МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет

им. Н. И. Лобачевского

А.А. Нуятов

ПРАКТИКУМ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Учебно - методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 01.03.03 "Механика и математическое моделирование"

Нижний Новгород

2016

УДК 517.98
ББК 22.162

Нуятов А.А. Практикум по функциональному анализу: Учебно - методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 29 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **В.К. Вильданов**

В пособии приводятся решения типовых задач и задачи для самостоятельного выполнения по темам "Метрические пространства"и "Нормированные пространства"дисциплины "Функциональный анализ". В начале каждого параграфа кратко приводятся теоретические сведения необходимые для выполнения практических заданий и разбираются примеры. В конце параграфа приводятся задания для самостоятельного решения.

УДК 517.98
ББК 22.162

Содержание

Введение

В пособии приводятся решения типовых задач и задачи для самостоятельного выполнения по темам "Метрические пространства"и "Нормированные пространства"дисциплины "Функциональный анализ". В начале каждого параграфа кратко приводятся теоретические сведения необходимые для выполнения практических заданий и разбираются примеры. В конце параграфа приводятся задания для самостоятельного решения.

1. Определение метрического пространства и виды пространств

Дадим определние метрического пространства:

Определение 1. *Множество X, в котором каждой паре элементов x и y поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$ ("рассторяние между x и y") называется метрическим пространством, если $\rho(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *$\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ ("аксиома тождества");*

2. *$\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ("аксиома симметрии");*

3. *$\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых $x, y, z \in X$ ("аксиома треугольника").*

Величина $\rho(x, y)$ называется метрикой.

Эти три условия называются "аксиомами треугольника". Для того чтобы проверить, что пространство является метрическим, необходимо доказать, что оно удовлетворяет всем трем аксиомам метрического пространства.

Пример. Доказать, что евклидово n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$ всевозможных конечных упорядоченных последовательностей из n действительных чисел $x(x_1, x_2, ..., x_n)$ является метрическим пространством, если метрика задана в виде:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}.$$

Доказательство. Пусть $x(x_1, x_2, ..., x_n), y(y_1, y_2, ..., y_n)$, $z(z_1, z_2, ..., z_n)$. Первые две аксиомы очевидны. Проверим аксиому треугольника:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - x_k)^2}.$$

Для упрощения дальнейших вычислений сделаем замены: $y_k - z_k = a_k$, $z_k - x_k = b_k$, $y_k - x_k = a_k + b_k$. Тогда неравенство треугольника перепишется в виде:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Для доказательства этого неравенства воспользуемся неравенством Коши-Буняковского:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

По этому неравенству имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right).$$

Извлекая корень квадратный из левой и правой частей, получаем необходимое неравенство. Легко увидеть, что числовая прямая является частным случаем евклидова пространства (при $n = 1$).

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать, что евклидово n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$ всевозможных конечных упорядоченных последовательностей из n действительных чисел $x(x_1, x_2, ..., x_n)$ является метрическим пространством, если метрика задана в виде:

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| \,.$$

2. Доказать, что пространство $C[a, b]$ всех непрерывных действительных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, является метрическим пространством, если метрика задана в виде:

$$\rho(f, g) = \max_{a \le t \le b} |f(t) - g(t)| \,.$$

3. Доказать, что пространство всех непрерывных действительных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, (обозначим его $C_2[a, b]$) является метрическим пространством, если метрика задана в виде:

$$\rho(f, g) = \left(\int\limits_a^b (f(t) - g(t))^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Указание. Воспользоваться интегральной формой неравенства Коши-Буняковского:

$$\left(\int\limits_a^b f(t) \cdot g(t) dt \right)^2 \le \int\limits_a^b f^2(t) dt \cdot \int\limits_a^b g^2(t) dt.$$

Замечание. На одном пространстве элементов можно задавать различные метрики.

4. Доказать, что пространство l_2 всевозможных последовательностей $x = (x_1, ..., x_n, ...)$ действительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$$

является метрическим пространством, если метрика задана в виде:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}.$$

5. Доказать, что пространство m всевозможных ограниченных последовательностей $x = (x_1, ..., x_n, ...)$ действительных чисел является метрическим пространством, если метрика задана в виде:

$$\rho(x, y) = \sup_k |y_k - x_k|.$$

6. Является ли метрическим пространством множество вещественных чисел, если метрика задана в виде:

$$\rho(x, y) = \sin^2(x - y)?$$

7. Является ли метрическим пространством множество вещественных чисел, если метрика задана в виде:

$$\rho(x, y) = |arctg(x - y)|?$$

2. Открытые и замкнутые множества

Напомним определение предельной точки и дадим основные определения этого параграфа, а именно, что из себя представляют открытые и замкнутые множества.

Определение 2. *Точка а называется предельной точкой множества E, если в любой окрестности точки а имеется, по крайней мере, ещё одна точка множества E, кроме точки а.*

Определение 3. *Открытое множество — это множество, каждый элемент которого входит в него вместе с некоторой окрестностью.*

Определение 4. *Замкнутое множество – множество, которое содержит все свои предельные точки.*

Пусть X - некоторое метрическое пространство с метрикой ρ. Коротко это будем записывать (X, ρ). Обозначим $B(x_0, r) = \{x \in (X, \rho) : \rho(x, x_0) < r\}$ - открытый шар в метрическом пространстве X, а $B[x_0, r] = \{x \in (X, \rho) : \rho(x, x_0) \leq r\}$ - замкнутый шар в метрическом пространстве X.

Определение 5. *Пусть $S \subset X$, замыканием S в X называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих S и обозначается $\overline{S}$.*

Из этого определения сразу следует, что замыкание множества содержит все его предельные точки.

Пример. а) Доказать, что в произвольном метрическом пространстве $\overline{B(x_0, r)} \subset B[x_0, r]$.
б) Привести пример метрического пространства, в котором

$\overline{B(x_0, r)} \neq B[x_0, r]$.

Доказательство. а) Пусть $x \in \overline{B(x_0, r)}$. Тогда $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $x_n \in B(x_0, r)$. Зафиксируем n и воспользуемся неравенством треугольника

$$\rho(x, x_0) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, x_0) < \rho(x, x_n) + r,$$

а теперь n устремим к бесконечности и получается, что $\rho(x, x_n) \to 0$. Таким образом, $\rho(x, x_0) \leq r$, это и означает, что $x \in B[x_0, r]$.
б) Пусть X - произвольное метрическое пространство, содержащее более одной точки с метрикой

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Тогда для произвольной точки $x_0 \in X$ с одной стороны $\overline{B(x_0, 1)} = B(x_0, 1) = \{x_0\}$, а с другой $B[x_0, 1] = X$.

Задания для самостоятельного решения

1. Проверить, что в пространстве непрерывных функций C[a,b] с метрикой $\rho(f, g) = \max\limits_{a\leq t\leq b} |f(t) - g(t)|$ выполнено $\overline{B(x_0, r)} = B[x_0, r]$.

2. Построить метрическое пространство (X, ρ) и в нем замкнутые шары $B_1[x_1, r_1]$ и $B_2[x_2, r_2]$ так, что $B_1 \subset B_2$ и $r_1 > r_2$.

3. Доказать, что множество E всех непрерывных на отрезке [0,1] функций, удовлетворяющих неравенствам $A < x(t) < B$ (A,B - фиксированные числа) является открытым множеством.

4. Пусть f(x) - непрерывная функция, определенная всюду на оси Ox. Доказать, что множество E_a тех точек оси Ox, где $f(x) \geq a$ является замкнутым множеством.

5. Доказать, что открытый шар B(a,r) в любом метрическом пространстве X есть открытое множество.

6. Доказать, что замкнутый шар B[a,r] в любом метрическом пространстве X есть замкнутое множество.

7. Найти замыкание множества множества точек вида $\frac{p^2}{q^2}$, где p и q - всевозможные целые числа $(q \neq 0)$.

3. Плотные и всюду плотные множества. Сепарабельность

Пусть $A, B \subset X$.

Определение 6. *Множество называется счетным, если между его элементами и множеством натуральных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие.*

Определение 7. *Множество B называется плотным в A, если $A \subset \overline{B}$. Если, в частности, B является плотным в пространстве X, то в этом случае говорят, что B всюду плотное в X.*

Определение 8. *Пространство, в котором имеется счетное, всюду плотное множество называется сепарабельным.*

Пример. Доказать, что множество всех точек вида $ln(r^2+1)$ (где r - всевозможные рациональные числа) является плотным на луче $[0, +\infty]$.

Доказательство.Функция $y = ln(x^2 + 1)$ строго возрастает и непрерывна на участке E: $0 \leq x < \infty$; при этом функция принимает значения на луче K: $0 \leq y < \infty$. Возьмем произвольную точку $y_0 \in K$ и опишем около нее произвольную окрестность $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, если $y_0 = 0$, то полуокрестность $(0, \varepsilon)$. Докажем, что в ней найдется хотя бы одна точка вида $ln(1 + r^2)$ (r - рациональное число). По свойствам непрерывных функций: на множестве E оси Ox существуют числа x_1 и $x_2\,(x_1 < x_2)$, что $ln(1 + x_1^2) = y_0 - \varepsilon$, $ln(1 + x_2^2) = y_0 + \varepsilon$. Между x_1 и x_2 найдется по крайней мере одна рациональная точка, обозначим ее r: $x_1 < r < r_2$. Так как на E функция $ln(1 + x^2)$ строго возрастает, то $ln(1 + x_1^2) < ln(1 + r^2) < ln(1 + x_2^2)$, т.е.

$$y_0 - \varepsilon < ln(1 + r^2) < y_0 + \varepsilon.$$

Итак, в любой сколь угодно малой окрестности каждой точки $y_0 \in K$ существует точка вида $ln(r^2+1)$, т.е. множество точек такого вида плотно на K.

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать, что множество всех точек вида $\sin r$ (где r - всевозможные рациональные числа) плотно на отрезке [-1,1].

2. Доказать, что множество всех многочленов всюду плотно в пространстве непрерывных функций C[a,b].

3. Доказать, что множество всех точек с рациональными координатами всюду плотно на плоскости.

4. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ - сепарабельно, где совокупность векторов с рациональными координатами всюду плотно и счетно.

5. Доказать, что пространство непрерывных функций C[a,b] - сепарабельно, где совокупность всех многочленов с рациональнвми коэффициентами счетно и всюду плотно.

6. Доказать, что l^2 - сепарабельно, где счетное, всюду плотное множество - совокупность последовательностей в каждой из которых все члены рациональны и лишь конечное (свое для каждой последовательности) число этих членов отлично от нуля.

7. Доказать, что пространство m - ограниченных последовательностей с метрикой $\rho(x,y) = \sup\limits_{k} |y_k - x_k|$ не сепарабельно.

4. Полные пространства

Напомним определение фундаментальной последовательности:

Определение 9. *Последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- фундаментальна, когда она удовлетворяет критерию Коши:*
если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ *такой, что* $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ *для всех* $n, m > N(\varepsilon)$.

Определение 10. *Если в пространстве* (X, ρ) *любая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства, то пространство* X *называется полным.*

Пример. Доказать, что пространство непревывных функций C[a,b] - полно.

Доказательство.Пусть $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ - некоторая фундаментальная последовательность в C[a,b], тогда согласно критерию Коши для фундаментальной последовательности в метрическом пространстве получаем:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ такой, что $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ при $n, m > N$ для всех $a \leq t \leq b$.
Фактически, мы получили критерий Коши равномерно сходимости последовательности, т.е. $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно. Так как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций - непрерывная функция, то предел x(t) - непрерывная функция. Устремим в неравенстве $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ m в бесконечность, получим $|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$ для всех $t \in [a, b]$ и n>N, а это и означает, что $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x(t) в смысле метрического пространства C[a,b].

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать, что в метрическом пространстве предел последовательности, если существует, то определен единственным образом.

2. Доказать, что в метрическом пространстве любая фундаментальная последовательность, имеющая сходящуюся подпоследовательность, сходится.

3. Доказать, что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

4. Привести пример метрического пространства, в котором последовательность удовлетворяет критерию Коши, но не имеет предела в этом пространстве.

5. Доказать, что пространство $\mathbb{R}$ - полно.

6. Доказать, что пространство l^2 - полно.

7. Доказать, что пространство $C_2[a, b]$ - не полно.

8. Доказать, что всякое замкнутое подмножество полного метрического пространства само является полным метрическим пространством.

5. Нормированные пространства

В этом параграфе пойдет речь о нормированных пространствах.

Определение 11. *Линейное пространство E называется нормированным, если для любого $x \in E$ поставлено в соответствии некоторое число $||x||$ так, что выполнены 3 условия*

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$*;*

2. $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$*;*

3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$*.*

Число $||x||$ называется нормой.

Определение 12. *Открытым шаром с центром в точке $x_0 \in E$ и радиусом r>0 называется множество $S_r(x_0) = \{x \in E : ||x - x_0|| < r\}$.*
Замкнутым шаром с центром в точке $x_0 \in E$ и радиусом r>0 называется множество $\overline{S}_r(x_0) = \{x \in E : ||x - x_0|| \leq r\}$.

Определение 13. *Нормы $||x||_1$ и $||x||_2$ в линейном пространстве E называются эквивалентными, если существуют такие числа $c_1, c_2 > 0$, что для любого $x \in E$:*

$$c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1.$$

Пример. Является ли $||x|| = |x_1| + |x_2|$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ нормой? Если да, то что представляет собой замкнутый единичный шар с началом в нуле в $\mathbb{R}^2$ относительно введенной нормы?

Решение. Ответ на первый вопрос положительный, для этого нужно проверить три аксиомы нормы, причем первые две очевидны. Проверим третью аксиому: если $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, то

$$||x+y|| = |x_1+y_1|+|x_2+y_2| \leq |x_1|+|y_1|+|x_2|+|y_2| = ||x||+||y||.$$

Для ответа на второй вопрос запишем единичный шар с центром в начале координат радиуса 1:

$$\overline{S}_1(0) = \{x \in E : ||x|| \leq 1\} = \{x \in E : |x_1| + |x_2| \leq 1\}.$$

Получаем, что единичный шар в $\mathbb{R}^2$ относительно введенной нормы является квадрат с вершинами в точках (1,0), (0,-1), (-1,0) и (0,1).

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать, что $||x - y|| \geq |||x|| - ||y|||$.

2. Показать, что

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ не является нормой на $\mathbb{R}^n$ при 0<p<1 и $n \geq 2$.

3. Является ли нормой $||x|| = |arctgx|$ в пространстве $\mathbb{R}^1$?

4. Проверить, что в пространство l_2 всевозможных последовательностей $x = (x_1, ..., x_n, ...)$ действительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$$

норма определяется следующим образом

$$||x|| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

5. Являются ли нормами:

1. $||x|| = \max\limits_{a \le t \le \frac{a+b}{2}} |x(t)|$, $x \in C[a,b]$;

2. $||x|| = |x(a)| + \max\limits_{a \le t \le b} |x'(t)|$, $x \in C^1[a,b]$ - пространство непрерывно-дифференцируемых функций;

3. $||x|| = |x(b) - x(a)| + \max\limits_{a \le t \le b} |x'(t)|$, $x \in C^1[a,b]$?

6. Доказать, что в конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

6. Банаховы пространства

Также как и в метрических пространствах в нормированных вводится исользуются полные пространства.

Определение 14. *Полное нормированное пространство называется банахово пространство.*

Напомним определения фундаментальной последовательности и полного пространства.

Определение 15. *Последовательности называется фундаментальной если:* $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : ||x_n - x_m|| < \varepsilon$ *для всех* $n, m > N_\varepsilon$.

Определение 16. *Полное пространство - пространство, в котором любая фундаментальная последовательности сходится к элементу этого же пространства.*

Определение 17. *Множество называется ограниченным, если оно содержится в каком-нибудь шаре.*

Пример. Пусть X - банахово пространство и последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||x_{n+1} - x_n||$ - сходится. Доказать, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - сходится.

Доказательство. Докажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальна, тогда из того, что пространство X банахово будет следовать, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к некоторому элементу X. Возьмем два натуральных числа n и m таких, что $n < m$, тогда с помощью неравенства треугольника получаем цепочку неравенств

$$||x_n - x_m|| \leq ||x_n - x_{n-1}|| + ||x_{n-1} - x_{n-2}|| + ... + ||x_{m+1} - x_m|| \leq$$

$$\leq \sum_{k=m}^{\infty} ||x_{k+1} - x_k||.$$

Мы получили, что норма разности двух различных элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ оценивается остатком ряда, а по условию ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ||x_{k+1} - x_k||$ сходится, значит, остаток ряда стремится к нулю. Получается, что

$$||x_n - x_m|| \to 0,$$

если $n, m \to \infty$. То есть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальна. Еще раз оговоримся, что в силу того, что пространство X банахово, последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к элементу этого же пространства.

Задания для самостоятельного решения

1. Пусть X - банахово пространство, последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальны в X. Доказать, что числовая последовательность $\lambda_n = ||x_n - y_n||$, $n = 1, 2, ...$ - сходится.

2. На линейном пространстве X заданы две эквивалентные нормы и в одной из них X - банахово. Доказать, что X - банахово и в другой норме.

3. Доказать, что всякая фундаментальная последовательность ограничена.

4. Будет ли полным пространство l_1 действительных последовательностей, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty,$$

относительно нормы $||x|| = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$?

5. Выяснить, сходится ли в нормированном пространстве последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если:

а) $X = l_1$, норма задается в виде $||x|| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$, $x_n = \left(\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, \frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{(n+1)^\alpha}, ...\right)$, $\alpha > 1$.

б) $X = l_2$, норма задается в виде $||x|| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$, $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, 0..., 0, 1}_{n}, 0, 0, ...\right)$.

6. Обозначим $C^\alpha[a, b]$ множество всех функций, удовлетворяющих на $[a, b]$ условию Гельдера с показателем $\alpha \in [0, 1)$:

$$H_\alpha(x) = \sup_{a \le t, \tau \le b, t \ne \tau} \frac{|x(t) - x(\tau)|}{|t - \tau|^\alpha} < +\infty.$$

Доказать, что $C^\alpha[a, b]$ является банаховым пространством относительно нормы

$$||x||_\alpha = \max_{a \le t \le b} |x(t)| + H_\alpha(x),\ x \in C^\alpha[a, b].$$

7. Евклидово пространство

Дадим определение скалярного произведения:

Определение 18. *Пусть E - линейное пространство, пара (x, y) называется скалярным произведением для $x, y \in E$, если:*
а) (x,y)=(y,x);
б) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
в) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
г) $(x, x) \geq 0$, причем (x,x)=0 только при x=0.

Определение 19. *Если в линейном пространстве определено скалярное произведение, то такое пространство называется евклидовым пространством.*

Норма в евклидовом пространстве определяется по формуле $||x|| = \sqrt{(x, x)}$.

Определение 20. *Два элемента $x, y \in E$ будут ортогональны $x \perp y$, если (x,y)=0.*

Пример. Доказать неравенство Коши-Буняковского

$$|(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) = ||\lambda x + y||^2 = (\lambda x + y, \lambda x + y) =$$

$$= \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) =$$
$$= \lambda^2||x||^2 + 2(x, y)\lambda + ||y||^2 \geq 0$$

последние неравенство выполнено в силу свойства г) скалярного произведения при всех λ. Тогда дискриминант полученного трехчлена относительно λ неположителен, то есть

$$(x, y)^2 - ||x||^2||y||^2 \leq 0$$

отсюда получаем неравенство Коши-Буняковского

$$|(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать, что для того, чтобы нормированное пространство E было евклидовым необходимо и достаточно, чтобы для любых двух элементов $f, g \in E$ выполнялось тождество параллелограмма

$$||f+g||^2 + ||f-g||^2 = 2\left(||f||^2 + ||g||^2\right).$$

2. Доказать непрерывность скалярного произведения, то есть если $x_n \to x, y_n \to y$, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

3. Доказать, что в евклидовом пространстве выполнено тождество Аполлония

$$2||z-x||^2 + 2||z-y||^2 = ||x-y||^2 + 4\left|\left|z - \frac{x+y}{2}\right|\right|^2.$$

4. Показать, что в евклидовом пространстве элементы x,y ортогональны тогда и только тогда, когда

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

5. Доказать, что в нормированном пространстве непрерывных функций C[0,1] норма

$$||x|| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

не порождается скалярным произведением.

6. Доказать, что в нормированное пространство l_p всех числовых последовательностей, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x|^p < \infty,$$

с нормой

$$||x|| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

не является евклидовым.

8. Гильбертово пространство

Важную роль в функциональном анализе играют гильбертовы пространства.

Определение 21. *Полное евклидово пространство бесконечного числа измерений называется гильбертовым пространством. Обозначим его* H.

Определение 22. *Пусть* H *- гильбертово пространство,* K *- поле действительных или комплексных чисел, если* $Z \subset H$ *и для любых* $x, y \in Z, \alpha, \beta \in K$ *следует, что* $\alpha x + \beta y \in Z$*, то* Z *называется линейным многообразием.*

Определение 23. *Замкнутое линейное многообразие называется подпространством.*

Определим в гильбертовом пространстве ортогональное дополнение:

Определение 24. *Пусть* H *- гильбертово пространство,* $M \subset H$*, тогда подпространство* $M^{\perp} = \{x \in H : \forall y \in M \Rightarrow (x, y) = 0\}$ *называется ортогональным дополнением.*

Для гильбертова пространства H справедливо разложение $H = M \oplus M^{\perp}$, это означает, что любой элемент x из пространства H может быть представлен единственным образом в виде

$$x = y + z,\ y \in M,\ z \in M^{\perp}.$$

Обозначим $L^p[a, b]$ - пространство интегрируемых функций с нормой $||x|| = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Пример. Пусть L - линейное многообразие в H. Доказать, что
$$\overline{L} = H \Leftrightarrow L^{\perp} = \{0\}.$$

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть $\overline{L} = H$. Допустим, что существует $z_0 \in H$ такое, что $z_0 \perp L$. Так как $\overline{L} = H$, то существует последовательность элементов $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $y_n \to z_0$. Тогда $0 = (y_n, z_0) \to (z_0, z_0)$ в следствие непрерывности скалярного произведения. Следовательно, $(z_0, z_0) = 0$, то есть $z_0 = 0$.

2) Достаточность. Пусть $L^{\perp} = \{0\}$. Другими словами, если $(x, y) = 0$ для произвольного $y \in L$, то $x = 0$. Будем доказывать методом от противного и предположим, что $\overline{L} \neq H$, то есть L не является всюду плотным в H. Тогда существует элемент $x_0 \in H$, который не принадлежит $\overline{L}$ ($x_0 \notin L$). Так как $\overline{L}$ подпространство H и $x_0 \notin L$, значит, имеет место ортогональное разложение: $x_0 = y_0 + z_0$, $y_0 \in \overline{L}$, $z_0 \in \overline{L}^{\perp}$ при этом $z_0 \neq 0$, так как $x_0 \notin L$. Однако, $(z_0, y) = 0$ для $\forall y \in \overline{L}$ и, в частности, для $y \in L$. Тогда согласно условию $z_0 = 0$. Получаем противоречие, следовательно, $\overline{L} = H$.

Задания для самостоятельного решения

1. В пространстве $L^2[a, b]$ задано множество $Z = \{x = x(t) : \int\limits_a^b x(t)dt = 0\}$.

а) Является ли Z линейным многообразием?

б) Является ли Z подпространством?

в) Если Z является подпространством, найти $Z^{\perp}$.

2. Пусть x_n, y_n - элементы некоторого гильбертова пространства H, $||x_n|| \leq 1, ||y_n|| \leq 1$ и $(x_n, y_n) \to 1$, $n \to \infty$. Доказать, что $||x_n - y_n||^2 \to 0$, $n \to \infty$.

3. Для функции $f(x) = \sin x$ найти многочлен второго порядка, отклонение которого по норме пространства $L^2[0, \frac{\pi}{2}]$ будет минимальным из возможных.

4. Пусть L - подпространство гильбертова пространства H, x - точка, отстоящая от L на расстояние d, то есть $d = \rho(x, L) = \inf\limits_{u \in L} ||x - u||$. Доказать, что для двух элементов $y_1, y_2 \in L$ справедливо неравенство Беппо-Леви:

$$||y_1 - y_2|| \leq \sqrt{||x - y_1||^2 - d^2} + \sqrt{||x - y_2||^2 - d^2}.$$

5. Пусть L - замкнутое, выпуклое множество в гильбертовом пространстве H. Доказать, что в L существует единственный элемент с наименьшей нормой.

Заключение

В настоящем учебно - методическом пособии были рассмотрены основные типы задач курса функционального анализа. Основное внимание уделено решению задач на метрические, нормированные, евклидовы и гильбертовы пространства.

Все вопросы, комментарии и найденные опечатки просьба отправлять автору по электронной почте:

Андрей Александрович Нуятов nuyatov1aa@rambler.ru

Литература

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа - М.:Физматлит, 2006.

[2] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. - М.: Высшая школа, 1982.

[3] Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.: Физматлит, 2007.

[4] Очан Ю.С. Сборник задач и теорем по теории функций действительной переменной. - М.: Просвещение,1965.

[5] Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу - М.: Физматлит, 2005.