

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского**

В.Л. Котов

**ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ОДНОМЕРНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ
ТЕЧЕНИЙ (ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА)**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано научно-методическим советом исследовательской школы
«Компьютерная и экспериментальная механика» для студентов ННГУ,
обучающихся по направлению подготовки 010303 «Механика и математическое
моделирование»

Нижегород
2018

УДК 539.3
ББК 22.2
К73

К73 Котов В.Л. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ОДНОМЕРНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ (ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА): Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018. – 45 с.

Рецензент: к.т.н., доц. **А.В. Жидков**

Лабораторная работа направлена на формирование навыков проведения численных исследований процессов упругопластического деформирования в рамках известной схемы М.Уилкинса. Студенту предлагается на примере одномерной модели упругоидеальнопластического течения разработать дискретную модель, компьютерную программу, получить решения задач упругого и упругопластического деформирования материалов и конструкций, сравнить полученные численные решения с аналитическими решениями задач. Особое внимание уделяется анализу сходимости численных решений при измельчении разностной сетки. В приложениях приведены текст программы на языке программирования С++ в сопоставлении с соотношениями разностной схемы, таблица параметров материалов.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 010303 «Механика и математическое моделирование».

Печатается по решению
научно-методического совета исследовательской школы
«Компьютерная и экспериментальная механика»

УДК 539.3
ББК 22.2

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2018

Содержание

1. Одномерные упругопластические течения.....	5
1.1. Математическая постановка задачи [1].....	5
1.2. Задание 1 (плоская симметрия).....	6
1.3. Задание 2 (цилиндрическая симметрия).....	6
1.3. Задание 3 (сферическая симметрия).....	7
2. Пример выполнения задания 1 (плоская симметрия).....	8
2.1. Записать математическую постановку начально-краевой задачи о действии постоянного нормального напряжения на границе расчетной области.....	8
2.2. Для заданных параметров материала определить предельное напряжение на границе области, при котором не возникает пластических деформаций.....	9
2.2. Исследовать влияние линейной вязкости на численное решение задачи, полагая деформирование упругим.....	10
2.3. Исследовать сходимость численного решения упругой задачи при измельчении разностной сетки.....	11
2.4. Получить распределение напряжений вдоль пространственной координаты в два момента времени в упругой и упругопластической постановке.....	12
2.5. Осуществить переход к безразмерным величинам.....	13
3. Пример выполнения задания 2 (цилиндрическая симметрия).....	14
3.1. Записать математическую постановку и решение в перемещениях краевой задачи о действии постоянного нормального напряжения на внутренней поверхности полого цилиндра (задача Ламэ).....	14
3.2. Записать математическую постановку начально-краевой задачи о действии постоянного нормального напряжения на внутренней поверхности полого цилиндра.....	16
3.3. Для заданных параметров материала определить предельное напряжение на внутренней поверхности полого цилиндра, при котором не возникает пластических деформаций.....	16
3.4. Исследовать влияние формы граничного импульса напряжения на численное решение задачи, полагая деформирование упругим.....	17
3.5. Исследовать сходимость численного решения упругой задачи при измельчении разностной сетки.....	19
3.6. Сравнить численное решение упругой задачи с аналитическим распределением напряжений вдоль пространственной координаты в размерном и безразмерном виде.....	20
3.7. Получить численные решения задачи в упругопластической постановке при различных значениях напряжения на внутренней поверхности цилиндра.....	21
4. Пример выполнения задания 3 (сферическая симметрия).....	22
4.1. Записать математическую постановку и решение в перемещениях краевой задачи о действии постоянного нормального напряжения на внутренней поверхности полой сферы (статическая задача).....	22

4.2. Записать математическую постановку начально-краевой задачи о действии постоянного нормального напряжения на границе сферической расчетной области.....	24
4.3. Для заданных параметров материала определить предельное напряжение на поверхности полой сферы, при котором не возникает пластических деформаций.....	25
4.4. Исследовать влияние формы граничного импульса напряжения на численное решение задачи, полагая деформирование упругим.....	26
4.5. Исследовать сходимость численного решения упругой задачи при измельчении разностной сетки.....	27
4.6. Сравнить численное решение упругой задачи с аналитическим распределением напряжений вдоль пространственной координаты в размерном и безразмерном виде	28
4.7. Получить численные решения задачи в упругопластической постановке при различных значениях напряжения на внутренней поверхности сферы ...	30
4.8. Записать математическую постановку начально-краевой задачи о действии постоянной скорости на границе сферической расчетной области.	31
4.9. Получить решение задачи: распределение скорости и напряжения вдоль координаты в три момента времени в размерном виде	32
4.10. Получить решение задачи: распределение скорости и напряжения вдоль координаты в три момента времени в безразмерном виде, сравнить решение с точным из лабораторной работы 1.....	35
Приложение 1	36
Реализация конечно-разностных уравнений в программном коде.....	36
Приложение 2	42
Параметры, характеризующие сопротивление упругому и пластическому деформированию материалов [4, 5]	42
Литература	44

1. Одномерные упругопластические течения

1.1. Математическая постановка задачи [1]

Для нестационарных течений с одной пространственной переменной (r) в плоском ($d=1$), цилиндрическом ($d=2$) и сферическом ($d=3$) случаях основные уравнения имеют следующий вид:

уравнения движения

$$\frac{\rho_0 \dot{U}}{V} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (d-1) \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r},$$

$$\sigma_r = -(P + q) + s_1, \quad \sigma_\theta = -(P + q) + s_2$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial (r^{d-1} U)}{\partial r}$$

искусственная вязкость (линейная)

$$q = C_L \frac{\rho_0 a}{V} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \Delta r$$

где C_L – постоянная, a – скорость звука,

уравнение состояния

$$\text{девиатор напряжений} \begin{cases} \dot{s}_1 = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_1 - \frac{1}{3} \dot{V}/V \right), \\ \dot{s}_2 = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_2 - \frac{1}{3} \dot{V}/V \right), \\ \dot{s}_3 = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_3 - \frac{1}{3} \dot{V}/V \right), \end{cases}$$

$$\text{скорости деформаций} \begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = \partial U / \partial r, \\ \dot{\varepsilon}_2 = U / r, \\ \dot{\varepsilon}_3 = \dot{\varepsilon}_2 \quad \text{при } d = 3, \\ \dot{\varepsilon}_3 = 0 \quad \text{при } d = 2, \\ \dot{\varepsilon}_3 = \dot{\varepsilon}_2 = 0 \quad \text{при } d = 1, \end{cases}$$

гидростатическое давление

$$P = K(\eta - 1), \quad \eta = \frac{1}{V} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

условие текучести Мизеса

$$\left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \right) - \frac{2}{3} Y_0^2 \leq 0$$

где Y_0 – предел текучести среды.

Здесь были использованы следующие обозначения: r – пространственная координата; U – скорость в направлении r ; σ_r , σ_θ – полные напряжения; s_1 ,

s_2, s_3 – компоненты девиатора напряжений; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – деформации; P – гидростатическое давление; V – относительный объем; ρ_0 – начальная (характерная) плотность; ρ – плотность.

Точка над величинами, входящими в уравнение, означает производную по времени вдоль траектории частицы.

Применяемые в расчетах конечно-разностные уравнения для написанной выше системы уравнений в частных производных приведены в Приложении 1.

1.2. Задание 1 (плоская симметрия)

- Записать математическую постановку начально-краевой задачи о действии постоянного нормального напряжения на границе расчетной области
- Для заданных параметров материала определить предельное напряжение на границе области, при котором не возникает пластических деформаций
- Исследовать влияние линейной вязкости на численное решение задачи, полагая деформирование упругим
- Исследовать сходимость численного решения упругой задачи при измельчении разностной сетки
- Получить распределение напряжений вдоль пространственной координаты в два момента времени в упругой и упругопластической постановке
- Осуществить переход к безразмерным величинам

1.3. Задание 2 (цилиндрическая симметрия)

- Записать математическую постановку и решение в перемещениях краевой задачи о действии постоянного нормального напряжения на внутренней поверхности полого цилиндра (задача Ламэ)
- Записать математическую постановку начально-краевой задачи о действии постоянного нормального напряжения на внутренней поверхности полого цилиндра
- Для заданных параметров материала определить предельное напряжение на внутренней поверхности полого цилиндра, при котором не возникает пластических деформаций

- Исследовать влияние формы граничного импульса напряжения на численное решение задачи, полагая деформирование упругим
- Исследовать сходимость численного решения упругой задачи при измельчении разностной сетки
- Сравнить численное решение упругой задачи с аналитическим распределением напряжений вдоль пространственной координаты в размерном и безразмерном виде
- Получить численные решения задачи в упругопластической постановке при различных значениях напряжения на внутренней поверхности цилиндра

1.3. Задание 3 (сферическая симметрия)

- Записать математическую постановку и решение в перемещениях краевой задачи о действии постоянного нормального напряжения на внутренней поверхности полой сферы (статическая задача)
- Записать математическую постановку начально-краевой задачи о действии постоянного нормального напряжения на границе сферической расчетной области
- Для заданных параметров материала определить предельное напряжение на поверхности полой сферы, при котором не возникает пластических деформаций
- Исследовать влияние формы граничного импульса напряжения на численное решение задачи, полагая деформирование упругим
- Исследовать сходимость численного решения упругой задачи при измельчении разностной сетки
- Сравнить численное решение упругой задачи с аналитическим распределением напряжений вдоль пространственной координаты в размерном и безразмерном виде
- Получить численные решения задачи в упругопластической постановке при различных значениях напряжения на внутренней поверхности сферы
- Записать математическую постановку начально-краевой задачи о действии постоянной скорости на границе сферической расчетной области
- Получить решение задачи: распределение скорости и напряжения вдоль координаты в три момента времени в размерном виде
- Получить решение задачи: распределение скорости и напряжения вдоль координаты в три момента времени в безразмерном виде, сравнить решение с точным из лабораторной работы 1

2. Пример выполнения задания 1 (плоская симметрия)

2.1. Записать математическую постановку начально-краевой задачи о действии постоянного нормального напряжения на границе расчетной области

Система дифференциальных уравнений в частных производных в переменных Лагранжа, описывающая упругопластическое деформирование в случае плоской симметрии записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0 \dot{U}}{V} &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}, \quad \frac{\dot{V}}{V} = \frac{\partial(U)}{\partial r}, \quad r \in [a, b], \quad t \in [0, T], \\ \sigma_r &= -(P + q) + s_1, \\ P &= K \left(\frac{1}{V} - 1 \right), \quad q = C_L \frac{\rho_0 c_d}{V} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \Delta r, \\ \dot{s}_i &= 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_i - \frac{1}{3} \dot{V}/V \right), \quad i = 1, 2, 3 \\ \dot{\varepsilon}_1 &= \partial U / \partial r, \quad \dot{\varepsilon}_3 = \dot{\varepsilon}_2 = 0 \\ \left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \right) - \frac{2}{3} Y^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Краевые условия при $r = a$ и $r = b$:

$$\sigma_r(a, t) = -p_0, \quad U(b, t) = 0$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, 0) = P(r, 0) = q(r, 0) = 0, \quad U(r, 0) = 0, \quad V(r, 0) = 1, \\ \varepsilon_i(r, 0) = 0, \quad s_i(r, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Упругие и прочностные параметры материала приведены в таблице (Приложение 2).

Рассмотрим материал – сталь 3.

материал	E , кгс/см ²	ν	ρ , г/см ³	K , кгс/см ²	μ , кгс/см ²	Y_0 , кгс/см ²
сталь 3	2080000	0.3	7.8	1733333	800000	2400

Используем соотношения: $E = 20800 \text{ кгс/мм}^2 = 2080000 \text{ кгс/см}^2$

Скорость распространения упругой волны $c_d = 599.1 \text{ см/мс}$. Размеры расчетной области выберем $a = 0$, $b = 300 \text{ см}$. Время распространения упругой волны до правой границы области $b/c_d \approx 0.5 \text{ мс}$, положим время счета $T = 0.4 \text{ мс}$.

2.2. Для заданных параметров материала определить предельное напряжение на границе области, при котором не возникает пластических деформаций

Для определения предельного напряжения в плоской волне, при котором не возникают пластические деформации рассмотрим соотношения между напряжениями и деформациями в упругости и пластичности.

Упругое деформирование описывается законом Гука:

$$s_1 = 2\mu e_1 = 2\mu \left(\varepsilon_1 - \frac{\theta}{3} \right), \quad P = -K\theta = -K(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

Для случая одноосного деформирования (одномерная задача, плоская симметрия) имеем

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0, \quad \theta = \varepsilon_1, \quad e_1 = \frac{2}{3}\theta, \quad s_1 = \frac{4}{3}\mu\theta,$$

$$\sigma_r = s_1 - P = \left(K + \frac{4}{3}\mu \right) \theta,$$

В области идеального пластического течения будем иметь

$$\frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \frac{1}{3}Y^2,$$

Принимая во внимание равенство нулю первого инварианта тензора-девиатора напряжений

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0,$$

и симметрию в плоской волне

$$s_2 = s_3,$$

получим

$$s_2 = -2s_1$$

Подставим полученные соотношения в условие пластичности

$$\frac{1}{2}(s_1^2 + 2s_2^2) = \frac{1}{3}Y^2, \quad \frac{1}{2}\left(s_1^2 + \frac{2}{4}s_1^2\right) = \frac{1}{3}Y^2, \quad \frac{9}{4}(s_1^2) = Y^2, \quad |s_1| = \frac{2}{3}Y$$

Объединим полученные соотношения упругости и пластичности

$$\frac{4}{3}\mu\theta = \frac{2}{3}Y, \quad \tilde{\theta} = \frac{Y}{2\mu},$$

получим выражение для абсолютного значения напряжения, при превышении которого будет выполняться условие пластического течения

$$\tilde{\sigma}_r = \left(K + \frac{4}{3}\mu \right) \frac{Y}{2\mu} = \left(\frac{2}{3} + \frac{K}{2\mu} \right) Y$$

Для заданных параметров материала будем иметь

$$\tilde{\theta} = 0.0015, \quad \tilde{s}_1 = 1600 \text{ кгс/см}^2, \quad \tilde{\sigma}_r = 4200 \text{ кгс/см}^2.$$

2.2. Исследовать влияние линейной вязкости на численное решение задачи, полагая деформирование упругим

Аналитическое решение задачи о распространении упругой волны в полупространстве от левой границы к правой описывается функцией Хевисайда $\sigma_r(r,t) = -p_0 H(r - c_d t)$. Значение нормального напряжения на границе расчетной области примем равным $p_0 = 6000$ кгс/см².

Рассмотрим численное решение этой задачи в упругой постановке при завышенном значении предела текучести ($Y = 10Y_0$). Расчетную область разобьем разностной сеткой на 60 ячеек.

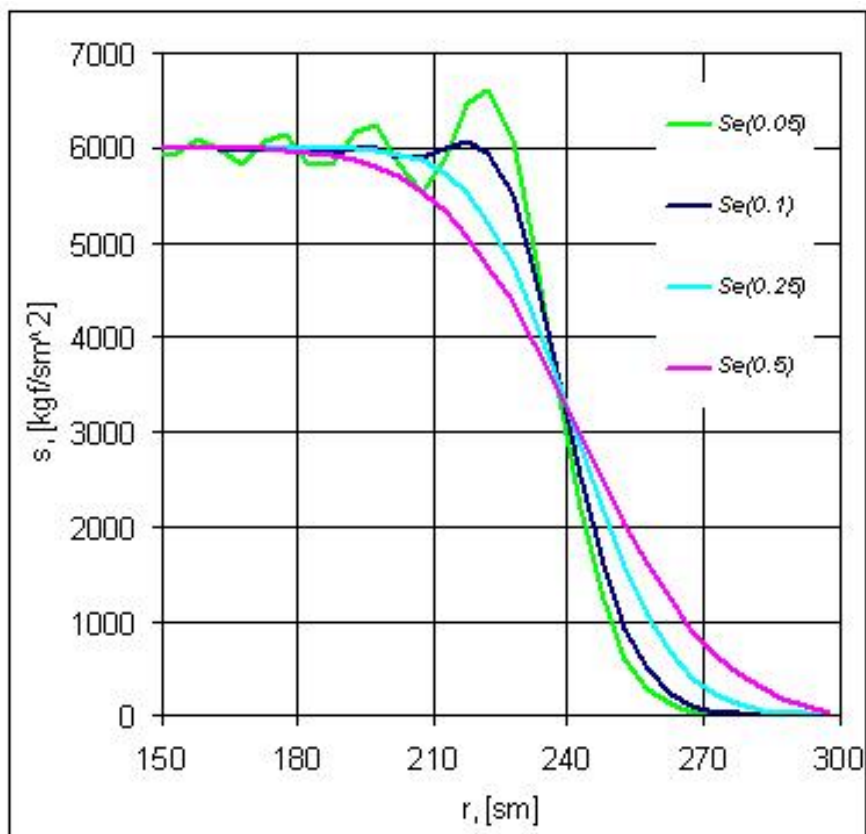


Рис. 1. Распределение радиальной компоненты тензора напряжений (s с обратным знаком) вдоль координаты r в момент времени $t = 0.4$ мс при изменении коэффициента линейной вязкости.

На рис. 1 приведено распределение радиальной компоненты тензора напряжений (s с обратным знаком) вдоль координаты r в момент времени $t = 0.4$ мс при значениях коэффициента линейной вязкости $C_L = 0.05, 0.1, 0.25$ и 0.5 . Отметим, что при малых значениях коэффициента линейной вязкости C_L на фронте распространяющейся упругой волны наблюдаются нефизические осцилляции, превышающие заданное значение $p_0 = 6000$ кгс/см². С увеличением значений коэффициента происходит уменьшение амплитуды колебаний и «размытие» фронта волны.

2.3. Исследовать сходимость численного решения упругой задачи при измельчении разностной сетки

Рассмотрим численное решение этой задачи при завышенном значении предела текучести ($Y = 10Y_0$). Расчетную область разобьем разностной сеткой на 60, 120, 240 и 480 ячеек. Значение коэффициента линейной вязкости примем равным $C_L = 0.1$.

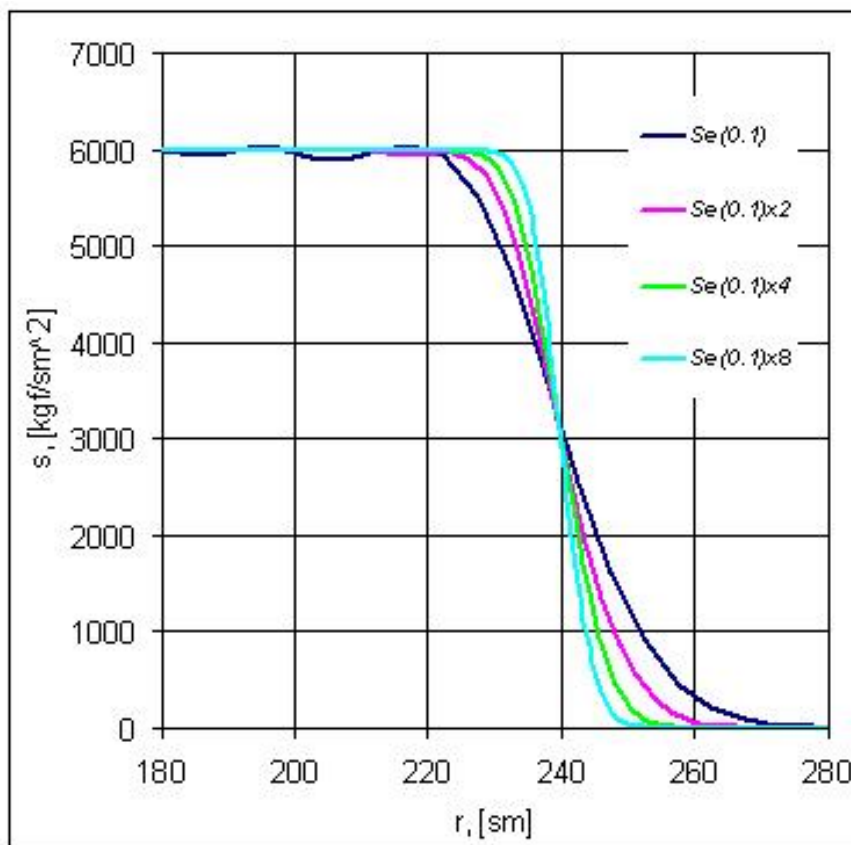


Рис. 2. Распределение радиальной компоненты тензора напряжений (с обратным знаком) вдоль координаты r в момент времени $t=0.4$ мс при изменении количества ячеек разностной сетки.

На рис. 2 приведено распределение радиальной компоненты тензора напряжений (с обратным знаком) вдоль координаты r в момент времени $t=0.4$ мс при количестве ячеек разностной сетки 60, 120, 240 и 480. Отметим поведение фронта волны, полученной в численном решении, аналогичное действию искусственной вязкости и связанное с действием схемной вязкости или погрешности аппроксимации. Чем больше количество ячеек разностной сетки, тем ближе фронт волны к вертикальному, соответствующему аналитическому решению.

2.4. Получить распределение напряжений вдоль пространственной координаты в два момента времени в упругой и упругопластической постановке

Положим значение напряжения на границе $s_0 = -p_0$ равным $p_0 \approx 1.5\tilde{\sigma}_r$, $s_0 = -6000$ кгс/см². Заметим здесь, что в программе на границе определяются компоненты усилий (узловых сил) в общей системе координат, определяемой направлением оси r . Таким образом, чтобы в окрестности левой границы были отрицательные напряжения сжатия, необходимо приложить сжимающие, то есть положительные усилия, равные по абсолютной величине значению напряжения. Для правой границы наоборот, положительные по знаку усилия приведут к растягивающим (положительным) напряжениям на границе.

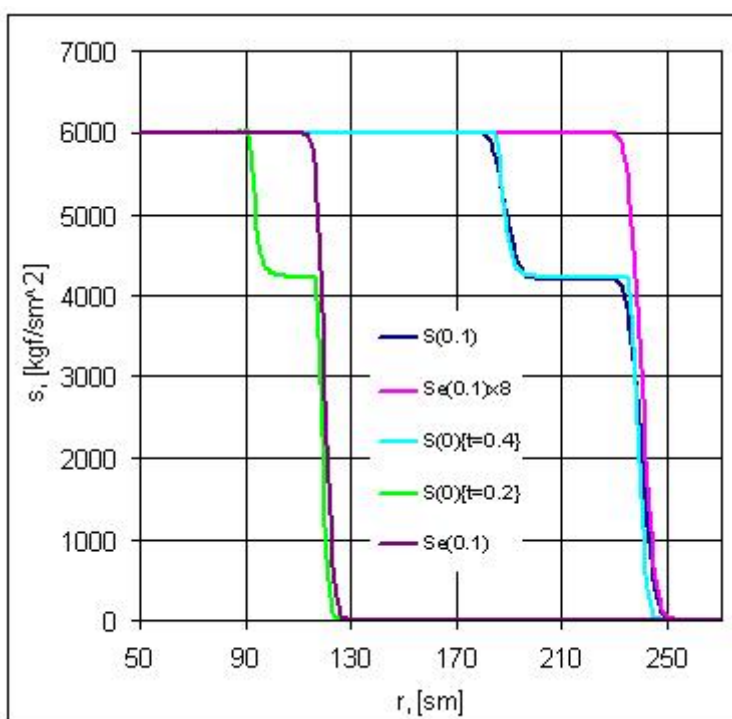


Рис. 3. Распределение радиальной компоненты тензора напряжений (с обратным знаком) вдоль координаты r в моменты времени $t=0.2$ и 0.4 мс в упругой и упругоидеальнопластической постановках

Результаты расчетов, представленные на рис. 3, получены на сетке с 480 разностными ячейками. Первые две кривые, обозначенные в легенде как $S(0.1)$ и $S_e(0.1) \times 8$, получены с линейной вязкостью ($C_L=0.1$) на момент времени $t=0.4$ мс, третья кривая $S(0)(t=0.4)$ получена при $C_L=0$. Отметим, что наличие пластических деформаций позволяет получить численное решение без использования искусственной вязкости.

Явным отличием упругопластического поведения материала в условиях одноосной деформации от чисто упругого является двухволновая структура решения. На распределении радиальной компоненты тензора напряжений (с обратным знаком) вдоль координаты r впереди выделяется упругий

предвестник, распространяющийся со скоростью $c_d=599$ см/мс. Напряжение за фронтом упругой волны равно $\tilde{\sigma}_r = 4200$ кгс/см². За упругим предвестником распространяется фронт пластической волны со скоростью $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = 471$ см/мс. Напряжение за фронтом пластической волны равно $s_0 = -6000$ кгс/см². Относительное отличие скоростей равно $\left(1 - \frac{c}{c_d}\right) \cdot 100\% = 21\%$, с течением времени при неизменности внешних условий расстояние между фронтами упругой и пластической волны будет увеличиваться.

Обозначения $S(0)(t=0.2)$ и $S_e(0.1)$ соответствуют упругопластическому и упругому решению – распределению напряжения вдоль пространственной координаты на момент времени $t=0.2$ мс. Видно, что расстояние между фронтами упругой и пластической волны на моменты времени 0.2 и 0.4 мс отличаются в два раза.

2.5. Осуществить переход к безразмерным величинам

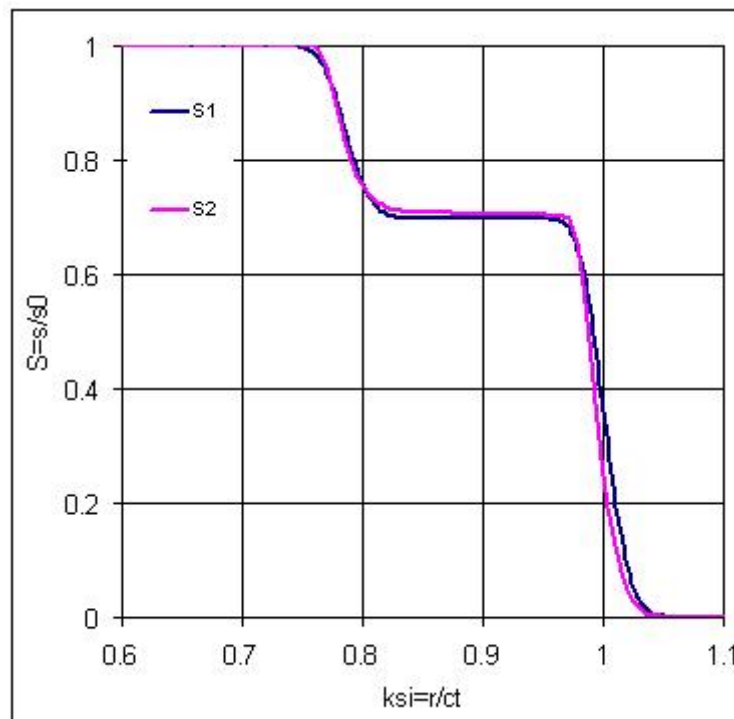


Рис. 4. Безразмерные зависимости радиальной компоненты тензора напряжений вдоль координаты при $t=0.2$ и 0.4 мс

На рис. 4 представлены безразмерные зависимости радиальной компоненты тензора напряжений $S = \sigma_r/s_0$ вдоль координаты $\xi = r/ct$ в моменты времени $t=0.2$ и 0.4 мс.

3. Пример выполнения задания 2 (цилиндрическая симметрия)

3.1. Записать математическую постановку и решение в перемещениях краевой задачи о действии постоянного нормального напряжения на внутренней поверхности полого цилиндра (задача Ламэ)

Запишем уравнение равновесия в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0$$

где σ_r и σ_θ – радиальная и окружная компоненты тензора напряжений Коши и закон Гука:

$$\sigma_r = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_r = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \sigma_\theta = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_\theta = \lambda \theta + 2\mu \frac{u}{r}$$

где λ , μ – упругие константы материала (параметры Ламе), θ – объемная деформация, $\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}$, $\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$, $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$, $\varepsilon_z = 0$ – радиальная, окружная и осевая компоненты тензора малых деформаций.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) \\ \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} &= \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) = 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0$$

- получили обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно перемещения.

Запишем краевые условия, полагая, что координата r изменяется на отрезке $r \in [a, b]$

$$\sigma_r|_{r=a} = -p_0, \quad \sigma_r|_{r=b} = 0 \quad \text{или}$$

$$\left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=a} = -p_0, \quad \left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=b} = 0$$

Обозначим штрихом дифференцирование по координате r , уравнение

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{u}{r^2} = 0$$

имеет общий интеграл

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

Константы интегрирования C_1, C_2 определим из граничных условий

$$\begin{aligned} \lambda \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} + C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right)_{r=a} + 2\mu \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right)_{r=a} &= -p_0, \\ \lambda \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} + C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right)_{r=b} + 2\mu \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right)_{r=b} &= 0 \\ \begin{cases} 2\lambda(C_1) + 2\mu \left(C_1 - \frac{C_2}{a^2} \right) = -p_0 \\ 2\lambda(C_1) + 2\mu \left(C_1 - \frac{C_2}{b^2} \right) = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$\begin{aligned} 2\mu C_2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) &= p_0, \quad C_2 = \frac{a^2 p_0}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{2\mu} = \frac{b^2}{2\mu} \tilde{p}, \quad \tilde{p} = \frac{a^2 p_0}{b^2 - a^2}, \\ 2\lambda(C_1) + 2\mu \left(C_1 - \frac{\frac{b^2}{2\mu} \tilde{p}}{b^2} \right) &= 0, \quad C_1 = \frac{\tilde{p}}{2(\lambda + \mu)} \end{aligned}$$

Окончательно решение в перемещениях краевой задачи для ОДУ второго порядка имеет вид

$$u(r) = \left(\frac{r}{2(\lambda + \mu)} + \frac{b^2}{2\mu r} \right) \tilde{p}, \quad r \in [a, b].$$

Определим напряжения, применяя закон Гука

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \left(\frac{1}{2(\lambda + \mu)} - \frac{b^2}{2\mu r^2} \right) \tilde{p}, \quad \frac{u}{r} = \left(\frac{1}{2(\lambda + \mu)} + \frac{b^2}{2\mu r^2} \right) \tilde{p} \\ \theta &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = \frac{\tilde{p}}{(\lambda + \mu)} \\ \sigma_r &= \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \tilde{p}, \quad \sigma_\theta = \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \tilde{p}, \quad \sigma_z = \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)} \tilde{p} \end{aligned}$$

3.2. Записать математическую постановку начально-краевой задачи о действии постоянного нормального напряжения на внутренней поверхности полого цилиндра

Система дифференциальных уравнений в частных производных в переменных Лагранжа, описывающая упругопластическое деформирование в случае цилиндрической симметрии записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0 \dot{U}}{V} &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r}, \quad \dot{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rU)}{\partial r}, \quad r \in [a, b], \quad t \in [0, T], \\ \sigma_r &= -(P + q) + s_1, \quad \sigma_\theta = -(P + q) + s_2 \\ P &= K \left(\frac{1}{V} - 1 \right), \quad q = C_L \frac{\rho_0 c_d}{V} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \Delta r, \\ \dot{s}_i &= 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_i - \frac{1}{3} \dot{V}/V \right), \quad i = 1, 2, 3 \\ \dot{\varepsilon}_1 &= \partial U / \partial r, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{U}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_3 = 0 \\ \left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \right) - \frac{2}{3} Y^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Краевые условия при $r = a$ и $r = b$:

$$\sigma_r(a, t) = -p_0 f(t), \quad \sigma_r(b, t) = 0$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, 0) = \sigma_\theta(r, 0) = P(r, 0) = q(r, 0) = 0, \quad U(r, 0) = 0, \quad V(r, 0) = 1, \\ \varepsilon_i(r, 0) = 0, \quad s_i(r, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

3.3. Для заданных параметров материала определить предельное напряжение на внутренней поверхности полого цилиндра, при котором не возникает пластических деформаций

Для определения предельного напряжения на внутренней поверхности цилиндра, при котором не возникает пластических деформаций (не выполняется условие пластичности Мизеса – интенсивность напряжений не превышает заданное значение), воспользуемся решением статической задачи о равновесии цилиндра

$$\sigma_r = \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \tilde{p}, \quad \sigma_\theta = \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \tilde{p}, \quad \sigma_z = \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)} \tilde{p}, \quad \tilde{p} = \frac{a^2 p_0}{b^2 - a^2}.$$

Выше было показано (рис. 6), что максимальное окружное и радиальное напряжение достигается на внутренней поверхности цилиндра при $r = a$.

Определим значение интенсивности напряжений при $r = a$, для этого определим давление и девиаторы напряжений, принимая во внимание, что $a=1$ см, $b=2$ см, $\lambda = K - \frac{2}{3}\mu = 1200000$ кгс/см², $\mu = 800000$ кгс/см²:

$$\sigma_r = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\tilde{p} = -3\tilde{p}, \quad \sigma_\theta = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\tilde{p} = 5\tilde{p}, \quad \sigma_z = \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)}\tilde{p} = 0.6\tilde{p},$$

$$P = -\frac{-3 + 5 + 0.6}{3}\tilde{p} = -\frac{13}{15}\tilde{p},$$

$$s_1 = \sigma_r + P = -\frac{58}{15}\tilde{p}, \quad s_2 = \sigma_\theta + P = \frac{62}{15}\tilde{p}, \quad s_3 = \sigma_z + P = -\frac{4}{15}\tilde{p}.$$

Подставим в условие пластичности

$$(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \frac{2}{3}Y^2, \quad \frac{(58^2 + 62^2 + 4^2)}{225}\tilde{p}^2 = \frac{2}{3}Y^2,$$

окончательно получим

$$\tilde{p} \approx \frac{15}{104}Y, \quad p_0 \approx \frac{45}{104}Y$$

Для заданных механических параметров материала ($Y=2400$ кгс/см²) будем иметь

$$p_0 = 3\tilde{p} \approx 1038 \text{ кгс/см}^2.$$

При превышении внутренней нагрузкой значения 1038 кгс/см² на внутренней поверхности цилиндра образуются пластические деформации.

3.4. Исследовать влияние формы граничного импульса напряжения на численное решение задачи, полагая деформирование упругим

Положим внутренний и внешний радиусы цилиндрической оболочки $a=1$ см, $b=2$ см. Механические параметры материала соответствуют приведенным ранее в Задании 1. Количество ячеек разностной сетки положим равным 40.

Функцию $f(t)$ в граничном условии определим следующим образом

$$f(t) = \begin{cases} t/t_0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases}, \quad t_0 = k \frac{2\pi a}{c_d}, \quad k = 1, 2, 4, 8.$$

Величина t_0 связана с периодом собственных колебаний оболочки радиуса a . Таким образом, функция $f(t)$ обеспечивает линейное нарастание усилия на границе от нуля до заданного значения $p_0=1020$ кгс/см².

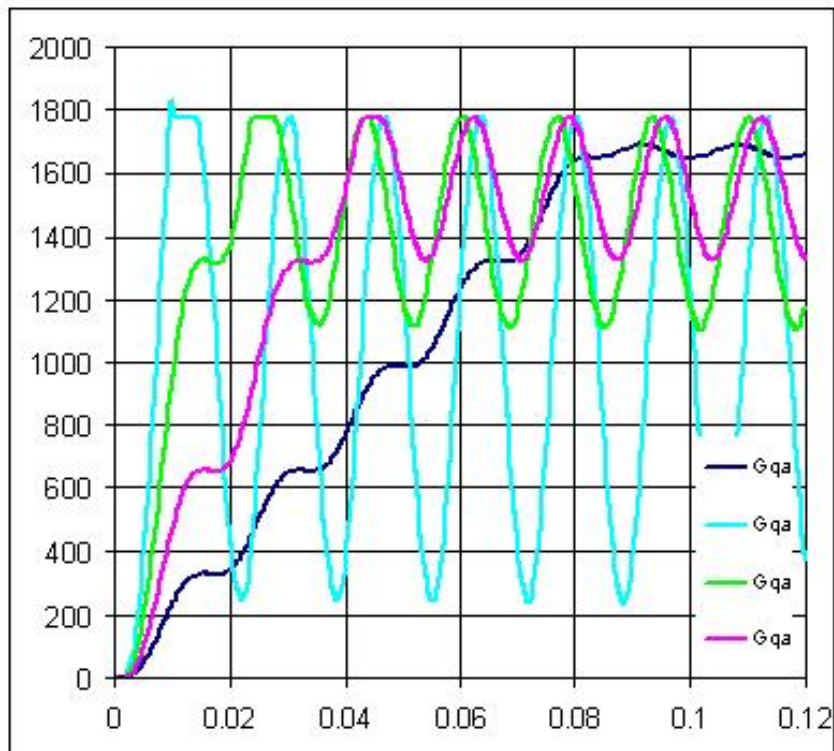


Рис. 5. Временные зависимости окружного напряжения на внутренней поверхности оболочки при $k = 1, 2, 4, 8$

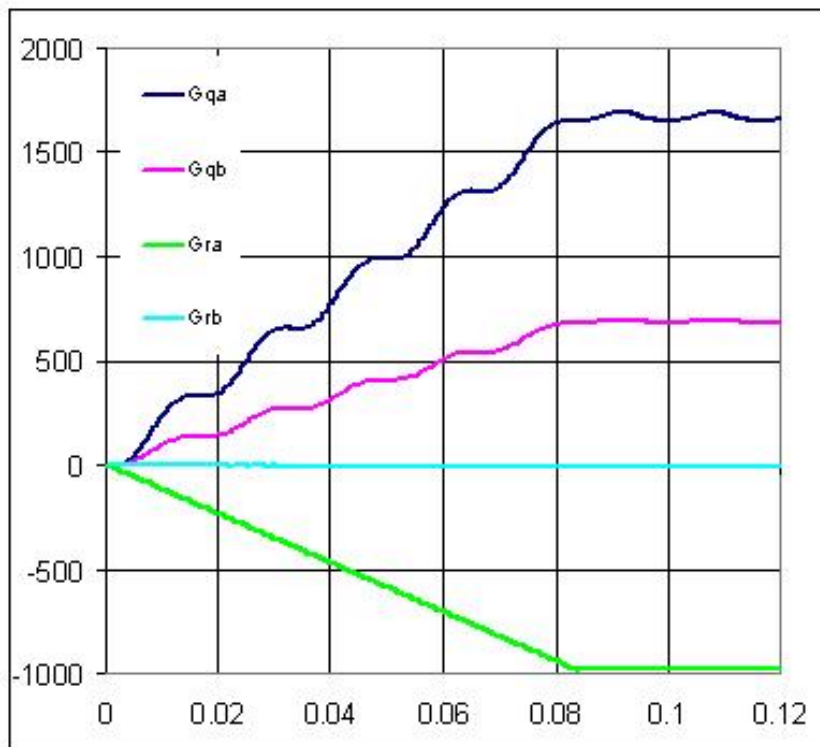


Рис. 6. Временные зависимости окружного и радиального напряжений на внутренней и внешней поверхности оболочки ($k = 8$).

На рис. 5 представлены временные зависимости окружного напряжения на внутренней поверхности оболочки для различных функций, аппроксимирующих граничное условие. Видно, что с увеличением времени

нарастания импульса, которое определяется ростом значения k от 1 до 8, происходит уменьшение амплитуды колебаний окружного напряжения около некоторого постоянного значения, приближающегося к решению статической задачи.

На рис. 6 представлены зависимости от времени окружных и радиальных напряжений на внутренней и внешней поверхностях оболочки. Видно, что окружное напряжение больше на внутренней поверхности, чем на внешней.

3.5. Исследовать сходимость численного решения упругой задачи при измельчении разностной сетки

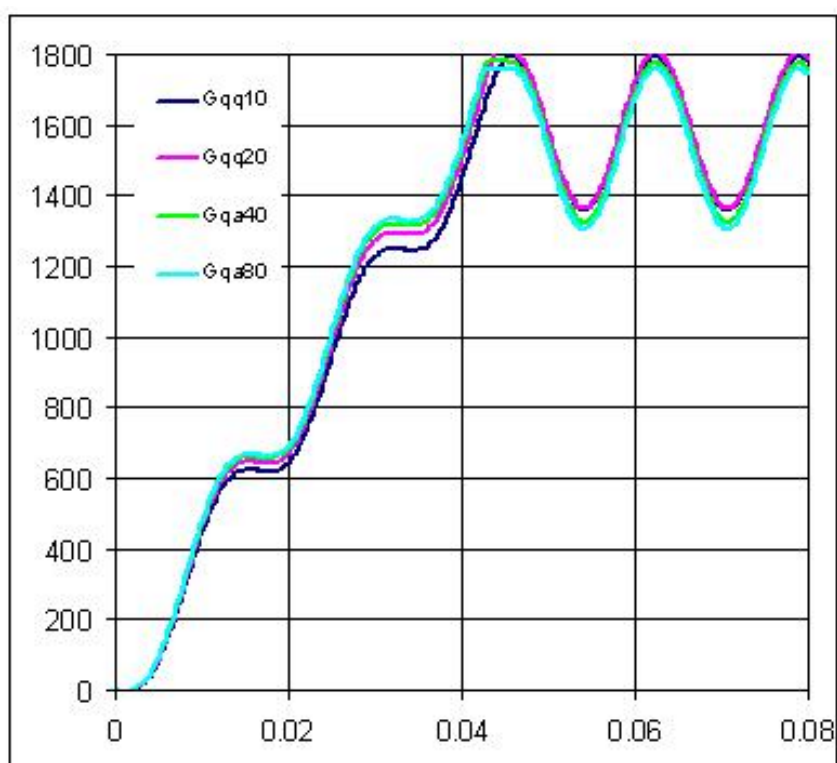


Рис. 7. Временные зависимости окружного напряжения на внутренней поверхности оболочки при $N=10, 20, 40, 80$.

На рис. 7 представлены временные зависимости окружного напряжения на внутренней поверхности оболочки при количестве ячеек разностной сетки $N=10, 20, 40, 80$. Близость результатов при уменьшении размеров ячеек разностной сетки свидетельствует о сходимости численных расчетов. Отличие результатов, например, при $N=40$ и 80 определяет погрешность численных расчетов.

3.6. Сравнить численное решение упругой задачи с аналитическим распределением напряжений вдоль пространственной координаты в размерном и безразмерном виде

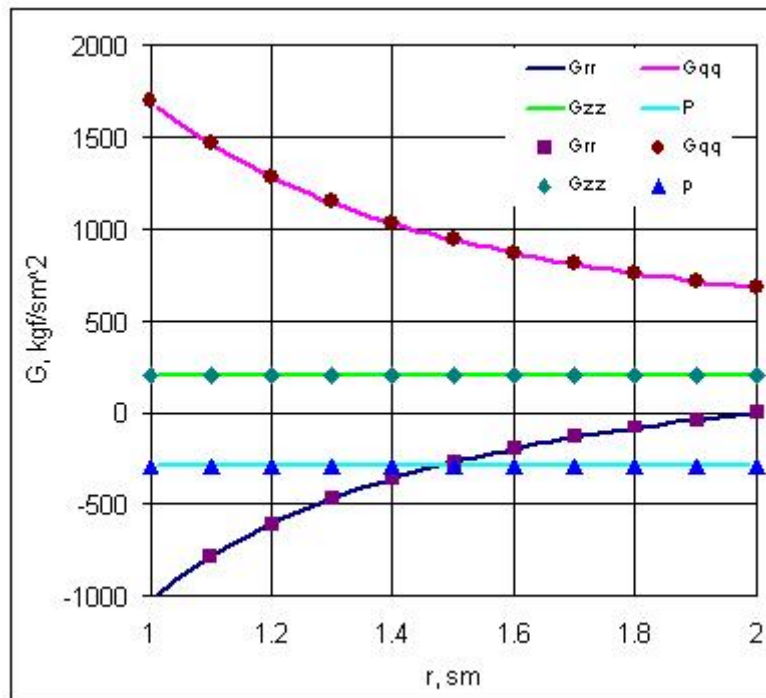


Рис. 8. Распределение радиального, окружного, осевого напряжений и давления вдоль толщины оболочки: аналитическое и численное решение

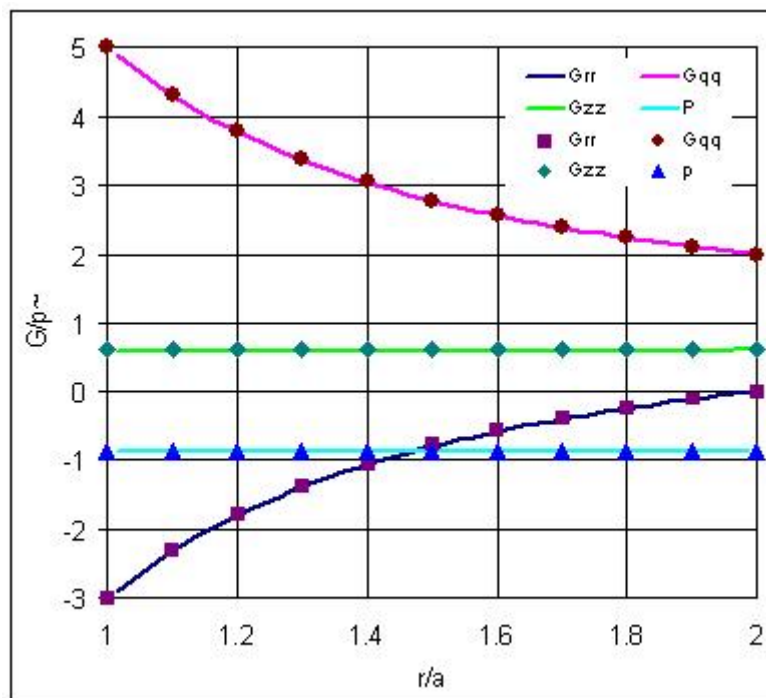


Рис. 9. Распределение безразмерных радиального, окружного, осевого напряжений и давления вдоль толщины оболочки: аналитическое и численное решение

3.7. Получить численные решения задачи в упругопластической постановке при различных значениях напряжения на внутренней поверхности цилиндра

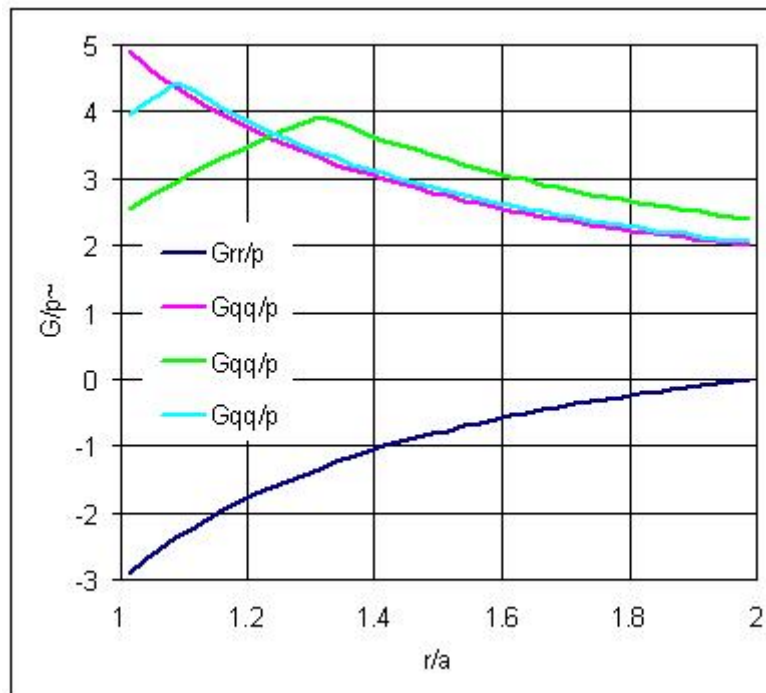


Рис. 10. Безразмерное распределение радиальной и окружной компонент тензора напряжений вдоль толщины оболочки: численное решение при $p_0=1020, 1200$ и 1500 кгс/см²

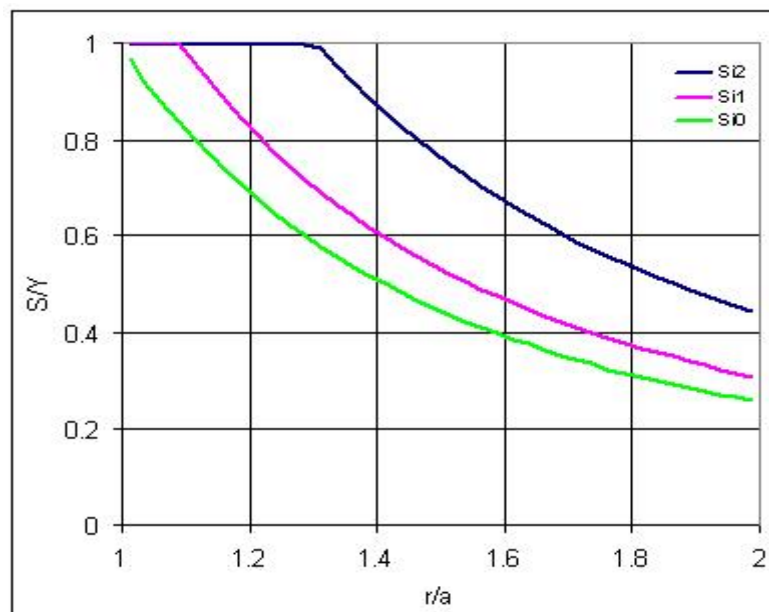


Рис. 11. Распределение интенсивности напряжений, отнесенной к пределу текучести материала, вдоль толщины оболочки: численное решение при $p_0=1020, 1200$ и 1500 кгс/см²

На рис. 10 приведено решение задачи - безразмерные распределения радиальной и окружной компонент тензора напряжений вдоль толщины оболочки при значениях нагрузки $p_0=1020, 1200$ и 1500 кгс/см², превышающих предельное значение.

На рис. 11 приведено распределение безразмерной величины $\frac{S}{Y} = \sqrt{\frac{3}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)}$ вдоль толщины оболочки при значениях нагрузки $p_0=1020, 1200$ и 1500 кгс/см². В соответствии с условием пластичности Мизеса, эта величина не может превышать 1, что и наблюдается на рис. 11.

4. Пример выполнения задания 3 (сферическая симметрия)

4.1. Записать математическую постановку и решение в перемещениях краевой задачи о действии постоянного нормального напряжения на внутренней поверхности полый сферы (статическая задача)

Запишем уравнение равновесия в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0$$

где σ_r и σ_θ – радиальная и окружная компоненты тензора напряжений Коши и закон Гука:

$$\sigma_r = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_r = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \sigma_\theta = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_\theta = \lambda \theta + 2\mu \frac{u}{r}$$

где λ, μ – упругие константы материала (параметры Ламе), θ – объемная деформация, $\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r}$, $\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$, $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$, $\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}$ – радиальная, окружная и меридиональная компоненты тензора малых деформаций.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - 2\frac{u}{r} \right)$$

$$\frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \frac{4\mu}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right)$$

Подставим полученные выражения в уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) + \frac{4\mu}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) = 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = 0$$

- получили обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно перемещения.

Запишем краевые условия, полагая, что координата r изменяется на отрезке $r \in [a, b]$

$$\sigma_r|_{r=a} = -p_0, \quad \sigma_r|_{r=b} = 0 \quad \text{или}$$

$$\left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=a} = -p_0, \quad \left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=b} = 0$$

Обозначим штрихом дифференцирование по координате r , уравнение

$$u'' + \frac{1}{r} u' - \frac{2u}{r^2} = 0$$

имеет общий интеграл

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}$$

Константы интегрирования C_1, C_2 определим из граничных условий

$$\lambda \left(C_1 - \frac{2C_2}{r^3} + 2C_1 + \frac{2C_2}{r^3} \right)_{r=a} + 2\mu \left(C_1 - \frac{2C_2}{r^3} \right)_{r=a} = -p_0,$$

$$\lambda \left(C_1 - \frac{2C_2}{r^3} + 2C_1 + \frac{2C_2}{r^3} \right)_{r=b} + 2\mu \left(C_1 - \frac{2C_2}{r^3} \right)_{r=b} = 0$$

$$\begin{cases} 3\lambda(C_1) + 2\mu \left(C_1 - \frac{2C_2}{a^3} \right) = -p_0 \\ 3\lambda(C_1) + 2\mu \left(C_1 - \frac{2C_2}{b^3} \right) = 0 \end{cases},$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$4\mu C_2 \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right) = p_0, \quad C_2 = \frac{a^3 p_0}{b^3 - a^3} \frac{b^3}{4\mu} = \frac{b^3}{4\mu} \tilde{p}, \quad \tilde{p} = \frac{a^3 p_0}{b^3 - a^3},$$

$$3\lambda(C_1) + 2\mu \left(C_1 - \frac{\frac{b^3}{2\mu} \tilde{p}}{b^3} \right) = 0, \quad C_1 = \frac{\tilde{p}}{3\lambda + 2\mu}$$

Окончательно решение в перемещениях краевой задачи для ОДУ второго порядка имеет вид

$$u(r) = \left(\frac{r}{3\lambda + 2\mu} + \frac{b^3}{4\mu r^2} \right) \tilde{p}, \quad r \in [a, b].$$

Определим напряжения, применяя закон Гука

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \left(\frac{1}{3\lambda + 2\mu} - \frac{b^3}{2\mu r^3} \right) \tilde{p}, \quad \frac{u}{r} = \left(\frac{1}{3\lambda + 2\mu} + \frac{b^3}{4\mu r^3} \right) \tilde{p} \\ \theta &= \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} = \frac{\tilde{p}}{3\lambda + 2\mu} \\ \sigma_r &= \left(1 - \frac{b^3}{r^3} \right) \tilde{p}, \quad \sigma_\theta = \left(1 + \frac{b^3}{r^3} \right) \tilde{p}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta \end{aligned}$$

4.2. Записать математическую постановку начально-краевой задачи о действии постоянного нормального напряжения на границе сферической расчетной области

Система дифференциальных уравнений в частных производных в переменных Лагранжа, описывающая упругопластическое деформирование в случае сферической симметрии записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0 \dot{U}}{V} &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r}, \quad \dot{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 U)}{\partial r}, \quad r \in [a, b], \quad t \in [0, T], \\ \sigma_r &= -(P + q) + s_1, \quad \sigma_\theta = -(P + q) + s_2 \\ P &= K \left(\frac{1}{V} - 1 \right), \quad q = C_L \frac{\rho_0 c_d}{V} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \Delta r, \\ \dot{s}_i &= 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_i - \frac{1}{3} \dot{V}/V \right), \quad i = 1, 2, 3 \\ \dot{\varepsilon}_1 &= \partial U / \partial r, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{U}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_3 = \dot{\varepsilon}_2 = \frac{U}{r}, \\ &\left(s_1^2 + 2s_2^2 \right) - \frac{2}{3} Y^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Краевые условия при $r = a$ и $r = b$:

$$\sigma_r(a, t) = -p_0 f(t), \quad \sigma_r(b, t) = 0$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, 0) = \sigma_\theta(r, 0) = P(r, 0) = q(r, 0) = 0, \quad U(r, 0) = 0, \quad V(r, 0) = 1, \\ \varepsilon_i(r, 0) = 0, \quad s_i(r, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

4.3. Для заданных параметров материала определить предельное напряжение на поверхности поллой сферы, при котором не возникает пластических деформаций

Для определения предельного напряжения на внутренней поверхности поллой сферы, при котором не возникает пластических деформаций (не выполняется условие пластичности Мизеса – интенсивность напряжений не превышает заданное значение), воспользуемся решением статической задачи о равновесии цилиндра

$$\sigma_r = \left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right) \tilde{p}, \quad \sigma_\theta = \left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right) \tilde{p},$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta, \quad \tilde{p} = \frac{a^3 p_0}{b^3 - a^3}.$$

Выше было показано (рис. 13), что максимальное окружное и радиальное напряжение достигается на внутренней поверхности сферы при $r = a$.

Определим значение интенсивности напряжений при $r = a$, для этого определим давление и девиаторы напряжений, принимая во внимание, что $a=1$ см, $b=2$ см:

$$\sigma_r = \left(1 - \frac{b^3}{a^3}\right) \tilde{p} = -7\tilde{p}, \quad \sigma_\theta = \left(1 + \frac{b^3}{2a^3}\right) \tilde{p} = 5\tilde{p},$$

$$P = -\frac{-7 + 2 \cdot 5}{3} \tilde{p} = -\tilde{p},$$

$$s_1 = \sigma_r + P = -8\tilde{p}, \quad s_2 = \sigma_\theta + P = 4\tilde{p}.$$

Подставим в условие пластичности

$$(s_1^2 + 2s_2^2) = \frac{2}{3} Y^2, \quad (64 + 2 \cdot 16) \tilde{p}^2 = \frac{2}{3} Y^2,$$

окончательно получим

$$\tilde{p} = \frac{1}{12} Y, \quad p_0 = \frac{7}{12} Y$$

Для заданных механических параметров материала ($Y=2400$ кгс/см²) будем иметь

$$p_0 = 7\tilde{p} = 1400 \text{ кгс/см}^2.$$

При превышении внутренней нагрузкой значения 1400 кгс/см² на внутренней поверхности сферы образуются пластические деформации.

4.4. Исследовать влияние формы граничного импульса напряжения на численное решение задачи, полагая деформирование упругим

Положим внутренний и внешний радиусы сферической оболочки $a=1$ см, $b=2$ см. Механические параметры материала соответствуют приведенным ранее в Задании 1. Количество ячеек разностной сетки положим равным 40.

Функцию $f(t)$ в граничном условии определим следующим образом

$$f(t) = \begin{cases} t/t_0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases}, \quad t_0 = k \frac{2\pi a}{c_d}, \quad k = 1, 2, 4.$$

Величина t_0 связана с периодом собственных колебаний оболочки радиуса a . Таким образом, функция $f(t)$ обеспечивает линейное нарастание усилия на границе от нуля до заданного значения $p_0=1400$ кгс/см².

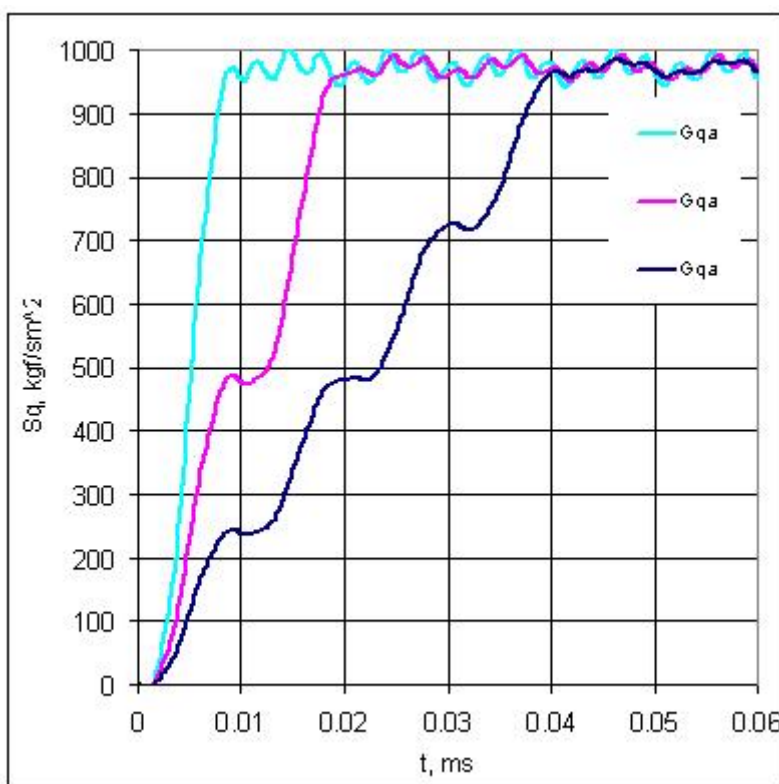


Рис. 12. Временные зависимости окружного напряжения на внутренней поверхности оболочки при $k = 1, 2, 4$

На рис. 12 представлены временные зависимости окружного напряжения на внутренней поверхности оболочки для различных функций, аппроксимирующих граничное условие. Видно, что с увеличением времени нарастания импульса, которое определяется ростом значения k от 1 до 8, происходит уменьшение амплитуды колебаний окружного напряжения около некоторого постоянного значения, приближающегося к решению статической задачи.

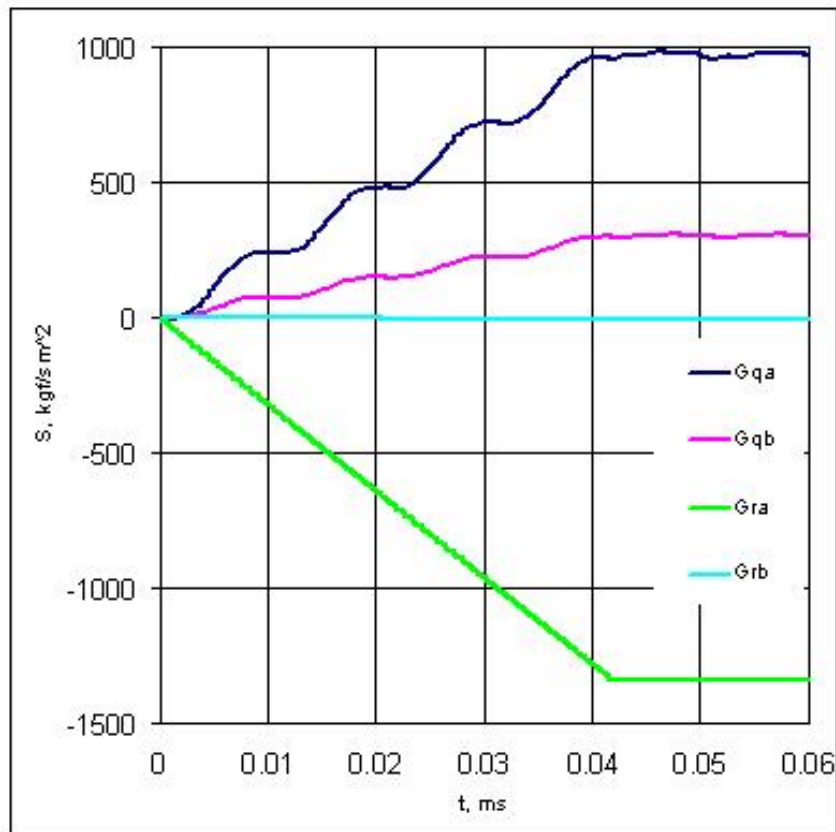


Рис. 13. Временные зависимости окружного и радиального напряжений на внутренней и внешней поверхности оболочки ($k = 4$).

На рис. 13 представлены зависимости от времени окружных и радиальных напряжений на внутренней и внешней поверхностях оболочки. Видно, что окружное напряжение больше на внутренней поверхности, чем на внешней.

4.5. Исследовать сходимость численного решения упругой задачи при измельчении разностной сетки

На рис. 14 представлены временные зависимости окружного напряжения на внутренней поверхности оболочки при количестве ячеек разностной сетки $N=10, 20, 40, 80$. Близость результатов при уменьшении размеров ячеек разностной сетки свидетельствует о сходимости численных расчетов.

Отличие результатов, например, при $N=40$ и 80 определяет погрешность численных расчетов при $N=80$ как величину 2-3 %.

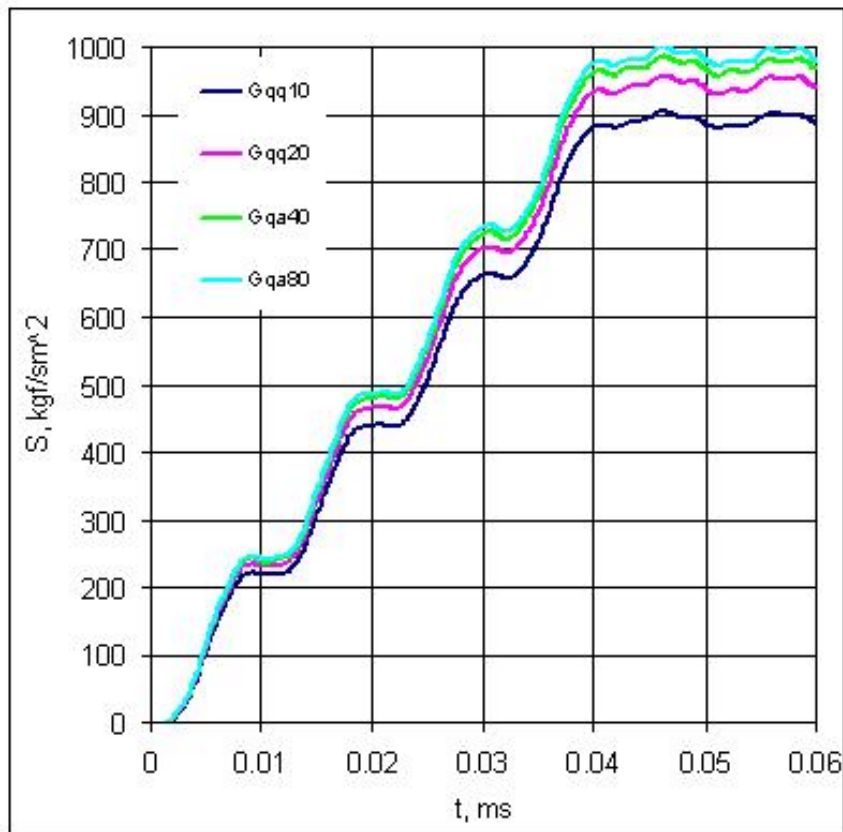


Рис. 14. Временные зависимости окружного напряжения на внутренней поверхности оболочки при $N=10, 20, 40, 80$.

4.6. Сравнить численное решение упругой задачи с аналитическим распределением напряжений вдоль пространственной координаты в размерном и безразмерном виде

На рис. 15, 16 в размерном и безразмерном виде представлены распределения радиального и окружного напряжений, а также давления вдоль толщины сферической оболочки, полученные аналитически и численно.

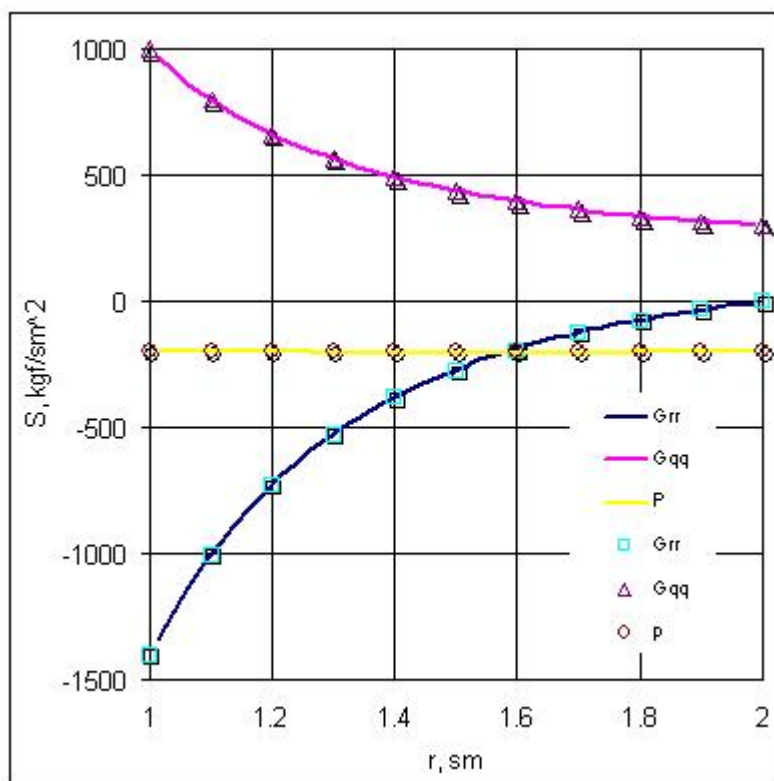


Рис. 15. Распределение радиального, окружного напряжений и давления вдоль толщины оболочки: аналитическое и численное решение

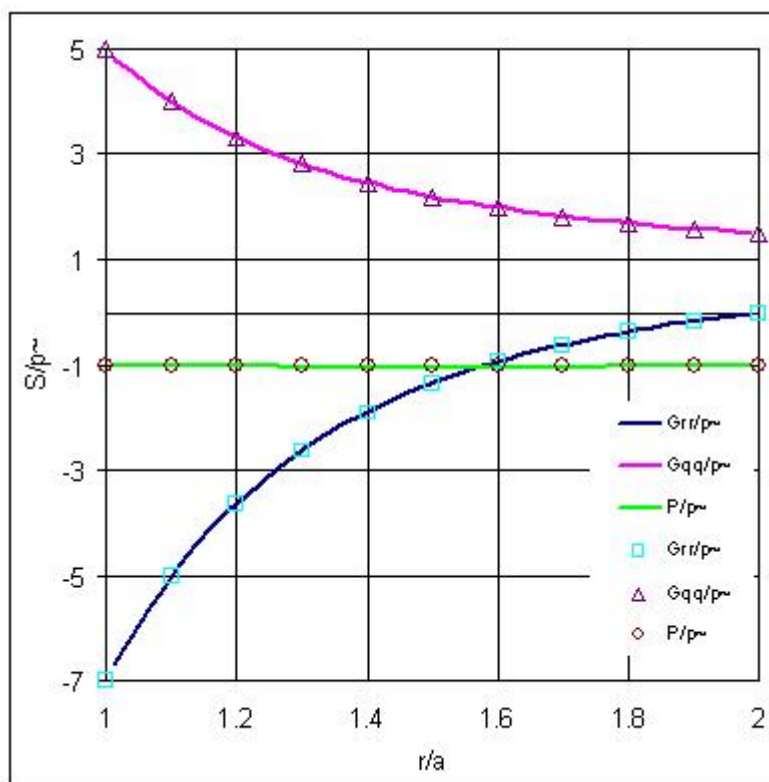


Рис. 16. Распределение радиального, окружного напряжений и давления вдоль толщины оболочки: аналитическое и численное решение в безразмерном виде

4.7. Получить численные решения задачи в упругопластической постановке при различных значениях напряжения на внутренней поверхности сферы

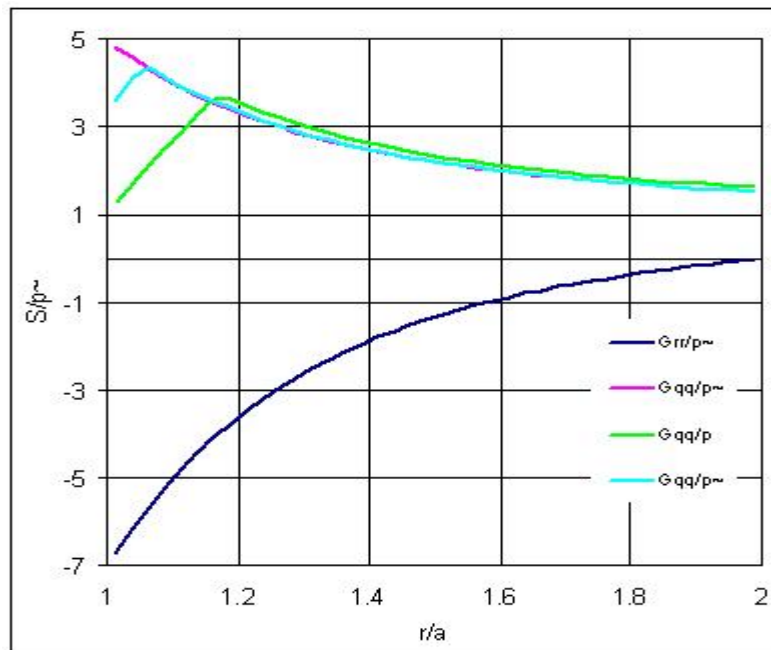


Рис. 17. Безразмерное распределение радиальной и окружной компонент тензора напряжений вдоль толщины оболочки: численное решение при $P_0=1400, 1600$ и 2000 кгс/см²

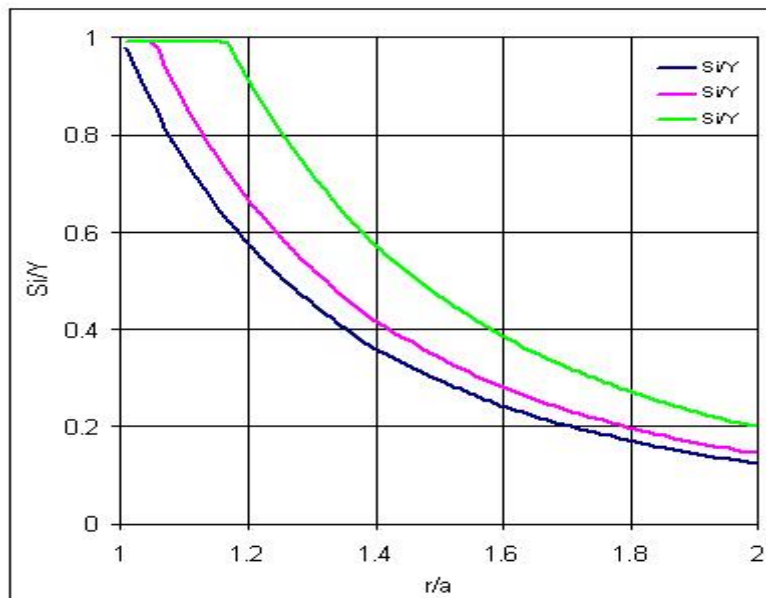


Рис. 18. Распределение интенсивности напряжений, отнесенной к пределу текучести материала, вдоль толщины оболочки: численное решение при $P_0=1400, 1600$ и 2000 кгс/см²

На рис. 17 приведено решение задачи - безразмерные распределения радиальной и окружной компонент тензора напряжений вдоль толщины сферической оболочки при предельном значении нагрузки $p_0=1400$ и $p_0=1600, 2000$ кгс/см², превышающих предельное значение.

На рис. 18 приведено распределение безразмерной величины $\frac{S}{Y} = \sqrt{\frac{3}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)}$ вдоль толщины оболочки при значениях нагрузки $p_0=1400, 1600$ и 2000 кгс/см². В соответствии с условием пластичности Мизеса, эта величина не может превышать 1, что и наблюдается на рис. 18.

4.8. Записать математическую постановку начально-краевой задачи о действии постоянной скорости на границе сферической расчетной области

Система дифференциальных уравнений в частных производных в переменных Лагранжа, описывающая упругопластическое деформирование в случае сферической симметрии записывается следующим образом:

$$\frac{\rho_0 \dot{U}}{V} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} \frac{\dot{V}}{V}, \quad \frac{\dot{V}}{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 U)}{\partial r}, \quad r \in [a, b], \quad t \in [0, T],$$

$$\sigma_r = -(P + q) + s_1, \quad \sigma_\theta = -(P + q) + s_2$$

$$P = K \left(\frac{1}{V} - 1 \right), \quad q = C_L \frac{\rho_0 c_d}{V} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \Delta r,$$

$$\dot{s}_i = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_i - \frac{1}{3} \dot{V}/V \right), \quad i = 1, 2, 3$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \partial U / \partial r, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{U}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_3 = \dot{\varepsilon}_2 = \frac{U}{r},$$

$$\left(s_1^2 + 2s_2^2 \right) - \frac{2}{3} Y^2 \leq 0$$

Краевые условия при $r = a$ и $r = b$:

$$U(a, t) = V_0, \quad \sigma_r(b, t) = 0$$

Начальные условия:

$$\sigma_r(r, 0) = \sigma_\theta(r, 0) = P(r, 0) = q(r, 0) = 0, \quad U(r, 0) = 0, \quad V(r, 0) = 1, \\ \varepsilon_i(r, 0) = 0, \quad s_i(r, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

4.9. Получить решение задачи: распределение скорости и напряжения вдоль координаты в три момента времени в размерном виде

Положим внутренний и внешний радиусы сферической оболочки $a=0$ см, $b=300$ см. Механические параметры материала соответствуют приведенным ранее в Задании 1. Количество ячеек разностной сетки рассмотрим равным 300, 150 и 75.

На рис. 19 представлены распределения радиального напряжения вдоль пространственной координаты при количестве ячеек разностной сетки $N=300, 150, 75$. Близость результатов при уменьшении размеров ячеек разностной сетки свидетельствует о сходимости численных расчетов.

Отличие результатов (величина напряжения на границе полости), например, при $N=150$ и 300 определяет погрешность численных расчетов при $N=300$ как величину 5-6 %.

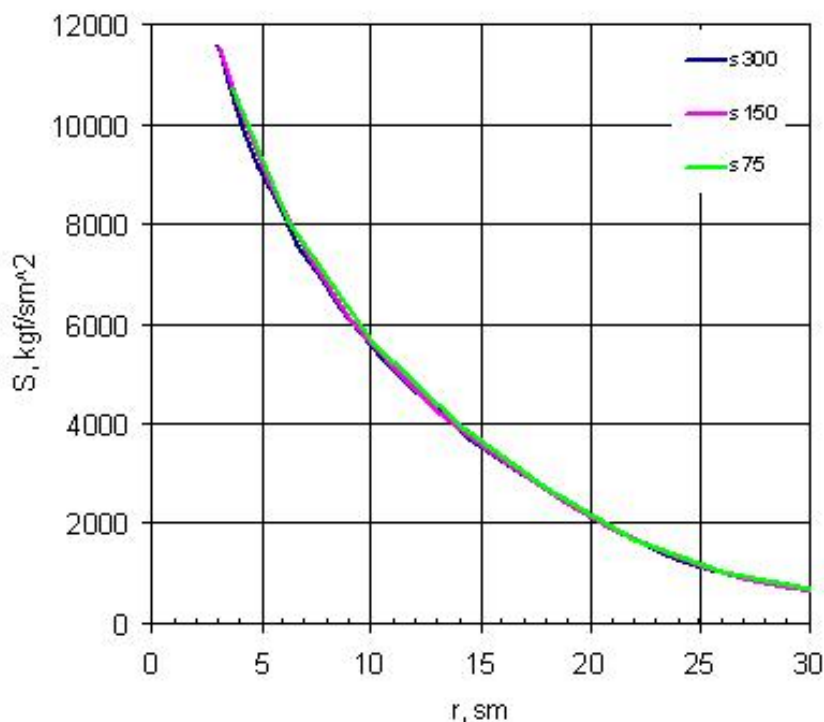


Рис. 19. Распределения радиального напряжения вдоль пространственной координаты при количестве ячеек разностной сетки $N=300, 150, 75$

На рис. 20 приведены полученные численно распределения радиального напряжения (а) и скорости (б) вдоль пространственной координаты в моменты времени 0.3, 0.4 и 0.5 мс (изображен фрагмент расчетной области).

На рис. 21 приведены распределения радиального напряжения (а) и скорости (б) вдоль пространственной координаты в момент времени 0.5 мс в сравнении с размерным точным решением из Лабораторной работы 1.

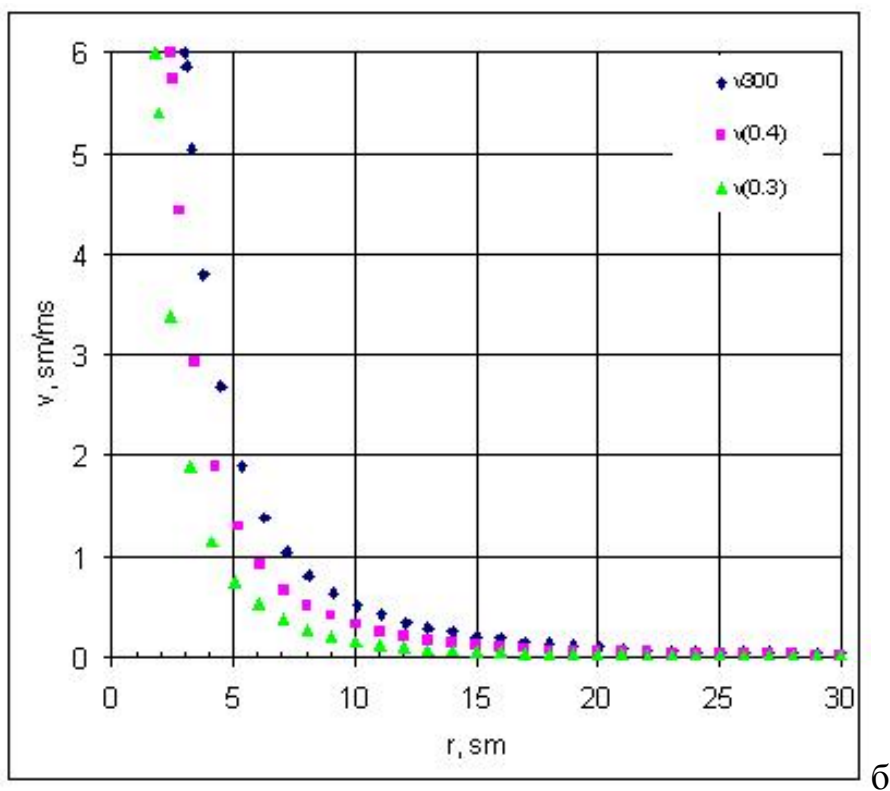
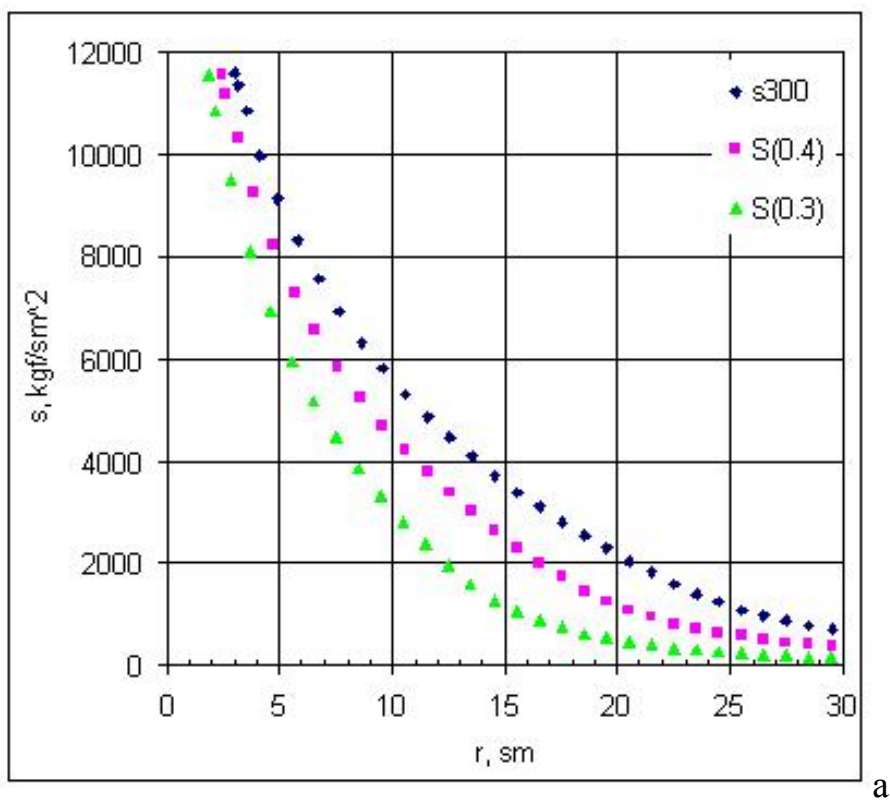


Рис. 20. Распределения радиального напряжения (а) и скорости (б) вдоль пространственной координаты в моменты времени 0.3, 0.4 и 0.5 мс.

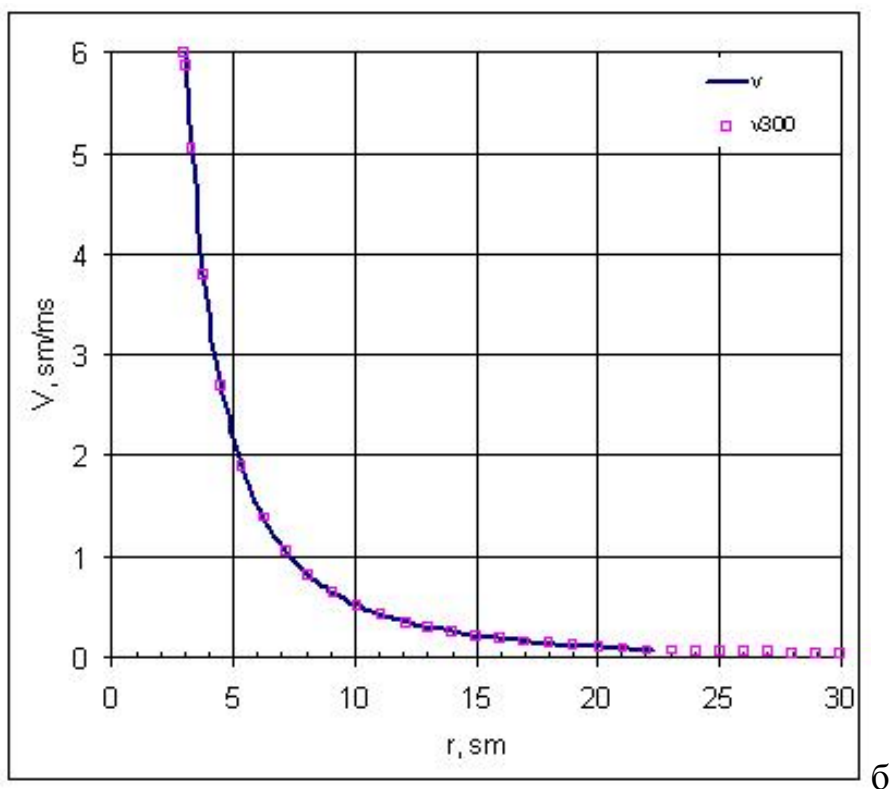
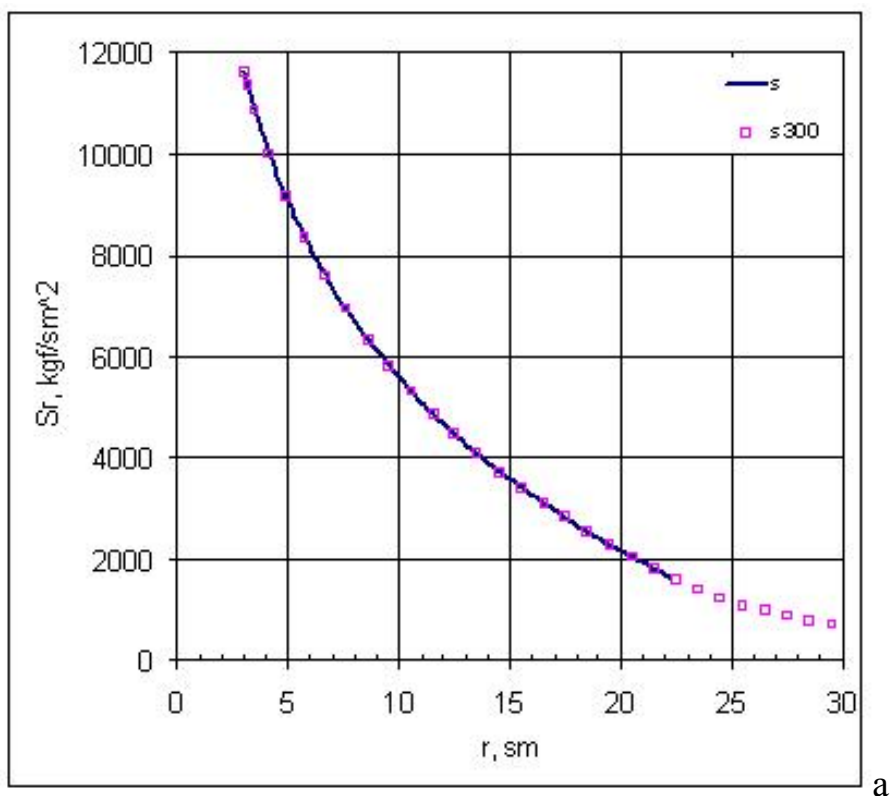


Рис. 21. Распределения радиального напряжения (а) и скорости (б) вдоль пространственной координаты в момент времени 0.5 мс в сравнении с размерным точным решением

4.10. Получить решение задачи: распределение скорости и напряжения вдоль координаты в три момента времени в безразмерном виде, сравнить решение с точным из лабораторной работы 1

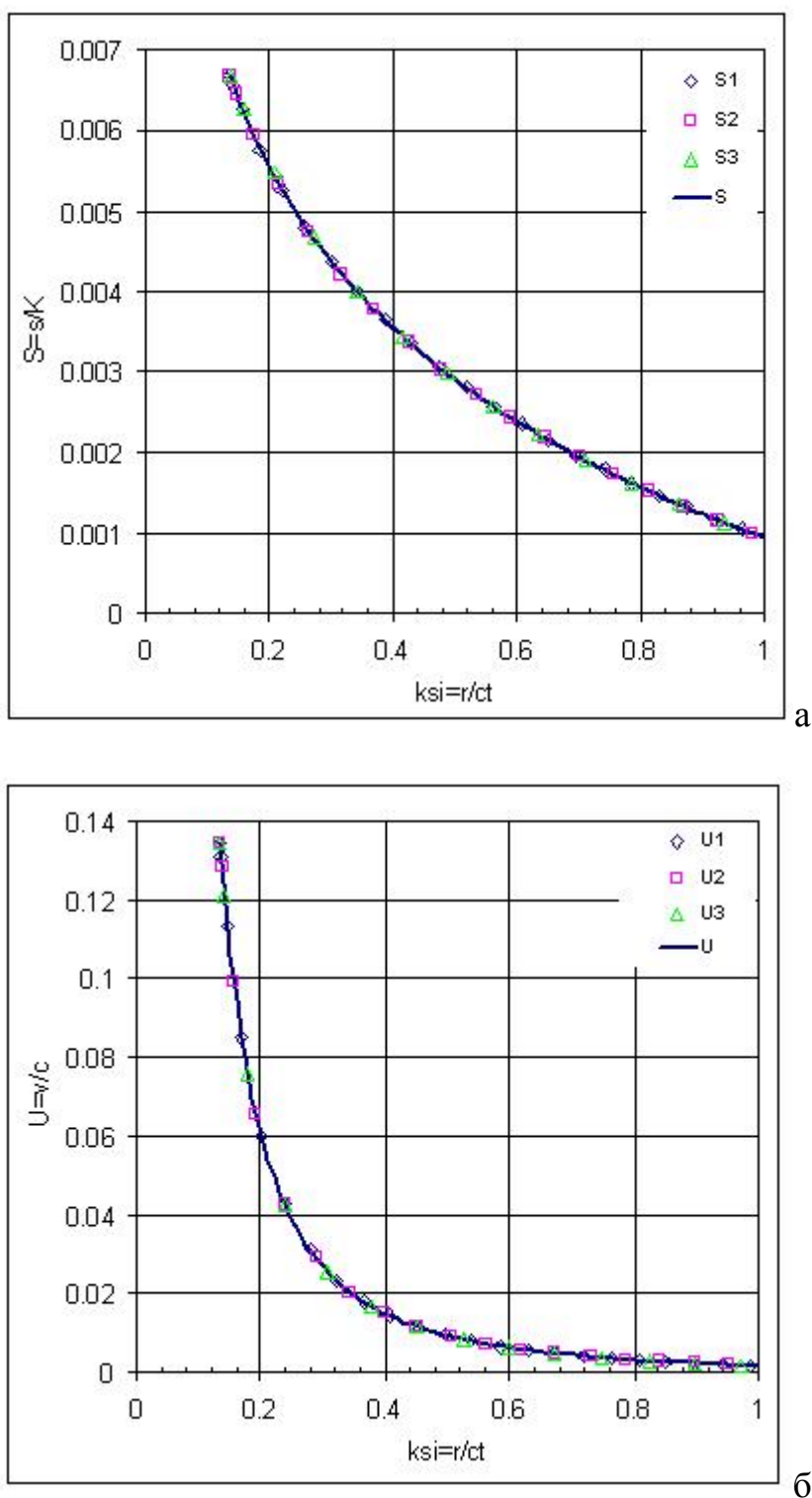
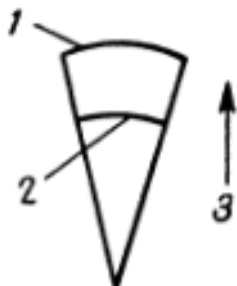


Рис. 22. Распределения безразмерных радиального напряжения (а) и скорости (б) вдоль пространственной координаты в моменты времени 0.3, 0.4 и 0.5 мс в сравнении с точным решением ($c=44.6$ см/мс)

Реализация конечно-разностных уравнений в программном коде

<p style="text-align: center;">Расчет упруго-пластических течений 248</p> <hr/> <p style="text-align: center;">Приложение I Конечно-разностные уравнения для задач § 3</p> <div style="text-align: center;">  <p>Р и с. 20. 1 — внешняя граница; 2 — внутренняя граница; 3 — направление возрастания J.</p> </div>	<pre>#include "stdafx.h" using namespace std; int main(int argc, char* argv[]) { double const Pi=4.0*atan(1.0); double const ro0=7.8, K=1.6e6, G=0.8e6, St=2400; double const a=0.0,b=100.0; int const d=3; int const n=100; double r[n+1],r0[n+1],rh[n+1]; double u[n+1], v[n+1], F[n+1], M[n+1], B[n+1]; double m[n], V[n],ro[n],p[n],q[n]; double C1=0.10; //Linejnaya vyazkost double C0=2.0;//Kvadratichnaya vyazkost double G1[n],G2[n],G3[n]; // napryazheniya double S1[n],S2[n],S3[n]; //deviatory double E1[n], E2[n], E3[n]; // deformacii double e1[n], e2[n], e3[n]; // deviatory deformacii double E1p[n],E2p[n],E3p[n]; //plasticheskie deformacii double E1v[n],E2v[n],E3v[n]; // skorosti deformacij double const Kz=0.5,Tend=.2; int i; double h,tau0,tau1,tau,c,time; h=(b-a)/n;</pre>
	<pre>for (i=0;i<n+1;i++) rh[i]=r0[i]=r[i]=a+i*h; // geometriya</pre>
	<pre>for (i=0;i<n+1;i++) u[i]=v[i]=F[i]=M[i]=B[i]=0.0; // obnulenie for (i=0;i<n;i++) { S1[i]=S2[i]=S3[i]= G1[i]=G2[i]=G3[i]=p[i]=0.0; E1[i]=E2[i]=E3[i]=e1[i]=e2[i]=e3[i]= E1p[i]=E2p[i]=E3p[i]=E1v[i]=E2v[i]=E3v[i]=0.0;}</pre>

$\varphi_j^n = \frac{1}{2} \left[\rho_{j+1/2}^0 \left(\frac{r_{j+1}^n - r_j^n}{V_{j+1/2}^n} \right) + \rho_{j+1/2}^0 \left(\frac{r_j^n - r_{j-1}^n}{V_{j-1/2}^n} \right) \right],$ <p>На внешней границе области J имеем</p> $\varphi_j^n = \frac{1}{2} \rho_{j-1/2}^0 \left(\frac{r_j^n - r_{j-1}^n}{V_{j-1/2}^n} \right),$ <p>На внутренней границе области J имеем</p> $\varphi_j^n = \frac{1}{2} \rho_{j+1/2}^0 \left(\frac{r_{j+1}^n - r_j^n}{V_{j+1/2}^n} \right),$	<pre>for (i=0;i<n;i++) { ro[i]=ro0; V[i]=1.0; // nachal'nye znacheniya } for (i=0;i<n;i++) { double t; t=(ro0/V[i])*fabs(r[i+1]-r[i]); M[i]+=t/2.0; M[i+1]+=t/2.0; }</pre>
<p>Среда делится на следующие ячейки по массе:</p> $m_{j+1/2} = \frac{\rho^0}{V^0} \left(\frac{(r_{j+1}^0)^d - (r_j^0)^d}{d} \right),$ <p>где $d=1, 2, 3$ для плоского, цилиндрического и сферического случаев соответственно, $j=1, 2, \dots, N$ [11].</p>	<pre>for (i=0;i<n;i++) m[i]=ro0*fabs(pow(r[i+1],d)-pow(r[i],d))/d; cout.setf(ios::scientific);</pre>
	<pre>c=sqrt((K+4.0/3.0*G)/ro0); tau1=Kz*h/c;tau0=0*tau1;</pre>
	<pre>for(time=0.0;time<Tend;time+=tau) {</pre>
<p>А. Уравнение движения</p> <p>а) $U_j^{n+1/2} = U_j^{n-1/2} + \frac{\Delta t^n}{\varphi_j^n} [(\Sigma_r)_{j+1/2}^n - (\Sigma_r)_{j-1/2}^n] + \Delta t^n (\beta_j^n)(d-1),$</p>	<pre>tau=(tau0+tau1)/2.0; for (i=0;i<n+1;i++) v[i]+=F[i]/M[i]*tau+B[i]*(d-1)*tau; double v0; v0=10.0; if (time<0.05) v0=1.0/0.05*time; //primer granichnogo usloviya v[0]=v0;</pre>
<p>б) $r_j^{n+1} = r_j^n + U_j^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2}. \quad r_{j+1}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (r_{j+1}^{n+1} + r_{j+1}^n)$</p>	<pre>for (i=0;i<n+1;i++)// Celaya I polucelaya geometriya { u[i]+=v[i]*tau/2.0; rh[i]=r0[i]+u[i]; u[i]+=v[i]*tau/2.0; r[i]=r0[i]+u[i]; } //1a</pre>

<p>Б. Уравнение неразрывности</p> <p>а) $V_{j+1/2}^{n+1} = V_{j+1/2}^n + \Delta t^{n+1/2} \left(\frac{\rho^0}{m} \right)_{j+1/2} [U_{j+1}^{n+1/2} (r_{j+1}^{n+1/2})^{d-1} - U_j^{n+1/2} (r_j^{n+1/2})^{d-1} + (\chi_{j+1/2}^{n+1/2})^*],$</p> <p>б) $\eta_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{V_{j+1/2}^{n+1}},$</p> <p>где</p> $r_{j+1}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (r_{j+1}^{n+1} + r_{j+1}^n) \text{ и т. д.,}$ $(\chi_{j+1/2}^{n+1/2})^* = \frac{(\Delta t^{n+1/2})^2}{12} [(U_{j+1}^{n+1/2})^3 - (U_j^{n+1/2})^3].$ <p>Здесь поправочный член, отмеченный звездочкой, вводится только для случая $d=3$.</p>	<pre>for (i=0;i<n;i++) { double Hi=0.0; if (d == 3) Hi=tau*tau*(pow(v[i+1],d)-pow(v[i],d))/12.0; V[i]+=tau*ro0/m[i]*(v[i+1]*pow(rh[i+1],d-1)- v[i]*pow(rh[i],d-1)+Hi); ro[i]=ro0/V[i]; } for (i=0;i<n;i++) //3 { switch(d)</pre>
<p>В. Напряжения</p> <p><i>Скорости деформаций:</i></p> $(\dot{\epsilon}_1)_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{U_{j+1}^{n+1/2} - U_j^{n+1/2}}{r_{j+1}^{n+1/2} - r_j^{n+1/2}}, \quad \dot{\epsilon}_2 = 0 \text{ для } d=1,$ $(\dot{\epsilon}_2)_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{U_{j+1}^{n+1/2} + U_j^{n+1/2}}{r_{j+1}^{n+1/2} + r_j^{n+1/2}}.$ $r_{j+1}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (r_{j+1}^{n+1} + r_{j+1}^n)$	<pre>{case (1): E1v[i]=(v[i+1]-v[i])/(rh[i+1]-rh[i]); //Err E2v[i]=0.0; E3v[i]=0.0; break; case (2): E1v[i]=(v[i+1]-v[i])/(rh[i+1]-rh[i]); //Err E2v[i]=(v[i+1]+v[i])/(rh[i+1]+rh[i]);//Eqq E3v[i]=0.0; //Ezz break; case (3): E1v[i]=(v[i+1]-v[i])/(rh[i+1]-rh[i]); //Err E2v[i]=(v[i+1]+v[i])/(rh[i+1]+rh[i]);//Eqq E3v[i]=(v[i+1]+v[i])/(rh[i+1]+rh[i]);//Eff break; }}</pre>
	<pre>for (i=0;i<n;i++) //4 { E1[i]+=E1v[i]*tau; E2[i]+=E2v[i]*tau; E3[i]+=E3v[i]*tau;}</pre>

<p>В. Напряжения</p> <p><i>Девiator напряжений:</i></p> $(s_1)_{j+1/2}^{n+1} = (s_1)_{j+1/2}^n + 2\mu \left[(\dot{\epsilon}_1)_{j+1/2}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} - \frac{1}{3} \left(\frac{V^{n+1} - V^n}{V^{n+1/2}} \right)_{j+1/2} \right],$ $(s_2)_{j+1/2}^{n+1} = (s_2)_{j+1/2}^n + 2\mu \left[(\dot{\epsilon}_2)_{j+1/2}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} - \frac{1}{3} \left(\frac{V^{n+1} - V^n}{V^{n+1/2}} \right)_{j+1/2} \right],$ $(s_3)_{j+1/2}^{n+1} = - \left[(s_1)_{j+1/2}^{n+1} + (s_2)_{j+1/2}^{n+1} \right],$ <p>Ж. Условие текучести Мизеса</p> $(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{n+1} - \frac{2}{3} (Y^0)^2 = K^{n+1}.$ <p>Если $K^{n+1} \leq 0$, то элемент материала находится в упругой области. Если $K^{n+1} > 0$, то элемент материала находится в состоянии за пределом упругости и нужно изменить напряжения по формулам</p> $(s_1^{n+1})_* = s_1^{n+1} \sqrt{2/3} \cdot Y^0 / \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2},$ $(s_2^{n+1})_* = s_2^{n+1} \sqrt{2/3} \cdot Y^0 / \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2},$ <p>где через ()_* обозначены исправленные напряжения.</p>	<pre>double dE0,de1,de2,de3,Si2; for (i=0;i<n;i++) { dE0=(E1v[i]+E2v[i]+E3v[i])*tau/3.0; de1=E1v[i]*tau-dE0; de2=E2v[i]*tau-dE0; de3=E3v[i]*tau-dE0; S1[i]+=2.0*G*de1; S2[i]+=2.0*G*de2; S3[i]+=2.0*G*de3; Si2=(S1[i]*S1[i]+S2[i]*S2[i]+S3[i]*S3[i])/2.0; if (Si2>St*St/3.0) { double dl; dl=(1.0-sqrt(St*St/3.0/Si2))/2.0/G; E1p[i]+=dl*S1[i]; E2p[i]+=dl*S2[i]; E3p[i]+=dl*S3[i]; S1[i]*=(St/sqrt(3.0*Si2)); S2[i]*=(St/sqrt(3.0*Si2)); S3[i]*=(St/sqrt(3.0*Si2)); } }</pre>
<p>Е. Гидростатическое давление</p> $P_{j+1/2}^{n+1} = A(\eta_{j+1/2}^{n+1}) + B(\eta_{j+1/2}^{n+1}) E_{j+1/2}^{n+1}.$	<pre>p[i]=K*(1.0-ro0/ro[i]); // davlenie //p[i]-= 3.0*K*dE0;</pre>

<p>Г. Искусственная вязкость</p> <p><i>Линейная</i></p> $q_{j+1/2}^{n+1/2} = C_L a \rho_0 \eta_{j+1/2}^{n+1/2} U_{j+1}^{n+1/2} - U_j^{n+1/2} .$ <p><i>Квадратичная</i></p> $q_{j+1/2}^{n+1/2} = C_0^2 \rho_0 \eta_{j+1/2}^{n+1/2} (U_{j+1/2}^{n+1/2} - U_j^{n+1/2})^2.$ <p>Эти величины вычисляются только тогда, когда $U_{j+1}^{n+1/2} < U_j^{n+1/2}$ и $(V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n) < 0$. Здесь $C_L = \text{const} \approx \frac{1}{2}$, $C_0 = \text{const} \approx 2$, a — местная скорость звука.</p>	<pre>q[i]=0.0; // vyazkost' double tmp; tmp=v[i+1]*pow(rh[i+1],d-1)-v[i]*pow(rh[i],d-1); if (v[i+1]<v[i] && tmp<0) q[i]= Cl*c*ro0/V[i]*fabs(v[i+1]-v[i]); //q[i]= C0*C0*ro0/V[i]*(v[i+1]-v[i])*(v[i+1]-v[i]);</pre>
$(\Sigma_r^n)_{j+1/2} = \{-(P^n + q^{n-1/2}) + s_1^n\}_{j+1/2},$ $(\Sigma_\theta^n)_{j+1/2} = \{-(P^n + q^{n-1/2}) + s_2^n\}_{j+1/2},$	<pre>G1[i]= S1[i]-p[i]-q[i]; G2[i]= S2[i]-p[i]-q[i]; G3[i]= S3[i]-p[i]-q[i]; }</pre>
<p>А. Уравнение движения</p> <p>а) $U_j^{n+1/2} = U_j^{n-1/2} + \frac{\Delta t^n}{\varphi_j^n} [(\Sigma_r)_{j+1/2}^n - (\Sigma_r)_{j-1/2}^n] + \Delta t^n (\beta_j^n) (d - 1),$</p> $[(\Sigma_r)_{j+1/2}^n - (\Sigma_r)_{j-1/2}^n]$	<pre>for (i=0;i<n+1;i++) F[i]=M[i]=B[i]=0.0; for (i=0;i<n;i++) { F[i]+=G1[i]; F[i+1]-=G1[i]; } double S0=0.0; F[0]+=S0; //primer granichnogo usloviya</pre>
$\varphi_j^n = \frac{1}{2} \left[\theta_{j+1/2}^0 \left(\frac{r_{j+1}^n - r_j^n}{V_{j+1/2}^n} \right) + \theta_{j+1/2}^0 \left(\frac{r_j^n - r_{j-1}^n}{V_{j-1/2}^n} \right) \right],$ $\varphi_j^n = \frac{1}{2} \theta_{j-1/2}^0 \left(\frac{r_j^n - r_{j-1}^n}{V_{j-1/2}^n} \right), \quad \varphi_j^n = \frac{1}{2} \theta_{j+1/2}^0 \left(\frac{r_{j+1}^n - r_j^n}{V_{j+1/2}^n} \right),$	<pre>for (i=0;i<n;i++) { double t; t=(ro0/V[i])*fabs(r[i+1]-r[i]); M[i]+=t/2.0; M[i+1]+=t/2.0; }</pre>

$\beta_j^n = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{(\Sigma_r)_{j+1/2}^n - (\Sigma_\theta)_{j+1/2}^n}{\frac{1}{2}(r_{j+1}^n + r_j^n)} \right] \left(\frac{V^n}{\rho^0} \right)_{j+1/2} + \right. \\ \left. + \left[\frac{(\Sigma_r)_{j-1/2}^n - (\Sigma_\theta)_{j-1/2}^n}{\frac{1}{2}(r_j^n + r_{j-1}^n)} \right] \left(\frac{V^n}{\rho^0} \right)_{j-1/2} \right\}.$ <p>На внешней границе области J имеем</p> $\beta_j^n = \left[\frac{(\Sigma_r)_{j-1/2}^n - (\Sigma_\theta)_{j-1/2}^n}{\frac{1}{2}(r_j^n + r_{j-1}^n)} \right] \left(\frac{V^n}{\rho^0} \right)_{j-1/2}.$ <p>На внутренней границе области J имеем</p> $\beta_j^n = \left[\frac{(\Sigma_r)_{j+1/2}^n - (\Sigma_\theta)_{j+1/2}^n}{\frac{1}{2}(r_j^n + r_{j+1}^n)} \right] \left(\frac{V^n}{\rho^0} \right)_{j+1/2}.$	<pre>B[0]=2.0*(G1[0]-G2[0])/(r[1]+r[0])/ro[0]; for (i=1;i<n;i++) { double t1,t2; t1=2.0*(G1[i-1]-G2[i-1])/(r[i]+r[i-1])/ro[i-1]; t2=2.0*(G1[i]-G2[i])/(r[i+1]+r[i])/ro[i]; B[i]=(t1+t2)/2.0; } B[n]=2.0*(G1[n-1]-G2[n-1])/(r[n]+r[n-1])/ro[n-1];</pre> <p>tau0=tau1;</p>
	<pre>c=sqrt((K+4.0/3.0*G)/ro[0]); tau1=Kz*fabs(r[1]-r[0])/c; for (i=1;i<n;i++) { double t; c=sqrt((K+4.0/3.0*G)/ro[i]); t=Kz*fabs(r[i+1]-r[i])/c; if (tau1>t)tau1=t; }</pre>
	<pre>cout<<endl; for (i=0;i<n;i++) { cout<<setw(15)<<v[i]; cout<<setw(15)<<G1[i]; cout<<endl;} cout<<endl; return 0;}</pre>

Приложение 2

Параметры, характеризующие сопротивление упругому и пластическому деформированию материалов [4, 5]

		E	G	ν	ρ	$\sigma_{0.2}$ (σ_B)
	Материал	Модуль Юнга, кгс/мм ²	Модуль сдвига, кгс/мм ²	Коэффициент Пуассона	Плотность, г/см ³	Предел текучести (прочности), кгс/мм ²
1.	Алюминий	7100	2650	0.34	2.698	2 (7.3)
2.	Бериллий	30000	14500	0.034	1.840	23 (32)
3.	Ванадий	12600	4700	0.36	6.100	9.1 (19.7)
4.	Висмут	3400	1200	0.33	9.840	(2.5)
5.	Вольфрам	40000	15500	0.29	19.24	76 (100)
6.	Гафний	14000	3100	0.35	13.10	38.4 (54)
7.	Железо	20500	7800	0.314	7.860	17 (29)
8.	Золото	7700	2700	0.42	19.299	13 (22)
9.	Индий	1050	350	0.46	7.310	0.3 (1.3)
10.	Иридий	51700	21000	0.26	22.420	8.8 (49)
11.	Кадмий	5300	1940	0.30	8.648	1 (7.5)
12.	Кобальт	20000	7000	0.428	8.80	31.4 (87.2)
13.	Магний	4250	1630	0.3	1.740	9.8 (17.6)
14.	Медь	13200	4200	0.35	8.940	6 (22.5)
15.	Молибден	32200	11900	0.335	10.218	27.5 (38.2)
16.	Никель	20000	7500	0.333	8.700	8 (40)
17.	Ниобий	11000	3700	0.486	8.400	24.8 (33.3)

		E	G	ν	ρ	$\sigma_{0.2} (\sigma_B)$
18.	Олово	5500	1700	0.33	7.290	0.6 (1.44)
19.	Осмий	56570	22200	0.25	22.500	100
20.	Палладий	11500	4500	0.39	12.160	5.6 (18.1)
21.	Платина	17100	6000	0.38	21.50	6 (13.7)
22.	Родий	38000	15000	0.267	12.440	7 (41.2)
23.	Рутений	41400	16300	0.3	12.060	49
24.	Свинец	1600	600	0.45	11.340	1.1 (1.4)
25.	Серебро	7440	2710	0.37	10.490	3.9 (15.7)
26.	Тантал	18600	7000	0.329	16.600	18 (41.3)
27.	Титан	10800	4300	0,36	4.500	33.3 (46.1)
28.	Хром	24000	9000	0.333	7.160	36.3 (41.2)
29.	Цинк	9900	3700	0.338	7.130	8.3 (13.6)
30.	Цирконий	9760	3630	0.344	6.500	7.8 (21.6)

Сплавы

	Материал	E, кгс/мм ²	G, кгс/мм ²	ν	ρ , г/см ³	$\sigma_{0.2} (\sigma_B)$, кгс/мм ²
31.	Бронза	10600	4400	0.31	8.800	20 (38)
32.	Д16	7200	2750	0.309	2.600	36 (46)
33.	Инвар	14000	5600	0.25	8.110	78
34.	Константан	16600	6200	0.33	8.880	43
35.	Латунь	10200	3700	0.378	8.500	15 (38)
36.	Манганин	12600	4700	0.33	8.500	14 (50)
37.	Нейзильбер	14000	4000	0.37	8.500	(42.5)
38.	Чугун	7500	3000	0.25	6.800	7 (10)

Литература

1. Уилкинс М.Л. Расчет упруго - пластических течений / В сб. Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Наука, 1967. С. 212-265.
2. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Kachanov1969ru.djvu>
3. Котов В.Л., Линник Е.Ю., Тарасова А.А. Решение одномерной задачи о расширении сферической полости: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 46 с. – Фонд образовательных электронных ресурсов. Рег. № 809.14.06.
http://www.unn.ru/books/met_files/Kotov.pdf
4. Физические величины: Справочник/ А. П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А. М. Братковский и др.; Под. ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – М.; Энергоатомиздат, 1991. - 1232 с.
5. Механические и технологические свойства металлов: Справ, изд. Бобылев А.В. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Металлургия, 1987. 208 с.

Василий Леонидович **Котов**

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ОДНОМЕРНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ (ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА)

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л.
Заказ № . Тираж 50 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01