\ (G,G)\big\}$, D – означивание языка, заданное для переменных p_1,p_2,p_3 соотношениями: $D\,(p_1) = \{G\}\,, D\,(p_2) = \{E,F\}$, $D\,(p_3) = \{B,D,E,G\}$. Найти $D(\varphi)$, где:

(a) $\varphi = p_1 \vee p_3$;

(b) $\varphi = p_1 \vee p_2 \vee p_3$;

(c) $\varphi = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$;

(d) $\varphi = p_2 \to p_3$;

(e) $\varphi = (p_1 \to p_2) \to p_3$;

(f) $\varphi = (\neg p_2 \vee p_2) \to p_1$.

1.6. Рассмотрим модель $M = \big((W,R),D\big)$, где $W = \{A,B,C,D,E,F,G\}$, $R = \big\{(A,A),\ (A,E),\ (B,B),\ (B,C),\ (B,D),\ (B,E),\ (B,G),\ (C,C),\ (C,G),\ (D,D),\ (D,E),\ (E,E),\ (F,A),\ (F,E),\ (F,F),\ (F,G),\ (G,G)\big\}$, D – означивание языка, заданное для переменных p_1,p_2,p_3 соотношениями: $D\,(p_1) = \{A,E\}\,, D\,(p_2) = \{C,E,G\}$, $D\,(p_3) = \{A,E,F,G\}$. Найти $D(\varphi)$, где:

(a) $\varphi = \neg p_1 \vee p_3$;

(b) $\varphi = \neg p_1 \wedge p_3$;

(c) $\varphi = p_2 \vee p_3$;

(d) $\varphi = p_2 \to p_3$;

(e) $\varphi = p_3 \to p_1$;

(f) $\varphi = (\neg p_1 \vee p_1) \vee (\neg p_2 \vee p_2) \vee (\neg p_3 \vee p_3)$.

1.7. Рассмотрим модель $M = \big((W,R),D\big)$, где $W = \{A,B,C,E,G,H,K,N,Q,S\}$, $R = \big\{(A,A),\ (A,B),\ (A,C),\ (A,E),\ (A,G),\ (A,N),\ (B,B),\ (B,E),\ (B,G),\ (C,C),\ (C,N),\ (E,E),\ (E,G),\ (G,G),\ (H,E),\ (H,H),\ (H,K),\ (K,E),\ (K,K),\ (N,N),\ (Q,N),\ (Q,Q),$

(Q,S), $(S,S)\big\}$, D – означивание языка, заданное для переменных p_1,p_2,p_3 соотношениями: $D(p_1) = \{B,C,E,N,G,K\}$, $D(p_2) = \{A,B,C,E,N,G,Q,S\}$, $D(p_3) = \{E,G,K\}$. Найти $D(\varphi)$, где:

(a) $\varphi = p_1 \vee p_3$;
(b) $\varphi = p_1 \wedge p_2$;
(c) $\varphi = \neg p_1$;
(d) $\varphi = \neg p_2$;
(e) $\varphi = \neg p_3$;
(f) $\varphi = p_3 \to p_1$;
(g) $\varphi = \neg p_3 \vee p_1$;
(h) $\varphi = \neg p_1 \vee p_1$;
(i) $\varphi = \neg p_2 \vee p_2$;
(j) $\varphi = \neg p_3 \vee p_3$.

1.8. Для заданного фрейма $\Big(\{A,B,C,D,E\}, \big\{(A,A),(A,B),(A,C),(B,B),(C,C),(D,D),(D,E),(E,E)\big\}\Big)$ найти все точки истинности формулы $\neg p \vee p$.

1.9. Является ли формула φ общезначимой для любого фрейма, где:

(a) $\varphi = \neg\neg(p \vee \neg p)$;
(b) $\varphi = \neg p \vee \neg\neg p$;
(c) $\varphi = p \to \neg\neg p$;
(d) $\varphi = \neg\neg p \to p$;
(e) $\varphi = \neg\neg\neg p \to \neg p$.

1.10. Существуют ли формулы, для любого фрейма не являющиеся выполнимыми?

2. Модель Крипке для модальной логики высказываний

В языке классической или интуиционистской логики предложения вида «возможно, что вода кипит при $70°$», «необходимо, что вода кипит при $70°$», нельзя представить в виде комбинации меньших предложений. Как и предложение «вода кипит при $70°$» их можно воспринимать только как атомарные. Этот эффект аннулируется при переходе к модальным логикам.

Пусть L — язык классической или интуиционистской логики. **Модальный пропозициональный язык** ML получается введением в язык L новых связок $\Box$ и $\Diamond$, называемых **операторами необходимости** и **возможности** соответственно. При этом к правилам построения формул добавляется новое правило: если φ — ML-формула, то $\Box\varphi$ и $\Diamond\varphi$ тоже ML-формулы. Оператор возможности является двойственным к оператору необходимости, т.е. для любой формулы φ языка ML справедливо равенство $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$. Оба оператора имеют одинаковый приоритет с отрицанием и сильнее связок из $\{\wedge, \vee, \to\}$. Интерпретации $\Box$ и $\Diamond$ (т.н. **типы модальности**) могут быть весьма разнообразными.

Перед строгим описанием семантики Крипке остановимся на следующем содержательном примере, ее иллюстрирующем. Задана система миров, для каждого из которых имеется множество миров (возможно, пустое), ему альтернативных. Предложение $\Box\varphi$ является **истинным** для мира x, если φ истинно на всех мирах, альтернативных для x. Предложение $\Diamond\varphi$ является **истинным** для мира x, если φ истинно хотя бы на одном мире, альтернативном для x. Такое понимание операторов необходимости и возможности идет от Лейбница.

Модальным фреймом Крипке называется пара $F = (W, R)$, где R — произвольное бинарное отношение на непустом множестве W. Элементы множества W называются **мирами** или **точками**, R называется **отношением альтернативности миров**.

Означиванием языка ML во фрейме F называется отображение D, которое любой переменной p из языка сопоставляет некоторое подмножество (возможно, пустое) $D(p) \subseteq W$. Как и в интуиционистском случае, $D(p)$ — множество точек, на которых атомарное предложение p истинно.

Модель Крипке языка ML — пара $M = (F, D)$, где F — модальный фрейм Крипке, а D — означивание ML.

Индукцией по построению формулы $\varphi \in ML$ определяется отношение $(M, x) \vDash \varphi$, которое читается «φ истинно на (мире) x в модели M»:

1. $(M, x) \vDash p$, если $x \in D(p)$,
2. $(M, x) \vDash \varphi \wedge \psi$, если $(M, x) \vDash \varphi$ и $(M, x) \vDash \psi$,
3. $(M, x) \vDash \varphi \vee \psi$, если $(M, x) \vDash \varphi$ или $(M, x) \vDash \psi$,
4. $(M, x) \vDash \neg\varphi$, если $(M, x) \nvDash \varphi$,
5. $(M, x) \vDash \varphi \to \psi$, если $(M, x) \nvDash \varphi$ или $(M, x) \vDash \psi$,
6. $(M, x) \nvDash \bot$, где $\bot$ — тождественно ложная формула, для которой $D(\bot)$ полагается равным $\emptyset$,
7. $(M, x) \vDash \Box\varphi$, если для всех $y \in W$, видимых из x, имеет место отношение $(M, y) \vDash \varphi$.
8. $(M, x) \vDash \Diamond\varphi$, если для некоторого $y \in W$, видимого из x, имеет место отношение $(M, y) \vDash \varphi$.

Из 7 следует, что $(M, x) \vDash \neg\varphi$, если $(M, x) \nvDash \varphi$.

Для модального случая определения понятий выполнимости, истинности, общезначимости и равносильности в моделях и на фреймах совпадают с интуиционистским.

Пример 2.1. Модальный фрейм $F = (W, R)$ задается следующим образом: $W = \{A, B, C, D\}$, $R = \{(A, B), (B, B), (B, C), (C, A), (C, D), (D, D)\}$. Граф данного отношения изображен на рисунке 2.

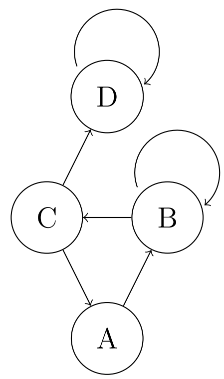

рис. 2

Рассмотрим $M = (F, D)$ – модель на данном фрейме, где D – означивание языка, заданное для переменных p_1, p_2, p_3 соотношениями: $D\,(p_1) = \{C, D\}$, $D\,(p_2) = \{A\}$, $D\,(p_3) = \{A, B, D\}$. Пусть $\varphi_1 = p_2 \wedge p_3$, $\varphi_2 = p_1 \to p_3$, $\varphi_3 = \neg p_2$, $\varphi_4 = \Box p_1$, $\varphi_5 = \Diamond p_3$, тогда данные предложения будут истинны в следующих точках данной модели:

$D\,(\varphi_1) = D\,(p_2) \cap D\,(p_3) = \{A\}$

$D\,(\varphi_2) = \overline{D\,(p_1)} \cup D\,(p_3) = \{A, B, D\}$

$D\,(\varphi_3) = \overline{D\,(p_2)} = \{B, C, D\}$

$D\,(\varphi_4) = \Big\{x \in W:\ \forall y \in W\ \big[xRy \to [(M, y) \vDash p_1]\big]\Big\} = \{C, D\}$

$D\,(\varphi_5) = \Big\{x \in W:\ \exists y \in W\ \big[xRy \to [(M, y) \vDash p_3]\big]\Big\} = W$

Таким образом, в данной модели все перечисленные формулы выполнимы, а формула φ_5, кроме того, является общезначимой.

ЗАДАЧИ

2.1. Рассмотрим модель $M = \big((W, R), D\big)$, где $W = \{A,\ B,\ C\}$, $R = \{(A, B),\ (B, C)\}$, $D(p) = \{A, B\}$. Верно ли, что $(M, A) \vDash \Box p \to \Box\Box p$?

2.2. Рассмотрим модель $M = \big((W, R), D\big)$, где $W = \{A,\ B,\ C\}$, $R =$

$\{(A,B),\ (B,C),\ (A,C)\},\ D(p) = \{A,B\}$. Верно ли, что $(M,A) \vDash \Box p \to \Box\Box p$?

2.3. Рассмотрим модель $M = \big((W,R),D\big)$, где $W = \{A,\ B\}$, $R = \{(A,A),$ $(A,B),\ (B,A),\ (B,B)\}$, $D(p) = \{A\}$. Является ли формула $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ выполнимой в данной модели?

2.4. Модальный фрейм $F = (W,R)$ задается следующим образом: $W = \{A,\ B,\ C,\ D,\ E\}$, $R = \big\{(A,B),\ (A,C),\ (A,E),\ (B,B),\ (B,D),$ $(C,C)\big\}$. Рассмотрим $M = (F,D)$ – модель на данном фрейме, где D – означивание языка, заданное для переменных p_1,p_2,p_3 соотношениями: $D\,(p_1) = \{C\}$, $D\,(p_2) = \{A,C,D,E\}$, $D\,(p_3) = \{A,B,C,D\}$. Изобразить фрейм F в виде ориентированного графа. Найти $D(\varphi)$, где:

(a) $\varphi = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$;

(b) $\varphi = p_1 \vee p_3$;

(c) $\varphi = p_1 \to \neg p_2$;

(d) $\varphi = \Diamond p_1$;

(e) $\varphi = \Box(p_1 \to \neg p_2)$.

2.5. Модальный фрейм $F = (W,R)$ задается следующим образом: $W = \{A,\ B,\ C,\ D,\ E\}$, $R = \big\{(A,B),\ (A,C),\ (A,E),\ (B,B),\ (C,D),\ (D,C),$ $(D,D),\ (E,A)\big\}$. Рассмотрим $M = (F,D)$ – модель на данном фрейме, где D – означивание языка, заданное для переменных p_1,p_2,p_3 соотношениями: $D\,(p_1) = \{A,B,D\}$, $D\,(p_2) = \{A,D,E\}$, $D\,(p_3) = \{B,C,D\}$. Изобразить фрейм F в виде ориентированного графа. Найти $D(\varphi)$, где:

(a) $\varphi = p_1 \wedge p_3$;

(b) $\varphi = p_2 \vee p_3$;

(c) $\varphi = \neg p_1$;

(d) $\varphi = p_2 \to p_1$;

(e) $\varphi = p_3 \to p_2$;

(f) $\varphi = \Diamond p_1$;

(g) $\varphi = \Box p_1$;

(h) $\varphi = \Diamond p_2$;

(i) $\varphi = \Box p_2$;

(j) $\varphi = \Diamond p_3$;

(k) $\varphi = \Box p_3$;

(l) $\varphi = \Diamond\Box p_2$;

(m) $\varphi = \Box\Diamond p_2$;

(n) $\varphi = \Diamond\Box p_2 \to \Box\Diamond p_2$;

(o) $\varphi = \Box\Diamond p_2 \to \Diamond\Box p_2$.

2.6. Являются ли формулы $\varphi = \Diamond\Box p_2 \to \Box\Diamond p_2$ и $\psi = \Box\Diamond p_2 \to \Diamond\Box p_2$ равносильными в модели M из задачи 2.5?

2.7. Являются ли следующие формулы общезначимыми в модели M из задачи 2.5?

(a) $\varphi = \Box p_1$;

(b) $\varphi = \Diamond p_2$;

(c) $\varphi = \Diamond p_3$;

(d) $\varphi = \Box\Diamond p_1$;

(e) $\varphi = \Diamond\Box p_2$;

(f) $\varphi = \Diamond\Box p_2 \to \Box\Diamond p_2$;

(g) $\varphi = \Box\Diamond p_2 \to \Diamond\Box p_2$.

2.8. Модальный фрейм $F = (W, R)$ задается следующим образом: $W = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$, $R = \big\{(A_i, A_j) : i < j\big\}$. Рассмотрим $M = (F, D)$ – модель на данном фрейме, где $D(p) = \emptyset$. Является ли формула $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ выполнимой в данной модели?

2.9. Является ли формула $\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$ общезначимой в любой модели?

2.10. Является ли формула $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ общезначимой в любой модели?

3. Чистое λ-исчисление

Основной синтаксический объект в λ-исчислении это λ-терм. Алфавит для построения λ-термов состоит из

- символа λ, называемого λ**-абстрактором**,
- счетного набора символов, называемых **переменными**,
- пары круглых скобок и точки.

В качестве переменных будем использовать малые латинские буквы, возможно с индексами. **Лямбда-термом** называется

- выражение, состоящее из одной переменной,
- выражение вида (MN), называемое **аппликацией**, где M и N — λ-термы,
- выражение вида $(\lambda\, x.N)$, называемое λ**-абстракцией**, где N — λ-терм, x — переменная.

Естественным образом вводится понятие **подтерма**, имеющего вхождения в данный терм.

В терме вида $(\lambda\, x.N)$ терм N называется **областью действия** λ-абстрактора по переменной .

Вхождение переменной в терм называется **свободным** в рассматриваемом терме, если оно не находится в области действия λ-абстрактора по этой переменной.

Множество всех λ-термов при некоторой договоренности о символах для переменных обозначим буквой λ.

$FV(M)$ — это множество переменных, имеющих свободные вхождения в λ-терм M.

Выражение $M \equiv N$ — это синтаксическое (графическое) равенство λ-термов M и N.

Комбинатор — это терм без свободных переменных. Множество всех комбинаторов обозначим через λ_0.

Выражение $M \equiv N$ означает синтаксическое (графическое) равенство λ-термов M и N. Для сокращения и удобочитаемости парные скобки в термах, соответствующие апплицированию, будем опускать, если перед опусканием они были сгруппированы влево. Парные скобки в термах, соответствующие абстракции, будем опускать, если их можно восстановить группировкой вправо.

Введем также следующее сокращение:

$\lambda\, x_1 x_2 x_3 \ldots x_n .\, M \equiv \Big(\lambda\, x_1 .\, \Big(\lambda\, x_2 .\, \big(\lambda\, x_3 \ldots (\lambda\, x_n .\, M) \ldots\big)\Big)\Big)$

$M_x[N]$ — результат подстановки терма N в терм M вместо всех свободных в M вхождений переменной x.

Отношение $\alpha = \Big\{\Big(\big(\lambda\, x.M\big), \big(\lambda\, y.M_x[y]\big)\Big) | M \in \lambda, y \notin FV(M)\Big\}$ стандартным образом порождает отношение α-конверсии. Часто α-конвертируемые термы отождествляются на синтаксическом уровне, то есть считается, что α-конвертируемые термы синтаксически равны. Преобразование терма $(\lambda\, x.M)$ в терм $(\lambda\, y.M_x[y])$, где $y \in FV(M)$ называется **заменой связанной переменной**.

Отношение $\beta = \Big\{\Big(\big(\lambda\, x.M\big)N, M_x[N]\Big) | M, N \in \lambda, x \notin FV(N)\Big\}$ стандартным образом порождает одношаговую β-редукцию ($\to_\beta$).

Преобразование терма $(\lambda\, x.M)N$ в терм $M_x[N]$, где $x \in FV(N)$, называется **β-сверткой**, преобразуемый терм при этом называется **редексом** (или точнее **β-редексом**). Интуитивно β-свертка представляет собой подстановку аргумента вместо соответствующей переменной.

Редукционная цепочка это пустая, конечная или бесконечная последовательность термов, полученных с помощью свертываний и замен связанных переменных.

Выражение $P \to_\beta Q$ означает, что терм P β-редуцируется к терму Q.

Терм назовем **β-нормальным** (или **β-пассивным**) термом если в нем нет β-редексов.

Терм Q назовем **β-нормальной формой** терма P, если Q – β-нормальный терм и $P \to_\beta Q$.

Термин нормальный (пассивный) обычно используют не только в связи с отношением β, но также и в связи с другими отношениями, порождающими разные виды редукции и конверсии.

Левым редексом называется редекс, символ λ которого расположен левее символов λ, соответствующих всем другим редексам. Аналогично определяется **правый редекс**.

Внешним редексом называется редекс, который не содержится внутри никакого другого редекса.

Внутренним редексом называется редекс, не содержащий других редексов.

Приведем пример построения редукционной цепочки.

Пример 3.1. Рассмотрим терм $(\lambda\, x.\, xx)(\lambda\, x.\, xx)$, который сам является β-редексом, и применим к нему редукционное преобразование. $(\lambda\, x.\, xx)(\lambda\, x.\, xx) \to_\beta (\lambda\, x.\, xx)(\lambda\, x.\, xx) \to_\beta \ldots$. Имеем дело с бесконечной редукционной цепочкой.

Рассмотрим теперь пример, когда выбор редекса для сворачивания определяется не однозначно.

Пример 3.2. Рассмотрим терм $\Big(\lambda\, x.\, \big((\lambda\, y.\, xy)u\big)\Big)(\lambda\, v.\, v)$, в котором имеются два β-редекса: во-первых, сам терм является β-редексом и, во-вторых, β-редексом является его подтерм $((\lambda\, y.xy)u)$. Выбирая для свертки разные редексы, получим разные редукционные цепочки.

1. $(\lambda\, x.((\lambda\, y.xy)u))(\lambda\, v.v) \to_\beta (\lambda\, y.(\lambda\, v.v)y)u \to_\beta (\lambda\, v.v)u \to_\beta u$
2. $(\lambda\, x.((\lambda\, y.xy)u))(\lambda\, v.v) \to_\beta (\lambda\, x.(xu))(\lambda\, v.v) \to_\beta (\lambda\, v.v)u \to_\beta u$

Заметим, что исходный терм $(\lambda\, x.((\lambda\, y.xy)u))(\lambda\, v.v)$ двумя способами редуцировался к одному и тому же терму u. С удовлетворением отмечаем, что получили один и тот же ответ. Всегда ли так будет? Наивная стратегия применения сверток заключается в следующем. Пока существует хотя бы один редекс, применить к какому-нибудь из них редукцию.

Пример 3.3. Рассмотрим терм $(\lambda\, xy.y)\big((\lambda\, z.zz)(\lambda\, z.zz)\big)$. Здесь два редекса: внутренний — $(\lambda\, z.zz)(\lambda\, z.zz)$ и внешний — $\big(\lambda\, x.(\lambda\, y.y)\big)\big((\lambda\, z.zz)(\lambda\, z.zz)\big)$.
Выбрав внутренний редекс, получим его же. Таким образом, выбирая каждый раз внутренний редекс, получим бесконечную редукционную цепочку. Выбрав внешний редекс для свертывания, получим за один шаг терм без редексов. $\big(\lambda\, x.(\lambda\, y.y)\big)\big((\lambda\, z.zz)(\lambda\, z.zz)\big) \to_\beta (\lambda\, y.y)$

Заметим, что во втором случае аргумент нам редуцировать не пришлось, реализовалось так называемое ленивое вычисление.

Аппликативный порядок редукций (АПР) предписывает всегда выбирать самый левый из внутренних редексов.

Нормальный порядок редукций (НПР) предписывает всегда выбирать самый левый из внешних редексов.

Напомним, что в рассмотренном выше примере 3 первый способ выбора редекса привел к зацикливанию, а второй за один шаг завершил вычисления.

Терм $\lambda x.(\lambda y.y)$ — классический пример функции, которая отбрасывает свой аргумент. Стратегия НПР откладывает вычисление аргумента до тех пор, пока он действительно не потребуется.

Теорема Черча-Россера (о ромбическом свойстве β-редукции). Если $P \twoheadrightarrow_\beta M$ и $P \twoheadrightarrow_\beta N$, то существует терм T, что $M \twoheadrightarrow_\beta T$ и $N \twoheadrightarrow_\beta T$.

Следствие. Если у терма существует β-нормальная форма, то она единственна.

Теорема стандартизации. Если терм редуцируется к нормальной форме, то стратегия НПР гарантирует достижение этой формы с точностью до конгруэнции.

ЗАДАЧИ

3.1. Найти все подтермы, содержащиеся в заданном λ-терме. Указать, какие из них имеют активное вхождение, а какие пассивное. Указать, какие переменные имеют связанные вхождения, а какие свободные.

(a) $(\lambda\, xy.\, xz)$

(b) $(\lambda\, x.\, yz)$

(c) $(\lambda\, x.\, xxy)(\lambda\, x.\, xxy)$

(d) $\Big((\lambda\, u.\, (\lambda\, x.\, uxx)(\lambda\, x.\, uxy)\Big)(\lambda\, y.\, y)$

(e) $\Big(\lambda\, xuz.\, x(\lambda\, x.\, zu)\Big)\Big(\big(\lambda\, x.\, u\,(xx)\big)\big(\lambda\, x.\, u\,(xx)\big)\Big)$

(f) $\lambda\, nfx.n\Big(\big(\lambda\, gh.h(gf)\big)(\lambda\, u.x)(\lambda\, u.u)\Big)(\lambda\, x.\, x)(\lambda\, xy.\, yx)\big(\lambda\, xyz.\, x(yz)\big)$

3.2. Применяя стратегии АПР и НПР для свертки β-редексов, привести заданный λ-терм к β-нормальной форме или доказать, что это невозможно. Дают ли указанные стратегии для этого λ-терма одинаковый конечный результат?

(a) $(\lambda x.\, xx)(\lambda y.\, y)$

(b) $\big(\lambda x.\, (\lambda y.\, xxy)u\big)\big((\lambda z.\, zz)u\big)$

(c) $\big(\lambda x.\, (\lambda y.\, y)\big)\big((\lambda z.\, zz)(\lambda z.\, zz)\big)$

(d) $\big(\lambda x.\, (\lambda y.\, y)\big)\big((\lambda z.\, z)(\lambda z.\, z)\big)$

(e) $\big(\lambda x.\, (\lambda y.\, xyy)x\big)(\lambda z.\, zz)$

(f) $\big(\lambda xyz.\, x(yz)\big)\big(\lambda xyz.\, xzy\big)\big(\lambda xyz.\, xzy\big)\big(\lambda xyz.\, xzy\big)$

(g) $(\lambda x.\, x)\Big((\lambda x.\, x)\big(\lambda z.\, (\lambda x.\, x)z\big)\Big)$

(h) $\Big((\lambda x.\, x)(\lambda x.\, yz)\Big)\Big((\lambda x.\, xxu)(\lambda x.\, xxu)\Big)$

(i) $\big(\lambda x.\, x(\lambda x.\, zu)\big)\Big(\big(\lambda x.\, u\,(xx)\big)\big(\lambda x.\, u\,(xx)\big)\Big)$

(j) $\Big((\lambda u.\, (\lambda x.\, ux)(\lambda x.\, xu)\Big)(\lambda y.\, y)$

(k) $\Big((\lambda xyz.\, (\lambda u.\, xuy)(\lambda u.\, xuz)\Big)(\lambda x.\, x)$

(l) $\lambda nfx.n\Big(\big(\lambda gh.h(gf)\big)(\lambda u.x)(\lambda u.u)\Big)(\lambda x.\, x)(\lambda xy.\, yx)\big(\lambda xyz.\, x(yz)\big)$

4. Комбинаторная логика

Для термов P и Q запись $P = Q$ означает, что $P \to_\beta Q$ или $Q \to_\beta P$.

Напомним, что **комбинатором** называется терм без свободных переменных и множество всех комбинаторов обозначаем через λ_0. Приведем несколько полезных комбинаторов с их стандартными обозначениями и названиями:

Определение	**Название**	**Характеристика**
$\mathbf{I} \equiv \lambda x.\, x$	тождественный	$\mathbf{I}X \to_\beta X$
$\mathbf{B} \equiv \lambda xyz.\, x(yz)$	композитор	$\mathbf{B}FGX \to_\beta F(GX)$
$\mathbf{C} \equiv \lambda xyz.\, xzy$	пермутатор	$\mathbf{C}FXY \to_\beta FYX$
$\mathbf{K} \equiv \lambda xy.\, x$	канцелятор	$\mathbf{K}XY \to_\beta X$
$\mathbf{S} \equiv \lambda xyz.\, xz(yz)$	коннектор	$\mathbf{S}FGX \to_\beta FX(GX)$
$\mathbf{W} \equiv \lambda xy.xyy$	дупликатор	$\mathbf{W}FX \to_\beta FXX$

Заметим, что введенные комбинаторы находятся в β-нормальной форме. Соотношения в правой колонке называются **комбинаторными характеристиками** соответствующих комбинаторов.

Пример 4.1.
Приведём комбинатор $\mathbf{B}\big(\mathbf{SB}(\mathbf{KI})\big)(\mathbf{KI})\Big(\mathbf{SB}\big(\mathbf{SB}(\mathbf{KI})\big)\Big)$ к β-нормальной форме:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}\big(\mathbf{SB}(\mathbf{KI})\big)(\mathbf{KI})\Big(\mathbf{SB}\big(\mathbf{SB}(\mathbf{KI})\big)\Big) \to_\beta \mathbf{SB}(\mathbf{KI})\bigg(\mathbf{KI}\Big(\mathbf{SB}\big(\mathbf{SB}(\mathbf{KI})\big)\Big)\bigg)\\
&\to_\beta \mathbf{B}\bigg(\mathbf{KI}\Big(\mathbf{SB}\big(\mathbf{SB}(\mathbf{KI})\big)\Big)\bigg)\Bigg(\mathbf{KI}\bigg(\mathbf{KI}\Big(\mathbf{SB}\big(\mathbf{SB}(\mathbf{KI})\big)\Big)\bigg)\Bigg)\\
&\to_\beta \mathbf{BI}\Bigg(\mathbf{KI}\bigg(\mathbf{KI}\Big(\mathbf{SB}\big(\mathbf{SB}(\mathbf{KI})\big)\Big)\bigg)\Bigg) \to_\beta \mathbf{BII}\\
&\equiv \big(\lambda\, xyz.\, x(yz)\big)(\lambda\, x.\, x)(\lambda\, x.\, x) \to_\beta \lambda\, z.\, (\lambda\, x.\, x)\big((\lambda\, x.\, x)z\big)\\
&\to_\beta \lambda\, z.\, (\lambda\, x.\, x)z \to_\beta \lambda\, z.\, z \equiv \mathbf{I}
\end{aligned}$$

Терм X называется **неподвижной точкой** терма F, если выполняется соотношение $X = FX$.

Комбинатор M называется **комбинатором неподвижной точки**, если для любого терма F выполняется соотношение $MF = F(MF)$. Другими словами: применяя комбинатор M к произвольному терму F, получаем неподвижную точку терма F.

Одним из возможных комбинаторов неподвижной точки является так называемый парадоксальный комбинатор Карри:

$$Y \equiv \lambda\, f.\big(\lambda\, x.f(xx)\big)\big(\lambda\, x.f(xx)\big).$$

Действительно, для любого терма F имеем

$$\begin{aligned}
YF &\equiv \Big(\lambda\, f.\big(\lambda\, x.f(xx)\big)\big(\lambda\, x.f(xx)\big)\Big)F\\
&= \big(\lambda\, x.F(xx)\big)\big(\lambda\, x.F(xx)\big)\\
&= F\Big(\big(\lambda\, x.F(xx)\big)\big(\lambda\, x.F(xx)\big)\Big)\\
&= F\Big(\lambda\, f.\big(\lambda\, x.f(xx)\big)\big(\lambda\, x.f(xx)\big)F\Big)\\
&\equiv F(YF).
\end{aligned}$$

Заметим, что переход от третьей строчки к четвертой выполнен с помощью «обратной» β-редукции.

По этой причине можно предпочесть комбинатор неподвижной точки, предложенный Тьюрингом: $\mathbf{T} \equiv \big(\lambda\, xy.\, y(xxy)\big)\big(\lambda\, xy.\, y(xxy)\big)$. Докажем, что $\mathbf{T}F \to_\beta F(\mathbf{T}F)$. Обозначим $A \equiv \big(\lambda\, xy.\, y(xxy)\big)$, тогда

$$\mathbf{T} \equiv AA \equiv \big(\lambda\, xy.\, y(xxy)\big)\big(\lambda\, xy.\, y(xxy)\big) \to_\beta \lambda\, y.y(AAy) \equiv \lambda\, y.y(\mathbf{T}y)$$

$\mathbf{T}F \to_\beta \big(\lambda\, y.y(\mathbf{T}y)\big)F \to_\beta F(\mathbf{T}F)$, что и требовалось.

Пример 4.2. Требутеся построить комбинатор F такой, что для произвольных λ-термов X, Y, Z выполняется $FXY = F\big(FX(FY)\big)$.
Пусть M — комбинатор неподвижной точки. Возьмём такой F, что $F = MN$, тогда, по свойству комбинатора неподвижной точки $MN = N(MN)$, то есть $F = NF$. Из этого следует, что $FXY = NFXY$. Но, по условию задачи $FXY = F\big(FX(FY)\big)$, то есть $NFXY = F\big(FX(FY)\big)$. Для произвольных F, X, Y таким свойством обладает комбинатор $N = \lambda\, fxy.f\big(fx(fy)\big)$. Итак, $F = MN = M\Big(\lambda\, fxy.f\big(fx(fy)\big)\Big)$

ЗАДАЧИ

4.1. Привести заданный комбинатор к β-нормальной форме:

(a) $\mathbf{BS}$
(b) $\mathbf{SW}$
(c) $\mathbf{CSI}$
(d) $\mathbf{BCCC}$
(e) $\mathbf{CKK}$
(f) $\mathbf{SS}(\mathbf{KI})$
(g) $\mathbf{SSSCCC}$
(h) $\mathbf{KIBW}$
(i) $\mathbf{S}(\mathbf{KI})\mathbf{KI}$
(j) $\mathbf{C}\big(\mathbf{CI}(\mathbf{KI})\big)\mathbf{K}$
(k) $\mathbf{B}(\mathbf{SCKI})(\mathbf{SC})(\mathbf{WW})$
(l) $\mathbf{BCIKSW}$
(m) $\mathbf{B}(\mathbf{BC})\big(\mathbf{CI}(\mathbf{IK})\big)\big(\mathbf{KS}(\mathbf{SWW})\big)$
(n) $\mathbf{CI}(\mathbf{SB})\big(\mathbf{SB}(\mathbf{KI})\big)\Big(\mathbf{SB}\big(\mathbf{SB}(\mathbf{KI})\big)\Big)$
(o) $\mathbf{WWWWWWWW}$

4.2. Являются ли комбинаторами неподвижной точки следующие комбинаторы:

   (a) $\big(\lambda\, xy.\, y(xxy)\big)$;
   (b) $\big(\lambda\, uv.\, v(uuv)\big)\big(\lambda\, xy.\, y(xxy)\big)$;
   (c) $\big(\lambda\, xyz.\, y(xyz)\big)\big(\lambda\, xyz.\, y(xyz)\big)\big(\lambda\, xyz.\, y(xyz)\big)$;
   (d) $\big(\lambda\, xyz.\, z(xyz)\big)\big(\lambda\, xyz.\, z(xyz)\big)$;
   (e) $\big(\lambda\, xyz.\, y(xyy)\big)\big(\lambda\, xyz.\, y(xyy)\big)\big(\lambda\, xyz.\, y(xyy)\big)$;
   (f) $\big(\lambda\, xyz.\, y(xxy)\big)\big(\lambda\, xyz.\, y(xzy)\big)\big(\lambda\, xyz.\, y(zzy)\big)$?

4.3. Пусть

$$\mathbf{X} \equiv \lambda\, \textit{абвгдеёжзийклмнопрстуфхцчшщъыьэюя.}$$
$$\textit{я(комбинаторнеподвижнойточкинувотоня)}$$

   Показать, что

$$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX}$$

   — комбинатор неподвижной точки.

4.4. Построить комбинатор F, обладающий следующим свойством для произвольных λ-термов X, Y, Z:

   (a) $FX = FXX$;
   (b) $FX = F\big(F(FX)\big)$;
   (c) $FXY = F(FYX)$;
   (d) $FXY = F(FX)(FY)$;
   (e) $FXYZ = F(FX)\big(FZ(FY)\big)$;
   (f) $FXYZ = F(FX)(FXY)(FXYZ)$?

5. Реализация арифметических и логических функций в чистом λ-исчислении

Существуют различные способы представления натуральных чисел и арифметических операций λ-термами. Для представления чисел $0, 1, 2, \ldots, n \ldots$ будем использовать соответственно комбинаторы, называемые **нумералами Черча**, которые будем обозначать так же как и числа но полужирным шрифтом:

$\mathbf{0} \equiv \lambda\, fx.x$
$\mathbf{1} \equiv \lambda\, fx.fx$
$\mathbf{2} \equiv \lambda\, fx.f(fx)$
$\mathbf{3} \equiv \lambda\, fx.f\big(f(fx)\big)$
....
$\mathbf{n} \equiv \lambda\, fx.f^n x$
....

Здесь $f^1 x \equiv fx$ и $f^n x \equiv f\left(f^{n-1}x\right)$

Нумерал **n** можно рассматривать как функцию, которая принимает на свой вход функцию f в качестве аргумента и возвращает n-кратную суперпозицию функции f.

При заданном выше определении нумералов можно определить комбинатор **Inc**, который будучи примененным к нумералу, представляющему число n, дает в результате нумерал, представляющий число $n + 1$ следующим образом:

$\mathbf{Inc} \equiv \lambda\, nfx.f(nfx)$.

Определим также комбинаторы, представляющие сложение, умножение и возведение в степень. Будем обозначать их **Add**, **Mult** и

Deg соответственно:

$\mathbf{Add} \equiv \lambda\, mnfx.nf(mfx)$

$\mathbf{Mult} \equiv \lambda\, mnf.m(nf)$

$\mathbf{Deg} \equiv \lambda\, mn.nm$

Отметим, что комбинатор **Deg** соответствует только возведению в положительную (ненулевую) степень.

Комбинатор, вычисляющий $n-1$ при $n > 0$ можно определить следующим образом:

$\mathbf{Dec} \equiv \lambda\, nfx.\, n\big(\lambda\, gh.\, h(gf)\big)(\lambda\, u.\, x)(\lambda\, u.\, u)$

Пример 5.1. Проверим, что **Add 2 3** редуцируется в **5**.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Add\ 2\ 3} &\equiv \big(\lambda\, mnfx.\, nf(mfx)\big)\big(\lambda\, f_1x_1.\, f_1(f_1x_1)\big)\Big(\lambda\, f_2x_2.\, f_2\big(f_2(f_2x_2)\big)\Big)\\
&= \lambda\, fx.\, (\lambda\, f_2x_2.\, f_2(f_2(f_2x_2)))f((\lambda\, f_1x_1.\, f_1(f_1x_1))fx)\\
&= \lambda\, fx.\, f\Bigg(f\bigg(f\Big(\big(\lambda\, f_1x_1.\, f_1(f_1x_1)\big)fx\Big)\bigg)\Bigg)\\
&= \lambda\, fx.\, f\Bigg(f\bigg(f\big(f(fx)\big)\bigg)\Bigg) \equiv \lambda\, fx.\, f^5x \equiv \mathbf{5}
\end{aligned}$$

С помощью комбинаторов можно также представить логические константы и элементарные логические функции.

Для представления констант выбираем комбинаторы:

$\mathbf{True} \equiv \lambda\, xy.x$

$\mathbf{False} \equiv \lambda\, xy.y$

Заметим, что определение комбинатора **False** эквивалентно определенному выше чёрчевскому нумералу **0** «ноль». Для представления конъюнкции, дизъюнкции и отрицания выбираем соответственно комбинаторы:

$\mathbf{And} \equiv \lambda\, pq.pq\ \mathbf{False}$

$\mathbf{Or} \equiv \lambda\, pq.p\ \mathbf{True}\ q$

$\mathbf{Not} \equiv \lambda\, p.p\ \mathbf{False}\ \mathbf{True}$

Пример 5.2. Проверим, что **And True False** редуцируется в **False**.

$$\begin{aligned}
\mathbf{And\ True\ False} &\equiv \big(\lambda\, pq.pq(\lambda\, xy.y)\big)(\lambda\, x_1y_1.x_1)(\lambda\, x_2y_2.y_2)\\
&= (\lambda\, x_1y_1.x_1)(\lambda\, x_2y_2.y_2)(\lambda\, xy.y)\\
&= \lambda\, x_2y_2.y_2 \equiv \mathbf{False}
\end{aligned}$$

Используемый в императивных моделях вычислений оператор «if-then-else» можно выразить с помощью комбинатора **IfThenElse** $\equiv \lambda pqr.\, pqr$. Действительно, терм **IfThenElse**TMN конвертируется в M, если T конвертируется в **True** и в N в противном случае, что соответствует традиционной записи «if T then M else N».

ЗАДАЧИ

5.1. Проверить правильность нумералов и комбинаторов для выполнения арифметических операций на примере вычисления следующих выражений:

(a) **Add 4 1**

(b) **Inc 2**

(c) **Mult 2 3**

(d) **Deg 2 3**

(e) **Dec 3**

(f) **Dec 0**

5.2. Доказать, что в качестве нумералов и комбинаторов для выполнения арифметических операций можно использовать следующие комбинаторы:

$$\begin{array}{l}
\mathbf{0} \equiv \mathbf{KI} \\
\mathbf{1} \equiv \mathbf{SB}(\mathbf{KI}) \\
\mathbf{2} \equiv \mathbf{SB}\big(\mathbf{SB}(\mathbf{KI})\big) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{n} \equiv \mathbf{SB}\bigg(\mathbf{SB}\Big(\ldots\big(\mathbf{SB}(\mathbf{KI})\big)\ldots\Big)\bigg) \equiv (\mathbf{SB})^n(\mathbf{KI}) \qquad . \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{Inc} \equiv \mathbf{SB} \\
\mathbf{Add} \equiv \mathbf{CI}(\mathbf{SB}) \\
\mathbf{Mult} \equiv \mathbf{B} \\
\mathbf{Deg} \equiv \mathbf{CI}
\end{array}$$

5.3. Исследовать комбинатор **Deg** для случая, когда один или оба аргумента операции возведения в степень равны 0.

5.4. Проверить правильность комбинаторов для логических констант и операций, составив соответствующие таблицы истинности.

5.5. Доказать, что в качестве комбинаторов для логических переменных и функций можно использовать следующие комбинаторы:

$\mathbf{True} \equiv \mathbf{K}$
$\mathbf{False} \equiv \mathbf{KI}$
$\mathbf{And} \equiv \mathbf{CC}(\mathbf{KI})$
$\mathbf{Or} \equiv \mathbf{CIK}$
$\mathbf{Not} \equiv \mathbf{C}\big(\mathbf{CI}(\mathbf{KI})\big)\mathbf{K}$
$\mathbf{IfThenElse} \equiv \mathbf{I}$

5.6. Составить комбинаторы следующих булевых операций:

(a) Сумма по модулю 2;
(b) Импликация;
(c) Штрих Шеффера (отрицание конъюнкции);
(d) Стрелка Пирса (отрицание дизъюнкции);

5.7. Определим комбинатор $\mathbf{IsZero} \equiv \lambda\, n.\, n(\lambda\, x.\, \mathbf{False})\mathbf{True}$, который при применении к нумералу $\mathbf{0}$ дает $\mathbf{True}$, а при применении к любому другому нумералу дает $\mathbf{False}$. Этот предикат часто используется при конструировании условных выражений. Доказать, что такое определение корректно.

6. Элиминация λ-абстрактора

Любой λ-терм можно преобразовать в эквивалентный ему λ-терм, состоящий только из переменных и комбинаторов **S** и **K**, не используя абстракторов. Следовательно, согласно тезису Черча, любая вычислимая функция может быть представлена комбинатором без абстракторов. Доказательство можно провести используя приведенное ниже преобразование $T[E]$, которое преобразует заданный λ-терм в эквивалентный ему комбинатор.

1. $T[x] \Rightarrow x$
2. $T\big[(E_1E_2)\big] \Rightarrow \big(T[E_1]T[E_2]\big)$
3. $T[\lambda\,x.E] \Rightarrow \big(\mathbf{K}T[E]\big)$, если $x \notin FV(E)$
4. $T[\lambda\,x.x] \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{SKK}$
5. $T[\lambda\,xy.E] \equiv T\big[\lambda\,x.(\lambda\,y.E)\big] \Rightarrow T\big[\lambda\,x.T[\lambda\,y.E]\big]$, если $x \in FV(E)$
6. $T\big[\lambda\,x.(E_1E_2)\big] \Rightarrow \big(\mathbf{S}T[\lambda\,x.E_1]T[\lambda\,x.E_2]\big)$
7. $T[\lambda\,x.Ex] \Rightarrow T[E]$, если $x \notin FV(E)$

Этот процесс называется **элиминацией абстрактора**.

Пример 6.1. Преобразуем λ-терм $\lambda\, xy.yx$ в соответствующий комбинатор:

$$
\begin{aligned}
T\big[\lambda\, x.\lambda\, y.(yx)\big] &= T[\lambda\, x.T\big[\lambda\, y.(yx)\big]] && \text{(по правилу 5)}\\
&= T\big[\lambda\, x.\big(\mathbf{S}T[\lambda\, y.y]T[\lambda\, y.x]\big)\big] && \text{(по правилу 6)}\\
&= T\Big[\lambda\, x.\big(\mathbf{SI}T[\lambda\, y.x]\big)\Big] && \text{(по правилу 4)}\\
&= T\Big[\lambda\, x.\big(\mathbf{SI}(\mathbf{K}x)\big)\Big] && \text{(по правилам 3, 1)}\\
&= \mathbf{S}T[\lambda\, x.\mathbf{SI}]T[\lambda\, x.\mathbf{K}x] && \text{(по правилу 6)}\\
&= \mathbf{S}\big(\mathbf{K}(\mathbf{SI})\big)T[\lambda\, x.\mathbf{K}x] && \text{(по правилу 3)}\\
&= \mathbf{S}\big(\mathbf{K}(\mathbf{SI})\big)\mathbf{K} && \text{(по правилу 7)}
\end{aligned}
$$

Проверку полученного комбинатора можно произвести, применив его к термам x и y:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}\big(\mathbf{K}(\mathbf{SI})\big)\mathbf{K}xy &\to_\beta \mathbf{K}(\mathbf{SI})x(\mathbf{K}x)y\\
&\to_\beta \mathbf{SI}(\mathbf{K}x)y\\
&\to_\beta \mathbf{I}y(\mathbf{K}xy)\\
&\to_\beta y(\mathbf{K}xy)\\
&\to_\beta yx
\end{aligned}
$$

В дополнение к комбинаторам **S** и **K**, Шейнфинкель рассматривал комбинаторы **B** и **C**. Он показал, как их можно выразить через **S** и **K**. Эти комбинаторы используются, при трансляции логики предикатов или λ-исчисления в комбинаторные выражения. Их также использовал Карри и позднее Тюрнер, который ассоциировал их с вычислениями. Используя их, мы можем расширить правила трансформации следующим образом:

1. $T[x] \Rightarrow x$
2. $T\big[(E_1E_2)\big] \Rightarrow \big(T[E_1]T[E_2]\big)$
3. $T[\lambda\, x.E] \Rightarrow \big(\mathbf{K}T[E]\big)$, если $x \notin FV(E)$
4. $T[\lambda\, x.x] \Rightarrow \mathbf{I}$

5. $T[\lambda\, xy.E] \equiv T[\lambda\, x.(\lambda\, y.E)] \Rightarrow T\big[\lambda\, x.T[\lambda\, y.E]\big]$, если $x \in FV(E)$

6. $T\big[\lambda\, x.\,(E_1E_2)\,\big] \Rightarrow (\mathbf{S}T[\lambda\, x.E_1]T[\lambda\, x.E_2])$, если $x \in FV(E_1) \cap FV(E_2)$

7. $T\big[\lambda\, x.\,(E_1E_2)\,\big] \Rightarrow (\mathbf{C}T[\lambda\, x.E_1]T[E_2])$, если $x \in FV(E_1)$, но $x \notin FV(E_2)$

8. $T\big[\lambda\, x.\,(E_1E_2)\,\big] \Rightarrow (\mathbf{B}T\,[E_1]\,T[\lambda\, x.E_2])$, если $x \in FV(E_2)$, но $x \notin FV(E_1)$

9. $T[\lambda\, x.Ex] \Rightarrow T[E]$, если $x \notin FV(E)$

Пример 6.2. Используя дополнительно комбинаторы **B** и **C**, трансформируем терм λ-терм $\lambda\, xy.yx$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
T[\lambda\, x.\lambda\, y.yx] &= T[\lambda\, x.T\big[\lambda\, y.yx]\big] && \text{(по правилу 5)}\\
&= T\big[\lambda\, x.\mathbf{C}T[\lambda\, y.y]x\big] && \text{(по правилу 7)}\\
&= T[\lambda\, x.\mathbf{CI}x] && \text{(по правилу 4)}\\
&= \mathbf{CI} && \text{(по правилу 9)}
\end{aligned}$$

И в самом деле, $\mathbf{CI}xy$ редуцируется в yx: $\mathbf{CI}xy \to_\beta \mathbf{I}yx \to_\beta yx$

ЗАДАЧИ

6.1. Выполнив элиминацию λ-абстрактора, найти комбинаторы, которые представляют собой суперпозицию аппликаций комбинаторов $\mathbf{S}, \mathbf{K}$ для комбинаторов **B** и **C**. Выполнить проверку полученного результата, приведя его к β-нормальной форме.

6.2. Выполнив элиминацию λ-абстрактора, найти комбинаторы, которые представляют собой суперпозицию аппликаций комбинаторов $\mathbf{S}, \mathbf{K}$ для следующих комбинаторов. Выполнить проверку полученного результата, приведя его к β-нормальной форме.

   (a) Комбинатор $\mathbf{W} = \lambda\, xy.\, x(yy)$;

   (b) Комбинатор **IsZero** (см. задачу 5.7);

(c) $\lambda\, xyz.\, xy(xz)$;

(d) $\lambda\, xyz.\, zx(zy)$;

(e) $\lambda\, xyz.\, yx(zx)$;

(f) $\lambda\, xyz.\, zy(xy)$;

(g) $\lambda\, xyz.\, xz(yy)$;

(h) $\lambda\, xyz.\, zz(yx)$;

(i) $\lambda\, xyz.\, z(yy)x$;

(j) $\lambda\, xyz.\, x(zz)y$;

(k) $\lambda\, xy.\, xy\Big(xy\big(\lambda\, z.\, xz(yz)\big)\Big)$;

(l) $\lambda\, xyzuv.\, xv(yv)(zv)(uv)$

6.3. Для комбинаторов из задания 6.2 найти комбинаторы, которые представляют собой суперпозицию аппликаций комбинаторов $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{I}, \mathbf{K}, \mathbf{S}$. Выполнить проверку полученного результата, приведя его к β-нормальной форме.

6.4. Выполнив элиминацию λ-абстрактора, найти комбинаторы, которые представляют собой суперпозицию аппликаций комбинаторов $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{I}, \mathbf{K}, \mathbf{S}$ для следующих комбинаторов. Выполнить проверку полученного результата, приведя его к β-нормальной форме.

(a) $\lambda\, xyzu.\, xuyz$

(b) $\lambda\, xyzu.\, xy(yz)(zu)$

(c) $\lambda\, xyzuv.\, x\Big(y\big(z(uv)\big)\Big)$

(d) Комбинатор $\mathbf{Dec} = \lambda\, nfx.n\big(\lambda\, gh.h(gf)\big)(\lambda\, u.x)(\lambda\, u.u)$;

7. Литература

[1]. Барендрегт Х. Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. — М.: Мир, 1985. — 606 с.

[2]. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. — М.: Мир, 1994. — 396 с.

[3]. Вольфенгаген В. Комбинаторная логика в программировании. Вычисления с объектами в примерах и задачах. — Из-во «ЦентрЮрИнфоР», 2003. — 342 с.

[4]. Захарьящев М.В., Чагров А.В. Введение в теорию модальных и суперинтуиционистских пропозициональных логик. — Из-во ТвГУ, 1997. — 210 с.

[5]. Плиско В.Е., Хаханян В.Х. Интуиционистская логика. — Из-во МГУ, 2009. — 159 с.

[6]. Таланов В.А. Математическая логика и модели вычислений. — Из-во ННГУ, 1994. — 74 с.

[7]. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — Из-во «Высшая школа», 2008. — 384 с.

Дмитрий Сергеевич **Малышев**
Дмитрий Борисович **Мокеев**

ЭЛЕМЕНТЫ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЛОГИК И МОДЕЛЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского"
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.