

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского»

С.Н. Гурбатов  
И.Ю. Демин  
А.В. Клемина  
Н.В. Прончатов-Рубцов

**НЕЛИНЕЙНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВОЛНЫ  
В СРЕДАХ БЕЗ ДИСПЕРСИИ  
(часть 1)**

Учебное пособие

Рекомендовано Ученым Советом радиофизического факультета для аспирантов  
ННГУ, обучающихся по направлению 03.06.01 «Физика и астрономия»  
(направленности 01.04.06 «Акустика», 01.04.03 «Радиофизика») и магистрантов  
ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика»,  
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Нижний Новгород  
2016

УДК 534.22  
ББК 22.32  
Н 49

Н 49 Гурбатов С.Н., Демин И.Ю., Клемина А.В., Прончатов-Рубцов Н.В.  
**НЕЛИНЕЙНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ БЕЗ ДИСПЕРСИИ** (часть 1): учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016.  
– 97 с.

Рецензенты:

д.ф.-м.н., профессор кафедры общей физики Грибова Е.З.,  
к.ф.-м.н., заведующий кафедрой математические методы в радиофизике  
Дубков А.А.

Настоящее учебное пособие (УП) направлено на ознакомление студентов с нелинейными случайными волнами в средах без дисперсии. Обсуждаются основные идеи и методы решения нелинейных уравнений гидродинамического типа. Особое внимание уделено построению обобщенных решений нелинейных уравнений в средах без дисперсии. На примере двумерного уравнения КПЗ и трехмерного уравнения Бюргерса обсуждаются особенности поведения нелинейных волн без дисперсии.

УП предназначено для аспирантов и магистрантов радиофизического факультета ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Работа выполнена при частичной поддержке гранта Министерства образования и науки РФ (№ 3.820.2014/К - научно-исследовательская работа в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности).

Ответственный за выпуск:

председатель методической комиссии радиофизического факультета ННГУ,  
к.ф.-м.н., доцент **Н.Д. Миловский**  
зам. председателя методической комиссии радиофизического факультета  
ННГУ, д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 534.22  
ББК 22.32

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
Глава 1. Нелинейные уравнения 1-го порядка .....	6
Глава 2. Обобщенные решения нелинейных уравнений.....	21
Глава 3. Нелинейные уравнения второго порядка.....	34
Глава 4. Эволюции поля скорости в уравнении Бюргерса .....	47
Глава 5. Задачи и упражнения.....	78
Литература .....	96

## ВВЕДЕНИЕ

Теория нелинейных полей и волн – это обширная, находящаяся в непрерывном развитии, область математической физики. Она имеет многообразные физические приложения, от анализа нелинейных явлений в акустике, электродинамике и плазме, до исследования нелинейных процессов роста поверхностей и нелинейной гравитационной неустойчивости крупномасштабного (в масштабе скоплений Галактик) распределения вещества во Вселенной. Богатство возникающих при этом физических эффектов находит отражение в широком спектре математических методов, эффективных при изучении различных классов нелинейных полей и волн. В одной монографии невозможно дать стройный и в то же время сколько-нибудь полный обзор теории нелинейных полей и волн. По этой причине мы ограничимся ниже обсуждением лишь нелинейных волн гидродинамического типа в средах без дисперсии. Прежде всего, детально изучим свойства решений таких эталонных нелинейных уравнений волн в средах без дисперсии, как уравнения Римана, Бюргерса, Кардара-Паризи-Цванга. Помимо важности указанных уравнений для теории и приложений, анализ их решений позволяет детально проследить стадии развития типичных нелинейных эффектов, и, в первую очередь, нелинейное укручение, градиентную катастрофу и возникновение ударных волн. Чтобы теория нелинейных волн в средах без дисперсии не выглядела слишком абстрактной, изложение опирается на наглядные геометрические трактовки как самих уравнений, так и их решений, разностороннее обсуждение физического смысла найденных решений и используемых методов.

**В первой главе** последовательно излагается теория нелинейных волн, описываемых уравнениями в частных производных первого порядка. Подчеркивается универсальный характер основных «эталонных» нелинейных уравнений, и, прежде всего, уравнения простой волны – уравнения римановых волн. На основе этого уравнения подробно обсуждаются основные нелинейные эффекты: искажение формы профиля волн, сжатие и растяжение распределения невзаимодействующих частиц в потоках. Изложение иллюстрируется примерами, связанными с нелинейной акустикой, гидродинамикой и теорией нелинейного роста поверхностей.

**Во второй главе** рассматриваются основные принципы построения обобщенных решений нелинейных уравнений, таких как «многопоточковые» и разрывные решения. Детально обсуждаются принцип абсолютного максимума Олейник-Лакса и глобальный принцип Е-Рыкова-Синая. Излагаются геометрические методы построения обобщенных решений.

**В третьей главе** обсуждаются свойства решений регуляризованных уравнений нелинейной акустики, сводящихся к эталонному уравнению Бюргерса, находящему применение в самых разных областях физики и механики.

**В четвертой главе** обсуждаются ключевые понятия теории нелинейных волн без дисперсии: выход на линейную стадию, понятия U-волн и N-волн. Анализируется эволюция сложных и фрактальных сигналов, важных для понимания шумовых акустических волн.

**В пятой главе** рассмотрены решения задач по теории нелинейных волн.

В целом материал УП призван сформировать основы нелинейной волновой культуры, необходимой для решения научных и прикладных задач радиофизики и акустики.

# Глава 1. Нелинейные уравнения 1-го порядка

Основные закономерности нелинейных полей и волн гидродинамического типа проявляются уже в поведении решений простейших нелинейных уравнений в частных производных 1-го порядка.

## 1.1 Уравнение простой волны

Простейшим и вместе с тем ключевым уравнением теории нелинейных волн гидродинамического типа служит *уравнение Римана*. На его примере наглядней всего пояснить такие типично нелинейные эффекты, как укрупнение волны и возникновение градиентной катастрофы.

### Каноническая форма уравнения

Уравнением Римана (или *уравнением простой волны*) называют уравнение в частных производных 1-го порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

относительно функции  $u(x, t)$ , имеющее в разных приложениях разный геометрический, механический, экономический и т.д. смысл.

Умножив уравнение (1.1) на  $C'(u)$ , сведем его к эквивалентному, но более простому на вид, каноническому уравнению Римана:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

относительно новой функции  $v(x, t) = C(u(x, t))$ ,  $v(x, t = 0) = v_0(x)$ . Чтобы лучше освоить особенности решения уравнения Римана, дадим наглядную механическую интерпретацию решений этого уравнения.

Проще всего осмыслить свойства решений уравнения Римана на примере потока частиц, равномерно движущихся вдоль оси  $x$ . Пусть частица, расположенная в начальный момент  $t = 0$  в точке с координатой  $y$ , имеет скорость  $v_0(y)$ . Тогда движение частицы задано уравнениями:

$$X(y, t) = y + v_0(y)t, \quad V(y, t) = v_0(y). \quad (1.3)$$

Меняя  $y$ , получим законы движения остальных частиц потока. Обратим внимание, что помимо времени  $t$  здесь фигурирует аргумент  $y$  – начальная координата частицы. Такие координаты, жестко связанные с частицами потока, называют *лагранжевыми координатами*.

Обычно наблюдатель измеряет скорость потока в некоторой фиксированной точке с декартовой координатой  $x$ . Эти, более естественные для стороннего наблюдателя, координаты называют *эйлеровыми*. Отображение лагранжевых координат в эйлеровы описывается равенством

$$x = X(y, t). \quad (1.4)$$

В случае равномерно движущихся частиц это соотношение имеет вид:

$$x = y + v_0(y)t. \quad (1.5)$$

Пусть известно поле  $v(x, t)$  скорости частиц потока как функции эйлеровой координаты  $x$  и времени  $t$ . Если к тому же известен закон (1.4), отображения лагранжевых координат в эйлеровы, то зависимость поля скорости от лагранжевых координат задается формулой

$$V(y, t) = v(X(y, t), t). \quad (1.6)$$

В дальнейшем поля, задающие поведение частиц в лагранжевой системе координат, будем кратко называть *лагранжевыми*, а поля в эйлеровой системе координат – *эйлеровыми полями*. Так,  $v(x, t)$  – эйлерово поле скорости частиц, а  $X(y, t)$  – лагранжево поле эйлеровых координат частиц.

Из равномерности движения частиц следует, что скорость  $V(y, t)$  частицы с лагранжевой координатой  $y$  не зависит от времени, то есть удовлетворяет простейшему дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (1.7)$$

а ее координата подчиняется не менее очевидному уравнению

$$\frac{\partial X}{\partial t} = V \quad (1.8)$$

Уравнения (1.7), (1.8) есть не что иное как *характеристические уравнения* для уравнения в частных производных 1-го порядка (1.2). Чтобы восстановить по решению характеристических уравнений (1.7), (1.8) решение уравнения Римана, достаточно найти обратную к (1.4) функцию

$$y = y(x, t),$$

отображающую эйлеровы координаты в лагранжевы. Если она известна, то с учетом (1.3) решение уравнения Римана приобретает вид:

$$v(x, t) = V(y(x, t), t) = v_0(y(x, t)). \quad (1.9)$$

Подчеркнем, однозначная обратная функция  $y(x, t)$  существует, а формула (1.9) дает классическое решение уравнения Римана (1.2), лишь если отображение лагранжевых в эйлеровы координаты (1.4), (1.5) есть строго монотонно растущая функция  $y$ .

### Обсуждение решения уравнения Римана

Обсудим характерные особенности поведения решения уравнения Римана  $v(x, t)$  с течением времени и в зависимости от координаты  $x$ . Но прежде перечислим основные формы записи решения уравнения Римана. Заменяя в уравнении равномерного движения частицы (1.5)  $y$  на  $y(x, t)$

$$y(x, t) = x - v_0(y(x, t)) t \Rightarrow y(x, t) = x - v(x, t) t \quad (1.10)$$

и подставив правую часть полученного выражения в (1.9), приходим к неявной форме записи решения уравнения Римана

$$v(x, t) = v_0(x - v(x, t)t). \quad (1.11)$$

Из последнего равенства (1.10), после элементарных выкладок, вытекает еще более наглядная, форма записи решения уравнения Римана:

$$v(x, t) = \frac{x - y(x, t)}{t} \quad (1.12)$$

Ее смысл предельно ясен: скорость  $v$  равномерно движущейся частицы равна пути  $x - y$ , пройденному частицей к моменту  $t$ , деленному на время движения. В дальнейшем обнаружится более глубокий механический и геометрический смысл соотношения (1.12).

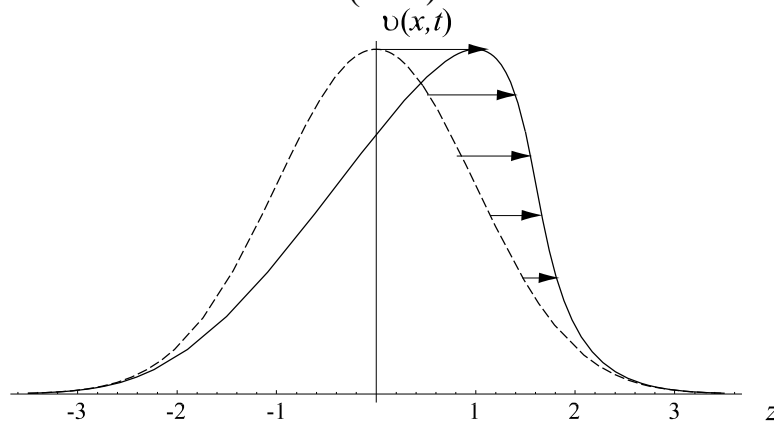


Рис. 1.1. Решение уравнения Римана в случае гауссова начального поля



При построении графика эйлера поля  $v(x, t)$  удобно опираться на лагранжевы поля, и строить  $v(x, t)$  параметрически:

$$x = y + v_0(y)t, \quad v = v_0(y). \quad (1.13)$$

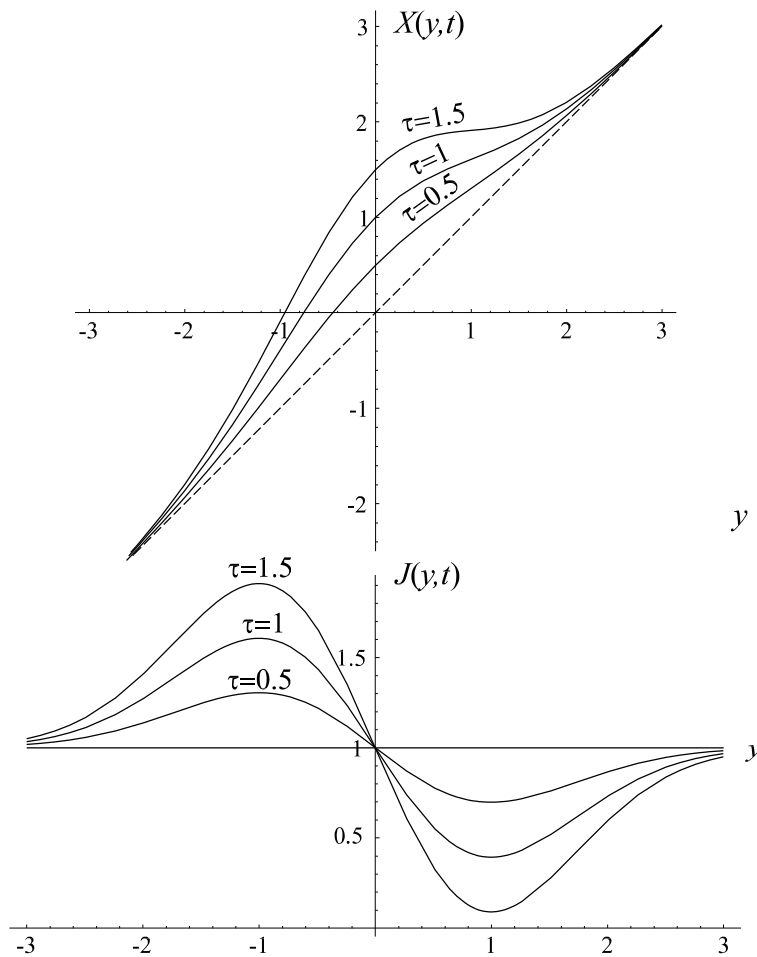
Именно так на рисунке 1.1 построено решение уравнения Римана в случае, когда начальный профиль поля скорости имеет гауссову форму

$$v_0 = V_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right) \quad (1.14)$$

На этом рисунке изображено поле скорости в безразмерных переменных

$$z = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{V_0}{l} t \quad (1.15)$$

в момент  $\tau = 1$ . Там же пунктиром дан график начальной скорости  $v_0(x)$ . Стрелками указаны смещения частиц за время  $\tau$ . Видно, что чем больше скорость частицы, тем на большее расстояние от исходного положения сместится частица к текущему моменту времени. Это ведет к укручению правого фронта поля  $v(x, t)$  и растяжению левого фронта.



**Рис. 1.2.** Закон движения частиц  $X(y, t)$  и отвечающее ему лагранжево поле расходимости  $J(y, t)$  в разные моменты времени. Видно, что в потоке возникают сжатые и разреженные участки, где  $J(y, t)$  отлично от единицы

### Сжатия и растяжения потока частиц

Укручение правого участка профиля поля скорости  $v(x, t)$  сопровождается сгущением частиц потока. Действительно, частицы слева на этом участке имеют большую скорость, чем частицы справа. В итоге быстрые левые частицы со временем догоняют более медленные правые частицы. Напротив, растяжение левого участка профиля  $v(x, t)$  ведет к разрежению потока. Количественно меру растяжения участков потока выражает якобиан, в одномерном случае равный:

$$J(y, t) = \frac{\partial X(y, t)}{\partial y} \quad (1.16)$$

Для равномерно движущихся частиц, закон движения которых задан уравнением (1.5), якобиан равен:

$$J(y, t) = 1 + v_0'(y)t. \quad (1.17)$$

Чем он больше при заданном  $y$ , тем более разрежен поток в окрестности частицы с лагранжевой координатой  $y$ . Поэтому назовем  $J(y, t)$  *расходимость* потока. График закона движения  $X(y, t)$  и отвечающей ему расходимости для равномерно движущихся частиц, эйлерово поле скорости которых удовлетворяет уравнению Римана (1.2) с начальным условием (1.14), изображены на рисунке 1.2.

Поле  $J(y, t)$  (1.16) – лагранжево поле расходимости. Отвечающее ему эйлерово поле расходимости, очевидно, равно:

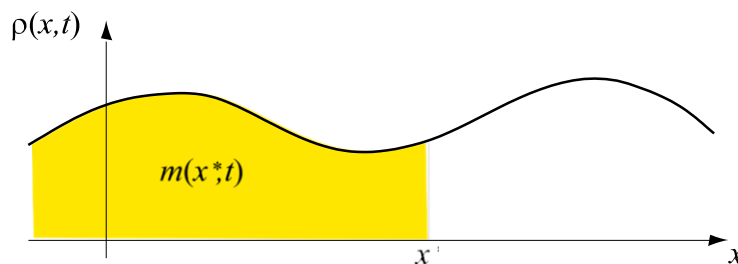
$$j(x, t) = J(y(x, t), t) \iff J(y, t) = j(X(y, t), t). \quad (1.18)$$

Если закон отображения эйлеровых в лагранжевы координаты  $y(x, t)$  известен, то поле расходимости можно определить более прямым путем, опираясь на геометрически очевидное соотношение:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{j(x, t)} \quad (1.19)$$

### Уравнение непрерывности

Если и дальше придерживаться механической трактовки решения уравнения Римана (1.2) как поля скорости потока равномерно движущихся частиц, то естественно спросить: как меняется во времени и пространстве их плотность  $\rho(x, t)$ ? Известно, что она удовлетворяет универсальному *уравнению непрерывности*, выражающему закон сохранения массы частиц потока. Выведем это уравнение, пользуясь способом, позволяющим лучше понять последующий анализ решений нелинейных уравнений в частных производных.



**Рис. 1.3.** Иллюстрация  $m(x^*, t)$  – массы частиц потока слева от точки  $x^*$

Пусть, для определенности, начальная плотность частиц потока  $\rho_0(x)$  такова, что масса частиц слева от любой точки  $x$

$$m_0(x) = \int_{-\infty}^x \rho_0(z) dz$$

ограничена. Изменение массы частиц слева от произвольной точки  $x$  опишем функцией  $m(x, t)$ . Подобно полю скорости  $v(x, t)$ , это эйлерово поле. Зная закон движения частиц  $X(y, t)$ , от эйлерова поля массы слева легко перейти к соответствующему лагранжеву полю

$$M(y, t) = m(X(y, t), t).$$

Последнее легко найти из наглядных физических соображений. Действительно, если к текущему моменту  $t$  частицы не совершали обгон (не менялись местами), то масса частиц слева любой точки с лагранжевой координатой  $y$  не зависит от времени:

$$M(y, t) = \int_{-\infty}^y \rho_0(z) dz = m_0(y) \quad (1.20)$$

Иначе говоря, лагранжево поле массы слева удовлетворяет уравнению

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

Эквивалентное ему уравнение эйлерова поля  $m(x, t)$  таково:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + v \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \quad (1.21)$$

Найдем теперь плотность частиц. В одномерном случае эйлерово поле плотности равно производной массы слева:

$$\rho(x, t) = \frac{\partial m(x, t)}{\partial x} \quad (1.22)$$

Следовательно, дифференцируя уравнение (1.21) почленно по  $x$ , придем к искомому одномерному варианту уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v\rho) = 0 \quad (1.23)$$

### Построение поля плотности

Чтобы найти решение уравнения непрерывности (1.23), выпишем эйлерово поле массы слева. Из (1.20) и связи лагранжевых и эйлеровых полей следует, что

$$M(y, t) = m_0(y) \Leftrightarrow m(x, t) = m_0(y(x, t)). \quad (1.24)$$

Дифференцируя последнее равенство по  $x$ , получаем:

$$\rho(x, t) = \rho_0(y(x, t)) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \quad (1.25)$$

или, с учетом (1.19),

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0(y(x, t))}{j(x, t)} \Leftrightarrow R(y, t) = \frac{\rho_0(y)}{J(y, t)} \quad (1.26)$$

Эти формулы имеют наглядный геометрический смысл: плотность потока в любой точке равна начальной плотности в окрестности частицы, попадающей в данную точку, деленной на степень сжатия частиц.

Отдельно обсудим плотность потока равномерно движущихся частиц, поле скорости  $v(x, t)$  которого подчиняется уравнению Римана, а  $y(x, t)$  задано равенством (1.10). При этом, как видно из (1.25), (1.10), плотность потока следующим образом выражается через решение уравнения Римана:

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - v(x, t)t) \left(1 - \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} t\right) \quad (1.27)$$

В частности, при однородной начальной плотности, то есть если  $\rho_0 = \text{const}$  – не зависит от  $x$ , плотность описывается соотношением

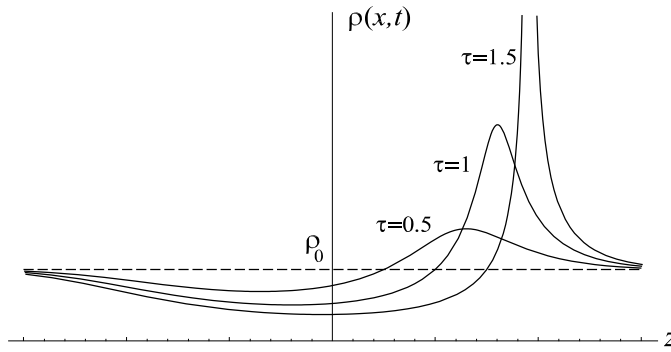
$$\rho(x, t) = \rho_0 \left(1 - \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} t\right) \quad (1.28)$$

демонстрирующим тесную связь между плотностью потока и укрупнением профиля его поля скорости.

Как и в случае с полем скорости, график плотности потока равномерно движущихся частиц удобно строить параметрически, пользуясь тем, что лагранжевы законы эволюции потока заданы в явном виде:

$$x = y + v_0(y)t, \quad \rho = \frac{\rho_0(y)}{1 + v'_0(y)t} \quad (1.29)$$

Так построены графики  $\rho(x, t)$  на рисунке 1.4.



**Рис. 1.4.** Плотность равномерно движущихся частиц при гауссовом начальном поле скорости (1.14) и постоянной начальной плотности  $\rho(x, t = 0) = \rho_0$

### Фурье-образы плотности и скорости

В приложениях часто важно знать не сами поля, а их спектры. Поэтому приведем выражения для пространственных Фурье-образов скорости и плотности. Найдем вначале Фурье-образ плотности:

$$\tilde{\rho}(\chi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\chi x} \rho(x, t) dx \quad (1.30)$$

Подставив в интеграл (1.30) найденное ранее решение уравнения непрерывности (1.25), будем иметь

$$\tilde{\rho}(\chi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\chi x} \rho(y(x, t)) dy(x, t)$$

Перейдя затем к интегрированию по лагранжевой координате, получим окончательно

$$\tilde{\rho}(\chi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\chi X(y, t)} \rho_0(y) dy \quad (1.31)$$

Более громоздкие выкладки, опирающиеся на ту же идею перехода в интервале Фурье к интегрированию по лагранжевым координатам, дают

$$\tilde{v}(\chi, t) = \frac{i}{2\pi\chi t} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-i\chi X(y, t)} - e^{-i\chi y}] dy \quad (1.32)$$

## 1.2 Уравнение роста линий

Из многочисленных применений нелинейных уравнений в частных производных 1 – го порядка обсудим: анализ роста поверхностей и линий. Это может быть напыляемая поверхность электронного чипа, волновой фронт световой волны и пожирающая лес линия лесного пожара

### Распространение лесного пожара

Пусть по лесу движется пожар. Чтобы математически описать процесс распространения пожара, будем считать поверхность леса плоской и введем на данной плоскости декартовы координаты  $(x, z)$ . Направим ось  $z$  в сторону преимущественного направления пожара. В итоге удастся описать линию фронта пожара функцией

$$z = h(x, t) . \quad (1.33)$$

Естественно полагать, что пожар распространяется перпендикулярно линии пожара  $h(x, t)$  со скоростью  $c$ . Это значит, что если выделить некоторую точку  $\{y, h(y, t = 0)\}$  на линии пожара в исходный момент  $t = 0$  и проследить ее движение по траектории, перпендикулярной линиям пожара, то скорость движения точки окажется равной  $c$ . Пусть координаты указанной точки меняются с течением времени по законам  $\{X(t), Z(t)\}$ . Назовем траекторию движения упомянутой точки *лучом*. Из сказанного ясно, что координаты луча удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{dX}{dt} = c \sin \vartheta \quad \frac{dZ}{dt} = c \cos \vartheta \quad (1.34)$$

где  $\vartheta$  – угол между лучом и осью  $z$ . Заметим далее, что вертикальная координата  $Z(t)$  луча выражается через линию пожара (1.33):

$$Z(t) = h(X(t), t) . \quad (1.35)$$

Подставив это равенство во второе уравнение (1.34), получим

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{dX}{dt} \frac{\partial h}{\partial x} = c \cos \vartheta$$

или, с учетом 1-го уравнения (1.34), придем к уравнению в частных производных относительно искомой линии пожара  $h(x, t)$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \sin \vartheta \frac{\partial h}{\partial x} = c \cos \vartheta$$

(1.36)

Казалось бы, уравнение незамкнуто, так как связывает две функции: линию пожара  $h(x, t)$  и  $\vartheta(x, t)$  – угол к оси  $z$  нормали к линии пожара. Однако его нетрудно замкнуть, используя очевидную геометрическую связь между линией  $h(x, t)$  и углом  $\vartheta$ :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\tan \vartheta$$

С учетом этого равенства уравнение (1.36) переписывается в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c / \cos \vartheta$$

(1.37)

И используя знания тригонометрии получим окончательно искомое уравнение:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}$$

(1.38)

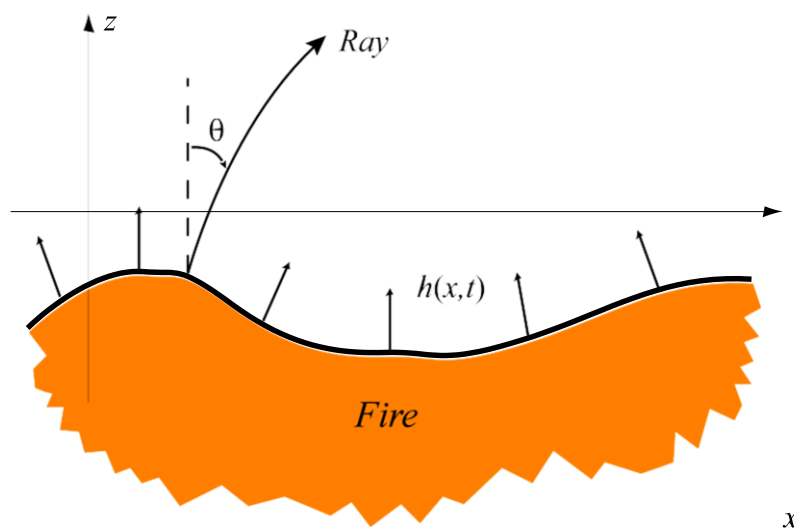


Рис. 1.5. Линия пожара и ее тенденция к росту

*Замечание:* Если в (1.38) взять скорость отрицательной ( $c < 0$ ), то получится уравнение не роста, а спадания линии  $h(x, t)$ . Соответственно уравнение (1.38) будет описывать, например, таяние льда в стакане воды, или коррозию корпуса океанского судна.

*Замечание:* Мы не зря назвали кривую  $\{X(t), Z(t)\}$ , перпендикулярную фронту пожара  $h(x, t)$ , лучом. Дело в том, что описанному выше закону распространения, перпендикулярно фронту с заданной скоростью, подчиняется волновой фронт оптической волны. Линии, всюду перпендикулярные волновым фронтам, есть, по определению, оптические лучи. Таким образом, (1.38) представляет собой



одномерный вариант уравнений, описывающих эволюцию волнового фронта оптических волн.

*Замечание:* Обычно оптические волны распространяются в некотором выделенном направлении – под малыми углами к нему. Если преимущественное направление оптической волны указывает ось  $z$ , то углы наклона лучей к оси  $z$  малы ( $\vartheta \ll 1$ ), и  $z$  вместо уравнения (1.38) пользуются более простым приближенным уравнением:

$$\Delta h = \frac{\partial h}{\partial t} = c + \frac{c}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2$$

Для плоской волны, распространяющейся точно вдоль оси  $z$ , это уравнение имеет простое решение:  $h = ct$ . Если нас не интересует абсолютное положение волнового фронта, а лишь его форма, можно исключить указанное тривиальное поступательное движение, введя новую функцию

$$w(x, t) = h(x, t) - ct. \quad (1.39)$$

Последняя удовлетворяет более эстетичному уравнению:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{c}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (1.40)$$

### Анизотропный рост

Введем новое обозначение

$$u(x, t) = - \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \quad (1.41)$$

Напомним,  $u = \tan \vartheta$  – характеризует направление роста поверхности. Поэтому назовем  $u(x, t)$  *полем наклонов*.

Иногда поверхность растет с разной скоростью в разных направлениях. Например, при распространении оптической волны в анизотропной среде, или при таянии ледников, когда темп таяния зависит от того, под каким углом к солнцу расположен участок ледниковой поверхности. Учтем анизотропию роста, полагая скорость зависящей от  $u$ , и перейдем от (1.37) к более общему уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \Phi(u), h(x, t = 0) = h_0(x) \quad (1.42)$$

где

$$\Phi(u) = c(u)\sqrt{1 + u^2}. \quad (1.43)$$

Приведем несколько примеров анизотропных поверхностей.

*Пример 1:* В безветренную зимнюю погоду снег вертикально падает на землю. При этом на площадку снежной поверхности площадью  $ds$ , находящуюся под углом  $\vartheta$  к зениту, за единицу времени выпадает количество снега, пропорциональное  $\cos\vartheta ds$ . Соответственно, скорость роста снежной поверхности в направлении  $\vartheta$  задается равенством:

$$c(u) = c\cos\vartheta = c/\sqrt{1 + u^2}. \quad (1.44)$$

Подставив это выражение в (1.43), получим, что  $\Phi = c = \text{const}$ , а уравнение роста поверхности (1.42) имеет тривиальное решение

$$h(x, z) = h_0(x) + ct, \quad (1.45)$$

согласно ему форма снежной поверхности в снегопад не меняется.

*Пример 2:* Возьмем более общую ситуацию, когда на поверхность осаждаются частицы, падающие с разных направлений. Пусть  $D(\vartheta)$  диаграмма направленности, задающая интенсивность потока падающих частиц под углом  $\vartheta$  к оси  $z$ . Тогда полная интенсивность частиц, падающих на площадку поверхности, наклоненную под углом  $\vartheta$  к оси  $z$ , равна

$$c(\vartheta) = \int_{\vartheta_-}^{\vartheta_+} D(\vartheta - \vartheta') \cos(\vartheta - \vartheta') d\vartheta' \quad (1.46)$$

В частности, обсужденному выше вертикально падающему снегу соответствует сингулярная диаграмма направленности  $D(\vartheta) = c\delta(\vartheta)$ .

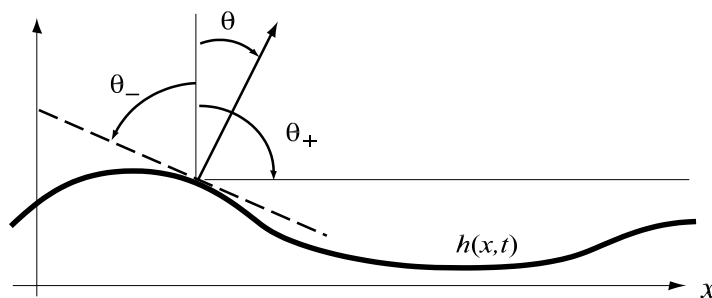


Рис. 1.6. Иллюстрация к определению пределов интеграла (1.46)

Обратим внимание, что пределы интеграла в (1.46) учитывают эффекты затенения исследуемого элемента кривой  $h(x, t)$  остальной ее частью и, вообще говоря, зависят от рельефа линии  $h(x, t)$ . Для определенности рассмотрим

участок данной линии, наклоненный к оси  $z$  под положительным углом  $\vartheta > 0$ . При этом, очевидно,

$$\min \vartheta_- = \vartheta - \frac{\pi}{2}, \max \vartheta_+ = \frac{\pi}{2}$$

(см. рис. 1.6). Асимметрия минимального и максимального углов диаграммы направленности связана с тем, что при выбранной геометрии ( $\vartheta > 0$ ) участка кривой  $h(x, t)$ , наименьший угол  $\min \vartheta_-$ , под которым на поверхность могут попасть частицы, ограничен положением касательной к данному участку, а  $\max \vartheta_+$  ограничен подстилающей поверхностью  $z = \text{const}$ . Для изотропного потока  $D = \text{const}$  и без учета возможного затенения линии  $h(x, t)$  ее удаленными участками, скорость роста равна:

$$c(\vartheta) = D \int_{\vartheta - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta' - \vartheta) d\vartheta' = D(1 + \cos \vartheta) \quad (1.47)$$

Четность полученного выражения означает, что оно справедливо как для рассматриваемого случая  $\vartheta > 0$ , так и для случая  $\vartheta < 0$ .

### Решение уравнения роста поверхности

Решим уравнение (1.42). Дифференцируя его по  $x$ , придем к уравнению для поля наклонов  $u(x, t)$  (1.41):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.48)$$

Здесь

$$C(u) = \frac{d\Phi(u)}{du} = \frac{d}{du} [c(u)\sqrt{1+u^2}] \quad (1.49)$$

Соответствующие (1.42), (1.48) характеристические уравнения таковы:

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = C(U), \frac{dU}{dt} = 0, \frac{dH}{dt} = \Lambda(U) \quad (1.50)$$

где поля вдоль характеристик обозначены заглавными буквами. Кроме того, здесь обозначено:

$$\Lambda(u) = \Phi(u) - uC(u) = -u^2 \frac{d}{du} \left( \frac{\Phi(u)}{u} \right)$$

(1.51)

и введена вспомогательная функция  $\tilde{X}(y, t)$ . Знак тильда поставлен для того, чтобы не путать данную функцию с функцией  $X(t)$ , удовлетворяющей первому уравнению (1.34):

$$\frac{dX}{dt} = V(u), V(u) = c \sin \vartheta = \frac{uc(u)}{\sqrt{1+u^2}} \quad (1.52)$$

и имеющей, в случае фронтов оптических волн, ясный геометрический смысл: горизонтальной координаты траектории луча, перпендикулярного волновому фронту. Чтобы отличить  $X(t)$  от  $\tilde{X}(y, t)$ , назовем последнюю функцию траекторией изоклин растущей поверхности  $h(x, t)$ . Решения уравнений (1.50) имеют вид:

$$U(y, t) = u_0(y), \tilde{X}(y, t) = y + C(u_0(y))t, H(y, t) = h_0(y) + \Lambda(u_0(y))t \quad (1.53)$$

Отсюда следует, что изоклины всегда прямые, в отличие от лучей, искривляющихся в анизотропной среде.

Как и в случае уравнения Римана, искомые поля  $h(x, t)$  и  $u(x, t)$  получаются из (1.53) подстановкой в  $H(y, t)$ ,  $U(y, t)$  функции  $y = \tilde{y}(x, t)$ , обратной к функции  $x = \tilde{X}(y, t)$ .

## Глава 2. Обобщенные решения нелинейных уравнений

Уравнения математической физики и, конечно, нелинейные уравнения в частных производных 1-го порядка возникают как результат тех или иных идеализаций. Этим достигается элегантность математических моделей, возможность с их помощью адекватно количественно предсказать важные аспекты разнообразных реальных явлений. Однако за допущенные идеализации рано или поздно приходится расплачиваться. Влияние неучтенных факторов постепенно, а иногда скачкообразно, становится доминирующим, и исходные модели оказываются неспособными описать действительный ход событий.

Естественный выход из подобных ситуаций состоит в переходе к более сложной, но и более адекватной модели изучаемого явления. Часто, однако, удается достичь желаемой цели, конструируя *обобщенные решения* исходных уравнений. Далее обсуждаются основные принципы построения обобщенных решений уравнений в частных производных 1-го порядка.

Прежде всего, это уравнение Римана для поля скорости  $v(x, t)$  одномерного потока равномерно движущихся частиц

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$v(x, t = 0) = v_0(x) \quad (2.1)$$

и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v\rho) = 0$$
$$\rho(x, t = 0) = \rho_0(x) \quad (2.2)$$

для плотности потока  $\rho(x, t)$ . Кроме того, важную роль в изложении будет играть уравнение для потенциала поля скорости

$$s(x, t) = \int^x v(x', t) dx'$$
$$(2.3)$$

Потенциал поля скорости удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 = 0$$
$$s(x, t = 0) = s_0(x). \quad (2.4)$$

Построения обобщенных решений для поля скорости и его потенциала будут геометрически более наглядны, если сопоставить их с обобщенными решениями уравнения роста линии, записанного в малоугловом приближении. Если  $h(x, t)$  – линия пожара или одномерного волнового фронта, бегущего со

скоростью  $c$  перпендикулярно  $h(x, t)$ , то в малоугловом приближении  $h(x, t)$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{c}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2$$

$$h(x, t = 0) = h_0(x), \quad (2.5)$$

а наклоны волнового фронта  $u(x, t) = -\frac{\partial h}{\partial x}$  подчиняются уравнению, родственному уравнению Римана

$$\frac{\partial u}{\partial t} + cu \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(x, t = 0) = u_0(x). \quad (2.6)$$

Приведем еще уравнение для нелинейной акустической волны (каноническое уравнение Римана) для поля  $p(z, v)$ :

$$\frac{\partial p}{\partial z} + p \frac{\partial p}{\partial v} = 0 \quad (2.7)$$

Обсуждение обобщенных решений нелинейных уравнений в частных производных 1-го порядка начнем с анализа *многопоточковых решений*.

В дальнейшем построения обобщенных решений будем существенно опираться на связь лагранжевой и эйлеровой  $x$  координат:

$$x = X(y, t) = y + v_0(y)t \quad (2.8)$$

Будем считать, что  $v_0(x)$  — дифференцируемая функция, производная которой ограничена снизу значением  $-u_{\min}$ :  $v_0'(x) \geq -u_{\min}$ .

Тогда в интервале времени  $0 < t < t_n$ , где  $t_n = 1/u_{\min}$ , существует обратная к (2.8) функция  $y = y(x, t)$ .

При этом решение уравнения Римана (2.8) записывается в виде

$$v(x, t) = \frac{x - y(x, t)}{t} \quad (2.9)$$

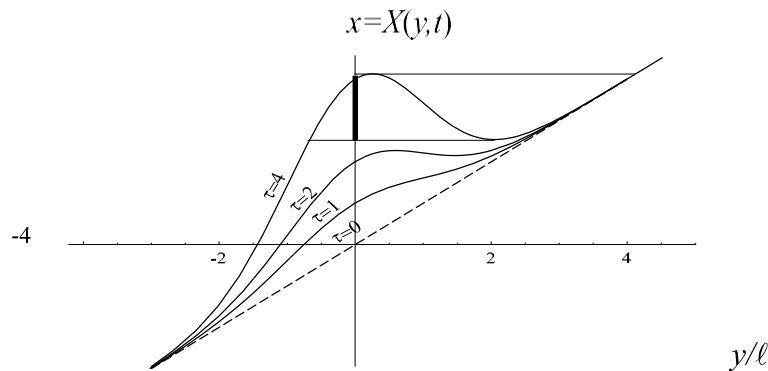
означающем, что скорость потока в текущий момент  $t$  и в точке  $x$  равна скорости попавшей в эту точку равномерно движущейся частицы.

Момент  $t_n$  называют *моментом опрокидывания волны*. При  $t > t_n$  отображение лагранжевых в эйлеровы координаты (2.8) перестает быть всюду монотонно растущим. В терминах потока частиц это значит, что одни частицы обгоняют другие, а в некоторые участки оси  $x$  попадают частицы с разными лагранжевыми (начальными) координатами  $y$ . Иначе говоря, на оси  $x$  образуются участки *многопоточкового движения*.

Возникновение многопоточности удобно проследить на графике отображения лагранжевых в эйлеровы координаты  $x = X(y, t)$  (2.8) (см. рис.2.1). Он построен для гауссова начальнгоо поля скорости

$$v_0(x) = V_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right) \quad (2.10)$$

при разных значениях безразмерного времени  $\tau = V_0 t / l$ . При начальном поле (2.10) многопоточность имеет место, если  $\tau_n \geq \sqrt{e} \approx 1.65$ .



**Рис. 2.1.** Отображения лагранжевых в эйлеровы координаты потока равномерно движущихся частиц для значений безразмерного времени  $\tau = 1, 2, 4$ . Жирным отрезком на оси  $x$  выделен интервал многопоточности при  $\tau = 4$

Немонотонность отображения  $x = X(y, t)$  при  $t > t_n$  влечет неоднозначность обратной функции  $x = y(x, t)$ . Иными словами, при  $t > t_n$  на оси  $x$  имеются участки, где  $y(x, t)$  имеет не одно, а сразу  $n$  значений

$$\{y_1(x, t), y_2(x, t), \dots, y_n(x, t)\}.$$

Пусть  $x \in [x_1, x_2]$  – интервал многозначности отображения  $y(x, t)$ . Подставляя разные ветви многозначной в интервале  $[x_1, x_2]$  функции  $y(x, t)$  в выражение для поля скорости (2.9), получим многопоточное поле  $v(x, t)$ , принимающее в интервале многозначности  $n$  значений:

$$v(x, t) = \{v_1(x, t), v_2(x, t), \dots, v_n(x, t)\}, \quad v_i(x, t) = \frac{x - y_i(x, t)}{t} \quad (2.11)$$

Помимо поля скорости, при  $t > t_n$  становится многопоточковым и поле плотности, каждая ветвь которого

$$\rho_i(x, t) = (-1)^{i-1} \rho_0(y_i(x, t)) \frac{\partial y_i(x, t)}{\partial x} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.12)$$

задает плотность частиц соответствующего потока. Множитель  $(-1)^{i-1}$  учитывает чередование знаков производной  $\partial y_i(x,t)/\partial x$  в потоках, обусловленное сменой порядка следования частиц, и обеспечивает выполнение физического требования неотрицательности плотности потоков.

Многопотоковые решения естественны применительно к потокам невзаимодействующих частиц и оптическим волнам. С позиции же классической математики они не могут быть решениями дифференциальных уравнений, так как многопотоковости предшествует градиентная катастрофа: сингулярное поведение пространственной производной  $\partial v(x,t)/\partial x$  решения Римана при  $t \rightarrow t_n$ . В момент опрокидывания поле  $v(x,t)$  становится недифференцируемым по крайней мере в одной точке и не может уже служить решением дифференциального уравнения. Градиентная катастрофа сопровождается бесконечным сжатием потока в точке опрокидывания и обращением плотности в этой точке в бесконечность.

### Слабые решения нелинейных уравнений 1-го порядка

*Слабыми (weak) решениями* нелинейных уравнений в частных производных 1-го порядка называют функции, удовлетворяющие упомянутым уравнениям всюду, где существуют производные данных функций, и имеющие разрывы (самих функций или их производных) вдоль некоторых кривых в  $\{x^*(t)\}$  плоскости  $(x, t)$ . Форму и положение кривых  $\{x^*(t)\}$  находят, опираясь на интегральные законы сохранения и другие требования, накладываемые на исследуемые поля. Иногда, для определения единственно нужного слабого решения поставленной задачи, бывает достаточно привлечь наглядные геометрические аргументы. С примера подобного рода начнем обсуждение слабых решений.

Рассмотрит задачу о лесном пожаре. Если огонь бежит преимущественно вдоль оси  $z$ , справедливо малоугловое приближение, а линия пожара  $h(x, t)$  подчиняется уравнению (2.5). Воспользуемся заменой  $v=cu$ ,  $s=-ch$ . Она выражает фронт пожара  $h(x, t)$  и его наклоны  $u(x, t)$  через поля  $s(x, t)$  и  $v(x, t)$ . Последние имеют естественную интерпретацию на языке потоков равномерно движущихся частиц. Применительно же к лесным пожарам, переход от  $h$  к  $s$  означает, что пожар бежит против оси  $z$ . Иначе говоря, к моменту  $t$  сгорело все, что находилось выше линии  $s(x, t)$ .

Найдем линию  $s(x, t)$  бегущего вниз пожара, решив уравнения (2.1), (2.4) методом характеристик. Перепишем эти уравнения в более единообразной форме:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{2} v^2$$

$$s(x, t=0) = s_0(x)$$



$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$v(x, t=0) = v_0(x) \tag{2.13}$$

Отвечающие им характеристические уравнения имеют вид:

$$\frac{dX}{dt} = V, \quad \frac{dV}{dt} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} V^2$$

Выпишем уже хорошо знакомые решения перечисленных уравнений:

$$X(y, t) = y + v_0(y)t, V(y, t) = v_0(y), S(y, t) = s_0(y) + 1/2 v_0^2(y)t. \tag{2.14}$$

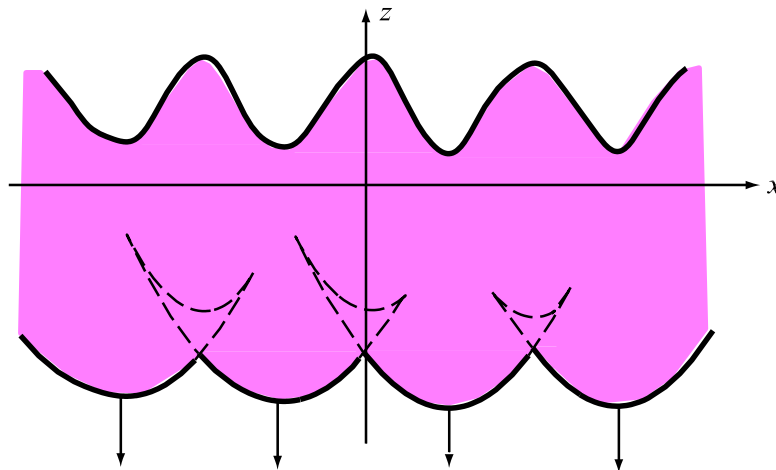
Соответствующие эйлеровы поля  $s(x, t)$  и  $v(x, t)$  удобно выразить через отображение  $y(x, t)$ , обратное отображению  $x = X(y, t)$ :

$$s(x, t) = s_0(y(x, t)) + \frac{(y(x, t) - x)^2}{2t}, \quad v(x, t) = \frac{x - y(x, t)}{t} \tag{2.15}$$

Типичный график линии лесного пожара  $s(x, t)$ , построенный параметрически с помощью лагранжевых полей:

$$x = X(y, t) = y + v_0(y)t, \quad s = S(y, t) = s_0(y) + 1/2 v_0^2(y)t, \tag{2.16}$$

дан на рисунке 2.2.



**Рис. 2.2.** Начальная линия пожара  $s_0(x)$  (выше) и фронт огня  $s(x, t)$  в текущий момент времени (ниже). Закрашена область выжженной земли между начальной и текущей линиями пожара. Чтобы получить график обобщенного слабого решения уравнения линии пожара, надо отбросить верхние участки многозначного графика  $s(x, t)$

График  $s(x, t)$  дан в момент времени, когда функция  $s(x, t)$  уже многозначна. Применительно к фронтам оптических волн, многозначность  $s(x, t)$  ничему не противоречит. Она означает лишь, что имеются отставшие участки волнового

фронта, движущиеся по области, уже пройденной другими его участками. В другой физической ситуации, когда  $s(x, t)$  – линия лесного пожара, она должна быть однозначной. Действительно, любую область леса пожар выжигает лишь раз, и отставших линий пожара не может быть. Для них просто нет горючего материала. Поэтому, если мы намерены отыскать действительный фронт огня с помощью решения (2.4), надо определить обобщенное (слабое) решение данного уравнения, с помощью формулы

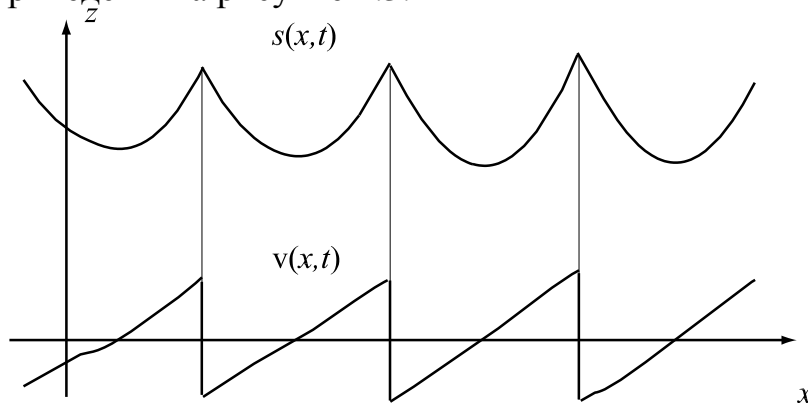
$$s_w(x, t) = \min_i \left\{ s_0(y_i(x, t)) + \frac{(y_i(x, t) - x)^2}{2t} \right\} \quad (2.17)$$

где минимум ищется на множестве всех значений многозначного отображения  $y(x, t)$  в заданной точке  $x$  и момент времени  $t$ .

Соответствующее разрывное слабое решение уравнения Римана находится по формуле

$$v_w(x, t) = \frac{x - y_w(x, t)}{t} \quad (2.18)$$

где  $y_w(x, t)$  – значение многозначной функции  $y(x, t)$ , при котором функция  $s(x, t)$  (2.15) принимает минимальное значение. Графики типичных слабых решений  $s(x, t)$  и  $v(x, t)$  приведены на рисунке 2.3.



**Рис. 2.3.** Пилообразное слабое решение (2.18) уравнения Римана (внизу) и кусочно-гладкое слабое решение (2.17) уравнения (2.4) (вверху)

Приведенные выше слабые решения  $s_w(x, t)$  и  $v_w(x, t)$ , полностью устраивая пожарника, обладают, с точки зрения математика, существенным изъяном: они заставляют манипулировать многозначной функцией  $y(x, t)$ . Поэтому поищем другую, равносильную описанной выше, процедуру построения слабых решений  $v_w(x, t)$  и  $s_w(x, t)$ , оперирующую однозначными функциями. Чтобы достичь желаемой цели, расширим число аргументов исследуемых функций. А именно, возьмем отображение  $x = y + v_0(y)t$ , зависящее от двух аргументов  $y, t$ , и сконструируем на его основе функцию трех аргументов

$$R(y; x, t) = X(y, t) - x = v_0(y)t + (y - x). \quad (2.19)$$

График этой функции в зависимости от  $y$ , при фиксированных  $x$  и  $t$ , проходит через нуль в точках  $\{y_i(x, t)\}$  – значениях многозначного (в общем случае) отображения эйлеровых в лагранжевы координаты  $y = y(x, t)$ . Введем еще одну вспомогательную функцию

$$G(y; x, t) = \int^y R(z, x, t) dz = \int^y [X(z, t) - x] dz \quad (2.20)$$

с точностью до произвольной постоянной, равную  $G(y; x, t) = s_0(y)t + 1/2(y - x)^2$ , где  $s_0(x)$  начальный потенциал (2.3) поля  $v(x, t)$ .

Будем далее считать  $G(y; x, t)$  непрерывной функцией аргумента  $y$ , зависящей от  $x$  и  $t$  как от параметров. Отметим заложенное при построении замечательное свойство функции  $G(y; x, t)$ . Оно состоит в том, что координата  $y_i(x, t)$  каждого ее экстремума, в том числе и абсолютного минимума, совпадает с одним из значений отображения  $y = y(x, t)$ . Само же абсолютно минимальное значение  $G(y; x, t)$  равно действительной линии пожара (2.17). В результате, придем к следующему алгоритму построения слабых решений  $v_w(x, t)$  и  $s_w(x, t)$ : Они определяются по формулам:

$$s_w(x, t) = \frac{1}{t} G(y_w(x, t), x, t) = s_0(y_w(x, t)) + \frac{(y_w(x, t) - x)^2}{2t} \quad (2.21)$$

$$v_w(x, t) = \frac{x - y_w(x, t)}{t} \quad (2.22)$$

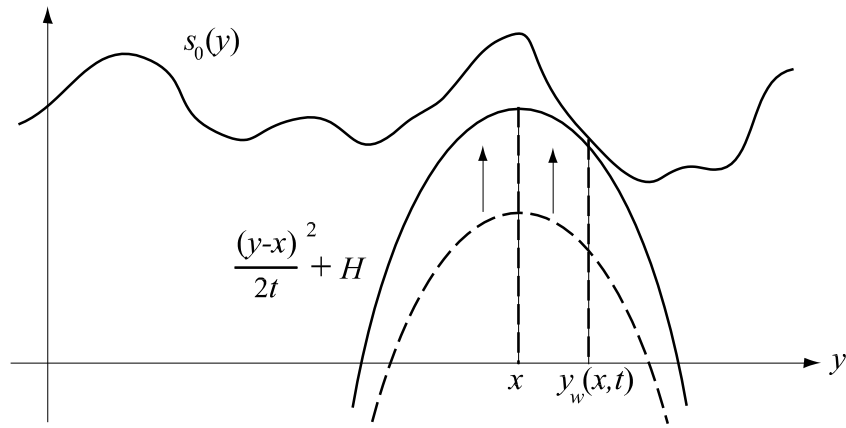
где  $y_w(x, t)$  – координата абсолютного минимума функции  $G(y; x, t)$ .

Это и есть *принцип абсолютного минимума* Олейник-Лэкса. Он определяет разрывное отображение  $y = y_w(x, t)$  эйлеровых в лагранжевы координаты, подстановка которого в правые части равенств (2.21), (2.22) дает искомые слабые решения.

Принцип абсолютного минимума нагляден: согласно ему, чтобы найти координату  $y_w(x, t)$  абсолютного минимума функции  $G(y; x, t)$ , надо поднимать, увеличивая  $H$  из  $-\infty$ , параболу

$$P(y; x, t) = -\frac{(y - x)^2}{2t} + H \quad (2.23)$$

до первого касания с графиком начального потенциала  $s_0(y)$ . Координата  $y_w(x, t)$  точки первого касания и будет искомой координатой абсолютного минимума функции  $G(y; x, t)$ , а найденные с ее помощью поля (2.21), (2.22) – искомыми слабыми решениями. Описанная геометрическая процедура изображена на рисунке 2.4.



**Рис. 2.4.** Отыскание координаты абсолютного минимума функции  $G(y; x, t)$ . Поднимая параболу  $P$  с центром в точке  $x$ , находим координату  $y_w(x, t)$  точки ее первого касания с графиком начального потенциала  $s_0(y)$

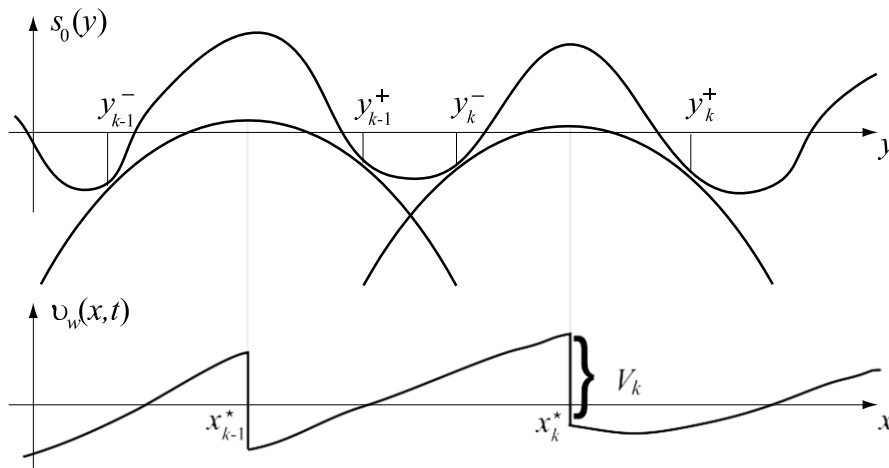
Обратим внимание, что центром параболы (2.23) служит эйлерова координата  $x$ , а точка касания параболы с начальным потенциалом  $s_0(y)$  дает соответствующую лагранжеву координату  $y_w(x, t)$ . Таким образом, пара указанных точек  $\{x, y_w(x, t)\}$  геометрически иллюстрирует связь между лагранжевой и эйлеровой координатами.

Заметим еще, что достаточно поднять параболу (2.23) до первого касания с начальным потенциалом всего один раз, а затем, меняя  $x$ , скользить по кривой  $s_0(y)$ , отслеживая движение точки касания  $y_w(x, t)$ .

Характер скольжения параболы по начальному потенциалу качественно различен при разных  $t$ . Пока  $0 < t < t_n$ , ветви параболы круто уходят вниз, а сама параболола, при любых  $x$ , имеет лишь одну точку касания с графиком  $s_0(y)$ . С ростом  $t$  параболола становится все более пологой. В итоге, при  $t > t_n$  найдутся такие  $x = x_k^*$ , при которых параболола касается кривой  $s_0(y)$  сразу в двух точках, с координатами  $y_k^-(x, t)$  и  $y_k^+(x, t)$ . Малое шевеление  $x$  от  $x_k^* - 0$  до  $x_k^* + 0$  ведет к скачку функции  $y_w(x, t)$ . Вслед за  $y_w(x, t)$  становится скачкообразным и поле  $v_w(x, t)$  (2.22). Таким образом, точка двойного касания параболы  $P$  (2.23) и начального потенциала  $s_0(y)$  задает положение разрыва слабого решения  $v(x, t)$  уравнения Римана, а расстояние между координатами двойного касания равно величине разрыва

$$V_k = v_w(x_k^* - 0, t) - v_w(x_k^* + 0, t) = \frac{y_k^+ - y_k^-}{t} \quad (2.24)$$

Пример критических парабол, задающих все параметры разрывов слабого решения уравнения Римана, приведен на рисунке 2.5.



**Рис. 2.5.** График начального потенциала  $s_0(y)$  (вверху) и двух критических парабол. Внизу дан график слабого решения уравнения Римана, координаты разрывов которого совпадают с центрами критических парабол

### Глобальный принцип

Сконструируем разрывное поле скорости одномерного потока неупруго сталкивающихся частиц. Пусть по оси  $x$  равномерно движутся  $n$  материальных точек, начальные (в момент  $t = 0$ ) координаты, скорости и массы которых равны  $\{x_k, v_k, m_k\}$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Сталкиваясь, частицы слипаются по закону абсолютно неупругих столкновений. Это значит, что сохраняются суммарная масса и импульс слипшихся частиц. Пусть далее известно, что за время  $T$  частицы слипнутся в одну макрочастицу. Требуется найти ее координату и скорость в произвольный момент времени  $t > T$ .

Решение этой задачи тривиально и основано на том общеизвестном факте, что в отсутствии внешних сил центр масс частиц, обозначим его  $x^*(t)$ , движется равномерно и прямолинейно:

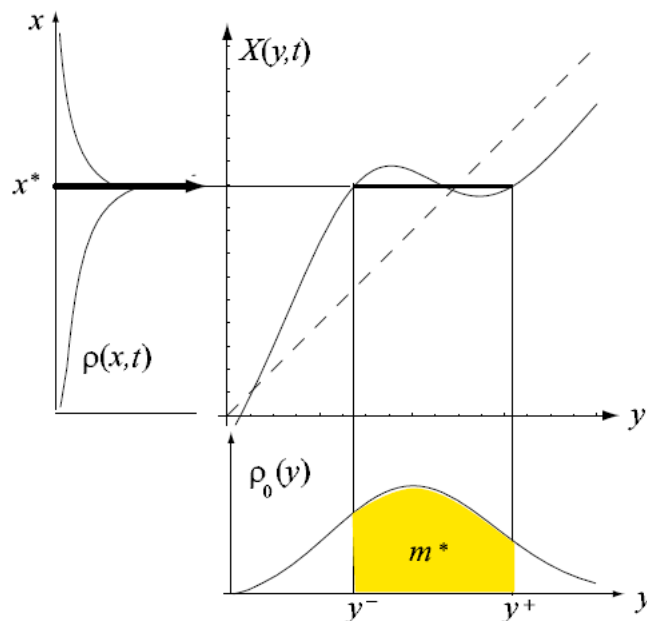
$$x^*(t) = x_c + v^*t. \quad (2.25)$$

Здесь  $x_c$  — начальный центр масс, равный  $x_c = \frac{1}{m^*} \sum_{k=1}^n m_k x_k$ ,  $v^*$  — скорость, определяемая из закона сохранения импульса:  $v^* = p^*/m^*$ . Сюда вошли полная масса частиц и их полный импульс. Очевидно, если все частицы сольются в одну, то ее положение совпадет с центром масс, а сама она будет двигаться по закону (2.25).

Теперь возьмем поток равномерно движущихся по оси  $x$  микрочастиц. Зависимость начальной скорости частиц от координаты  $x$  задана функцией  $v_0(x)$ , а начальная плотность равна  $\rho_0(x)$ . Найти поля скорости  $v(x, t)$  и плотности  $\rho(x, t)$  частиц в произвольный момент  $t > 0$ , при условии, что микрочастицы слипаются при столкновениях с сохранением суммарного импульса.

Проблема отыскания полей скорости и плотности одномерного потока неупруго слипающихся частиц имеет красивое решение, выраженное *глобальным принципом (E-Rykov-Sinai principle)*. Это решение переключается с решением предыдущей задачи в том смысле, что для нахождения полей  $v(x, t)$  и  $\rho(x, t)$  в любой момент времени  $t > 0$  не требуется знания предыстории движения частиц потока в интервале времени  $[0, t]$ .

Приступим к анализу поля скорости одномерного потока неупруго слипающихся частиц. Пока столкновения отсутствуют, то есть до момента  $t_n$ , поля скорости и плотности потока удовлетворяют в классическом смысле уравнению Римана (2.1) и уравнению непрерывности (2.2), а движение частиц описывается отображением (2.8). На временах  $t > t_n$  в отображении  $x = X(y, t)$  появляются участки немонотонности, означающие, что некоторые частицы поменялись местами. Такой обгон разрешен, если роль частиц играют автомобили, движущиеся по разным полосам вдоль оси  $x$ , указывающей направление дороги. Если же частицы движутся по одной линии, то вместо обгона происходит столкновение. Пусть частицы неупругие, тогда при столкновении они слипаются, а затем движутся вместе с сохранением общего импульса.



**Рис. 2.6.** Отображение  $X(y, t)$  лагранжевых в эйлеровы координаты, а также начальная и текущая плотности потока неупруго сталкивающихся частиц. Площадь закрашенной области равна массе  $m^*$ , расположенной в точке  $x^*$  макрочастицы. Ее сингулярная плотность изображена жирной стрелкой

Слипание частиц учитывают подобно тому, как это делалось для линии пожара или нелинейной акустической волны: участки немонотонности отображения (2.8) отсекают горизонтальными отрезками, имеющими здесь прозрачный механический смысл. Все частицы, расположенные вначале внутри

интервала  $[y^+(t), y^-(t)]$ , границами которого служат проекции концов отсекающего отрезка на ось  $y$ , склеиваются в одну макрочастицу в точке с координатой  $x^*(t)$  – проекцией отрезка на ось  $x$  (см. рис. 2.6). Поле скорости при этом составлено из гладких (при гладком начальном условии  $v_0(x)$ ) кусков, описывающих равномерное движение еще не слипшихся частиц, и точек разрыва – положениях макрочастиц.

Единственная, но ключевая проблема состоит здесь в определении закона движения  $x^*(t)$ , возникших за счет столкновений макрочастиц. В исследуемой ситуации на движение макрочастиц должна влиять начальная плотность. Меняя начальную плотности потока  $\rho_0(x)$ , меняется скорость микрочастицы, а значит и ее положение на оси  $x$ .

Существует родственный принципу абсолютного минимума глобальный принцип, позволяющий и здесь простыми геометрическими построениями определить положения макрочастиц, а вместе с ними и обобщенные поля скорости  $v(x, t)$  и плотности  $\rho(x, t)$  в произвольный момент времени  $t > 0$ .

Подобно принципу абсолютного минимума, глобальный принцип сводится к отысканию координаты абсолютного минимума некоторой функции аргумента  $y$ , зависящей от  $x$  и  $t$  как от параметров:

$$S(y; x, t) = \int_{y_0}^y [X(z, t) - x] \rho_0(z) dz \quad (2.26)$$

Здесь  $X(y, t)$  – отображение (2.8) лагранжевых в эйлеровы координаты потока невзаимодействующих, равномерно движущихся, частиц, а  $y_0$  – произвольная константа. При обсуждении физического смысла глобального принципа положим ее равной  $y_0 = -\infty$ . Кроме того, будем полагать, что  $S(y; x, t)$  – непрерывная функция всех аргументов. Сформулируем глобальный принцип. В качестве значения  $y_w(x, t)$  отображения, определяющего слабое решение уравнения Римана

$$v_w(x, t) = \frac{x - y_w(x, t)}{t} \quad (2.27)$$

берут координату абсолютного минимума по  $y$  функции  $S(y; x, t)$ .

$$x^*(t) = x_c(t) + v^*(t)t, \text{ где}$$

$$x_c(t) = \frac{1}{m^*(t)} \int_{y^-(t)}^{y^+(t)} y \rho_0(y) dy \quad (2.28)$$

Соотношение (2.28) задает движение центра масс частиц, первоначально (при  $t = 0$ ) находившихся в интервале  $[y^-(t), y^+(t)]$ . Если эти частицы к моменту

времени  $t$  слились в одну макрочастицу, то равенство (2.28) заодно описывает движение данной макрочастицы. Таким образом, глобальный принцип устраняет немонотонность отображения  $X(y, t)$  и помещает в поле скорости (2.27) разрывы так, что они движутся по закону неупруго слипшихся частиц.

*Замечание:* Глобальный принцип переходит в принцип абсолютного минимума, если начальная плотность всюду постоянна:  $\rho_0(x) \equiv \rho_0$ . Таким образом, слабое решение уравнения Римана, построенное с помощью принципа абсолютного минимума, можно трактовать как поле скорости первоначально однородного потока неупруго слипающихся частиц.

### Решения уравнения непрерывности

Теперь представим соответствующие обобщенные решения уравнения непрерывности для плотности частиц потока. Поскольку при построении обобщенной плотности будут использованы интегральные законы сохранения, уместно анализировать не плотность, а ее интегральную характеристику: массу частиц слева от произвольной точки с эйлеровой координатой  $x$ :

$$m(x, t) = \int_{-\infty}^x \rho(x', t) dx' \quad (2.29)$$

На интервале времени  $t \in (0, t_n)$ , пока движение еще однопотокное, лагранжево поле  $M(y, t)$  не зависит от времени задается выражением  $m = M(y) = \int_0^y \rho_0(z) dz$ . Это означает, в свою очередь, что эйлерово поле  $m(x, t)$  подчиняется уравнению

$$\frac{\partial m}{\partial t} + v \frac{\partial m}{\partial x} = 0, \quad m(x, t = 0) = \int_{-\infty}^x \rho_0(x') dx = M(x) \quad (2.30)$$

Подставив в  $M(y)$  вместо  $y$  найденное с помощью глобального принципа отображение  $y_w(x, t)$ , придем к обобщенному решению уравнения (2.30):

$$m(x, t) = M(y_w(x, t)). \quad (2.31)$$

Оно полностью согласуется с законами физики. В частности, при переходе точки разрыва  $x^*$  отображения  $y_w(x, t)$ , масса слева скачком меняется на массу находящейся в этой точке макрочастицы

$$m^* = \int_{y^-}^{y^+} \rho_0(z) dz \quad (2.32)$$

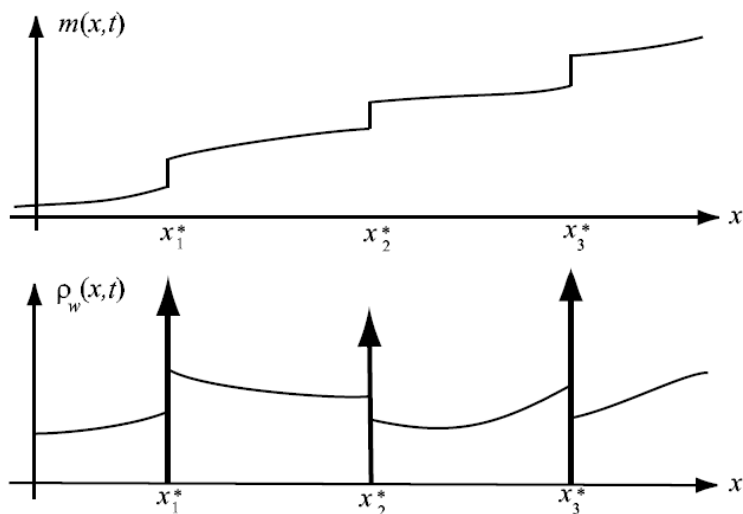
при  $x \rightarrow \infty$ , когда  $y_w(x, t) \rightarrow \infty$ , обобщенная масса слева  $m(x, t)$  стремится к полной массе частиц потока.



Искомое обобщенное решение уравнения непрерывности можно записать в виде

$$\rho_w(x, t) = \sum_k m_k^*(t) \delta(x_k^*(t) - x) + \rho_c(x, t) \quad (2.33)$$

где суммирование ведется по всем точкам  $\{x^*\}$  разрывов отображения  $y_w(x, t)$ , множители перед дельта-функциями  $\{m_k^*\}$  равны массам соответствующих макрочастиц, а последнее слагаемое описывает непрерывную плотность равномерно движущихся микрочастиц в промежутках между макрочастицами. График, схематически изображающий обобщенное поле плотности потока неупруго сталкивающихся частиц, изображен на рис. 2.7.



**Рис. 2.7.** Обобщенная масса слева (вверху) и плотность потока неупруго слипающихся частиц. Жирными стрелками внизу изображены дельта-функции, описывающие сингулярную плотность макрочастиц

## Глава 3. Нелинейные уравнения второго порядка

### Регуляризация нелинейных уравнений

Ранее было показано, что описание нелинейных процессов ведет, в рамках нелинейных уравнений в частных производных 1-го порядка, к градиентной катастрофе. Конечно, это лишь математическая катастрофа, означающая крах классических решений упомянутых уравнений. Данное противоречие между математикой и реальной жизнью было преодолено конструированием слабых решений. Однако физики не всегда ими довольны. Базируясь на слишком глобальных принципах, они не способны раскрыть тонкие детали и механизмы формирования, присущих слабым решениям, особенностей. Имеется еще один подход к проблеме градиентной катастрофы. Он состоит в *регуляризации уравнений*: введении дополнительных членов, содержащих производные высших порядков. Последние препятствуют развитию градиентной катастрофы, тем самым продлевая жизнь классических решений. Регуляризованные уравнения ценны еще и тем, что явно вводят в рассмотрение параметры (коэффициенты при старших производных), имеющие ясный для приложений смысл. Все это делает регуляризованные уравнения важным инструментом анализа реальных явлений.

### Уравнение Кардара-Паризи-Цванга

Возьмем некоторую линию  $z = h(x, t)$ , растущую из-за прилипания к ней налетающих сверху микрочастиц. Ясно, что если интенсивность потока частиц с разных направлений одинакова, а углы между нормалью к линии и осью  $z$  малы, то в малоугловом приближении уравнение линии сводится к

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{c}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \quad (3.1)$$

Здесь  $c$  – скорость роста линии в перпендикулярном к ней направлении. В дальнейшем, для простоты выкладок, будем полагать  $c = 1$ , восстанавливая скорость  $c$  в ее правах лишь там, где это необходимо для понимания свойств роста линии.

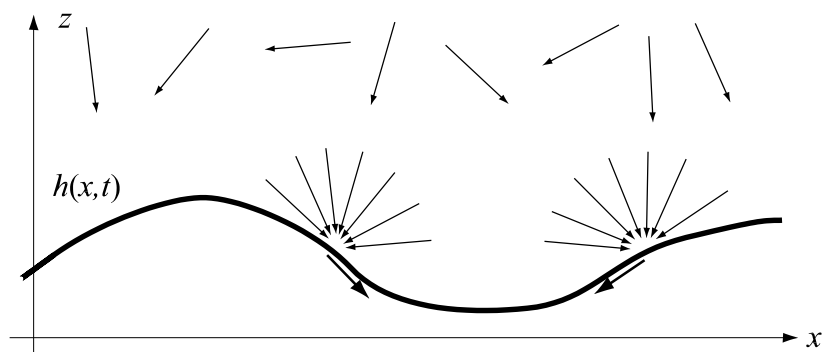
При выводе уравнения (3.1) подразумевалось, что микрочастицы прилипают к линии. В реальности же, попав на нее, микрочастицы могут двигаться вдоль линии, к примеру, сползая с крутого склона под действием силы тяжести. Учет возможное движение частиц, введя в уравнение (3.1) дополнительное слагаемое:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \quad (3.2)$$

Входящая сюда новая функция  $g$  имеет прозрачный физический смысл. Это *поток* вдоль линии  $z = h(x, t)$  осевших на нее микрочастиц. Естественно полагать, что чем круче наклон линии к оси  $x$ , тем сильнее частицы стремятся сползти вниз, и тем больше поток частиц в сторону спадания линии. Простейшая математическая модель, выражающая подобные свойства потока, такова:

$$g = \mu \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.3)$$

Коэффициент  $\mu$  служит мерой подвижности частиц. Рисунок 3.1 иллюстрирует падение микрочастиц на линию и сползание вдоль нее.



**Рис. 3.1.** Иллюстрация к росту линии  $z = h(x, t)$ , напыляемой изотропным потоком микрочастиц. Стрелки сверху символизируют падающие частицы. Стрелки внизу указывают направление сползания частиц вдоль линии

Помимо подвижности попавших на линию  $z = h(x, t)$  частиц, учитывают еще и неоднородность потока. Последнюю учитывают, добавив в уравнение (3.2) слагаемое  $F(x, t)$ . В итоге уравнение линии примет вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \mu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + F(x, t) \quad (3.4)$$

Мы пришли к двумерному варианту известного *уравнения Kardar-Parisi-Zhang* (КПЗ уравнение), адекватно описывающему, к примеру, процесс напыления полупроводниковых пленок.

Соответствующее (3.4) однородное (при  $F \equiv 0$ ) КПЗ уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \mu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (3.5)$$

представляет собой регуляризованную версию исходного уравнения роста линии (3.1). В дальнейшем мы выясним, что при  $\mu > 0$  это уравнение, вместе с произвольным начальным условием

$$h(x, t = 0) = h_0(x), \quad (3.6)$$

имеет решение, справедливое при любых  $t > 0$ .

### Уравнение Бюргерса

Следующей иллюстрацией регуляризации нелинейного уравнения в частных производных 1-го порядка возьмем уравнение нелинейной акустики. Известно, что одномерные нелинейные акустические волны подчиняются уравнению Римана

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.7)$$

Здесь  $v(x, t)$  отклонение давления среды (например воздуха) от равновесного, вызванное прохождением акустической волны. Уравнение (3.7) не берет в расчет важный физический эффект: вязкость среды, поглощающей энергию акустической волны. Вывод уравнения нелинейной акустики с учетом вязкости дает регуляризованное уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(x, t = 0) = v_0(x) \quad (3.8)$$

Коэффициент  $\mu$  выражает здесь степень вязкости среды.

Уравнение (3.8) носит имя Бюргерса, предложившего его в качестве модельного уравнения сильной гидродинамической турбулентности.

Займемся анализом решений уравнения *Бюргерса* и обсуждением их свойств. Это уравнение имеет аналитическое решение почти при любом начальном условии  $v_0(x)$ . Точное аналитическое решение даст возможность впоследствии убедиться в эффективности стандартных путей исследования нелинейных явлений.

### Галилеевская инвариантность

Обсудим свойства симметрии уравнений КПЗ и Бюргерса. Заметим, что если  $v(x, t)$  подчиняется уравнению Бюргерса, то ему же подчиняются поля  $v(x + a, t)$  и  $v(x, t + \tau)$ , где  $a$  и  $\tau$  произвольные сдвиги в пространстве и времени.

$$\begin{aligned} v(x, t) &\Leftrightarrow v(x+a, t+\tau), \\ h(x, t) &\Leftrightarrow h(x+a, t+\tau). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Свойства трансляционной симметрии присущи и однородному уравнению КПЗ.

К характерным для уравнения Бюргера свойствам симметрии принадлежит еще *нечетная симметрия отражения*: Если  $v(x, t)$  подчиняется уравнению Бюргера, то ему же подчиняется и  $-v(-x, t)$ :

$$v(x, t) \Leftrightarrow -v(-x, t). \quad (3.10)$$

Отражательной, но только четной, симметрией обладает и однородное уравнение КПЗ:

$$h(x, t) \Leftrightarrow h(-x, t).$$

Она выражает равноправие направлений (вправо влево) роста линии.

Кроме перечисленных трансляционных и отражательных симметрий, уравнение Бюргера обладает еще одной, играющей ключевую роль в физике, симметрией: *Галилеевской инвариантностью*. Галилеевская инвариантность уравнения Бюргера означает, что оно инвариантно относительно указанного преобразования

$$v(x, t) \Leftrightarrow V + v(x - Vt, t). \quad (3.11)$$

### Число Рейнольдса

Помимо свойств симметрии, полезно выяснить, как меняется темп и характер эволюции решения уравнения Бюргера при изменении масштабов исходного поля и его характерных величин. Для этого будем считать, что начальное поле  $v_0(x)$  обладает характерными масштабом  $l$  и величиной  $U$ , то есть представимо в виде:

$$v_0(x) = Uu_0\left(\frac{x}{l}\right) \quad (3.12)$$

где  $u_0(s)$  – безразмерная функция безразмерного аргумента.

Перейдем в уравнении Бюргера (3.8) к безразмерным координате  $s$  и полю  $u(s, t)$ , связанным с исходными переменными равенствами:

$$s = x/l, \quad u(s, t) = v(sl, t)/U$$

В итоге уравнение Бюргера примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\mu}{l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \quad u(s, t = 0) = u_0(s) \quad (3.13)$$

За масштаб времени примем  $T = l/U$  и введем безразмерное время  $\tau = t/T = lt/U$ . Тогда уравнение Бюргера примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\mu}{lU} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \quad u(s, t = 0) = u_0(s)$$

(3.14)

Решение уравнения Бюргерса зависит от величины возникшего в правой части уравнения (3.14) безразмерного параметра

$$R = \frac{Ul}{\mu} \quad (3.15)$$

Его называют *акустическим числом Рейнольдса*. Если оно мало ( $R \ll 1$ ) (вязкость велика), последний член уравнения Бюргерса (3.8) доминирует над нелинейным слагаемым, а само уравнение можно заменить линейным уравнением диффузии  $\frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ .

Если же число Рейнольдса велико, на первый план выходят эффекты нелинейного искажения поля  $v(x, t)$ . Другими словами, *число Рейнольдса служит мерой влияния нелинейности на поведение поля  $v(x, t)$* .

Число Рейнольдса можно представить как отношение двух пространственных масштабов  $R=l/\delta$ , где  $l$  – внешний по отношению к уравнению Бюргерса пространственный масштаб, а  $\delta=\mu/U$  – внутренний пространственный масштаб.

### Расширение Хаббла

До сих пор изучались общие свойства уравнения Бюргерса. Начнем поиск решений уравнения Бюргерса, не пренебрегая и простейшими из них. Выясним, к примеру, будет ли решением уравнения Бюргерса линейная функция  $x$

$$v(x, t) = \beta(t) x \quad (\beta(t=0) = \alpha).$$

Подставив ее в (3.8), обнаружим, что она действительно подчиняется уравнению Бюргерса (а заодно и уравнению Римана), если коэффициент  $\beta(t)$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\beta}{dt} + \beta^2 = 0, \beta(t=0) = \alpha$$

Решив его, придем к частному решению уравнения Бюргерса:

$$\beta(t) = \frac{\alpha}{1 + \alpha t} \rightarrow v(x, t) = \frac{\alpha x}{1 + \alpha t} \quad (3.16)$$

Глядя на решение (3.16), вообразим (одномерную) расширяющуюся (при  $\alpha > 0$ ) Вселенную. В самом деле, формула (3.16) вытекает из анализа движения равномерно разлетающихся частиц, скорости которых в начальный момент были

равны  $v_0(y) = \alpha y$ , где  $y$  – начальная (лагранжева) координата частицы. Движение таких частиц задается выражениями:

$$v = \alpha y, \quad x = y + \alpha y t.$$

Исключив здесь  $y$ , приходим к соотношению (3.16).

Назовем решение (3.16) *расширением Хаббла*. Его особенность состоит в том, что со временем поле  $v(x, t)$  теряет информацию о начальном профиле (в нашем случае о коэффициенте  $\alpha$ ). Действительно, при  $t \rightarrow \infty$  поле  $v$  стремится к не зависящему от начального наклона  $\alpha$  полю  $v(x, t) \sim x/t$ .

Подчеркнем еще, что при отрицательном  $\alpha < 0$  решение (3.16) выражает не расширение, а сжатие. Последнее ведет к градиентной катастрофе, когда за конечное время поле всюду обращается в бесконечность.

В реальности имеются движения вещества, отклоняющиеся от расширения Хаббла, рассмотрим, в рамках уравнения Бюргерса, как влияет расширение Хаббла на поведение подобных возмущений. Иными словами, решим уравнение Бюргерса с начальным условием:

$$v(x, t = 0) = \alpha x + \widehat{v}_0(x),$$

где первое слагаемое учитывает расширение Хаббла, а второе – возмущения поля скорости. Будем искать решение уравнения Бюргерса в виде подобной же суммы:

$$v(x, t) = \frac{\alpha x}{1 + \alpha t} + \widehat{v}(x, t) \tag{3.17}$$

однородного расширения Хаббла и поля  $\widehat{v}(x, t)$ , называемого в астрофизике *пекулярной скоростью*. Она отражает развитие возмущений относительно расширяющегося фона. Подставив все в уравнение Бюргерса, получим, что расширяющийся фон уменьшает действие нелинейности и ослабляет диссипацию поля, а также ослабляет и само поле. Также, взаимодействие возмущения  $\widehat{v}(x, t)$  с расширяющимся (при  $\alpha > 0$ ) фоном ведет к уменьшению амплитуды поля и росту его пространственного масштаба. Окончательное выражение для  $\widehat{v}(x, t)$  имеет вид:

$$\widehat{v}(x, t) = \frac{1}{1 + \alpha t} w\left(\frac{x}{1 + \alpha t}, \frac{t}{1 + \alpha t}\right) \tag{3.18}$$

В противном случае, когда  $\alpha < 0$ , имеет место глобальная градиентная катастрофа: идет лавинный рост амплитуды пекулярного поля и сжатие масштабов начального возмущения.

### Стационарная волна

Рассмотрим *стационарные волны*: применительно к одномерным волнам так называют решения вида

$$v(x, t) = v(x - Vt),$$

зависящие лишь от координаты  $z = x - Vt$ . Иными словами, стационарные волны движутся с постоянной скоростью  $V$  без изменения формы. Найдем стационарное решение уравнения Бюргера. Вследствие Галилеевской инвариантности достаточно найти неподвижное  $v(x)$  решение, а затем “заставить его двигаться” с помощью соотношения (3.11). Не зависящее от времени, решение  $v(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} v^2(x) - \mu \frac{dv(x)}{dx} \right] = 0 \quad (3.19)$$

Оно записано в форме, из которой сразу виден первый интеграл этого обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\mu \frac{dv(x)}{dx} + \frac{1}{2} [U^2 - v^2(x)] \equiv 0 \quad (3.20)$$

Здесь  $U$  - постоянная интегрирования, равная экстремальному значению  $v(x)$ . Из-за трансляционной симметрии, второй постоянной интегрирования служит произвольный сдвиг  $a$  решения вдоль оси  $x$ :  $v = v(x - a)$ . Опустив его, найдем окончательное выражение для неподвижного поля:

$$v(x) = -U \tanh \left( \frac{Ux}{2\mu} \right) \quad (3.21)$$

Произвольную стационарную волну восстановим из (3.21), пустив в ход преобразование Галилея (3.11) и добавив произвольный сдвиг:

$$v(x, t) = V - U \tanh \left( \frac{U}{2\mu} (x - Vt - a) \right) \quad (3.22)$$

Отсюда видно, что стационарная волна описывает перепад от максимального  $v_-$  (слева) к минимальному  $v_+$  (справа) значению поля.

Здесь  $v_- = v(x = -\infty, t) = V + U$ ,  $v_+ = v(x = \infty, t) = V - U$ .

Из (3.22) следует, что эффективная ширина переходного слоя равна внутреннему масштабу  $\delta = \mu/U$ , а скорость стационарной волны  $V$  и ее амплитуда  $U$  связаны с максимальным и минимальным значениями стационарной волны

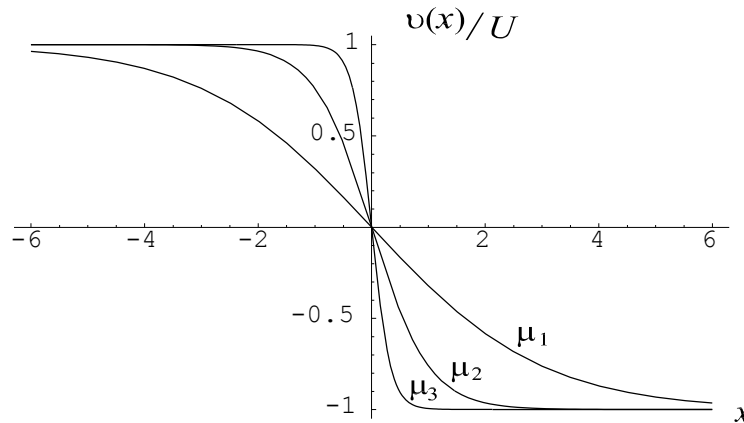


$$V = \frac{v^+ + v^-}{2}, \quad U = \frac{v^+ - v^-}{2} \quad (3.23).$$

Связь между стационарной волной и локальными условиями на разрыве слабого решения становится очевидной, если заметить, что при  $\mu \rightarrow 0_+$  стационарное решение (3.22) слабо сходится к разрывному

$$v_w(x, t) = V - U \operatorname{sgn}(x - Vt - a).$$

Если внутренний масштаб некоего разрыва слабого решения  $v_w(x, t)$  много меньше внешнего масштаба ( $\delta(t) \ll l(t)$ ), то тонкую структуру разрыва реконструируют с помощью стационарного решения (3.22) и соотношений (3.23), подставляя в них текущие значения  $v^\pm(t)$  справа и слева от исследуемого разрыва слабого решения  $v_w(x, t)$ . Графики неподвижного решения уравнения Бюргера для разных значений коэффициента вязкости  $\mu$  приведены на рис.3.2.



**Рис. 3.2.** Неподвижное решение уравнения Бюргера для трех значений коэффициента вязкости  $\mu_1, \mu_2 = \mu_1/3, \mu_3 = \mu_2/3$

### Решение Хохлова

Рассмотренное выше стационарное решение имеет застывшую форму. Получим более “живое” частное решение уравнения Бюргера, подставив неподвижное поле  $v(x)$  (3.21), вместо  $w$ , в формулы (3.18), (3.17):

$$v(x, t) = \frac{1}{1 + \alpha t} \left[ \alpha x - U \operatorname{tanh} \left( \frac{Ux}{2\mu(1 + \alpha t)} \right) \right] \quad (3.24)$$

Это, важное для понимания конкурентного взаимодействия нелинейности и вязкости, решение уравнения Бюргера носит имя академика Рема Хохлова, основоположника нелинейной теории акустических волн.

Чтобы лучше понять суть решения Хохлова, взглянем на скелет этого решения

$$v_w(x, t) = U(t) \left[ \frac{x}{l} - \operatorname{sgn}(x) \right] \quad (3.25)$$

–слабый предел точного решения (3.24) при  $\mu \rightarrow 0_+$ . В последней формуле использованы обозначения:

$$U(t) = \frac{U}{1+Ut/l}, \quad l = U/\alpha \quad (3.26)$$

Здесь  $U(t)$  –зависящая от времени амплитуда разрыва, а  $l$ –расстояние от начала координат до нулей слабого решения (3.25). Естественно считать  $l$  внешним масштабом полей (3.24) и (3.25). Подставив в выражение для  $\delta$  текущую амплитуду  $U(t)$  (3.26) разрыва, найдем внутренний масштаб:

$$\delta(t) = \frac{\mu}{U(t)} = \frac{\mu}{U} \left( 1 + \frac{Ut}{l} \right) \quad (3.27)$$

Поделив внешний масштаб на внутренний, получим *текущее число Рейнольдса*

$$R(t) = \frac{l}{\delta(t)} = R \left( 1 + \frac{Ut}{l} \right)^{-1}, \quad R = R(t=0) = \frac{Ul}{\mu} \quad (3.28)$$

Со временем оно монотонно уменьшается. Акустики говорят, что из-за диссипации волны в вязкой среде роль нелинейности в формировании профиля акустического поля ослабляется.

Укажем важный частный случай решения Хохлова. Предел функции (3.24), также будет точным решением уравнения Бюргерса. Это предельное решение легко найти:

$$v(x, t) = \frac{1}{t} \left[ x - l \tanh \left( \frac{lx}{2\mu t} \right) \right] \quad (3.29)$$

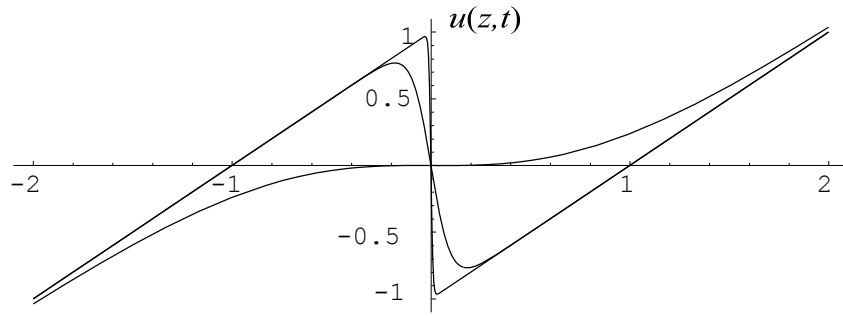
Его текущие внутренний масштаб и число Рейнольдса равны

$$\delta = \frac{\mu t}{l}, \quad R = l^2/\mu t \quad (3.30)$$

Решение (3.29) описывает универсальный профиль, к которому со временем стремится решение Хохлова при любых  $\alpha$  и  $U$ . График поля (3.29)

$$u(z, t) = \frac{t}{l} v(zl, t) = z - \tanh(Rz) \quad (3.31)$$

при разных  $t$  и в зависимости от  $z = x/l$  дан на рисунке 3.3.



**Рис. 3.3.** Частное решение (3.31) уравнения Бюргера в зависимости от  $z = x/\ln$  при разных значениях (обратно пропорционального времени) числа Рейнольдса  $R = 100; 10; 1$ .

### Автомодельное решение

Еще один класс частных решений нелинейных уравнений в частных производных, привлекающий внимание теоретиков, составляют *автомодельные решения*. Автомодельное решение уравнения Бюргера было найдено и проанализировано О.В. Руденко применительно к задачам нелинейной акустики для плоских и цилиндрических волн. Представим эти автомодельные решения для уравнений Бюргера и КПЗ.

Начнем с автомодельного решения однородного уравнения КПЗ (3.5):

$$h_R(x, t) = f\left(\frac{x}{2\sqrt{\mu t}}\right), \quad (3.32)$$

где  $R = S/2\mu$ ,  $f(\rho) = 2\mu \ln \left[ 1 - (1 - e^{-R}) \Phi\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\mu}}\right) \right]$  и использована вспомогательная функция  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-w^2} dw = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(z)]$

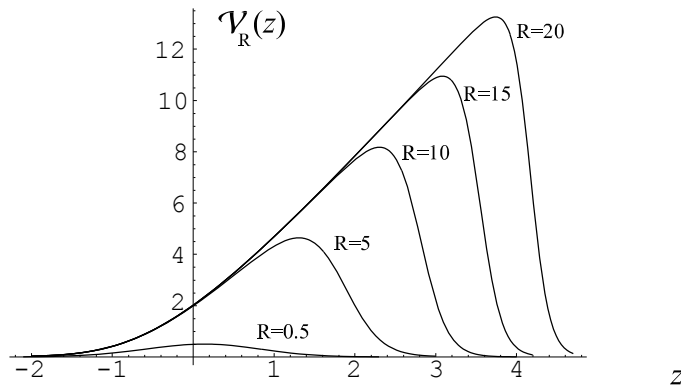
Продифференцировав (3.32) по  $x$ , найдем автомодельное решение уравнения Бюргера:

$$v(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi t}} \vartheta_R\left(\frac{x}{2\sqrt{\mu t}}\right). \quad (3.33)$$

Здесь введена еще одна автомодельная функция

$$\vartheta_R(z) = \frac{(1 - e^{-R})e^{-z^2}}{1 - (1 - e^{-R})\Phi(z)}, \quad z = \frac{x}{2\sqrt{\mu t}} \quad (3.34)$$

Ее график при разных значениях  $R$  изображен на рисунке 3.4.



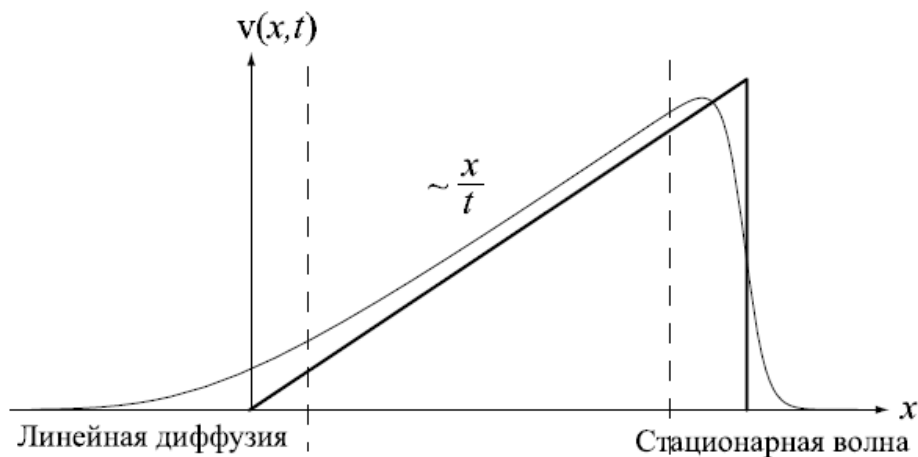
**Рис. 3.4.** График функции  $V_R(z)$  в зависимости от  $z$  и при значениях  $R = 0.5, 5, 10, 15, 20$ . Видно, что чем больше  $R$ , тем более асимметричную (треугольную) форму имеет автомодельное решение уравнения Бюргера

Представим асимптотику автомодельного решения уравнения Бюргера в трех областях:

$$v(x, t) \approx \begin{cases} \sqrt{\frac{\mu}{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\mu t}\right), & x \leq 0, \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < l, \\ U - U \tanh\left(\frac{U}{2\mu}(x - l)\right), & x \geq l. \end{cases} \quad (3.35)$$

Первая строчка здесь есть решение линейного уравнения диффузии. Вторая строчка в (3.35) совпадает с характерным склоном, обусловленным влиянием нелинейности. Наконец, третья строчка дает резкий обрыв автомодельного решения, имеющий форму стационарной волны.

График треугольного решения  $v(x, t)$  (3.34), (3.35) уравнения Бюргера изображен на рисунке 3.5.



**Рис. 3.5.** Автомодельное решение при  $R = 50$ . Указаны области, где оно практически совпадает с решением линейного уравнения диффузии и стационарной волной. Дан также треугольный скелет автомодельного решения

## Общее решение уравнения Бюргерса

Можно показать, что решение уравнения КПЗ (3.4) выражается через решение линейного уравнения диффузии формулой

$$h(x,t) = 2\mu \ln \varphi(x,t) \quad (3.36)$$

Чтобы данное решение удовлетворяло начальному условию  $h(x,t=0) = h_0(x)$ , уравнение диффузии надо решать с согласованным начальным условием  $\varphi_0(x) = \exp\left(\frac{h_0(x)}{2\mu}\right)$ . Формула (3.36), сводящая нелинейное уравнение КПЗ к линейному уравнению диффузии, носит название *подстановки Хопфа-Коула*.

Если продифференцировать (3.36) по  $x$  и имея в виду формулу  $v(x,t) = -\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}$ , придем к выводу, что решение неоднородного уравнения Бюргерса (3.8) следующим образом выражается через решение задачи Коши:

$$v(x,t) = -\frac{2\mu}{\varphi(x,t)} \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}, \quad (3.37)$$

Отсюда следует в частности, что однородное уравнение Бюргерса сводится подстановкой (3.37) к линейному уравнению диффузии

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \varphi_0(x) = \exp\left(-\frac{s_0(x)}{2\mu}\right) \quad (3.38)$$

Здесь  $s_0(x) = \int^x v_0(x') dx'$  - знакомый начальный потенциал решения уравнения Бюргерса. Решение задачи Коши (3.38) хорошо известно:

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(y) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4\mu t}\right) dy \quad (3.39)$$

В рассматриваемом случае оно приобретает вид:

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\mu t} \left[ s_0(y)t + \frac{(y-x)^2}{2} \right]\right) dy, \quad (3.40)$$

Обратим внимание, что в показатель экспоненты под интегралом входит знакомая по принципу абсолютного минимума функция:

$$G(y; x, t) = s_0(y)t + 1/2(y-x)^2.$$

С ее помощью удобно записать  $\varphi(x,t)$  в более компактной форме:

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{G(y;x,t)}{2\mu t}\right) dy. \quad (3.41)$$

Если интеграл (3.38) удастся вычислить аналитически, решение уравнения Бюргера находится прямой подстановкой известной функции  $\varphi(x, t)$  в правую часть равенства (3.37). Для анализа же общих свойств решения уравнения Бюргера более удобной оказывается другая форма записи его решения. Найдем ее, дифференцируя интеграл в (3.40) по  $x$  и подставив результат в формулу (3.37):

$$v(x, t) = \frac{x - \{y\}(x, t)}{t} \quad (3.42)$$

Здесь фигурные скобки символизируют процедуру пространственного усреднения с помощью неотрицательной нормированной функции

$$f(y; x, t) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\mu}G(y; x, t)\right]}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\mu}G(y; x, t)\right] dy}. \quad (3.43)$$

Формула (3.42) демонстрирует тесную связь решения уравнения Бюргера с классическим решением уравнения Римана и его слабым решением, поскольку функция  $\{y\}(x, t)$  служит естественным обобщением лагранжевой координаты на случай  $\mu > 0$ . Поэтому  $\{y\}(x, t)$  называют усредненной лагранжевой координатой.

Иногда уравнение Бюргера (3.8) трактуют как регуляризованное уравнение Римана (3.7), которое формально получается из уравнения Бюргера при  $\mu = 0$ . Для лучшего понимания “взаимоотношений” между уравнениями Римана и Бюргера полезно знать, что трансформируется решение последнего при  $\mu \rightarrow 0$ . Оказывается, при  $\mu \rightarrow 0$  возникает эффект “*Чеширского кота*”: вязкость пропадает, а ее действие остается. А именно, при  $\mu \rightarrow 0$  решение уравнения Бюргера сходится к слабому решению (2.22) уравнения Римана, найденному из принципа абсолютного минимума. Данный эффект демонстрирует характерное для нелинейных уравнений явление, когда добавление члена с высшей производной, даже с исчезающе малым коэффициентом, качественно влияет на решение.

## Глава 4. Эволюции поля скорости в уравнении Бюргерса

### 4.1. Эволюция одномасштабных сигналов

Обсудим типичные сценарии эволюции решений уравнения Бюргерса, реализующиеся при тех или иных начальных условиях. Особое внимание уделим сильно нелинейным режимам, отвечающим большим числам Рейнольдса, а также особенностям выхода решения уравнения Бюргерса на линейную стадию.

Вернемся к решению (3.42) уравнения Бюргерса. Нетрудно строго доказать, что оно существует при любых  $t \in (0, \infty)$  и дает единственное решение задачи Коши, если  $v_0(x)$  растет при  $x \rightarrow \pm\infty$  медленнее первой степени  $x$ :

$$|v_0(x)| < A + B|x|^\gamma \quad (x \in \mathbb{R}, A, B < \infty, 0 \leq \gamma < 1). \quad (4.1)$$

Заметим, однако, что данное условие существования и единственности, гарантируя наличие решения уравнения Бюргерса, не запрещает искать другие его решения с начальными условиями, не вписывающимися в рамки неравенств (4.1). Иногда подобные “экзотические” решения очень поучительны для теории и ценны для приложений. Примерами служат решение Хохлова (3.24), его частный случай (3.29).

Найдем решение уравнения Бюргерса с начальным условием

$$v_0(x) = S\delta(x). \quad (4.2)$$

Мы уже знаем соответствующее поле  $v(x, t)$ , что автомодельное решение (3.33) слабо сходится при  $t \rightarrow 0$  к дельта-функции. Тем не менее, всегда полезно разведывать разные пути к одному и тому же решению, поскольку, как правило, это помогает пролить новый свет на исследуемую проблему.

Начальному условию (4.2) отвечает начальный потенциал  $s_0(x) = S\Theta(x)$ . Следовательно, начальное условие к вспомогательному линейному уравнению диффузии представимо в виде:

$$\varphi_0(x) = 1 - (1 - e^{-R})\Theta(x).$$

Подставив его в решение (3.40) уравнения диффузии (3.38), будем иметь

$$\varphi(x, t) = 1 - (1 - e^{-R})\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\mu t}}\right) \quad (4.3)$$

Здесь  $R$  – знакомое по автомодельному решению начальное число Рейнольдса  $R = S/2\mu$ , а  $\Phi(z)$  – вспомогательная функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-w^2} dw = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(z)].$$

Подставив (4.3) в (3.37), найдем искомое решение уравнения Бюргерса с сингулярным начальным условием. Естественно, оно совпадает с автомодельным решением (3.33). Основываясь на опыте решения линейного уравнения диффузии, сформулируем утверждение, кардинально меняющее понимание роли автомодельного решения. До сих пор мы считали его одним из

частных решений уравнения Бюргерса. Сейчас мы способны, опираясь на найденное общее решение и теорию линейного уравнения диффузии, строго доказать, что:

Если интеграл от начального условия  $v_0(x)$  ограничен и равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) dx = S$$

то при  $t \rightarrow \infty$  решение уравнения Бюргерса  $v(x, t)$  асимптотически стремится к автомодельному (3.33), с числом Рейнольдса  $R = S/2\mu$ .

Таким образом, автомодельные решения служат мощным инструментом анализа асимптотических свойств решений нелинейных уравнений.

### Выход на линейную стадию

Если начальное поле имеет волнообразный характер:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) dx = 0, \quad (4.4)$$

то при любом, сколь угодно большом, начальном числе Рейнольдса  $R$ , решение уравнения Бюргерса в конечном итоге асимптотически описывается линейным уравнением диффузии. Другими словами, нелинейная стадия эволюции поля  $v(x, t)$  сменяется линейной стадией.

Найдем асимптотику решения уравнения Бюргерса на линейной стадии. Заметим, что применительно к потенциалу  $s_0(x)$  начального поля  $v_0(x)$ , равенство (4.4) означает, что предельные значения  $s_0(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  одинаковы. Поскольку потенциал определен с точностью до произвольной постоянной, положим эти пределы равными нулю. Иначе говоря, начальный потенциал локализован в некоторой области оси  $x$ . Чтобы дальнейшие построения носили более строгий характер, потребуем для определенности, чтобы начальный потенциал  $s_0(x)$  был финитной функцией, не равной нулю лишь в интервале  $|x| < l$ . Тогда начальное условие к соответствующему линейному уравнению диффузии (3.11) примет вид:

$$\varphi_0(x) = 1 + q_0(x), \quad (4.5)$$

где

$$q_0(x) = \exp\left(-\frac{s_0(x)}{2\mu}\right) - 1 \quad (4.6)$$

также финитная функция, тождественно равная нулю при  $|x| \geq l$ .

Из свойств линейных уравнений диффузии известно, что если

$$t \gg t_d, \quad t_d = l^2/4\mu \quad (4.7)$$

то решение уравнения (3.38) с начальным условием (4.5), описывается асимптотической формулой



$$\varphi(x, t) \sim 1 + Q(t) \exp\left(-\frac{x^2}{4\mu t}\right). \quad (4.8)$$

Здесь

$$Q(t) = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi\mu t}}, \quad Q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} q_0(y) dy \quad (4.9)$$

Подставив асимптотическую формулу (4.8) в правую часть соотношения (3.37), получим асимптотику решения уравнения Бюргерса

$$v(x, t) \sim \frac{x}{t} \frac{Q(t)}{\exp\left(\frac{x^2}{4\mu t}\right) + Q(t)} \quad (4.10)$$

Входящая сюда функция  $Q(t)$  с течением времени монотонно стремится к нулю. Следовательно, при  $t \gg t_l$ , где  $t_l$  характерное время выхода на линейный режим:

$$Q(t_l) \cong 1 \rightarrow t_l = \frac{Q_0^2}{4\pi\mu} \quad (4.11)$$

асимптотика решения однородного уравнения Бюргерса будет практически совпадать с решением линейного диффузионного уравнения

$$v(x, t) \sim \frac{x}{t} \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi\mu t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\mu t}\right). \quad (4.12)$$

### **N волна и U волна**

Выше мы нашли характерное время  $t_l$  (4.11) выхода решения уравнения Бюргерса на линейный режим. Однако само это время, а также механизм перехода к линейному режиму, сильно зависят от формы начального поля  $v_0(x)$ . В теории нелинейных волн введены даже специальные термины: *N волна* и *U волна*, чтобы различать режимы эволюции нелинейных волн и перехода их на линейную стадию. Ниже рассмотрены примеры, иллюстрирующие понятия *N*-и *U*-волн.

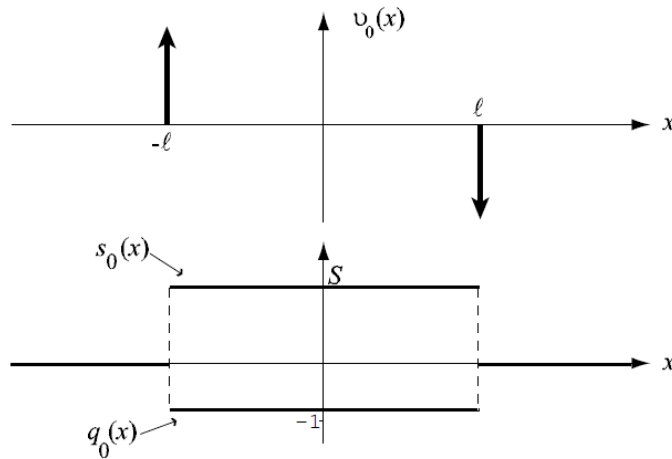
*Пример 1.* Пусть начальное поле равно разности двух дельта-функций

$$v_0(x) = S [\delta(x+l) - \delta(x-l)]. \quad (4.13)$$

Ему отвечают прямоугольные потенциал  $s_0(x)$  и функция  $q_0(x)$  (4.6):

$$\begin{aligned} s_0(x) &= [\Theta(x+l) - \Theta(x-l)], \\ q_0(x) &= (e^{-R} - 1)[\Theta(x+l) - \Theta(x-l)]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Графики начального условия (4.13) и функций (4.14) даны на рисунке 4.1.



**Рис. 4.1.** Начальное поле  $v_0(x)$  (4.13) (вверху) и поля  $s_0(x)$ ,  $q_0(x)$  (внизу)

В (4.14) введено начальное число Рейнольдса  $R = S/2\mu$ . В наиболее интересном случае  $R \gg 1$  из (4.14), (4.9), (4.11) имеем

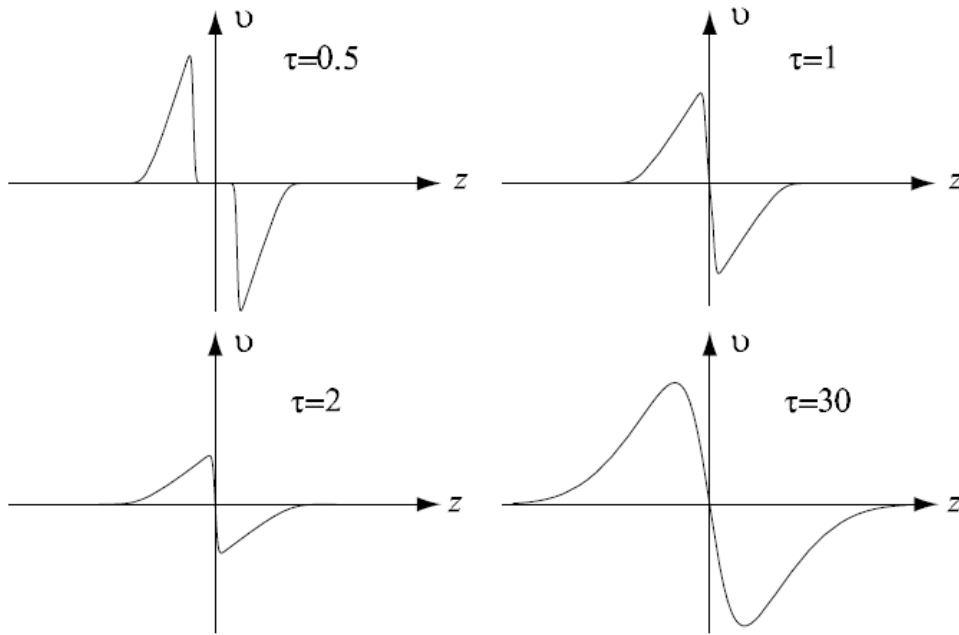
$$q_0(x) \cong -[\Theta(x+l) - \Theta(x-l)] \Rightarrow Q_0 \cong -2l \Rightarrow t_i \cong 4/\pi t_d.$$

Таким образом, в данном случае время выхода на линейную стадию близко к характерному времени линейной диффузии  $t_d$  (4.7).

Проследим стадии эволюции поля  $v(x, t)$ , отвечающего начальному условию (4.13), пользуясь точным решением уравнения Бюргера:

$$v(x, t) = -\frac{2\mu}{l} \sqrt{\frac{R}{\pi\tau}} \frac{(1-e^{-R}) \exp\left(-R\frac{z^2+1}{\tau}\right) \sinh\left(\frac{2Rz}{\tau}\right)}{1-(1-e^{-R}) \left[ \Phi\left(\sqrt{\frac{R}{\tau}}(1-z)\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{R}{\tau}}(1+z)\right) \right]} \quad (4.15)$$

Здесь введены безразмерные координата и время  $z = x/l$ ,  $\tau = 2St/l^2$ , а функция  $\Phi$  определена равенством  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-w^2} dw = \frac{1}{2} [1 + \text{erf}(z)]$ . Графики поля  $v(x, t)$  для разных значений  $\tau$  и при  $R = 25$ , даны на рисунке 4.2. В момент  $\tau = 0.5$  поле состоит из двух треугольных волн. При  $\tau = 1$  треугольные волны столкнулись и начали “пожирать” друг друга. При  $\tau = 2$  взаимное поглощение треугольных волн сильно уменьшает их амплитуду. Однако абсолютная величина параметра (4.9)  $Q(\tau) \approx -\sqrt{\frac{4R}{\pi\tau}}$  пока велика ( $|Q(\tau = 1)| \approx 4$ ), и все еще продолжается нелинейная стадия эволюции. Характерные очертания поля  $v(x, t)$  при  $\tau = 1$  и  $\tau = 2$ , имеющие форму стилизованной буквы  $N$ , отражены в названии подобного типа нелинейных полей:  $N$  волны. Наконец при  $\tau = R = 30$ , когда  $|Q(\tau = 30)| \approx 1$ , взаимное истребление треугольных волн завершается выходом на линейную стадию.



**Рис. 4.2.** Решения уравнения Бюргера типа  $N$  волны, с начальным условием (4.13) и начальным числом Рейнольдса  $R=25$ , на разных временах. Масштабы горизонтальных осей одинаковы, а масштаб по вертикали последнего графика много больше масштаба предыдущих, чтобы можно было разглядеть ослабленное диссипацией решение уравнения Бюргера на линейной стадии

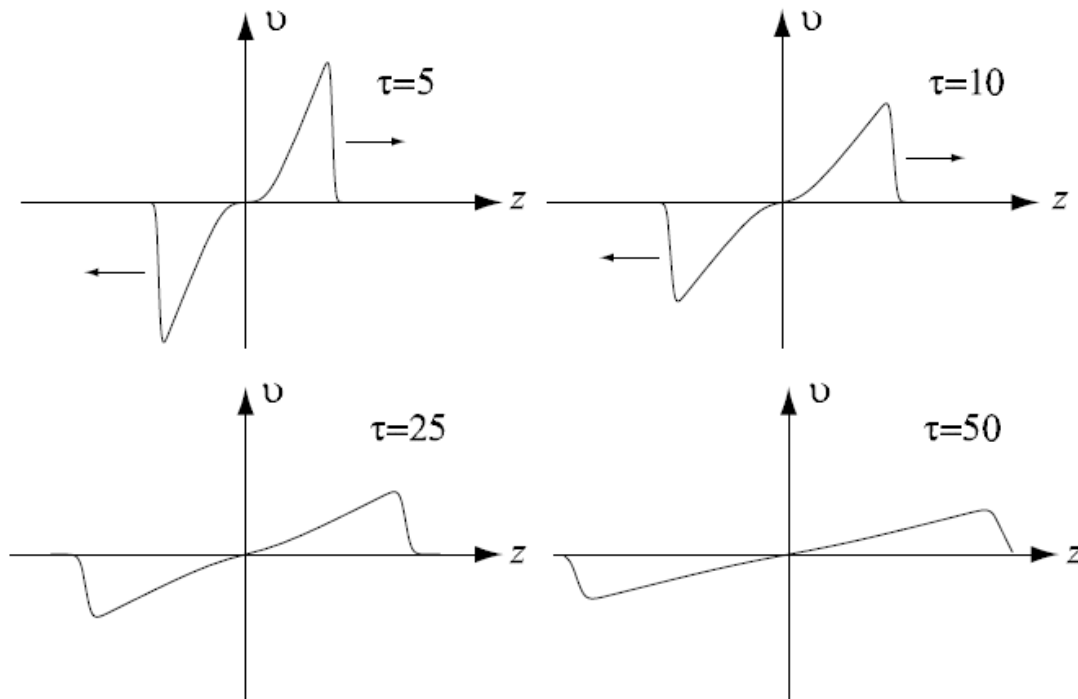
*Пример 2:* Пример  $U$  волн получим, исследовав решение уравнения Бюргера с начальным условием

$$v_0(x) = S [\delta(x-l) - \delta(x+l)]. \quad (4.16)$$

Соответствующее точное решение

$$v(x, t) = -\frac{2\mu}{l} \sqrt{\frac{R}{\pi\tau}} \frac{(1-e^{-R}) \exp\left(-R\frac{z^2+1}{\tau}\right) \sinh\left(\frac{2Rz}{\tau}\right)}{1-(1-e^{-R}) \left[ \Phi\left(\sqrt{\frac{R}{\tau}}(1-z)\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{R}{\tau}}(1+z)\right) \right]} \quad (4.17)$$

на первый взгляд, очень похоже на решение (4.15). Однако его поведение сильно отличается от обсужденного выше поведения  $N$  волны. А именно, треугольные волны, порожденные дельта-образными компонентами начального условия (4.16), разбегаются (см. рисунок 4.3). Поэтому, в отличие от  $N$  волны, треугольные компоненты  $U$  волны взаимодействуют лишь “хвостами”. При большом  $R$  это взаимодействие намного слабее, чем взаимное гашение фронтов для  $N$  волн. В итоге нелинейная стадия  $U$  волн длится гораздо дольше, чем для  $N$  волн.



**Рис. 4.3.** Решение уравнения Бюргерса типа  $U$  волны, с начальным условием (4.16) и  $R=25$ , в разные моменты времени

Подтвердим сказанное количественными выкладками, подсчитав время (4.11) выхода на линейную стадию. В данном случае оно равно

$$t_l = \frac{4}{\pi} (e^R - 1) t_d.$$

Следовательно, при том же самом (большом) начальном числе Рейнольдса нелинейная стадия  $U$  волны длится невообразимо дольше, чем  $N$  волн. Так, для использованного в примерах начального числа Рейнольдса  $R = 25$ , время выхода на линейную стадию у  $U$  волны примерно в 1010 раз больше, чем  $N$  волн.

### Пилообразные волны

До сих пор мы задавали начальное поле  $v_0(x)$  и следили за соответствующим решением уравнения Бюргерса. Не менее плодотворен иногда другой подход, когда задают начальное условие  $\varphi_0(x)$  линейного уравнения диффузии и исследуют порожденное им решение уравнения Бюргерса. Ниже указанный подход позволит наглядно пояснить понятие *пилообразных волн*, играющих ключевую роль в анализе поведения нелинейных полей, удовлетворяющих уравнению Бюргерса.

*Пример:* Возьмем начальное условие линейного уравнения диффузии (3.38) в виде суммы дельта-функций:

$$\varphi_0(x) = \delta(x+l) + Q^2 \delta(x-l). \quad (4.18)$$

С точностью до не зависящего от  $x$  общего множителя, решение линейного уравнения диффузии (3.38) имеет вид:

$$\varphi(x, t) = \exp\left(-\frac{(x+l)^2}{4\mu t}\right) + Q^2 \exp\left(-\frac{(x-l)^2}{4\mu t}\right).$$

Подставив его в (3.37) и сократив общие множители в числителе и знаменателе, будем иметь

$$v(x, t) = \frac{x}{t} - \frac{l}{t} \frac{Q^2 \exp\left(\frac{xl}{2\mu t}\right) - \exp\left(-\frac{xl}{2\mu t}\right)}{Q^2 \exp\left(\frac{xl}{2\mu t}\right) + \exp\left(-\frac{xl}{2\mu t}\right)}.$$

Мы уясним физический смысл параметра  $Q$ , представив его в виде

$$Q = \exp\left(-\frac{s}{2\mu}\right) \quad (4.19)$$

В итоге получим окончательно:

$$v(x, t) = \frac{1}{t} \left[ x - l \tanh\left(\frac{l}{2\mu t}(x - Vt)\right) \right], V = s/l.$$

Это уже знакомое (но только движущееся со скоростью  $V$ ) решение (3.29) уравнения Бюргера. Задав искусственное начальное условие (4.18), мы пришли к естественному, имеющему наглядный физический смысл, решению уравнения Бюргера. Теперь возьмем  $\varphi_0(x)$  в виде произвольной суперпозиции дельта-функций:

$$\varphi_0(x) = \sum Q_k \delta(x - y_k) \quad (4.20)$$

и, по аналогии с (4.19), положив коэффициенты равными

$$Q_k = \exp\left(-\frac{s_k}{2\mu}\right) \quad (4.21)$$

Назовем поле  $v(x, t)$ , отвечающее начальному условию (4.20), *пилообразной волной*. Запишем пилообразную волну в форме (3.42)

$$v(x, t) = \frac{x - \{y\}(x, t)}{t} \quad (4.22)$$

где  $\{y\}(x, t)$  – усредненная лагранжева координата, равная здесь

$$\{y\}(x, t) = \frac{\sum_k y_k \exp\left[-\frac{1}{2\mu t}\left(s_k t + \frac{(x-y_k)^2}{2}\right)\right]}{\sum_k \exp\left[-\frac{1}{2\mu t}\left(s_k t + \frac{(x-y_k)^2}{2}\right)\right]} \quad (4.23)$$

Чтобы яснее представить геометрический смысл полученного решения, выделим скелет усредненной лагранжевой координаты  $\{y\}(x, t)$  и соответствующий скелет пилообразной волны  $v(x, t)$ . Очевидно, при  $\mu \rightarrow 0_+$  в

каждой точке  $x$  достаточно оставить по одному (наибольшему) слагаемому в числителе и знаменателе (4.23). Доминирующее слагаемое определяют, строя графики *критических парабол*

$$P_k(x) = s_k t + \frac{(x-y_k)^2}{2} \quad (4.24)$$

и выбирая ту из них, которая в точке  $x$  меньше остальных. Соответственно  $\{y\}(x, t)$  оказывается ступенчатой функцией, равной

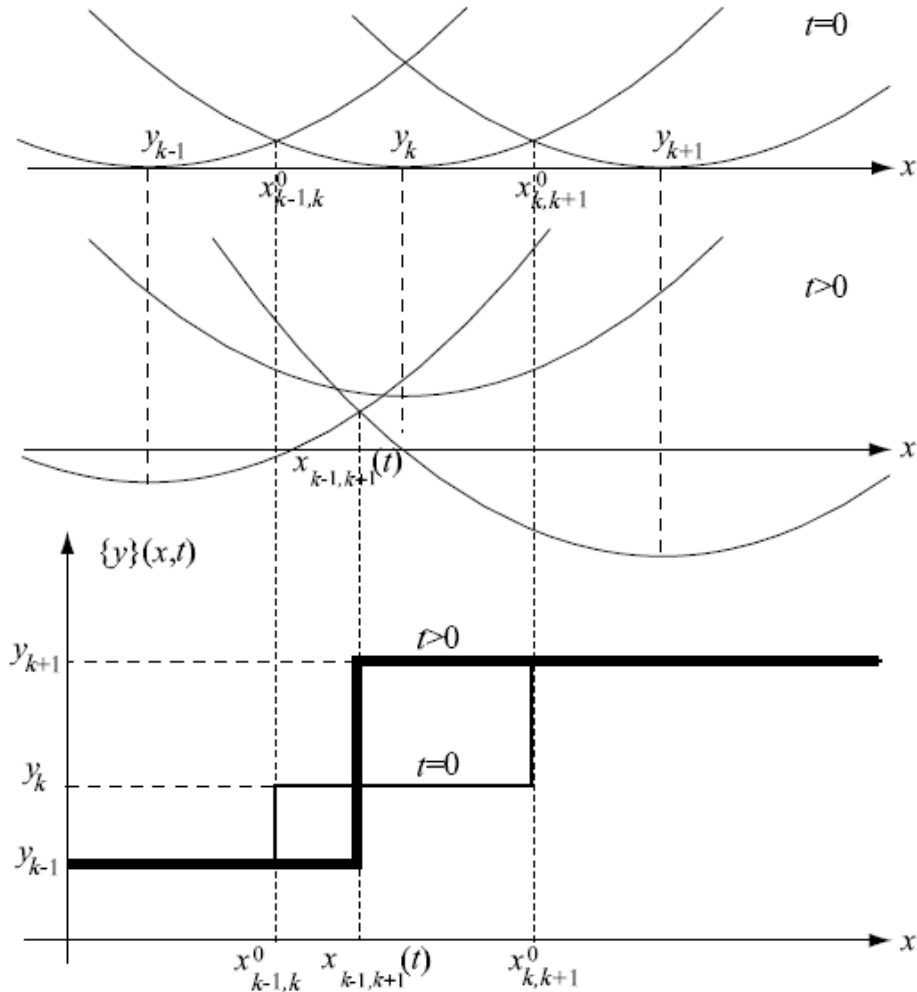
$$\{y\}(x, t) = y_k,$$

где  $k$  номер указанной параболы. В точках пересечения наименьших критических парабол скелет функции  $\{y\}(x, t)$  имеет разрыв. Найдем точки  $x_{k,m}(t)$  пересечения  $k$ -й и  $m$ -й парабол:

$$P_k(x) = P_m(x) \rightarrow x_{k,m}(t) = x_{k,m}^0 + V_{k,m}t, \\ x_{k,m}^0 = \frac{y_k + y_m}{2}, V_{k,m} = \frac{s_m - s_k}{M_{k,m}}, M_{k,m} = y_m - y_k \quad (k < m). \quad (4.25)$$

Если непосредственно слева и справа от точки  $x_{k,m}(t)$  параболы  $P_k$  и  $P_m$  меньше остальных парабол, то в точке  $x_{k,m}(t)$  функция  $\{y\}(x, t)$  терпит разрыв. Причем  $\{y\}(x_{k,m}(t) - 0, t) = y_k$ ,  $\{y\}(x_{k,m}(t) + 0, t) = y_m$  ( $k < m$ ).

Графики критических парабол (4.24), иллюстрирующие построение ступенчатой функции  $\{y\}(x, t)$ , даны на рисунке 4.4.



**Рис. 4.4.** Иллюстрация к построению скелета функции  $\{y\}(x, t)$  с помощью сравнения парабол. Вверху изображены параболы при  $t = 0$ , а ниже при  $t > 0$ . Видно, что средняя параболa всюду выше хотя бы одной из остальных парабол.

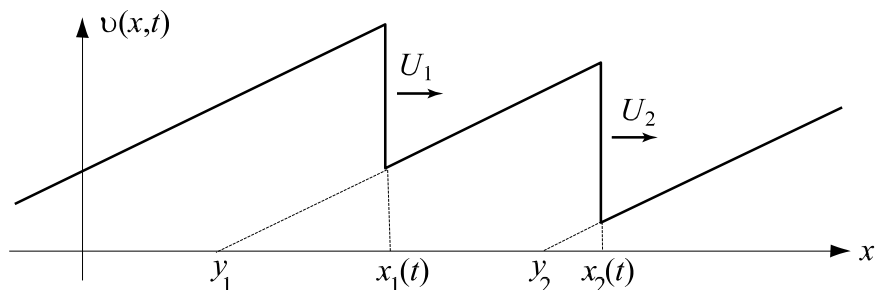
Если скорости движения разрывов  $V_{k,m}$  различны, то некоторые из них сливаются, образуя новый разрыв, движущийся со своей скоростью. Детально изучим законы слияния разрывов.

Пусть в малой окрестности  $t \in (t_{k,m,n} - \varepsilon, t_{k,m,n})$  момента  $t_{k,m,n}$  пересечения прямых  $x_{k,m}(t)$  и  $x_{m,n}(t)$ , и в малой окрестности точки пересечения  $x_{k,m,n}$ , наименьшими последовательно оказываются параболы  $\Pi_k$ ,  $\Pi_m$  и  $\Pi_n$  ( $k < m < n$ ). Это означает, что в точках  $x_{k,m}(t)$  и  $x_{m,n}(t)$  функция  $\{y\}(x, t)$  имеет разрывы. В момент  $t_{k,m,n}$  средняя параболa  $\Pi_m$  оказывается всюду выше остальных, а на месте двух слившихся разрывов возникает новый, с координатой  $x_{k,n}(t)$  и скоростью  $V_{k,n}$ . Из (4.25) следует, что скорость разрыва, возникшего в точке слияния старых разрывов, связана со скоростями последних равенством

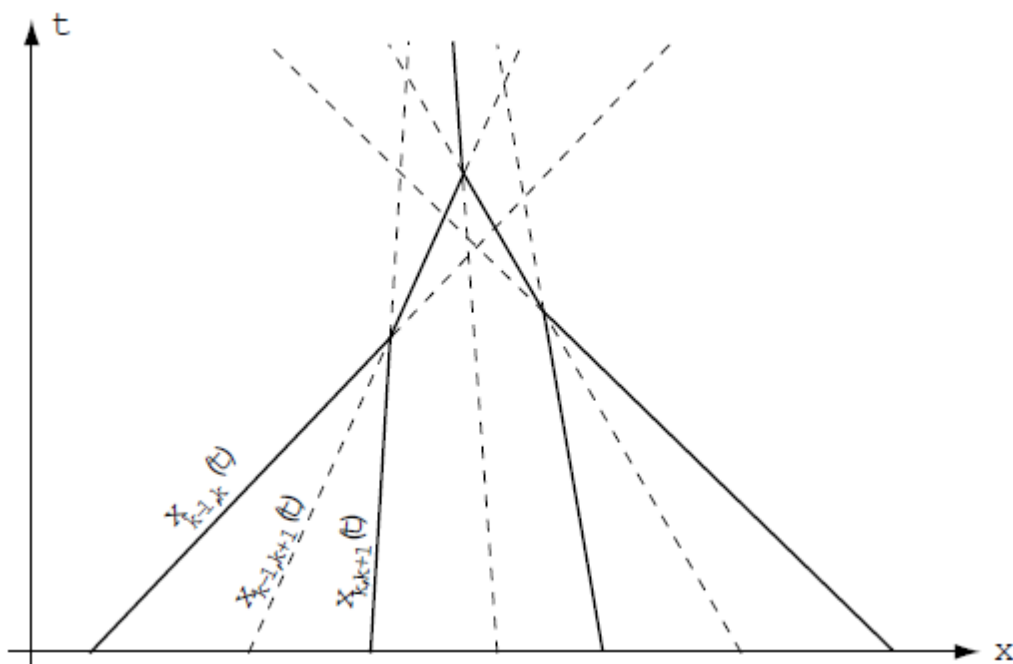
$$V_{k,m} = \frac{s_n - s_k}{y_n - y_k} = \frac{M_{k,m}V_{k,m} + M_{m,n}V_{m,n}}{M_{k,m} + M_{m,n}}. \quad (4.26)$$

Эта формула совпадает с законом изменения скорости частиц, массами  $M_{k,m}$  и  $M_{m,n}$  при абсолютно неупругом столкновении.

Тот факт, что скорости разрывов до слияния постоянны, а в момент слияния меняются по закону абсолютно неупругих столкновений, позволяет описать поведение пилообразной волны на языке одномерного потока неупруго сталкивающихся частиц. Построенный по формуле (3.42) скелет пилообразного поля  $v(x, t)$  дан на рисунке 4.5. Типичный узор траекторий сливающихся разрывов изображен на рисунке 4.6.



**Рис. 4.5.** Скелет пилообразной волны. Указаны “нули” линейных участков и координаты разрывов



**Рис. 4.6.** Узор траекторий сливающихся разрывов. Сплошными линиями обозначены траектории действительно существующих разрывов

До сих пор мы исследовали скелет пилообразной волны, отвечающий пределу  $\mu \rightarrow 0_+$ . Однако выражение (4.23) для усредненной координаты  $\{y\}(x, t)$  описывает также оплавление разрывов из-за вязкости ( $\mu > 0$ ) и выход на линейную стадию. Последняя наступает, когда для любого  $x$  соседние слагаемые в суммах (4.23) имеют сравнимую величину.

Обсудим схему применения приближения пилообразных волн. Пусть  $s_k$  – минимальное значение начального потенциала  $s_0(x)$ , достигаемое в точке  $x=y_k$ .



Тогда, при малых  $\mu$  и в окрестности точки минимума можно заменить эту функцию гауссовой

$$\varphi_0^k(x) \sim \exp \left[ -\frac{s_k}{2\mu} - \frac{\sigma_k}{4\mu} (x - y_k)^2 \right]. \quad (4.27)$$

Здесь

$$s_k = \sigma(y_k), \sigma(x) = \frac{\partial^2 s_0(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial v_0(x)}{\partial x}. \quad (4.28)$$

Подставив (4.27) в (3.39), найдем решение линейного уравнения диффузии

$$\varphi^k(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma_k t}} \exp \left[ -\frac{\sigma_k t}{1 + \sigma_k t} \frac{(x - y_k)^2}{4\mu t} \right]. \quad (4.29)$$

В области

$$\varepsilon t \gg 1, |x - y_k| \ll 2(\varepsilon\mu)^{0.5} t \quad (4.30)$$

функция  $\varphi^k(x, t)$  практически не изменится, если заменить правую часть соотношения (4.27) дельта-функцией

$$\varphi_0^k \sim \sqrt{\frac{4\pi\mu}{\sigma_k}} \exp \left( -\frac{s_k}{2\mu} \right) \delta(x - y_k).$$

Объединяя вклады всех минимальных точек начального потенциала и принимая во внимание, что начальный потенциал определен с точностью до произвольного постоянного множителя, приходим к утверждению: при выполнении условия (4.30) решение уравнения Бюргерса описывается выражением (3.37), где  $\varphi(x, t)$  есть решение линейного уравнения Бюргерса с начальным условием (4.20), а

$$Q_k = \frac{1}{\sqrt{\sigma_k}} \exp \left( -\frac{s_k}{2\mu} \right).$$

### Периодические волны

В прикладных задачах, к примеру в нелинейной акустике, наибольший интерес представляет эволюция периодических волн. Поэтому уделим некоторое внимание особенностям решения уравнения Бюргерса с периодическими начальными условиями, исследуя их в приближении пилообразных волн.

Прежде всего обсудим поведение первоначально гармонического поля с начальным условием

$$v_0(x) = a \sin(\chi x) \rightarrow s_0(x) = -\frac{a}{\chi} \cos(\chi x) \quad (4.31)$$

Выясним условие применимости приближения пилообразных волн применительно к первоначально гармонической волне. Характерная кривизна минимальных точек начального потенциала здесь одинакова и равна

$$\sigma_k = \varepsilon = a\chi = \frac{1}{t_n}, t_n = \frac{1}{a\chi},$$

где  $t_n$  момент возникновения разрывов. Кроме того, поскольку в выражении (4.23) важны не абсолютные, а относительные значения слагаемых, можно переписать условия (4.30) в виде

$$t \gg t_n, l \ll \sqrt{\frac{\mu}{t_n}} t \quad (l = \frac{\pi}{\chi}). \quad (4.32)$$

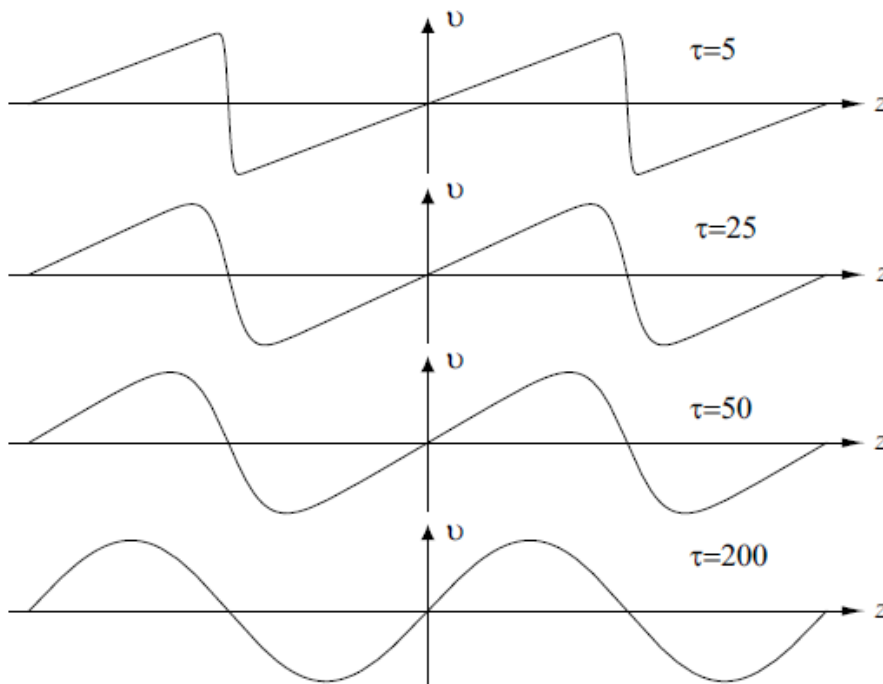
Найдем пилообразную волну, соответствующую гармоническому начальному полю (4.31). Поскольку минимумы  $s_0(x)$  на разных периодах одинаковы, значения  $s_{kv}$  (4.23) можно положить равными нулю. Кроме того  $y_k = 2\pi k/\chi$ . В итоге выражение для пилообразной волны, аппроксимирующей первоначально гармоническое поле, примет вид

$$v(x, t) = \frac{a}{\tau} \left( z - 2\pi \frac{\sum_k k \exp\left[-\frac{R}{8\tau}(z-2\pi k)^2\right]}{\sum_k \exp\left[-\frac{R}{8\tau}(z-2\pi k)^2\right]} \right). \quad (4.33)$$

Здесь использованы обозначения

$$z = \chi x, \tau = a\chi t, R = 2a/\mu\chi \quad (4.34)$$

Графики поля  $v(x, t)$  (4.33) для разных значений  $\tau$  построены на рисунке 4.7.



**Рис. 4.7.** Графики пилообразной волны (4.33) при  $R = 100$ . Вертикальные масштабы графиков подобраны так, чтобы была видна форма поля  $v(x, t)$ . Видно, что с ростом  $\tau$

разрывы оплавляются, а поле приобретает все более синусоидальную форму, характерную для линейной стадии эволюции

Заметим еще, что при большом начальном числе Рейнольдса  $R \gg 1$ , условия применимости приближения пилообразных волн (4.32) сводятся к неравенству

$$t \gg t_n \sqrt{R}.$$

Обсудим, как меняется с течением времени число Рейнольдса исходной гармонической волны. Если  $R \gg 1$ , то имеются три ярко выраженные стадии эволюции поля  $v(x, t)$ . На временах  $t < t_n$  разрывы еще отсутствуют, а число Рейнольдса близко к начальному:

$$R(t) \cong \frac{al}{\mu} = \frac{\pi a}{\mu \chi} \cong R \left( l = \frac{\pi}{\chi} \right).$$

При  $t \gg t_n$  величина разрыва  $U(t)$  и его ширина  $\delta(t)$  меняются по законам

$$U(t) \cong \frac{l}{t}, \delta(t) \cong \frac{2\mu}{U(t)},$$

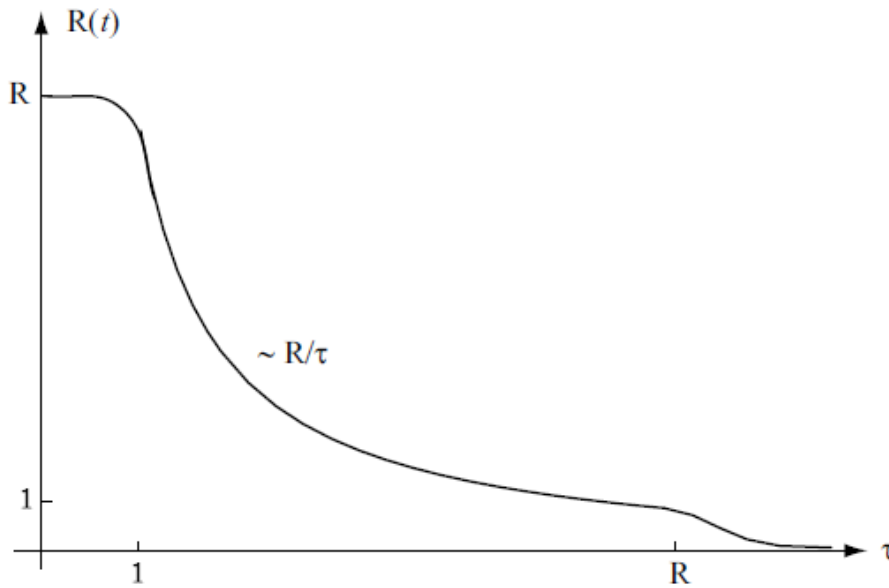
а число Рейнольдса убывает как  $1/t$ :

$$R(t) \cong \frac{U(t)l}{\mu} \cong \frac{l^2}{\mu t}.$$

Наконец при  $t \geq t_l$ , где  $t_l$  время, на котором ширина разрыва сравнивается с полупериодом поля  $v(x, t)$ :

$$\delta(t_l) \cong l \rightarrow t_l \cong \frac{\pi^2}{2\mu\chi^2} \cong R t_n,$$

наступает линейная стадия, а число Рейнольдса стремится к нулю. Полукачественный график текущего числа Рейнольдса  $R(t)$  первоначально гармонического поля  $v(x, t)$  изображен на рис. 4.8.



**Рис. 4.8.** Полукачественный график текущего числа Рейнольдса периодического поля при большом начальном числе Рейнольдса  $R \gg 1$ , в зависимости от безразмерного времени  $\tau = akt$

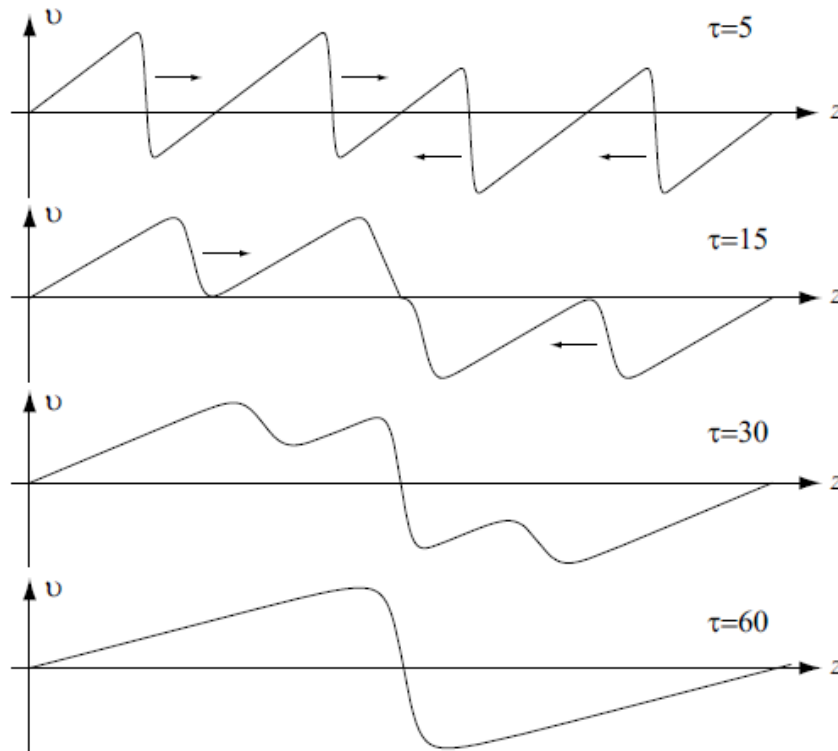
Заметим, что пилообразная волна, в которую превращается при  $R \gg 1$  первоначально гармоническое поле, несет в себе черты как  $N$ -, так и  $U$ -волн. Поскольку механизм диссипации энергии  $N$ -волн гораздо эффективнее, эволюция первоначально гармонической волны и ее выход на линейную стадию развивается по сценарию  $N$ -волн.

Обратим еще внимание на тот факт, что выражение (4.33) не содержит информации о гармоничности начального поля. Последнее означает, что если периодическое поле первоначально состоит из нескольких гармонических полей, то его асимптотика определяется волной с наибольшим периодом. Кроме того, окончательную победу крупномасштабной компоненты может ускорить слияние разрывов, соответствующих волне с меньшим периодом. Сказанное иллюстрируют, приведенные на рис. 4.9, графики решения уравнения Бюргера с начальным условием

$$v_0(x) = a[\sin(\chi x) + 0.25 \sin(0.25\chi x)] \quad (4.35)$$

при  $R = 50$ . Определение начального числа Рейнольдса и других безразмерных параметров заимствовано из (4.34).

Из рисунка видно, что вначале образуются разрывы, соответствующие мелкомасштабной компоненте начального условия (4.35). Затем, за счет модуляции скорости разрывов крупномасштабной компонентой, разрывы сливаются, образуя в конечном итоге один разрыв на периоде крупномасштабной компоненты начального условия.



**Рис. 4.9.** Эволюция решения уравнения Бюргера с начальным условием (4.35) и  $R = 50$ . Видно, что слияние разрывов приводит к формированию пилообразной волны с периодом крупномасштабной компоненты начального условия

## 4.2. Эволюция сложных сигналов

Эволюция сложных сигналов качественно отличается от эволюции одномасштабных сигналов. Так обычно принято считать, что диссипация ведет к относительному уменьшению роли нелинейных эффектов, а нелинейная стадия эволюции завершается линейной стадией. Однако возможна и обратная последовательность, когда линейная стадия эволюции сменяется нелинейной. Пусть начальное поле имеет вид последовательности  $N$  разнесенных импульсов с начальным числом Рейнольдса  $R_0 \ll 1$ . Из-за линейной диффузии импульсы расплываются, принимая гауссову форму, а затем сливаются в один импульс с числом Рейнольдса  $R(t) = NR_0$ . Если при этом  $R(t) \gg 1$ , то последующая эволюция носит ярко выраженный нелинейный характер.

### Квазипериодические сложные сигналы

Покажем возможное «аномальное» поведение сложных сигналов, состоящее в том, что их эффективное текущее число Рейнольдса может не только уменьшаться или оставаться постоянным, но и расти с течением времени, на примере обсуждения поведения периодических и квазипериодических полей.

Пусть начальное поле равно сумме гармонических компонент

$$v_0(x) = a [\sin(\chi x) + \beta^{\gamma-1} \sin(\beta \chi x)] \quad (\beta \ll 1). \quad (4.36)$$

Введем, по аналогии с тем как это было сделано выше, характерные времена нелинейности и выхода на линейный режим для второго гармонического слагаемого. Они равны

$$t_n(\beta) \cong \beta^{-\gamma} t_n, \quad t_l(\beta) \cong \beta^{-2} t_l \cong \beta^{-2} R t_n.$$

Если выполнено неравенство

$$t_l \leq t_n(\beta) \rightarrow R \beta^\gamma \leq 1 \rightarrow \gamma > 0,$$

то при  $t < t_l$  второе слагаемое практически не влияет на эволюцию формы первой периодической волны, а к моменту  $t \geq t_l$ , когда она практически полностью диссипирует, результирующее поле примерно равно

$$v(x, t \geq t_l) \cong a \beta^{\gamma-1} \sin(\beta \chi x).$$

Его число Рейнольдса таково:

$$R(t_n(\beta)) \cong \frac{t_l(\beta)}{t_n(\beta)} \cong R \beta^{\gamma-2}.$$

Таким образом, при выполнении условия

$$0 < \gamma < 2, \quad (4.37)$$

число Рейнольдса, к началу нелинейной стадии развития крупномасштабной компоненты в (4.36), становится больше начального числа Рейнольдса.

Рассмотрим более сложное квазипериодическое начальное поле

$$v_0(x) = a \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{(\gamma-1)k} \sin(\beta^k \chi x + \vartheta_k), \quad (4.38)$$

где  $\vartheta_k$  произвольные фазовые сдвиги. Если выполнены перечисленные выше ограничения на  $\beta$ , а  $\gamma$  удовлетворяет неравенствам (4.37), то к моменту

$$t^k \cong \beta^{-k\gamma} t_n$$

наступает нелинейная стадия для  $k$ -го слагаемого суммы (4.38), предыдущие слагаемые выбыли из игры за счет диссипации, а последующие создают квазипостоянный фон. Соответственно текущее число Рейнольдса равно

$$R(t^k) \cong R \beta^{k(\gamma-2)}.$$

Исключая из двух последних равенств  $\beta$ , находим, что при выполнении условия (4.37) число Рейнольдса в среднем неограниченно растет с течением времени по степенному закону

$$R(t) \cong R \left( \frac{t}{t_n} \right)^{(2-\gamma)/\gamma}.$$

### Эволюция фрактальных сигналов

Поведение поля качественно меняется для сигналов, обладающих фрактальной структурой. Пусть, к примеру, имеется  $N$  однополярных импульсов с периодом  $L_1$  и данная структура воспроизводится  $N$  раз с периодом  $L_2 = \beta L_1$ . Тогда число импульсов в указанном масштабе равно  $N^2$ . Пусть данная процедура повторяется  $M$  раз, причем  $L_i = \beta L_{i-1}$ ,  $\beta = (N-1)\gamma$  и  $\gamma > 1$ . В масштабе  $L_M$  длительность импульса равна  $T_M = L_M(N-1)$ , а число импульсов в последовательности равняется  $N^M$ . При  $M \gg 1$  можно ввести фрактальную размерность такого сигнала как  $D = \lim(\ln R / \ln L)$ , где  $R = N^i$  число импульсов в интервале  $L = L_1 N \beta^{i-1}$  и  $D = \ln N / \ln[(N-1)\gamma]$ .

Если  $(N-1)\gamma = N$ , то  $D = 1$  и мы имеем периодический сигнал с периодом  $L_1$ . Если же внешний период  $T_M = 1$ , а  $M \rightarrow \infty$ , то легко видеть, что последовательность координат импульсов образует канторовское множество. Так если  $N = 2$ ,  $\beta = 3$ , то  $D = \ln 2 / \ln 3$ .

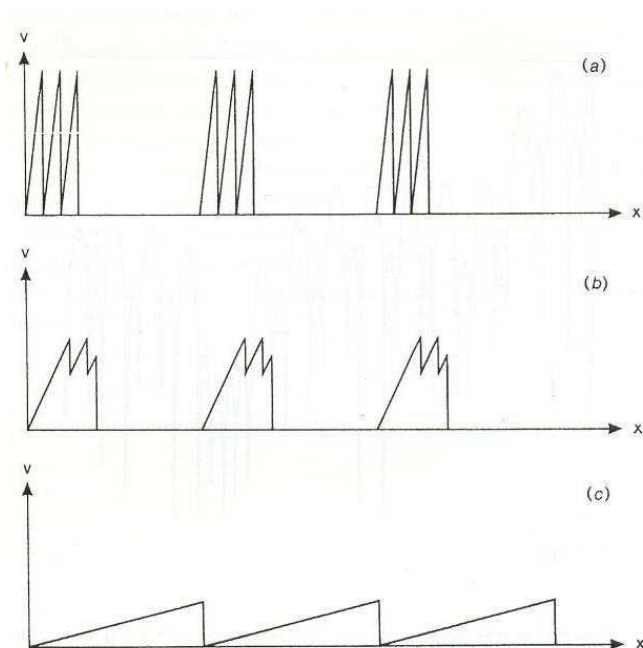
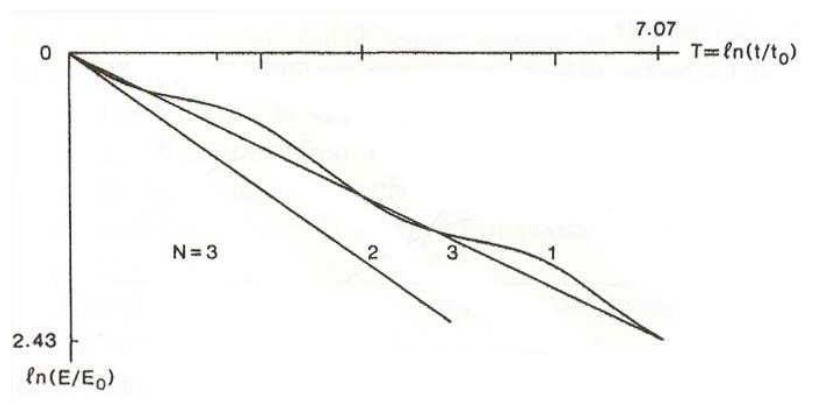


Рис. 4.10. Эволюция “канторовского” множества

Обсудим эволюцию сигнала в наименьшем масштабе  $L_1$ . Число Рейнольдса одиночного импульса равно  $R_0 = m/2\mu$ , и если  $R_0 < 1$ , то имеем линейную стадию затухания, где ширина каждого импульса растет как  $l(t) = (2\mu t)^{1/2}$ . На временах когда  $l(t) \gg L_1 N$  последовательность  $N$  импульсов, благодаря *линейной диффузии*, превратится в один импульс с числом Рейнольдса  $R_1 = mN/2\mu = N$

$R_0 > R_0$ . Таким образом, вследствие линейной диффузии, число Рейнольдса растет, линейная стадия сменяется в конечном итоге сильно нелинейной, и можно ограничиться анализом в пределе  $\mu \rightarrow 0$ . В наименьшем масштабе каждый отдельный импульс превращается в треугольный длительностью  $x_s(t) = (2mt)^{1/2}$ , а его энергия затухает как  $E(t) = x_s^3/3t^2 = (2m)^{3/2}t^{1/2}$ . Взаимодействие между импульсами начинается, когда  $t > t_0$ , где  $t_0 = L_1^2/2m$  определяется из условия  $x_s(t) = L_1$ . После слияния всех разрывов в наименьшем масштабе  $N$  импульсов превращаются в один треугольный импульс длительностью  $x_s(t) = (2Nmt)^{1/2}$ , а его энергия в  $N^{1/2}$  раз больше энергии  $N$  невзаимодействующих импульсов. В момент  $t_1 = L_2 N^2/2m = t_0 \beta^2/N$  начинается слияние импульсов во втором масштабе. В итоге эволюция поля логарифмически периодически автомодельна: а именно, во временном интервале  $t \in [t_0(\beta_2/N)^i, t_0(\beta_2/N)^{i+1}]$  поле повторяет эволюцию в интервале  $t \in [t_0, t_0\beta_2/N]$ . Усредненный закон затухания энергии определяется при этом фрактальной размерностью сигнала  $D$ :

$$E(t) = C_E(t/t_0)^{-p}, \quad p = (1 - D)/(2 - D), \quad 0 < p < 1/2.$$



**Рис. 4.11.** Затухание энергии “канторовского” множества – кривая 1, кривая 2 – усредненный закон затухания, кривая 3 – затухание одиночного импульса

### Эволюция многомасштабных сигналов – динамическая модель турбулентности

Важный для приложений пример эволюции сложных сигналов дает анализ так называемой турбулентности Бюргерса. Турбулентностью Бюргерса принято называть эволюцию случайных непрерывных полей удовлетворяющих уравнению Бюргерса. В случае исчезающе малой вязкости непрерывное поле трансформируется в случайную пилообразную волну – последовательность треугольных импульсов с одинаковым наклоном  $\partial_x v = 1/t$  и со случайным положением разрывов. Из-за многократного слияния разрывов статистические свойства такого случайного поля становятся автомодельными и



характеризуются единственным интегральным масштабом  $L(t)$ . Из-за слияния разрывов интегральный масштаб растет и из-за этого энергия турбулентности

$$\sigma^2(t) \sim L^2(t)/t^2 \quad (4.39)$$

затухает медленнее, чем энергия периодического сигнала. Тип эволюции турбулентности определяется поведением крупномасштабных компонент начального спектра энергии

$$E_0(k) = \alpha^2 k^n b_0(k); \quad (4.40)$$

$$E_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int \langle v_0(x), v_0(x+z) \rangle e^{ikz} dz. \quad (4.41)$$

Здесь  $b_0(k)$  функция, которая спадает достаточно быстро при  $k > k_0 \sim l_0^{-1}$ , и  $b_0(0) = 1$ .

При  $n < 1$  интегральный масштаб турбулентности  $L(t)$  растет как

$$L(t) = (\alpha t)^{2/(3+n)}. \quad (4.42)$$

Для энергии турбулентности при этом имеем из (4.39):

$$\sigma^2(t) \sim t^{-p}, \quad p = \frac{2(n+1)}{n+3}. \quad (4.43)$$

Рассмотрим пример затухания многомасштабнодетерминированного сигнала с начальным дискретным спектром усредненные свойства которого (интегральный масштаб и энергия) аналогичны законам затухания турбулентности Бюргерса с непрерывным начальным спектром.

Пусть начальное поле имеет вид

$$v_0(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p A_{inv}(k_p x + \phi_p), \quad (4.44)$$

Здесь  $a_p$ ,  $k_p$  амплитуда и волновое число моды,  $\phi_p$  ее фаза. Будем считать, что пространственные частоты мод  $k_p$  образуют спектр Вейерштрасса (аккумулируются к нулевой частоте), а их амплитуды выбираются из условия  $a_p^2 = E_0(k_p) \Delta_p$ ,  $E_0(k) \sim k^n$ , где  $E_0(k)$  спектр энергии непрерывного сигнала

$$k_p = k_0 \varepsilon^p, \quad a_p = a_0 \varepsilon^{-hp}, \quad h = -\frac{n+1}{2}, \quad a_0 = \alpha k_0^{(n+1)/2}. \quad (4.45)$$

Здесь  $h$  показатель подобия.

В качестве мод выберем  $2\pi$ -периодическую инверсную пилообразную функцию  $A_{inv}(x)$ ,

$$A(x) = \pi - x, \quad x \in [0, 2\pi) \quad (4.46)$$

особенностью которой является образование разрыва конечной амплитуды.

Эволюция и взаимодействие инверсных пилообразных мод. Как было показано выше решение уравнения Бюргера с начальным линейным профилем  $v_0 = -\gamma(x - x_+)$  имеет вид:

$$v(x, t) = \frac{-\gamma(x - x_+)}{1 - \gamma t}.$$

Величина  $\gamma^{-1}$  имеет размерность времени, и для  $\gamma > 0$ , за конечное время  $t = \gamma^{-1}$  градиент  $\partial_x v$  становится бесконечным. Для  $\gamma < 0$  градиент становится равным  $\partial_x v = t^{-1}$ , вне зависимости от начального градиента  $\gamma$ , на временах  $t \gg |\gamma|^{-1}$ . Таким образом, из предыдущих соотношений мы имеем, что эволюция  $p$ -ой моды характеризуется нелинейным временем

$$t_p = \gamma_p^{-1} = a_p k_p^{-1} = \frac{t_0}{(\varepsilon^{(n+3)/2})^p}, \quad t_0 = 1 / \alpha k_0^{n+3/2}. \quad (4.47)$$

Из решения (3.16) легко видеть, что в момент времени  $t = t_p$ ,  $p$ -ая мода трансформируется в “обычную” пилообразную волну с наклоном  $\partial_x v = 1/t$ , независимым от амплитуды и волнового числа этой моды. При этом плотность энергии этой моды  $\sigma^2(t) = \langle v^2(x, t) \rangle_L$ , где  $\langle \dots \rangle_L$  обозначает усреднение по периоду, сохраняется при  $t < t_p$ , и уменьшается как  $(k_p t)^{-2}$  при  $t > t_p$ .

Как было показано, эволюция поля скорости в уравнении Бюргера  $\mu \rightarrow 0$  эквивалентна эволюции газа слипающихся частиц с постоянной начальной скоростью. Для  $p$ -ой моды на начальной стадии для плотности имеем

$$\rho(x, t) = \rho_0 \frac{1}{1 - t/t_p}, \quad \left| \frac{\pi}{k_p} - x \right| < \frac{t}{t_p} \frac{\pi}{k_p} \quad (4.48)$$

и  $\rho$  равна нулю этого интервала. В момент времени  $t = t_p$  все легкие частицы сливаются в тяжелую частицу массой

$$m_p = \rho_0 L_p = \rho_0 \frac{2\pi}{k_p} \quad (4.49)$$

с координатой

$$x_{p,l} = \frac{\pi}{k_p} - \frac{\phi_p}{k_p} + \frac{2\pi}{k_p} l; \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.50)$$

эквивалентной нулю  $p$ -ой моды. Процесс эволюции скорости и слипания частиц изображен на рисунке 4.12.

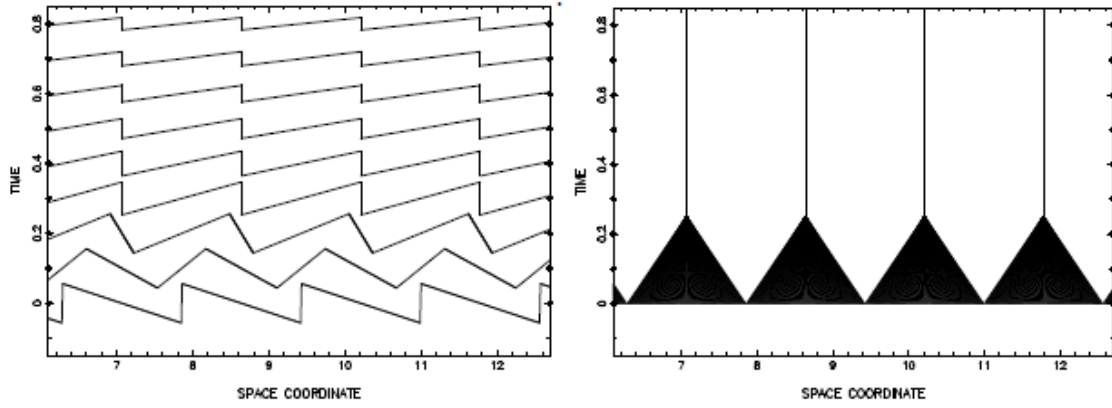


Рис. 4.12. Эволюция инверсной моды и слияние легких частиц в кластеры

Рассмотрим теперь взаимодействие двух последовательных мод:  $p$ -ой и  $(p+1)$ -ой. Из уравнения (4.47) видно, что отношение нелинейных времен этих последовательных мод равно

$$\frac{t_{p+1}}{t_p} = \varepsilon^{-(n+3)/2} = \varepsilon^{1-h} \quad (4.51)$$

и не зависит от  $p$ . Градиент начального поля  $v_{(p)}(x) + v_{(p+1)}(x)$  равен  $-(\gamma_p + \gamma_{p+1})$ , и эффективное нелинейное время это поля равно

$$t_{p,eff} = t_{p,p+1} = \frac{1}{\gamma_p + \gamma_{p+1}} = \frac{t_p}{1 + t_p/t_{p+1}}. \quad (4.52)$$

Таким образом, крупномасштабная мода приводит к более быстрому возникновению разрывов в мелкомасштабной моде. Поскольку начальный градиент одинаков для всех точек начального профиля то все легкие частицы сливаются в одно и тоже время  $t = t_{p,p+1}$ . Предположим, что между фазами последовательных мод выполнено соотношение

$$k_{p+1}\phi_{p+1} = k_p\phi_p + 2\pi r/N. \quad (4.53)$$

В этом случае разрывы низкочастотной  $(p+1)$ -ой моды не приводят к появлению дополнительных разрывов в суммарном  $v_{(p)}(x) + v_{(p+1)}(x)$  по сравнению с  $p$ -ой модой. Таким образом на временах  $t > t_{r,eff}$ , массы всех тяжелых частиц будут такие же как в отсутствии крупномасштабной моды.

Координаты этих частиц в момент времени  $t = t_{r,eff}$  равны

$$X_{(p,l)}(t_{p,eff}) = x_{p,l} + v_{(p+1)}(x_{p,l})t_{p,eff} \quad (4.54)$$

где  $x_{p,l}$  позиции нулей  $p$ -ой моды (4.50). Скорость этих частиц равна  $v_{(p+1)}(x_{p,l})$ . Это уравнение (4.54) становится очевидным, если мы используем тривиальное равенство  $v_{(p)}(x_{p,l}) + v_{(p+1)}(x_{p,l}) = v_{(p+1)}(x_{p,l})$ . Из уравнения (4.54) мы сразу имеем, что на временах больших  $t_{p,eff}$  координаты тяжелых частиц ведут себя как

$$X_{(p,l)}(t) = x_{(p,l)} + v_{(p+1)}(x_{p,l})t \quad (4.55)$$

Расстояние между последовательными тяжелыми частицами  $X_{p,l}(t)$  и  $X_{p,l+1}(t)$  уменьшается с течением времени пропорционально начальному градиенту крупномасштабной моды  $v_{(p+1)}(x)$ :

$$\begin{aligned} X_{p,l+1}(t) - X_{p,l}(t) &= (x_{p,l+1} - x_{p,l}) - t \frac{\partial v_{(p+1)}(x)}{\partial x} (x_{p,l+1} - x_{p,l}) \equiv \\ &\equiv (x_{p,l+1} - x_{p,l}) \left(1 - \frac{t}{t_{p+1}}\right). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Таким образом, в момент времени  $t = t_{p+1}$  эти частицы сливаются и вновь слившиеся частицы имеют массу

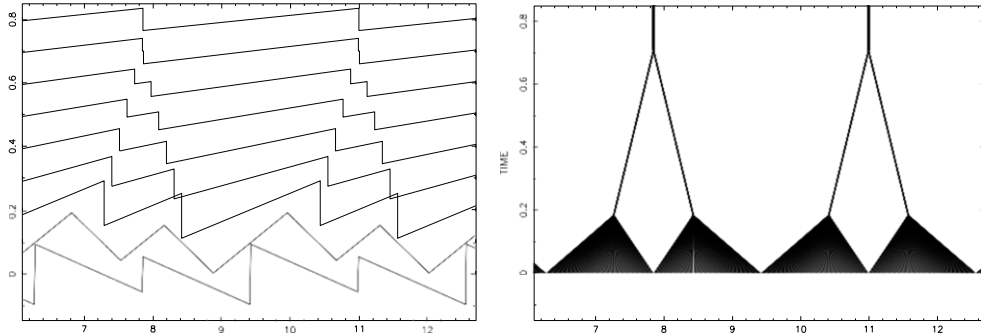
$$m_{(p+1)} = \rho_0 L_{p+1} \quad (4.57)$$

и координаты

$$x_{p+1,l} = \frac{\pi}{k_{p+1}} - \frac{\phi_{p+1}}{k_p} + \frac{2\pi}{k_{p+1}} l; \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.58)$$

Скорости их равны нулю.

Таким образом, если  $t$  больше  $t_{p+1}$ , то эволюция начального возмущения  $v_0(x) = v_{(p)}(x) + v_{(p+1)}(x)$  будет такая же как и эволюция только одной крупномасштабной моды  $v_{(p+1)}(x)$ . Эволюция поля скорости двух последовательных мод и соответствующий процесс слияния частиц изображен на рисунке 4.13.



**Рис. 4.13.** Взаимодействие двух последовательных инверсных мод и слияние легких частиц в кластеры

Очевидно, что при соответствующем выборе волновых чисел  $k_p = k_0/N^p$  и фаз мод и для конечной суммы мод  $v(x) = v_{(p)}(x) + v_{(p+1)}(x) + \dots + v_{(M)}(x)$  эволюция поля на временах больших  $t_M$ , будет такая же как и эволюция единственной крупномасштабной моды  $v_{(M)}(x)$ . Для целых  $N$  минимальная комбинационная частота всех взаимодействующих гармоник равна волновому числу самой крупной моды  $k_M = k_0/N^M$ . Таким образом, нелинейное взаимодействие не приводит к генерации новых компонент, чье волновое число меньше  $k_M$ .

*Взаимодействие мелкомасштабной инверсной пилообразной моды с крупномасштабной структурой.* Рассмотрим взаимодействие мелкомасштабной моды  $p$ -ой с полем, представляющим бесконечный ряд крупномасштабных мод

$$W_p(x) = \sum_{r=p+1}^{\infty} v_r(x) \equiv \sum_{r=p+1}^{\infty} a_r A(k_r x + \phi_r), \quad (4.59)$$

предполагая, что фазы этих мод удовлетворяют условию (4.53), а для волновых чисел по прежнему выполнено соотношение  $k_r = k_0 \varepsilon^r$ ,  $a_r = a_0 \varepsilon^{-hr}$ ,  $h = -(n+1)/2$ . Процесс взаимодействия удобно интерпретировать при этом на языке частиц. Из (4.59) и (4.47) для градиента начального возмущения  $v_0(x) = v_p(x) + W_p(x)$  имеем

$$\frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = \frac{\partial v_p(x)}{\partial x} + \frac{\partial W_p(x)}{\partial x} = \sum_{r=p}^{\infty} \gamma_r = \gamma_0 \sum_{r=p}^{\infty} (\varepsilon^{\frac{n+3}{2}})^r = \gamma_0 \varepsilon^{\frac{n+3}{2}p} \frac{1}{1 - \varepsilon^{(n+3)/2}}. \quad (4.60)$$

Для сходимости ряда здесь предполагается, что  $n > -3$  ( $h < 1$ ). Из этого уравнения следует, что эффективное время нелинейности  $p$ -ой равно

$$\tilde{t}_p = \left( \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} \right)^{-1} = t_p (1 - \varepsilon^{(n+3)/2}) \quad (4.61)$$

где  $t_p$  определяется уравнением (4.47).

Таким образом, в момент времени  $\tilde{t}_p$  легкие частицы сливаются в тяжелые массой  $m_p = \rho_0 L_p$  (4.57). Координаты этих частиц определяются уравнением аналогичным уравнению (4.55):

$$x_{p,l}(t) = x_{p,l}(t) + W_p(x_{p,l})t, \quad (4.62)$$

где скорости частиц определяются функцией  $W_p(x)$  (4.59), которая представляет собой бесконечную сумму крупномасштабных мод, а  $x_{p,l}$  - координаты нулей  $p$ -ой моды.

Расстояние между координатами последовательных тяжелых частиц  $x_{p,l}$  и  $x_{p+1,l}$  уменьшается с течением времени как  $(1 - t/\tilde{t}_{p+1})$ , где  $\tilde{t}_{p+1} = t_{p+1}(1 - \varepsilon^{(n+3)/2})$  обратный градиент функции  $W_p(x)$ , (см. (4.59) и (4.60)). Таким образом, время слияния частиц этого поколения определяется уравнением (4.61) с  $p = p+1$ , и массы новых частиц будут определяться периодом  $(p+1)$ -ой моды - см. уравнение (4.57).

Экстраполяция процесса слияния тяжелых частиц в следующих поколениях очевидна. Столкновение частиц в  $q$  поколении имеет место в момент времени  $\tilde{t}_{p+q} = t_{p+q}(1 - \varepsilon^{\frac{n+3}{2}})$  и массы этих частиц в этот момент времени определяются периодом  $(p+q)$ -ой моды  $m_{p+q} = \rho_0 L_{p+q} = 2\pi\rho_0/k_{p+q}$ . В интервале между столкновениями  $t \in [\tilde{t}_{p+q}, \tilde{t}_{p+q+1}]$

$$\frac{\tilde{t}_{p+q+1}}{\tilde{t}_{p+q}} = \varepsilon^{-\frac{(n+3)}{2}} = N^{\frac{n+3}{2}} \quad (4.63)$$

координаты частиц будут определяться уравнением (4.62) с  $p = p + q$ . Здесь  $W_{p+q}(x)$  - сумма скоростей всех крупномасштабных мод с  $r > p + q$ , и  $x_{p+q,l}$  - нули  $(p + q)$ -ой моды. Важно подчеркнуть, что при  $t > \tilde{t}_{p+q}$  эволюция частиц полностью определяется только крупномасштабными модами с  $r \geq p + q$ . Это означает, что на временах  $t > \tilde{t}_{p+q}$  позиции частиц зависят от присутствия в начальном возмущении мелкомасштабных возмущений с  $r < p + q$ .

Таким образом, для двух разных начальных скоростей:  $v_{\tilde{0}}(x)$  – поля с мелкомасштабными модами, и  $v_0(x)$  – поля без мелкомасштабных мод:

$$v_0(x) = W_{p+q-1}(x); v_{\tilde{0}}(x) = W_{p-1}(x) \quad (4.64)$$

эволюция поля будет одинаковой при  $t > \tilde{t}_{p+q-1}$ . Даже если  $p \rightarrow -\infty$  (когда в начальном возмущении присутствуют моды с очень маленькими масштабами  $L_p \sim \varepsilon^{-p} = N^p$  и очень большими амплитудами  $a_p \sim a_0(\varepsilon^{(n+1)/2})^p = a_0(N^{(n+1)/2})^{-p}$ ) многократное слияние частиц приводит к независимой эволюции крупномасштабных возмущений по отношению к мелкомасштабным модам.

Этот эффект аналогичен эффекту самосохранению крупномасштабных структур в турбулентности Бюргерса. Если начальное возмущение  $v_0(x)$  представляет собой шумовое поле, то многократное слияние разрывов приводит к непрерывному росту интегрального масштаба турбулентности  $L(t)$ . В присутствии мелкомасштабных возмущений  $v_h(x)$  координаты разрывов крупномасштабной структуры будут отклоняться от невозмущенных положений и эти отклонения  $\Delta x_k(t)$  растут с течением времени. Таким образом, эволюция крупномасштабных структур определяется конкуренцией двух факторов – ростом интегрального масштаба  $L(t)$  из-за слияния крупномасштабных разрывов и ростом отклонений положений разрывов  $\Delta x_k(t)$  от невозмущенного значения из-за наличия мелкомасштабных возмущений  $v_h(x)$ . Для турбулентности Бюргерса имеющей энергетический спектр с  $n < 1$  (4.40), многократное слияние разрывов приводит к устойчивости крупномасштабных структур по отношению к мелкомасштабным возмущениям. Для модельного сигнала, рассмотренного выше, этот эффект имеет место для произвольных  $n$  благодаря специальному выбору волновых чисел и фаз взаимодействующих мод.

Как уже неоднократно отмечалось, эволюция поля скорости в уравнении Бюргерса имеет однозначное соответствие с эволюцией газа слипающихся частиц. На стадии, когда все легкие частицы слились в тяжелые, градиент поля скорости имеет во всех точках пространства одинаков  $\partial_x v = 1/t$ . На этой стадии профиль поля  $v(x, t)$  полностью определяется координатами и скоростями тяжелых частиц. Их координаты совпадают с координатами разрывов  $X_s(t)$ , а скорости разрывов удовлетворяют известному соотношению

$$v_s(t) = \frac{dX_s(t)}{dt} = \frac{v_s(x_s-0,t) + v_s(x_s+0,t)}{2} \quad (4.65)$$

и равны скорости тяжелых частиц. Амплитуды разрывов

$$\Delta v_s(x) = (v(x_s-0, t) - v(x_s+0, t)) = m/t \quad (4.66)$$

определяются массой тяжелых частиц ( $\rho_0 \equiv 1$ ).

Таким образом, исследование движения тяжелых частиц позволяет полностью реконструировать поле скорости  $v(x, t)$  уравнения Бюргера.

*Пилообразная функция Вейерштрасса-Мандельброта.* Как было показано выше эволюция тяжелых частиц (разрывов) определяется функцией  $W_p(x)$  (4.59). Базовыми функциями  $W_p(x)$  являются периодические инверсные пилообразные функции с волновыми числами  $k_r = k_0 \varepsilon^r$  и амплитудами  $a_r = a_0 \varepsilon^{-hr}$ ,  $h = -(n+1)/2$ . Волновые числа формируют геометрическую прогрессию как в функции Вейерштрасса и аккумулируются к точке  $k = 0$ .

В стандартной функции Вейерштрасса ситуация противоположная - ее частоты непрерывно возрастали. Тем не менее, функция  $W_p(x)$  обладает многими свойствами функции Вейерштрасса и ее обобщения - функции Вейерштрасса-Мандельброта.

Мы рассматриваем здесь детерминированную функцию  $W_p(x)$  со специальными фазовыми соотношениями между фазами мод  $\phi_p = \left(\frac{2\pi k}{N}\right)p$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $N = 1/\varepsilon$ ), так что разрывы крупномасштабных мод  $r > p+1$  совпадают с некоторыми из разрывов мелкомасштабной моды  $r = p+1$ . Функция  $W_p(x)$  непрерывна в интервалах  $2\pi/k_{p+1} = 2\pi/(k_0 \varepsilon^{p+1})$  и имеет в них одинаковый наклон. Обратная величина этого наклона имеет размерность времени  $\tilde{t}_{p+1}$

$$\widetilde{t}_{p+1} = t_{p+1} \left(1 - \varepsilon^{\frac{n+3}{2}}\right); t_{p+1} = t_0 \left(\varepsilon^{\frac{n+3}{2}}\right)^{p+1} \quad (4.67)$$

и пропорциональна времени нелинейности  $t_{p+1}$  самой мелкомасштабной моды. Очевидно, мы предполагаем  $n > -3$ , что гарантирует сходимость (4.60) и выполнения неравенства  $t_{p+1} > t_p$ . Амплитуды мод пропорциональны  $\varepsilon^{(n+1)/2}$  и при  $n > -1$  функция  $W_p(x)$  ограничена

$$W_p(x) \leq \sum_{r=p+1}^{\infty} a_r = a_0 \left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)^{p+1} \frac{1}{1 - \varepsilon^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (4.68)$$

Таким образом, при конечных  $p$  энергия  $W_p(x)$  также конечна. При этом функция обладает скэйлинговыми свойствами

$$W_p(x) = \varepsilon^{-hp} W_0(\varepsilon^p x); W_p(\varepsilon^m x) = \varepsilon^{hm} W_{m+p}(x). \quad (4.69)$$

Случай  $-1 < n < 1$  эквивалентен при этом начальным условиям для турбулентности Бюргера представляющим обобщенный белый шум. Энергия начального шума при этом определяется ультрафиолетовой частотой обрезания, которая в рассматриваемой модели соответствует наименьшему масштабу  $p$ . Если  $p \rightarrow -\infty$  энергия модельного сигнала (как и энергия белого шума) стремится к бесконечности. Однако, как следует из приведенного выше рассмотрения, за конечное время из-за нелинейной диссипации  $t$  все моды с  $t_p < t$  имеют

конечную энергию  $\sim L^2/t^2$  и таким образом полная энергия волны также конечна. Таким образом, даже если мы имеем расходимость начальных условий ( $p \rightarrow -\infty$ ) мы имеем решение с конечной энергией для любого времени  $t > 0$ .

Случай  $n < -1$  подобен фрактальному броуновскому движению для скорости в турбулентности Бюргерса. Ряд (4.68) в этом случае расходится и начальное возмущение  $W_p(x)$  неограничено. Однако для турбулентности Бюргерса в этом случае важно только относительное движение частиц (разрывов). Таким образом, можно провести регуляризацию функции  $W_p(x)$  аналогичную то что делается с функцией Вейерштрасса.

Так считая  $\phi_p \equiv 0$ , можно ввести функцию  $W_p^\infty(x) = W_p(x) - W_p(0)$ , которая конечна на любом конечном интервале.

*Автомодельные свойства многомасштабного сигнала.* Используя скейлинговые характеристики функции Вейерштрасса-Мандельброта  $W_p(x)$  покажем, что его эволюция в уравнении Бюргерса носит логарифмически периодический автомодельный характер.

Рассмотрим эволюцию многомасштабного сигнала

$$v_0(x) = v_p(x) + W_p(x). \quad (4.70)$$

Как было показано, на временах  $t > \tilde{t}_p$ , все легкие частицы слипаются и образуются тяжелые частицы массой  $M_p = \rho_0 L_p$ , а их движение определяется уравнением (4.63). Эти частицы слипаются в момент времени  $\tilde{t}_{p+1}$ , ( $\tilde{t}_{p+1}/\tilde{t}_p = N^{(n+3)/2}$ ,  $N = \varepsilon^{-1}$ ), и новые тяжелые частицы имеют массу  $m_{p+1} = \rho_0 L_{p+1} = m_p N$ . Их движение будет определяться теми же законами (4.63) но с заменой индекса у функции Вейерштрасса-Мандельброта  $p \rightarrow p + 1$ . Используя скейлинговые свойства  $W_p(x)$  (4.69) мы имеем, что движение частиц в этом временном интервале будет подобно движению частиц в интервале  $[\tilde{t}_p, \tilde{t}_{p+1}]$  если мы перенормируем время  $t/\tilde{t}_p \Rightarrow t/\tilde{t}_{p+1}$ . Поскольку отношение времен слияния  $t_{p+1}/t_p$  не зависит от  $p$ , то можно говорить о логарифмически периодической автомодельности движения частиц. Это означает, что в произвольном временном интервале  $[\tilde{t}_q, \tilde{t}_{q+1}]$  движение частиц будет подобно движению частиц в интервале  $[\tilde{t}_p, \tilde{t}_{p+1}]$ , с параметрами подобия  $x_p/x_q = \varepsilon_{p-q}$  в координатном пространстве и  $t_p/t_q = \left(\varepsilon^{-\frac{n+3}{2}}\right)^{p-q}$  во времени. Но поскольку координаты и массы частиц полностью определяют поле скорости, то и решение уравнения Бюргерса с такими начальными условиями будет логарифмически периодически автомодельным.

После каждого столкновения масса частиц  $M(t)$  возрастает в  $N = 1/\varepsilon$  раз. Временные интервалы между последовательными столкновениями растут как  $t_{p+1}/t_p = N^{\frac{n+3}{2}}$ . Таким образом, аппроксимируя кусочно-постоянную функцию  $m(t)$  степенным законом



$$m(t) \cong m_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{(n+3)/2} \quad (4.71)$$

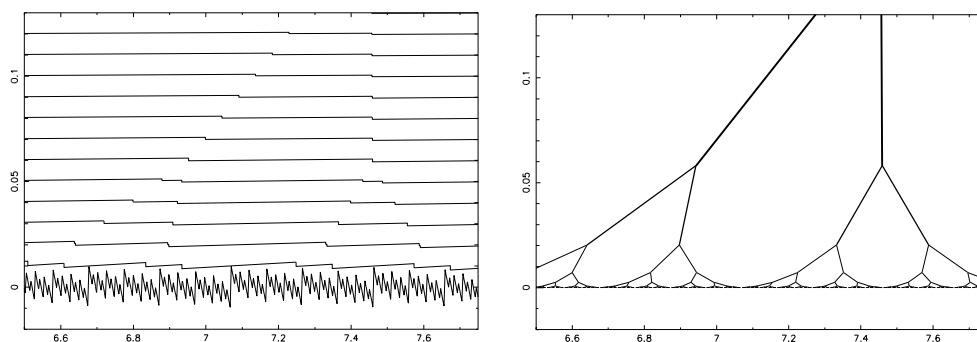
мы получаем тот же закон, что и закон роста интегрального масштаба  $L(t) \sim m(t)$  для турбулентности Бюргера.

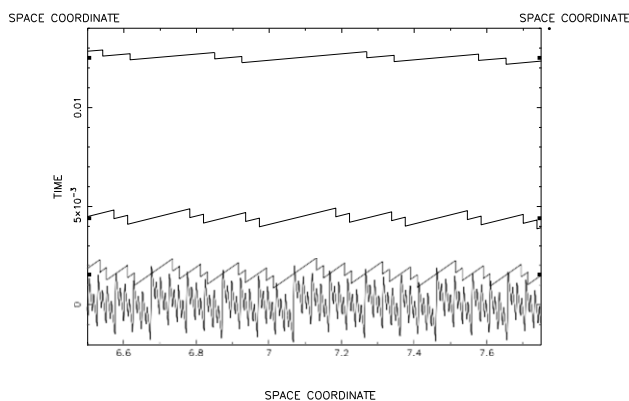
Для случая  $n > -1$  мы можем также оценить и закон затухания энергии модельного сигнала. При  $n > -1$  и  $\varepsilon \ll 1$  основная энергия сигнала в момент времени  $t$  находится в моде с наименьшим периодом и пропорциональна  $L^2(t)/t^2$ . Таким образом, и для усредненного закона затухания энергии модельного сигнала мы имеем тот же закон затухания энергии, как и для турбулентности Бюргера.

Для иллюстрации эволюции модельных многомасштабных сигналов приведем профили скорости в разные моменты времени и траектории слипающихся частиц для начальных условий типа “белого шума” ( $n=0, h=-1/2$ ) и “Броуновского” движения ( $n=-2, h=1/2$ ). В экспериментах бралось десять мод с отношением последовательных волновых чисел  $\varepsilon = 1/N = 1/2$ . На рисунках 4.14, 4.15 изображена начальная стадия эволюции в некотором достаточно малом пространственном интервале, когда конечность числа мод еще не сказывается.

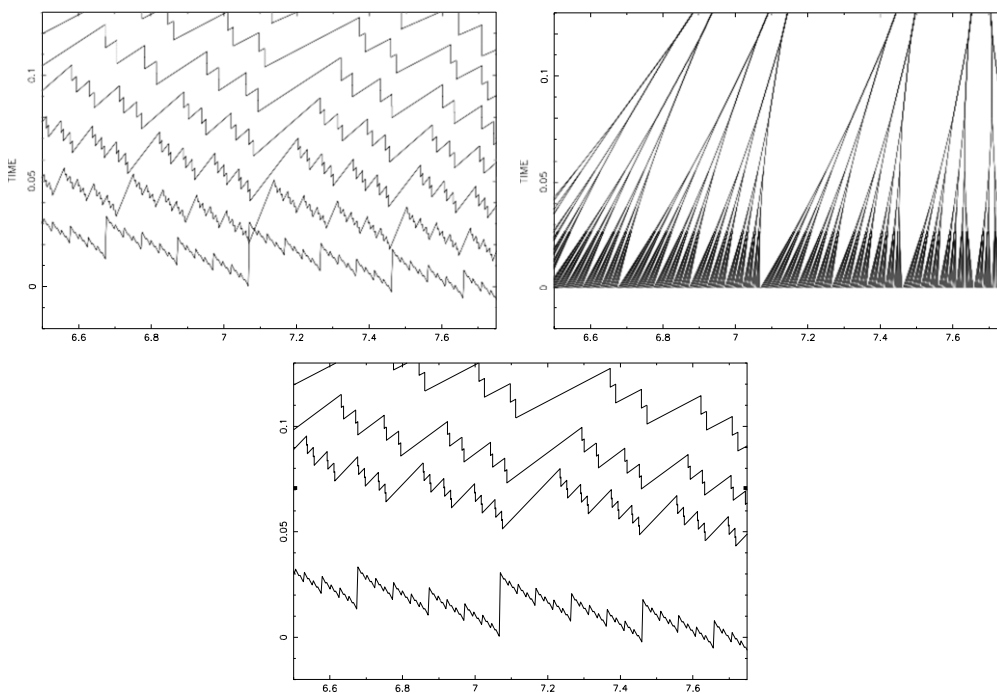
Из рисунка 4.14 видно, что для  $n=0$  начальная пилообразная многомасштабная функция осциллирует около  $v=0$  подобному “белому шуму” с конечной дисперсией. После слипания легких частиц, когда “инверсная” пилообразная функция трансформируются в пилообразную волну с одинаковым положительным градиентом  $\partial_x v = 1/t$ , структура сигнала относительно проста и даже при  $N=2$  основная энергия сосредоточена в моде с наименьшим волновым числом.

В случае  $n=-2$  начальный профиль имеет большие отклонения, что типично для Броуновского движения. После слияния легких частиц профиль волны представляет из себя последовательность разрывов различной амплитуды, что также имитирует свойства Броуновского сигнала в турбулентности Бюргера.





**Рис. 4.14.** Профиль поля и траектории кластеров (разрывов) для начальных условий типа белого шума ( $n = 0$ ,  $h = -1/2$ ). На последнем графике изображены профили поля в моменты подобия



**Рис. 4.15.** Профиль поля и траектории кластеров (разрывов) для начальных условий типа Броуновского движения ( $n = -2$ ,  $h = 1/2$ ). На последнем графике изображены профили поля в моменты подобия

На последних графиках изображены профили скорости в три последовательных момента слипания тяжелых частиц  $t_*/t_{**} = N^{(n+3)/2}$ . Эти графики иллюстрируют логарифмически периодическую автомодельность эволюции многомасштабных сигналов.

*Эволюция многомасштабных полей в векторном уравнении Бюргерса.* Уравнение Бюргерса допускает обобщение и на многомерный случай

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (4.72)$$

Можно для этого уравнения показать, что для потенциальных полей оно также сводится к линейному уравнению диффузии. Его асимптотическое решение при исчезающе малой вязкости полностью аналогично соответствующему решению одномерного уравнения Бюргерса.

Здесь лишь отметим, что подобные рассмотренным выше, многомасштабные решения можно построить и для векторного уравнения Бюргерса. Предположим, что начальное возмущение  $\mathbf{V}_p(\mathbf{x})$  представляет собой бесконечную сумму “инверсных” мод  $\mathbf{v}_r(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{V}_p(\mathbf{x}) = \sum_{r=p}^{\infty} \mathbf{v}_r(\mathbf{x}). \quad (4.73)$$

В двухмерном случае  $r$ -ая “инверсная” мода может построена как система линейных функций в равносторонних треугольниках со стороной  $L_r$ , плотно покрывающих плоскость. Внутри каждого из треугольников в  $r$ -ой моде скорость имеет линейный профиль  $\mathbf{v}_r(\mathbf{x}) = -\gamma_r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_+)$ , где  $\mathbf{x}_+$  координата центра треугольника. Легко убедиться, что решение многомерного уравнения Бюргерса для такого начального условия имеет вид

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{-\gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_+)}{1 - \gamma t} \quad (4.74)$$

и справедливо внутри треугольника размером  $L_r(t) = L_r(1 - t\gamma_r)$ . Величина  $\gamma_r^{-1}$  имеет размерность времени и за конечное время  $t_r = \gamma_r^{-1}$  градиент поля становится бесконечным. Другими словами в момент времени  $t = t_r$ , мода трансформируется в “прямую” пилообразную волну с универсальным поведением внутри нового множества треугольников и с градиентом  $1/t$  независящим от волнового числа и амплитуды моды:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_c}{t}, \quad (4.75)$$

где  $\mathbf{x}_c$  теперь центры треугольников, и совпадают с вершинами начального множества треугольников. Рассматривая соответствующую плотность газа слипающихся частиц, мы видим, что внутри “коллапсирующего” треугольника со сторонами  $L_r(t) = L_r(1 - t\gamma_r)$  плотность возрастает как

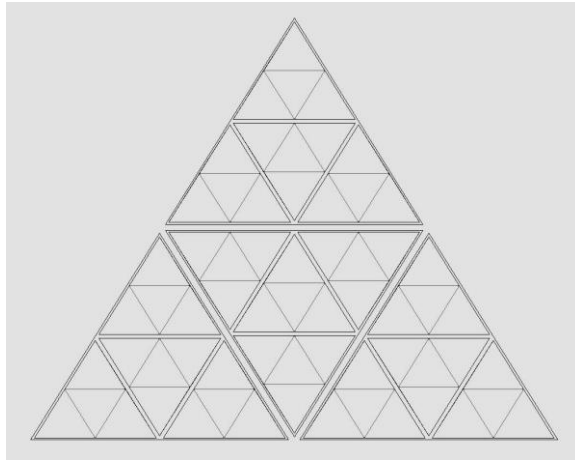
$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 \frac{1}{(1 - \frac{t}{t_p})^2}, \quad (4.76)$$

и плотность  $\rho$  равна нулю вне “компенсирующих” треугольников. В момент времени  $t = t_r$  все легкие частицы слипаются в тяжелую частицу массой

$$m_r = \rho_0 L_r^2 \sqrt{3}/4, \quad (4.77)$$

а координаты тяжелых частиц совпадают с координатами начальных треугольников  $\mathbf{x}_+$ .

Для многомасштабного поля мы рассмотрим здесь специальный случай, когда отношение масштабов двух последовательных мод равно  $L_{r+1}/L_r = \varepsilon^{-1} = N = 2$ . Предположим также, что специальную симметрию и специальные фазовые соотношения всех мод. В нашем случае, большой треугольник крупномасштабной моды делится на четыре маленьких треугольника последовательной мелкомасштабной моды, так что новых разрывов из крупномасштабной моды не возникает (см. рис.4.16).



**Рис. 4.16.** Разбиение плоскости на иерархические треугольники, в которых определены моды многомасштабного сигнала

Рассмотрим теперь эволюцию векторного поля  $\mathbf{V}_p(\mathbf{x})$  (4.73), которое представляет собой суперпозицию бесконечного числа “инверсных” мод. Предположим, что эволюция  $r$ -ой моды характеризуется нелинейным временем  $t_r$  таким же как и в одномерном случае (4.47):

$$t_p = \gamma_p^{-1} = \frac{t_0}{(2^{(n+3)/2})^p}, \quad (4.78)$$

Эволюция такого векторного поля очень близка к тому что мы рассмотрели в одномерном случае (4.59). Так для градиента начального возмущения  $\mathbf{V}_p(\mathbf{x})$  мы имеем тоже выражение (4.60) что и в одномерном случае. Эффективное время нелинейности мамои мелкомасштабной  $p$ - ой моды векторного поля (4.73) в присутствии всех крупномасштабных мод по прежнему определяется уравнением (4.61). Таким образом, после этого времени  $\tilde{t}_p$  возникают тяжелые частицы массой  $m_p$  (4.77). Скорость этих частиц будет определяться двухмерной

функцией Вейерштрасса-Мандельброта  $V_{p+1}(\mathbf{x})$  (4.73), которая есть сумма всех крупномасштабных мод. В момент времени  $t_{p+1}$  мы имеем столкновение четырех тяжелых частиц для следующей моды. Дальнейший процесс укрупнения масштаба легко построить по рекурсии. На рис.4.17 виден процесс иерархический процесс слияния частиц. Если в одномерном случае траектории частиц образовывали структуру подобную плоской модели ботанического зонтичного дерева, то в двухмерном случае эта аналогия еще ближе. Причем как показано эти структуры обладают свойством самоподобия (автомодельности).



**Рис. 4.17.** Траектории частиц для многомасштабного сигнала в двумерном случае, представленные в трехмерном пространстве (две координаты - время). Толщина траекторий отражает массу частиц: (а) вид сверху; (b) вид сбоку

В заключение этой главы отметим, что, несмотря на простоту самого уравнения Бюргера, наличие точного решения, эволюция полей в этом уравнении отличается большим многообразием. Очень наглядной и полезной является механическая интерпретация решений уравнения Бюргера, как эволюция газа слипающихся частиц.

## Глава 5. Задачи и упражнения

**Задача 1:** Доказать, что в однопоточковом режиме поле  $q(x, t)$  производной по  $x$  решения  $v(x, t)$  уравнения Римана удовлетворяет неравенству

$$q(x, t) < 1/t \quad (5.1)$$

Проиллюстрировать выполнение данного неравенства, построив график, в зависимости от  $x$ , поля  $q(x, t)$  в случае начального условия

$$v_0(x) = a \sin(kx) \quad (5.2)$$

**Решение:** Проще всего доказать упомянутое неравенство, опираясь на форму записи решения уравнения Римана (1.12). Дифференцируя обе части этого соотношения по  $x$ , получаем:

$$q(x, t) = \frac{1}{t} \left( 1 - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right).$$

Поскольку в однопоточковом режиме  $y(x, t)$  – всюду монотонно возрастающая функция, ее производная неотрицательна, выражение в скобке меньше или равно единице, а значит, выполняется указанное в условии задачи неравенство.

Продемонстрируем справедливость неравенства (5.1) графиком  $q(x, t)$ . Его удобно построить с помощью параметрического задания функции  $q(x, t)$ , используя в качестве параметра лагранжеву координату  $y$ :

$$x = X(y, t) = y + v_0(y) t, \quad q = Q(y, t).$$

Мы использовали обозначение  $Q(y, t)$  для лагранжева поля, отвечающего эйлерову полю  $q(x, t)$ . Найдем  $Q(y, t)$ , заметив, что имеет место соотношение

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \left( \frac{\partial X(y, t)}{\partial y} \right)^{-1} = \frac{1}{J(y, t)}$$

Здесь  $J(y, t)$  – якобиан преобразования лагранжевых в эйлеровы координаты. Привлекая явное выражение якобиана, придем к следующим параметрическим уравнениям поля  $q(x, t)$ :

$$x = y + v_0(y)t, \quad q = \frac{v_0'(y)}{1 + v_0'(y)t} \quad (5.3)$$

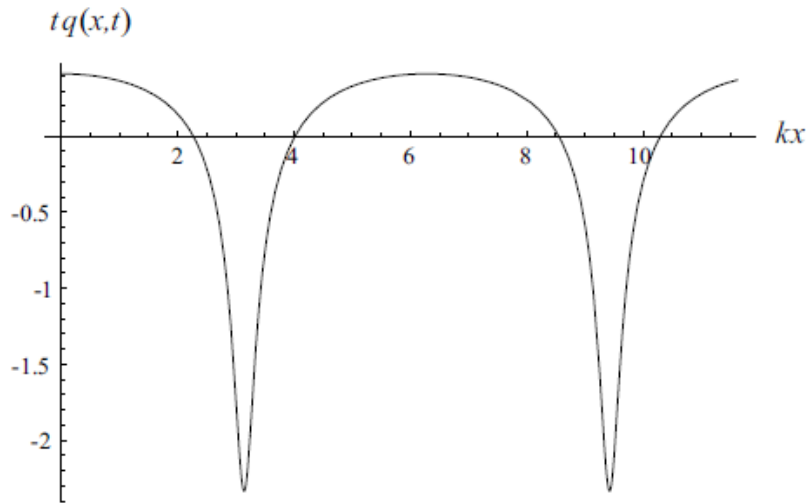
Подставив сюда синусоидальное начальное условие (5.2), получим окончательно:

$$\eta = \zeta + \tau \sin \zeta, \quad \vartheta = \frac{\tau \cos \zeta}{1 + \tau \cos \zeta}.$$

Здесь использованы безразмерные переменные

$$\eta = kx, \quad \zeta = ky, \quad \tau = kat, \quad \vartheta = tq.$$

График  $q(x, t)$ , построенный с помощью этих равенств, приведен на рисунке 5.1.



**Рис. 5.1.** График эйлера поля  $q(x,t)$ , построенный параметрически с помощью лагранжевых полей (5.3)

**Задача 2:** Пусть начальная плотность и скорость сгустка равномерно движущихся частиц равны, соответственно,  $\rho_0(x)$  и  $v_0(x)$ . Начальная масса частиц и их центр масс ограничены:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(y) dy < \infty, \quad x_c = \frac{1}{M} = \int_{-\infty}^{\infty} y \rho_0(y) dy < \infty.$$

Найти движение центра масс сгустка

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x, t) dx$$

Решать задачу, выразив исследуемые характеристики плотности сгустка через его Фурье образ (1.30).

**Решение:** Вычислим вначале центр масс сгустка. Для этого умножим обе части равенства

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(\chi, t) d\chi$$

на  $x$  и проинтегрируем по всей оси  $x$ . В итоге, после смены порядка интегрирования в повторном интеграле справа, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(\chi, t) d\chi \int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{ikx}.$$

Последний интеграл равен производной от дельта функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{ikx} dx = -2\pi i \frac{\partial}{\partial \chi} \delta(\chi).$$

Отсюда и из предыдущего равенства вытекает известное соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x, t) dx = 2\pi i \frac{\partial}{\partial \chi} \tilde{\rho}(\chi, t) \text{ (при } \chi = 0).$$

Подставив сюда производную по  $x$  интеграла (1.30), будем иметь:

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(y, t) \rho_0(y) dy.$$

Зная отображение (1.4), (1.5) лагранжевых в эйлеровы координаты равномерно движущихся частиц, получим окончательно

$$\bar{x}(t) = x_c + \bar{v}_0 t, \quad (5.4)$$

где  $\bar{v}_0 = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} v_0(y) \rho_0(y) dy$ .

**Задача 3:** Если частицы движутся в среде, сопротивляющейся их движению (например, в неподвижном газе), то скорость частиц со временем уменьшается, а поле скорости описывается уравнением:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\tau} v = 0, v(x, t = 0) = v_0(y),$$

где  $\tau$  – характерное время диссипации скорости. Найти закон изменения поля скорости  $v(x, t)$  и проследить его асимптотику при  $t \rightarrow \infty$ .

**Решение:** Решим задачу, перейдя от исходного уравнения в частных производных 1-го порядка к характеристическим уравнениям:

$$\frac{dX}{dt} = V, \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\tau} V, X(y, t = 0) = y, V(y, t = 0) = v_0(y).$$

Решения этих уравнений таковы:

$$V(y, t) = v_0(y) e^{-t/\tau}, \quad X(y, t) = y + v_0(y) \vartheta.$$

Здесь введено вспомогательное “время”

$$\vartheta = \tau (1 - e^{-t/\tau}).$$

Сравнивая полученное выражение с решением стандартного уравнения Римана (1.2), легко сообразить, что

$$v(x, t) = e^{-t/\tau} u(x, \vartheta),$$

где  $u(x, \vartheta)$  удовлетворяет уравнению Римана

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, \vartheta = 0) = v_0(x). \quad (5.5)$$

При  $t \rightarrow \infty$  вспомогательное время  $\vartheta \rightarrow \tau$ . Физически это означает, что за счет диссипации скорости нелинейные эффекты со временем слабеют, а форма поля скорости “замораживается” – остается такой, как если бы от начала равномерного движения прошло время, не превышающее  $\tau$ .



**Задача 4:** Для физиков и инженеров главным признаком наличия нелинейности служит генерация высших гармоник первоначально гармонического сигнала. Исследовать процесс генерации гармоник в поле  $v(x, t)$ , удовлетворяющем уравнению Римана (1.2), если вначале поле было чисто гармоническим:  $v_0(x) = a \sin(kx)$ .

**Решение:** Требуется найти ряд Фурье решения уравнения Римана  $v(x, t)$ . Найдем вначале обобщенный Фурье-образ поля  $v(x, t)$ . Он задан формулой (1.32), которая в данном случае имеет вид:

$$\tilde{v}(\chi, t) = \frac{i}{2\pi\chi kt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu z} [e^{-i\mu\tau} - 1] dz.$$

Здесь использованы уже знакомые безразмерные переменные

$$\mu = \chi/k, \quad z = ky, \quad \tau = kat.$$

Пользуясь формулой

$$e^{i\omega \sin z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\omega) e^{inz}.$$

и заменив возникающие интегралы дельта-функциями, запишем Фурье-образ в виде ряда

$$\tilde{v}(\chi, t) = \frac{ia}{k} \left\{ \left[ J_0\left(\frac{\chi\tau}{k}\right) - 1 \right] \delta(\chi) + \frac{k}{\chi\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ J_n\left(-\frac{\chi\tau}{k}\right) \delta(\chi - kn) + J_{-n}\left(-\frac{\chi\tau}{k}\right) \delta(\chi + kn) \right] \right\}.$$

Пользуясь выкалывающим свойством дельта-функции, тем, что  $J_0(0) = 1$ , а также симметрией функций Бесселя, будем иметь:

$$\tilde{v}(\chi, t) = ia \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{J_n(n\tau)}{n\tau} [\delta(\chi - kn) - \delta(\chi + kn)].$$

Вычислив обратное преобразование Фурье, найдем искомое разложение решения уравнения Римана по гармоникам

$$\tilde{v}(\chi, t) = 2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{J_n(n\tau)}{n\tau} \sin(nkx). \quad (5.6)$$

**Задача 5:** Пусть снегопад сопровождается ветром, а снег падает под углом  $\vartheta_0 \neq 0$  к зениту. Пусть еще начальный профиль снега  $h_0(x)$  таков, что его углы наклона  $\theta$  всюду удовлетворяют неравенству

$$|\vartheta - \vartheta_0| < \frac{\pi}{2}. \quad (5.7)$$

Как будет меняться  $h(x, t)$  с течением времени?

**Решение:** В данном случае диаграмма направленности равна  $D(\vartheta') = c\delta(\vartheta - \vartheta_0)$ . Условие (5.7) гарантирует, что для любой точки исходной линии  $h_0(x)$  дельта-функция “не выпадет” за пределы интегрирования.

Следовательно, скорость прилипания снега на участок поверхности, нормаль к которому составляет угол  $\vartheta$  с осью  $z$ , равна

$$c(\vartheta) = c \cos(\vartheta - \vartheta_0) = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0.$$

Подставив это выражение в (1.46), перейдя от  $\vartheta$  к  $u$ , и введя обозначения  $c_{\perp} = \cos \vartheta_0$ ,  $c_{\parallel} = \sin \vartheta_0$ , придем к следующему уравнению для  $h(x, t)$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c_{\perp} + c_{\parallel} u,$$

Или

$$\frac{\partial h}{\partial t} - c_{\parallel} \frac{\partial h}{\partial x} = c_{\perp}, \quad h(x, t=0) = h_0(x).$$

Это чисто линейное уравнение, имеющее очевидное решение

$$h(x, t) = h_0(x - c_{\parallel} t) + c_{\perp} t. \quad (5.9)$$

Из него видно, что снежные холмы не меняют формы, а лишь движутся в сторону ветра, подобно растениям, тянущимся навстречу солнцу.

**Задача 6:** Обобщить решение предыдущей задачи на случай диаграммы направленности  $D(\vartheta')$ , равной нулю вне интервала  $[\vartheta_1, \vartheta_2]$ , и начальной линии  $h_0(x)$ , такой, что всюду выполнены неравенства

$$\{\vartheta - \vartheta_1, \vartheta_2 - \vartheta\} < \frac{\pi}{2}.$$

**Решение:** Нетрудно показать, что в данном случае рост линии  $h(x, t)$  также описывается равенством (5.9), где теперь

$$c_{\perp} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D(\vartheta') \cos \vartheta' d\vartheta', \quad c_{\parallel} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D(\vartheta') \sin \vartheta' d\vartheta'.$$

**Задача 7:** Пусть диаграмма направленности равна  $D(\vartheta) = c \cos^2 \vartheta$ . Исследовать рост линии  $h(x, t)$ . При составлении ее уравнения пользоваться малоугловым приближением, полагая, что  $|\vartheta| \ll 1$ ,  $|u| \ll 1$ . Рассмотреть случай начальной линии  $h_0(x) = h \cos(kx)$  ( $kh \gg 1$ ).

**Решение:** Вычислим вначале, по формуле (1.46), скорость роста поверхности под углом  $\vartheta$ :

$$c(\vartheta) = c \int_{-\vartheta - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta' \cos(\vartheta' - \vartheta) d\vartheta' = \frac{1}{3} (1 + \cos \vartheta)^2. \quad (1.46)$$

Перейдя от  $\vartheta$  к  $u$  и подставив это выражение в (1.43), будем иметь:

$$\Phi(u) = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right)^2 \sqrt{1+u^2}.$$

Поскольку мы намерены решить задачу в малоугловом приближении, разложим функцию  $\Phi(u)$  в ряд Тейлора по степеням  $u$  и ограничимся первым слагаемым с ненулевой степенью  $u$ :

$$\Phi(u) \approx \frac{4}{3}c + \frac{c}{12}u^4.$$

Подставив это выражение в уравнение (1.42) и опустив тривиальное постоянное слагаемое, найдем, что в малоугловом приближении форма линии  $h(x, t)$  подчиняется уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{c}{12} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^4.$$

Входящие в характеристические уравнения (1.50) функции равны:

$$\Phi(u) = \frac{c}{12}u^4 \rightarrow C(u) = \frac{c}{3}u^3, \Lambda(u) = -\frac{c}{4}u^4.$$

Подставив их в формулы (1.53), описывающие изменение формы линии  $h(x, t)$ , придем к параметрическим уравнениям линии  $h(x, t)$ :

$$x = y + \frac{c}{3}(u_0(y))^3 t, h = h_0(y) - \frac{c}{4}(u_0(y))^4 t.$$

Для синусоидальной начальной линии имеем:

$$kx = \mu + \frac{\tau}{3}\varepsilon^3 \sin^3 \mu, kh = \varepsilon \cos \mu - \frac{\tau}{4}\varepsilon^4 \sin^4 \mu.$$

Здесь введены безразмерные переменные  $\mu = ky$ ,  $\varepsilon = kh$ ,  $\tau = ckt$ . Графики формы линии  $h(x, t)$  для разных  $\tau$  приведены на рисунке 5.2.

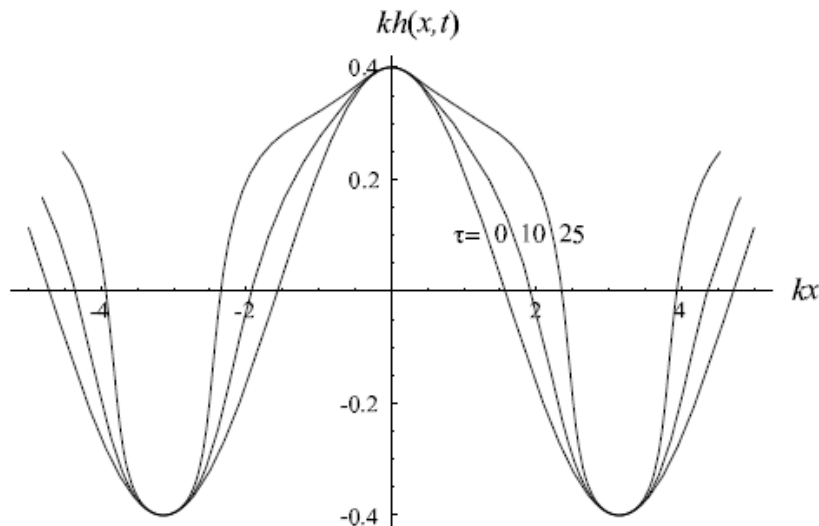


Рис. 5.2. Линии  $h(x, t)$  при  $\varepsilon = 0.4$ , в моменты  $\tau = 0, 10$  и  $25$

**Задача 8:** Исследовать рост линии в случае  $c(\vartheta) = c \cos^2 \vartheta$ . Воспользоваться малоугловым приближением. Построить графики решения в разные моменты времени  $t$  в случае начальной формы линии

$$h_0(x) = -h \cos(kx) (h > 0). \quad (5.10)$$

**Решение:** Уравнение роста линии (1.42) здесь имеет вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{c}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Уравнение в малоугловом приближении, после исключения среднего роста  $ct$ , таково:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

Входящие в (1.53) вспомогательные функции равны:

$$\Phi(u) = -\frac{c}{2}u^2 \rightarrow C(u) = -cu, \Lambda(u) = \frac{c}{2}u^2.$$

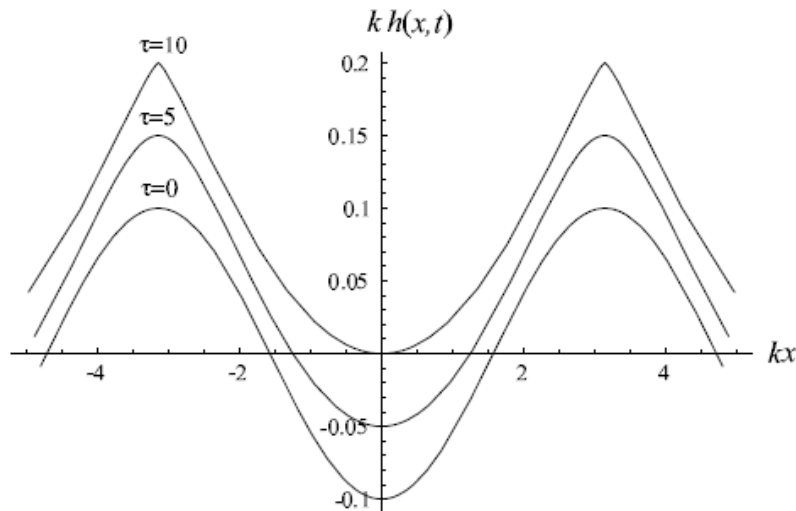
Следовательно, линия  $h(x, t)$  задана параметрическими уравнениями

$$x = y - cu_0(y)t, h = h_0(y) + \frac{c}{2}u_0^2(y)t.$$

Для синусоидальной формы начальной линии (5.10) имеем:

$$kx = \mu + \varepsilon t \sin \mu, kh = -\varepsilon \cos \mu + \tau/2\varepsilon^2 \sin^2 \mu, \varepsilon = kh, \mu = ky, \tau = kct.$$

Графики  $h(x, t)$  даны на рисунке 5.3. Чтобы были лучше видны особенности эволюции формы  $h(x, t)$ , графики слегка приподняты в сторону роста. Здесь форма линии эволюционирует по сценарию “коррозии”. Для него характерно заострение вершин и уплощение впадин.



**Рис. 5.3.** Линии  $h(x, t)$  для  $\varepsilon = 0.4$  и  $\tau = 0, 5, 10$

**Задача 9:** Пусть конус с телесным углом  $\Omega$  заполнен нейтральным веществом объемной плотностью  $\rho$ , а в основании конуса, при  $r \leq \varepsilon \rightarrow 0$ , где  $r$  – расстояние от вершины конуса  $O$ , заложена взрывчатка той же плотности. В начальный момент  $t = 0$  взрывчатка приобретает импульс  $p_0$  (его плотность равномерно распределена по взрывчатке и равна  $p_0/\varepsilon$ ). Считать телесный угол

настолько малым ( $\Omega \ll 1$ ), что вещество практически движется вдоль внутренней оси  $r$  конуса. Полагать также, что при сжатии вещество образует бесконечно тонкий блин неупруго слипшихся частиц, занимающий все поперечное сечение конуса. Назовем движение блина *волной детонации*. Применяя глобальный принцип, найти закон движения волны детонации и роста аккумулялированной им массы.

**Решение:** Введем одномерную плотность вещества вдоль оси  $r$ :

$$\rho_0(r) = \rho \Omega r^2.$$

Согласно глобальному принципу, решение задачи сводится к отысканию координаты  $q(r, t)$  абсолютного минимума функции

$$P(q) t + N(q) - r M(q) \quad (q > 0), \quad (5.11)$$

где

$$M(q) = \int_0^q \rho_0(r) dr = \frac{1}{3} \rho \Omega q^3, \quad (5.12)$$

а  $P(q)$  и  $N(q)$  задаются выражениями:

$$P(q) = \begin{cases} \frac{p_0}{\varepsilon} q, & 0 < q < \varepsilon, \\ p_0, & \varepsilon < q \end{cases}, \quad N(q) = \frac{1}{4} \rho \Omega q^4.$$

Согласно глобальному принципу, чтобы найти закон движения волны детонации, надо отыскать линию  $M(q) r + h$ , касающуюся кривой (5.11) сразу в двух точках  $q^-$  и  $q^+$ . Положение левой точки очевидно:  $y_{..} = 0$ . Следовательно,  $h = 0$ . Положение правой найдем, приравняв между собой функции  $\phi(q, t)$ ,  $M(q)r$  и их производные по  $q$ . В итоге получим два уравнения для  $q$  и  $r$ :

$$\gamma t + 3q^4 = 4q^3 r, \quad q = r.$$

Здесь использован вспомогательный параметр  $\gamma = 12p_0/\sigma\Omega$ . Таким образом,

$$r = q^+ = \sqrt[4]{\gamma t}.$$

Это и есть искомый закон движения волны детонации. Подставив его вместо  $q$  в выражение для массы слева (5.12), найдем закон роста массы, аккумулялированной волной детонации

$$M(t) = (4p_0 t)^{3/4} \left( \frac{\sigma \Omega}{3} \right)^{1/4}.$$

**Задача 10:** С помощью принципа абсолютного минимума найти слабое решение уравнения Римана (2.7) в случае, если начальное условие пропорционально дельта-функции  $v_0(x) = s \delta(x)$ . Дать физическую трактовку решения на языке потока неупруго слипающихся частиц.

**Решение:** Напомним, слабое решение уравнения Римана имеет вид:

$$v_w(x, t) = \frac{x - y_w(x, t)}{t}, \quad (5.13)$$

где  $y_w(x, t)$  – координата точки касания начального потенциала

$$s_0(y) = s \Theta(y)$$

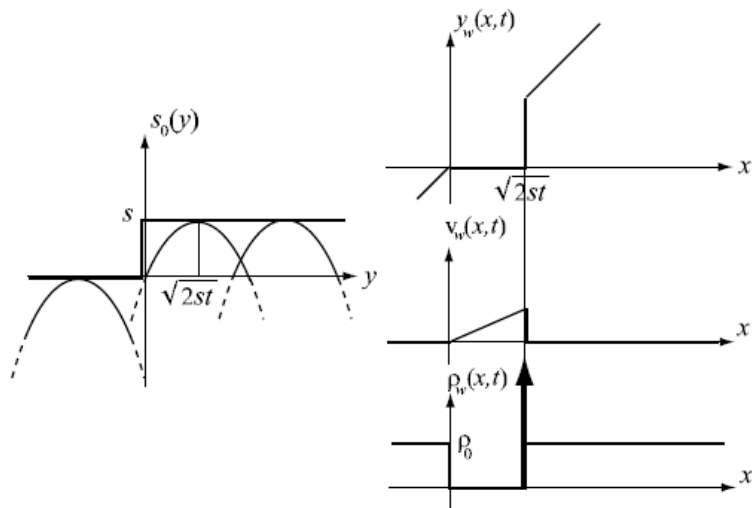
и параболы (2.23). График искомого отображения  $y = y_w(x, t)$  и сопутствующие геометрические построения даны на рисунке 5.4. Из графика и соотношения (5.13) видно, что слабое решение уравнения Римана

$$v(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < x^*(t), \\ 0, & x > x^*(t) \end{cases} \quad (5.14)$$

имеет форму прямоугольного треугольника. Здесь

$$x^*(t) = \sqrt{2st} \quad (5.15)$$

– координата точки разрыва слабого решения.



**Рис. 5.4.** Слева: график начального потенциала скорости и касающихся его парабол. Даны три характерные положения парабол, соответствующих разным участкам отображения  $y = y_w(x, t)$ . Справа: графики отображения эйлеровых в лагранжевы координаты, поля скорости и плотности потока слипающихся частиц. Жирной стрелкой на нижнем графике справа изображена сингулярная составляющая обобщенного поля плотности

Дадим физическое объяснение слабого решения (5.14). Из сравнения глобального принципа и принципа абсолютного минимума следует, что последний описывает движение неупруго слипающихся частиц с однородной начальной плотностью. Пусть она равна  $\rho_0$ . Тогда указанное в задаче дельтаобразное начальное условие означает, что при  $t = 0$  все вещество неподвижно, за исключением частицы, расположенной в точке  $x = 0$ , которой

сообщен импульс  $\rho_0 s$ . Ее текущая координата задается выражением (5.15), а скорость равна

$$v^*(t) = \frac{d}{dt} \sqrt{2st} = \sqrt{\frac{s}{2t}}.$$

Двигаясь, эта частица превращается в макрочастицу, собирая вещество, первоначально находившееся справа от нее, в интервале  $x \in [0, x^*]$ . Масса образовавшейся макрочастицы, очевидно, равна  $m^*(t) = \rho_0 x^*(t) = \rho_0 \sqrt{2st}$ . Умножив ее на скорость макрочастицы, убедимся, что выполняется закон сохранения импульса:

$$p^* = m^*(t)v^*(t) = \rho_0 \sqrt{2st} \sqrt{\frac{s}{2t}} = s = \text{const}.$$

Найдем плотность вещества  $\rho_w(x, t)$  в некоторой точке  $x$ . Напомним, масса слева потока слипающихся частиц задана выражением (2.31):

$$m(x, t) = M(y_w(x, t)).$$

В нашем случае  $M(x) = \rho_0 x + C$ , где  $C$  – несущественная, хотя и бесконечная, константа. Отбросив ее, будем иметь

$$m(x, t) = \rho_0 y_w(x, t).$$

Чтобы найти текущую плотность потока, осталось продифференцировать обе части последнего равенства по  $x$ . Проще всего реконструировать искомую производную по графику отображения  $y = y_w(x, t)$ , изображенному на рисунке 5.4. В итоге получим:

$$\rho_w(x, t) = m^*(t)\delta(x^*(t) - x) + \rho_c(x, t),$$

где

$$\rho_c(x, t) = \begin{cases} \rho_0, & x < 0, \\ 0, & 0 < x < x^*(t), \\ \rho_0, & x > x^*(t) \end{cases}$$

*Замечание:* Обратим внимание, что в интервале  $x \in [0, x^*]$  плотность потока равна нулю (см. рисунок 5.4). Причина этого ясна: макрочастица “выметает” вещество на своем пути, собирая его в сгусток с сингулярной плотностью. При этом треугольное поле  $v_w(x, t)$  (5.14), если трактовать его как поле скорости потока слипающихся частиц, оказывается *призрачным*: описывает скорость вещества нулевой плотности и массы.

По причине призрачности поля скорости (5.14), может показаться, что найденное слабое решение уравнения Римана не имеет физической ценности. Это далеко не так. В нелинейной акустике, где  $v_w(x, t)$  задает поле давления, данное решение вполне осязаемо, а соответствующее поле давления может быть экспериментально измерено.

**Задача 11:** Стационарная волна (3.21) неподвижна, она описывает динамическое равновесие инерционных и диссипативных процессов. Вычислить темп убывания

$$\Gamma = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5.16)$$

(бесконечной) энергии стационарной волны. Проанализировать зависимость  $\Gamma$  от амплитуды  $U$  волны и коэффициента вязкости  $\mu$ .

**Решение:** Вычислим входящую под знак интеграла в (5.16) производную стационарного решения. Она равна

$$\frac{dv(x)}{dx} = - \frac{U^2}{2\mu \cosh^2\left(\frac{Ux}{2\mu}\right)}.$$

Подставив это выражение в интеграл (5.16), получим

$$\Gamma = \frac{U^4}{4\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^4\left(\frac{Ux}{2\mu}\right)} = \frac{U^3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\cosh^4(z)} = \frac{2}{3} U^3. \quad (5.17)$$

*Замечание:* Обратим внимание, что темп затухания энергии зависит лишь от амплитуды волны  $U$ , но не зависит от коэффициента вязкости  $\mu$ . В этом секрет упомянутого в разделе 1 эффекта “Чеширского кота”, согласно которому вязкость пропадает ( $\mu \rightarrow 0_+$ ), а диссипация поля остается. Для детального понимания механизма реализации эффекта Чеширского кота полезно исследовать поле *плотности диссипации*

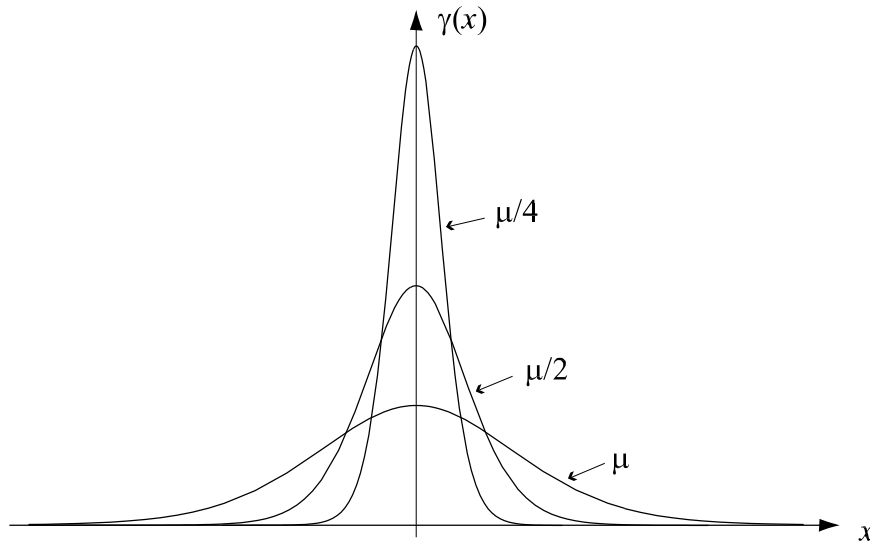
$$\gamma(x, t) = \mu \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right)^2, \quad (5.18)$$

интеграл которого по  $x$  определяет темп диссипации поля (5.16). Графики плотности диссипации стационарной волны

$$\gamma(x) = \frac{U^4}{4\mu \cosh^4\left(\frac{Ux}{2\mu}\right)} \quad (5.19)$$

при одинаковом  $U$  и разных  $\mu$  даны на рисунке 5.5.





**Рис. 5.5.** Плотность диссипации  $\gamma(x)$  стационарной волны при одинаковых  $U$  и разных  $\mu$ :  $\mu_1 = \mu$ ,  $\mu_2 = \mu/2$ ,  $\mu_3 = \mu/4$ . С уменьшением  $\mu$  плотность сжимается и вытягивается вверх, а площадь под кривыми не меняется

Легко показать, что при  $\mu \rightarrow 0_+$  плотность диссипации (5.19) слабосходится к дельта-функции

$$\lim_{\mu \rightarrow 0_+} \gamma(x) = \frac{2}{3} U^3 \delta(x).$$

Этот предел математически выражает тот факт, что в пределе  $\mu \rightarrow 0$  все диссипационные процессы протекают в бесконечно малых окрестностях разрывов слабых решений нелинейных уравнений.

**Задача 12:** Начальное условие стационарного решения уравнения Бюргерса совпадает с самим стационарным решением (3.21). Найти и проанализировать решение уравнения Бюргерса, если его начальное условие равно суперпозиции стационарных волн:

$$v_0(x) = -U_1 \tanh\left(\frac{U_1}{2\mu}(x - l_1)\right) - U_2 \tanh\left(\frac{U_2}{2\mu}(x - l_2)\right). \quad (5.20)$$

**Решение:** Восстановим, по заданному начальному условию уравнения Бюргерса, начальное условие линейного уравнения диффузии (3.11). Прежде всего, найдем начальный потенциал

$$s_0(x) = \int_0^x v_0(y) dy = -2\mu \ln \left[ \cosh\left(\frac{U_1}{2\mu}(x - l_1)\right) \cosh\left(\frac{U_2}{2\mu}(x - l_2)\right) \right].$$

Отсюда и из (3.38) имеем

$$\varphi_0(x) = \cosh\left(\frac{U_1}{2\mu}(x - l_1)\right) \cosh\left(\frac{U_2}{2\mu}(x - l_2)\right)$$

или

$$\varphi_0(x) = \cosh\left(\frac{U_+}{2\mu}(x - l_+)\right) \cosh\left(\frac{U_-}{2\mu}(x - l_-)\right).$$

Здесь учтено, что как начальный потенциал  $s_0(x)$  определен с точностью до постоянного слагаемого, так и начальное поле  $\varphi_0(x)$  – с точностью до постоянного множителя. В последней формуле приняты обозначения:

$$U_{\pm} = U_2 \pm U_1, l_{\pm} = \frac{U_2 l_2 \pm U_1 l_1}{U_2 \pm U_1}.$$

Текущее решение  $\varphi(x,t)$  линейного уравнения диффузии получим, сообразив, что уравнение диффузии с начальным условием  $\cosh(ax)$  имеет решение с разделяющимися переменными:

$$e^{\mu a^2 t} \cosh(ax).$$

Таким образом,

$$\varphi(x, t) = \exp\left(\frac{U_+^2}{4\mu} t\right) \cosh\left(\frac{U_+}{2\mu}(x - l_+)\right) + \exp\left(\frac{U_-^2}{4\mu} t\right) \cosh\left(\frac{U_-}{2\mu}(x - l_-)\right).$$

Подставив это выражение в (3.37), получим окончательно

$$v(x, t) = - \frac{U_+ \sinh\left(\frac{U_+}{2\mu}(x - l_+)\right) + \exp\left(-\frac{UV}{\mu} t\right) U_- \sinh\left(\frac{U_-}{2\mu}(x - l_-)\right)}{\cosh\left(\frac{U_+}{2\mu}(x - l_+)\right) + \exp\left(-\frac{UV}{\mu} t\right) \cosh\left(\frac{U_-}{2\mu}(x - l_-)\right)}. \quad (5.21)$$

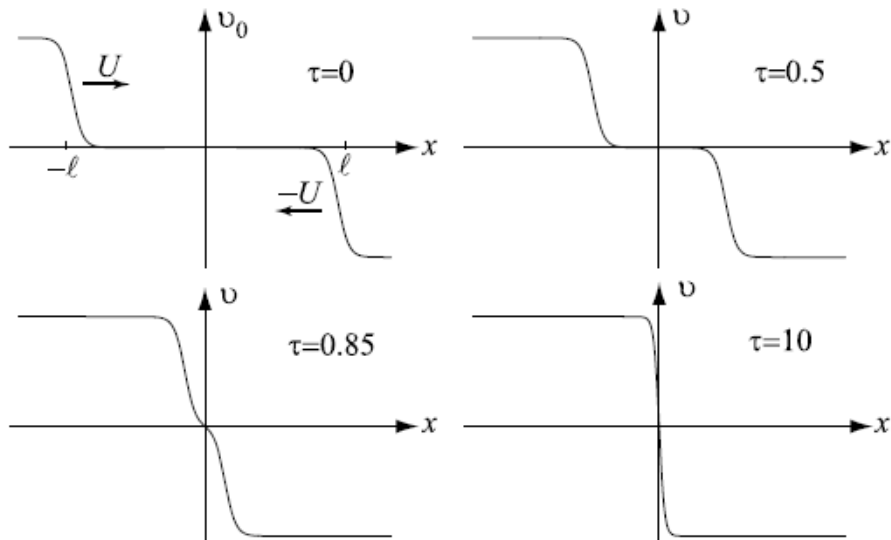
Пусть, для определенности,  $UV > 0$ . Тогда с ростом  $t$  первые слагаемые в числителе и знаменателе (6) становятся все больше по сравнению со вторыми слагаемыми, а решение уравнения Бюргерса асимптотически стремится к стационарному решению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = -U_+ \tanh\left(\frac{U_+}{2\mu}(x - l_{\infty})\right).$$

Другими словами, из двух “стационарных волн” с течением времени образуется одна стационарная волна суммарной амплитуды  $U_+ = U_1 + U_2$  с центром в точке

$$l_+ = \frac{U_2 l_2 + U_1 l_1}{U_2 + U_1}. \quad (5.22)$$

Графики решения уравнения Бюргерса (5.21) при  $U_1 = U_2 = U$ ,  $l_2 = -l_1 = l$ , иллюстрирующие процесс слияния разрывов, даны на рисунке 5.6.



**Рис. 5.6.** Иллюстрация слияния стационарных волн, в зависимости от  $x$  на разных временах  $\tau = Ut/f$  и безразмерном параметре  $Uf/\mu = 25$ . Обратим внимание, что эффективная ширина переходной области результирующей стационарной волны в два раза уже, чем у исходных стационарных волн

**Задача 13:** Найти решение уравнения Бюргерса с начальным условием

$$v_0(x) = S [\delta(x) + \delta(x-l)] \quad (l > 0, S > 0). \quad (5.23)$$

Построить графики  $v(x,t)$  при  $R = S/2\mu \gg 1$  для различных значений безразмерного времени  $\tau = 2St/l^2$ .

**Решение:** В данном случае начальный потенциал и начальное условие линейного уравнения диффузии (3.38) равны:

$$s_0(x) = S [\Theta(x) + \Theta(x-l)],$$

$$\varphi_0(x) = 1 + (e^{-R}-1)\Theta(x) + (e^{-2R}-e^{-R})\Theta(x-l).$$

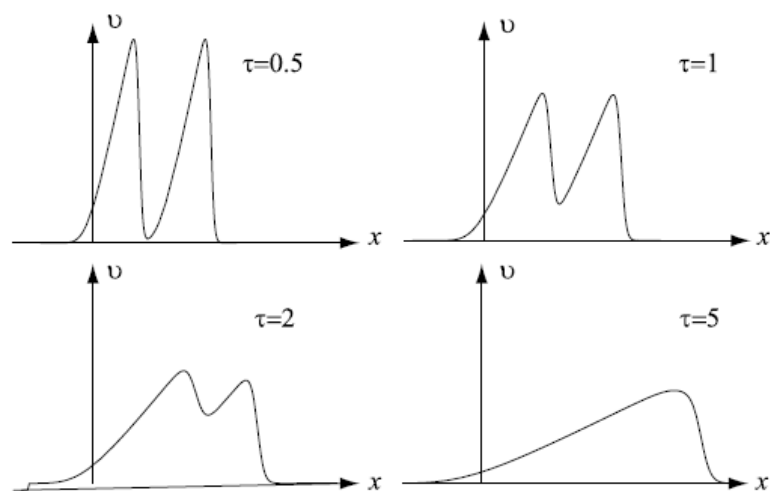
Подставив последнее выражение в (3.39), будем иметь

$$\varphi(x,t) = 1 + (e^{-R}-1)\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\mu t}}\right) + (e^{-2R}-e^{-R})\Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{\mu t}}\right).$$

Следовательно, решение уравнения Бюргерса таково:

$$v(x,t) = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi t}} \frac{(e^{-R}-1)\exp\left(-\frac{x^2}{4\mu t}\right) + (e^{-2R}-e^{-R})\exp\left(-\frac{(x-l)^2}{4\mu t}\right)}{1 + (e^{-R}-1)\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\mu t}}\right) + (e^{-2R}-e^{-R})\Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{\mu t}}\right)}. \quad (5.24)$$

Его графики, построенные для различных значений  $\tau$ , приведены на рисунке 5.7. Они иллюстрируют процесс слияния двух треугольных волн, соответствующих двум дельта-функциям в начальном условии (5.23).



**Рис. 5.7.** Графики решения (5.24) уравнения Бюргерса при  $R = 16$ , иллюстрирующие процесс слияния треугольных волн

**Задача 14:** Указать скелет решения предыдущей задачи. Пользуясь тем, что скорость разрыва равна полусумме значений поля  $v(x, t)$  до и после разрыва, написать уравнения движения разрывов и оценить время слияния двух треугольных волн в одну треугольную волну.

**Решение:** Вначале скелет поля состоит из отдельных треугольников одинаковой площади  $S$ , ограниченных справа разрывами. Обозначим координаты разрывов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Пока треугольники не перекрываются (см. верхний график на рисунке 5.8), координаты разрывов легко найти, пользуясь тем, что площади треугольников сохраняются:

$$x_1(t) = l\sqrt{\tau}, x_2(t) = l(1 + \sqrt{\tau}), \tau = \frac{t}{t^*} = \frac{2St}{l^2}. \quad (5.25)$$

В момент

$$t^* = \frac{l^2}{2S} \quad (\tau = 1)$$

левый разрыв наезжает на правый треугольник (нижний график на рисунке 5.8), из-за чего закон движения левого разрыва меняется. Найдем его, решив уравнение движения разрыва

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{1}{t} \left( x_1(t) - \frac{l}{2} \right), x_1(t^*) = l.$$

В итоге получим

$$x_1(t) = \frac{l}{2} (\tau + 1). \quad (5.26)$$

Приравняв координаты правого (5.25) и левого (5.26) разрывов, найдем искомое время их слияния:

$$\tau_m = (1 + \sqrt{2})^2 \approx 5.83.$$

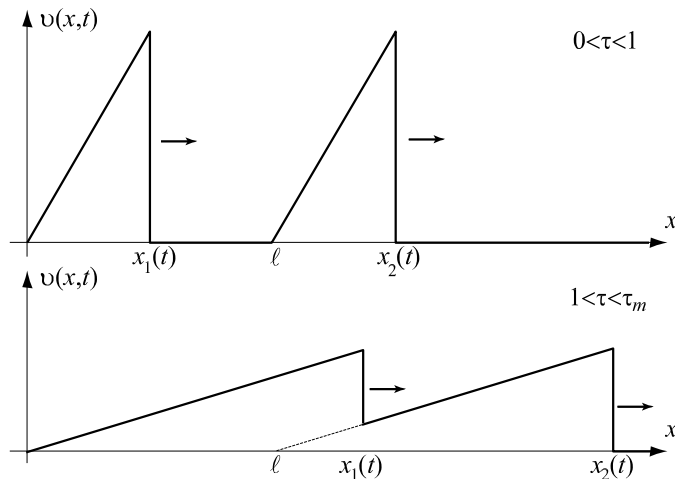


Рис. 5.8. Скелет решения (5.24) уравнения Бюргерса

*Замечание:* Первоначально (при  $\tau < 1$ ) поле  $v(x, t)$  состоит из неперекрывающихся треугольных волн, число Рейнольдса каждой из которых равно  $R = S/2\mu$ . В дальнейшем они сливаются в одну треугольную волну с вдвое большей площадью и числом Рейнольдса. Таким образом, слияние разрывов ведет к росту текущего числа Рейнольдса.

**Задача 15:** Пользуясь известной формулой

$$e^{R \cos(\chi x)} = I_0(R) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(R) \cos(n\chi x),$$

где  $I_n(z)$  модифицированная функция Бесселя  $n$ -го порядка, найти асимптотическое поведение на линейной стадии решения уравнения Бюргерса с гармоническим начальным условием

$$v_0(x) = a \sin(\chi x). \quad (5.27)$$

Исследовать зависимость амплитуды поля на линейной стадии от начальной амплитуды  $a$ .

**Решение:** Выпишем вначале соответствующее решение линейного уравнения диффузии (3.38):

$$\varphi(x, t) = I_0(R) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(R) \exp\left(-\frac{n^2 \tau}{2R}\right) \cos(nz). \quad (5.28)$$

Здесь введены обозначения

$$z = \chi x, \quad \tau = a\chi t, \quad R = a/2\mu\chi.$$

Подставив (5.28) в (3.37) и удерживая в числителе и знаменателе лишь первые слагаемые, будем иметь:

$$v \approx \frac{2a I_1(R)}{R I_0(R)} e^{-\tau/2R} \sin(z) \quad (\tau \gg R). \quad (5.29)$$

В данном случае уместно дать числу Рейнольдса  $R$  более подходящую, с точки зрения акустических приложений, трактовку: Оно равно отношению начальной амплитуды  $a$  поля к характерной амплитуде проявления нелинейных эффектов

$$a_n = \frac{1}{2\mu\chi} \rightarrow R = \frac{a}{a_n}.$$

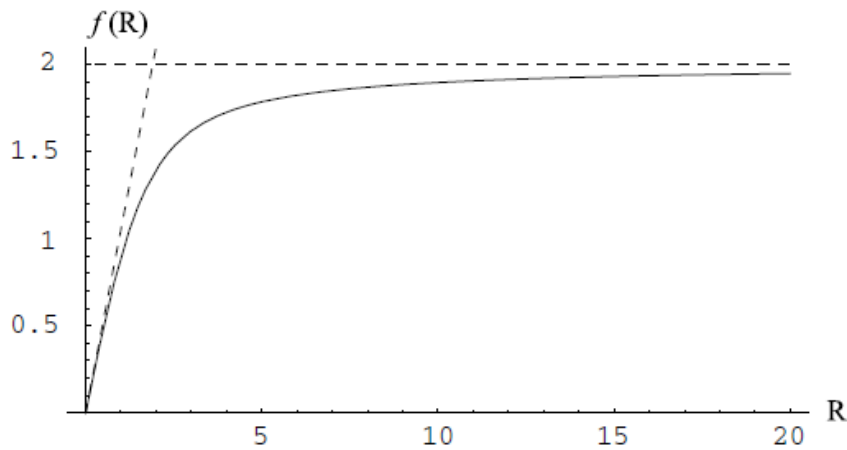
Кроме того, естественно исследовать безразмерное поле

$$u = \frac{v}{a_n} = f(r) \exp\left(-\frac{\tau}{2R}\right) \sin z.$$

Здесь

$$f(R) = 2 \frac{I_1(R)}{I_0(R)}.$$

Там, где  $f(R) \approx R$ , поле (5.29) повторяет решение линейного уравнения начальным условием (5.27), а нелинейными эффектами можно пренебречь. График  $f(R)$  дан на рисунке 5.9. Из него видно, что при больших значениях  $R$  функция  $f(R)$  насыщается на уровне 2. Это выражает тот хорошо известный факт, что нелинейное поле со временем “забывает” о начальном условии и, в частности, о его амплитуде.



**Рис. 5.9.** Безразмерная амплитуда первоначально гармонического поля на линейной стадии. Пока она практически совпадает с прямой  $R$ , нелинейными эффектами эволюции поля  $v(x, t)$  можно пренебречь

**Задача 16:** Найти решение уравнения Бюргера в случае если  $\varphi_0(x) = x^2$ .

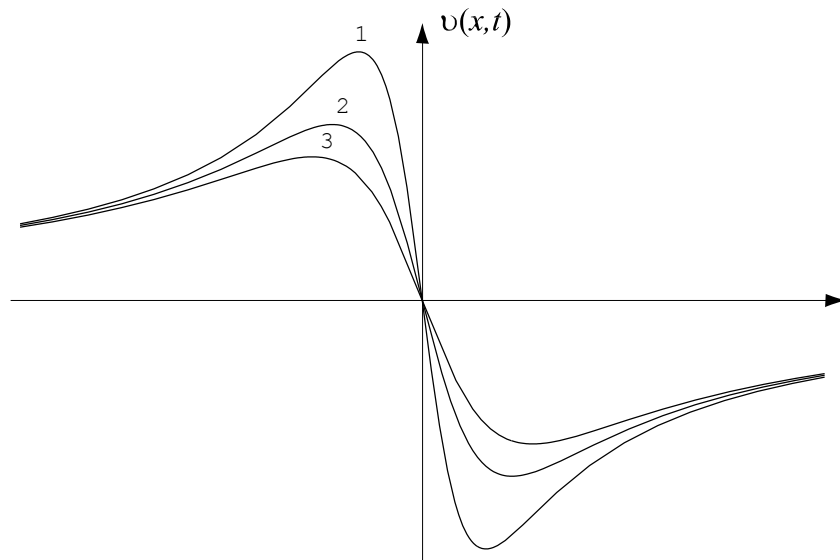
**Решение:** Решение линейного уравнения диффузии здесь равно

$$\varphi(x, t) = 2\mu t + x^2.$$

Соответственно решение уравнения Бюргера имеет вид:

$$v(x, t) = -\frac{x}{t} \frac{2}{1+z^2}, z = \frac{x}{\sqrt{2\mu t}}. \quad (5.30)$$

Его графики в три последовательных момента времени изображены на рисунке 5.9.



**Рис. 5.9.** Графики решения (5.29) уравнения Бюргера в моменты  $t_1$ ,  $t_2 = 2t_1$ ,  $t_3 = 3t_1$ .  
 “Аномальное” поведение решения объясняется преобладанием диффузионного расплывания над нелинейными инерционными эффектами

На первый взгляд, полученные решения противоречат накопленной нами интуиции: По нашим представлениям, при  $x < 0$ , где  $v(x, t) > 0$ , поле должно смещаться вправо, а отрицательное поле, при  $x > 0$ , смещаться влево. Из анализа решения и из графиков видно, что все происходит с точностью до наоборот. Это связано с тем, что эффективное число Рейнольдса поля (5.30) близко к единице, и над ожидаемыми инерционными эффектами преобладает диффузионное расплывание.

## Литература

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978, 687 с.
3. Руденко О.В., Солюян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975, 287 с.
4. Акустика в задачах. Под ред. С.Н. Гурбатова, О.В. Руденко. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009, 336 с.
5. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990, 215 с.
6. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, 496 с.
7. Гурбатов С.Н., Саичев А.И. Введение в теорию нелинейных волн гидродинамического типа. Нижний Новгород.: ННГУ, 2003, 155 с.
8. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979, 383 с.
9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984, 432 с.
10. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977, 622 с.
11. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981, 598 с.
12. Зельдович Я.Б. Элементы математической физики. М.: Наука, 1973, 351 с.



**Сергей Николаевич Гурбатов**  
**Игорь Юрьевич Демин**  
**Анна Викторовна Клемина**  
**Николай Васильевич Прончатов-Рубцов**

**Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии (часть 1)**

*Учебное пособие*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования «Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.