

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

А.Б. Корчагин

**КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
радиофизического факультета для студентов ННГУ,
обучающихся по направлению подготовки 010800 "Радиофизика"
и по специальностям 010801 "Радиофизика и электроника"
и 010802 "Фундаментальная радиофизика и физическая электроника"

Нижний Новгород
2010

УДК 513.373
ББК В22.161.1
К 703

Корчагин А.Б. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. 70 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **А.В. Калинин**

Настоящее методическое пособие — это конспект лекций, которые были прочитаны студентам радиофизического факультета Нижегородского государственного университета. В отличие от классических методов преподавания применяется теоретико-множественный подход, воспитывающий у студентов физический и геометрический стиль мышления.

Пособие может быть рекомендовано студентам радиофизического факультета ННГУ для подготовки к экзамену по курсу "Основы векторного и тензорного анализа"

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
радиофизического факультета ННГУ
д.ф.-м.н., профессор **В.Н. Мануилов**

УДК 517.1
ББК В22.161.1

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2010

Оглавление

Глава 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

- §1. Множества - 1.
- §2. Отображения - 6.
- §3. Векторные и евклидовы пространства - 9.
- §4. Топологические свойства подмножеств - 11.

Глава 2. ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

- §5. Предел вектор-функции - 20.
- §6. Непрерывность вектор-функции - 22.
- §7. Производные и дифференциалы - 24.
- §8. Формула Тейлора - 29.
- §9. Интегрирование вектор-функций - 30.

Глава 3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

- §10. Пространственные кривые - 31.
- §11. Криволинейные интегралы 1-го рода - 33.
- §12. Криволинейные интегралы 2-го рода - 36.
- §13. Ориентации областей и их границ - 38.
- §14. Формула Грина - 41.
- §15. Независимость от пути интегрирования - 45.

Глава 4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

- §16. Поверхности - 48
- §17. Ориентируемые и неориентируемые поверхности - 51
- §18. Площадь поверхности - 59
- §19. Поверхностные интегралы 1-го рода - 61
- §20. Поверхностные интегралы 2-го рода - 62
- §21. Формула Гаусса-Остроградского - 63
- §22. Формула Стокса - 66

Глава 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

§1. Множества

Язык теории множеств является универсальным языком, на котором излагаются основы практически любой современной математической теории. Все современные теории множеств имеют аксиоматическое построение. Мы будем придерживаться классической, или, как иногда говорят, *наивной* теории множеств, в которой *множество* и его *элемент* рассматривается как неопределяемые аксиоматические понятия. О множестве известно, что оно состоит из элементов.

Если A — множество и a — его элемент, то это записывают так: $a \in A$, и читают: *a* есть элемент множества A . Каждый элемент $a \in A$ рассматривается как объект, который не имеет внутренней структуры (как, например, в геометрии точка не имеет внутренней структуры). Тот факт, что b не является элементом множества A , записывают так: $b \notin A$. Множество, не содержащее никаких элементов, называется *пустым* и обозначается символом \emptyset .

Существуют несколько способов задания множеств. Во-первых, множество можно задать с помощью словесного описания. Например,

1) \mathbb{R} — множество вещественных чисел.

2) \mathbb{R}^n — множество всех упорядоченных наборов (x_1, x_2, \dots, x_n) вещественных чисел x_1, x_2, \dots, x_n . Множество \mathbb{R}^n называется *n*-мерным *арифметическим* пространством, его элементы $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются *точками*, а числа x_1, x_2, \dots, x_n называются *координатами* точки x . Роль арифметического пространства заключается в том, что в нем можно задавать подмножества с помощью систем уравнений и неравенств.

Во-вторых, множество можно задать простым перечислением его элементов. Например,

1) конечное множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{a_i\}_{i=1}^n$,

2) множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$.

В-третьих, множество можно задать с помощью знака $\{\dots \mid \dots\}$, который называется *классификатором*. На месте левого многоточия пишут символ, обозначающий текущий элемент и объемлющее множество, которому он принадлежит (например, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$). На месте второго многоточия пишут выделяющее свойство, которому должен удовлетворять этот элемент (например, $x^2 + y^2 = 1$). Таким образом, стандартную окружность задают как множество $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ и читают: *S*¹ есть множество точек (x, y) на плоскости \mathbb{R}^2 , которые удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Если текущий элемент и объемлющее множество понятны

из контекста, то классификатор $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ сокращают до $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ и даже до $\{x^2 + y^2 = 1\}$.

Пусть A и B — два произвольных множества.

Определение 1.1. Если каждый элемент множества A является элементом множества B , то множество A называется *подмножеством* множества B . Запись: $A \subset B$.

Определение 1.2. Если справедливы оба включения $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B называются *равными*, $A = B$.

Определим операции над множествами, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Определение 1.3. Множество $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$ называется *объединением* множеств A и B (см. Рис. 1).

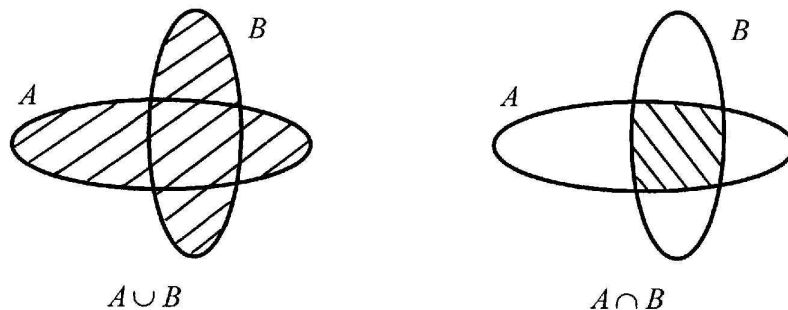


Рис. 1: Объединение и пересечение множеств.

Определение 1.4. Множество $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ называется *пересечением* множеств A и B (см. Рис. 1).

Операции объединения и пересечения могут быть применены к любым наборам множеств.

Определение 1.5. Множество $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ называется *разностью* множеств A и B . Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется *дополнением* множества B в множестве A (см. Рис. 2).

Определение 1.6. Множество $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in B\}$ называется *декартовым* или *прямым произведением* множеств A и B . Если $a \in A$ и $b \in B$, то множества $a \times B$ и $A \times b$ называются *слоями* над точками a и b соответственно.

Примеры. 1) Если $I = [0, 1]$ — единичный отрезок, то $I^2 = I \times I$ — единичный квадрат, $I^3 = I \times I \times I$ — единичный куб, а $I^n = I \times \dots \times I$ — единичный n -мерный куб.

2) $I \times S^1$ — цилиндр (см. Рис. 3.1).

3) $S^1 \times S^1$ — полый тор (см. Рис. 3.2).

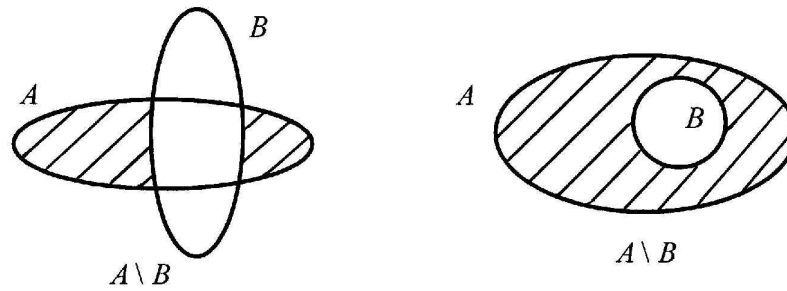


Рис. 2: Разность и дополнение множеств.

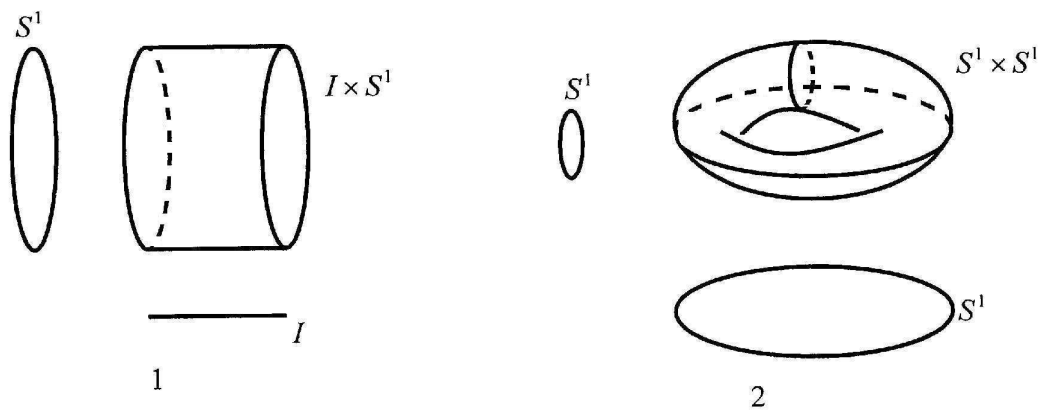


Рис. 3: Декартовы произведения.

Определение 1.7. Набор $\{A_k\}_{k \in K}$ называется *покрытием* множества A , если $A \subset \bigcup_{k \in K} A_k$. Покрытие $\{A_k\}_{k \in K}$ называется *конечным*, *счётным*, или *бесконечным*, если множество индексов K является соответственно конечным, счётным, или бесконечным.

Замечание 1.8. В этом и последующих учебных пособиях мы рассматриваем покрытия, для которых $A = \bigcup_{k \in K} A_k$, то есть, когда все элементы покрытия содержатся в множестве A .

§2. Отображения

Пусть X и Y — непустые множества.

Определение 2.1. Если задано правило f (закон, формула), по которому каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один элемент $y = f(x) \in Y$, то правило f называется *отображением* множества X в множество Y . Множество $f(X) = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}$ называется *образом* или (*множеством значений*) отображения f . Множество X называется *прообразом* (или *областью определения*) отображения f . Используются

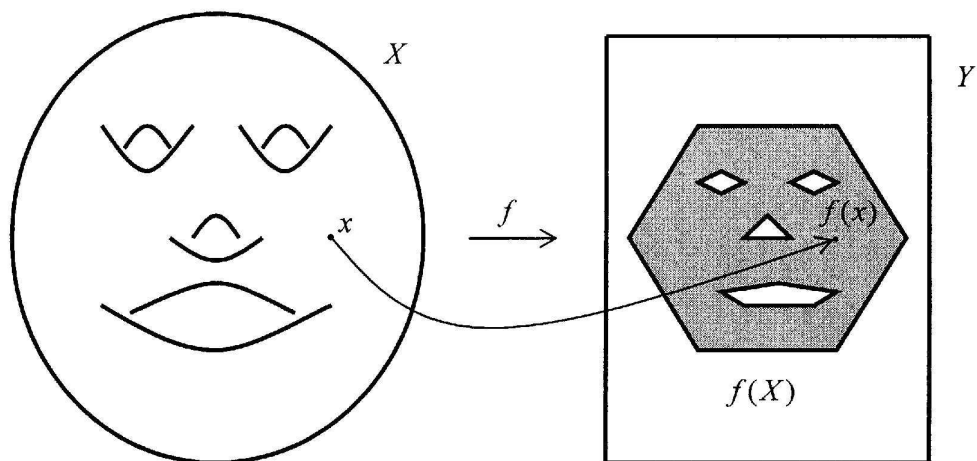


Рис. 4: Отображение $f : X \rightarrow Y$.

обозначения: $f : X \rightarrow Y$ для отображения и $x \mapsto f(x)$ для соответствия (см. Рис. 4).

Определение 2.2. Множество $\text{Gr}f = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ называется *графиком* отображения $f : X \rightarrow Y$.

Определение 2.3. Если $f : X \rightarrow Y$ — отображение и A — подмножество в X , то отображение $A \rightarrow Y$, заданное для всех $x \in A$ тем же соответствием $x \mapsto f(x)$, называется *ограничением* отображения $f : X \rightarrow Y$ на A и обозначается $f|_A : A \rightarrow Y$ или коротко $f : A \rightarrow Y$.

Определение 2.4. Если $f : X \rightarrow Y$ — отображение и B — подмножество в Y , то множество $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ называется *полным прообразом* множества B (см. Рис. 5).

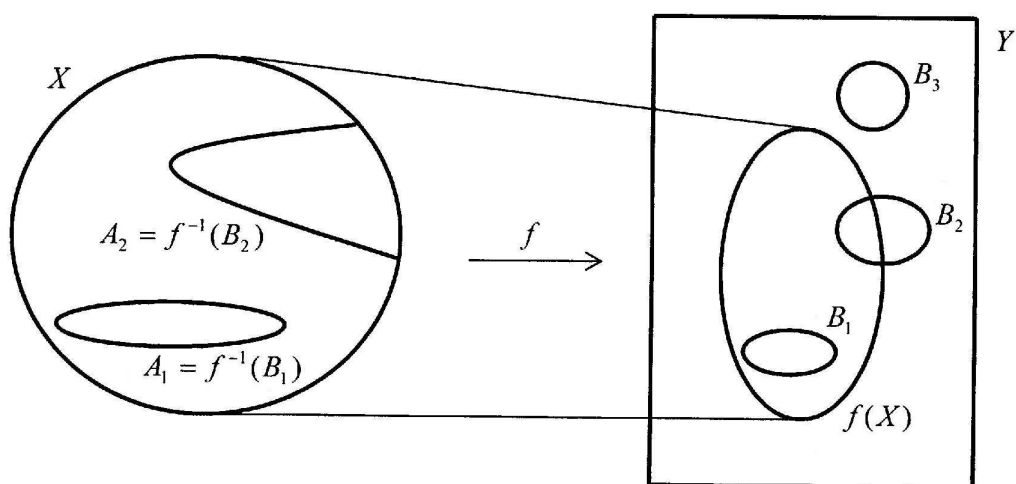


Рис. 5: Прообразы отображения f .

Полный прообраз множества $B \subset Y$ вычисляется по формуле $f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(X))$. Если $B \subset Y \setminus f(X)$, то $f^{-1}(B) = \emptyset$. Другими словами, непустой прообраз имеют только те точки множества $B \subset Y$, которые содержатся в $f(X)$. Ясно, что $f^{-1}(Y) = X$ для любого отображения $f : X \rightarrow Y$.

Определение 2.5. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *взаимно однозначным*, если для любого элемента $y \in f(X)$ его полный прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из одного элемента.

Определение 2.6. Если $f(X)$ — собственное подмножество множества Y , т. е. $f(X) \subset Y$ и $f(X) \neq Y$, то f называется отображением множества X в множество Y . Если $f(X) = Y$, то f называется отображением множества X на множество Y .

Определение 2.7. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *биективным*, если оно одновременно является взаимно однозначным и отображением на Y .

Замечание 2.8. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — отображение.

1) Если Y является числовым множеством (либо \mathbb{R} , либо \mathbb{C} , либо их подмножеством), то отображение f традиционно называется *функцией*.

2) Если X является множеством функций, а Y является числовым множеством, то отображение f традиционно называется *функционалом*. Например, если X — множество непрерывно дифференцируемых функций, заданных на отрезке $[a, b]$, а $Y = \mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, и $f \in X$, то длина графика функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, заданная по формуле

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

реализует функционал $L : X \rightarrow \mathbb{R}$.

3) Если оба X и Y являются множествами функций, то отображение f традиционно называется *оператором*. Например, оператор дифференцирования

$$\frac{d}{dx} : X \rightarrow Y,$$

заданный соответствием $f \mapsto f'$, где X — множество функций, имеющих непрерывную производную n -го порядка, а Y — множество функций, имеющих непрерывную производную $(n - 1)$ -го порядка.

§3. Векторные и евклидовы пространства

Арифметическое пространство \mathbb{R}^n есть множество всех упорядоченных наборов из n вещественных чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) , называемых точками этого пространства. Кроме точечной интерпретации пространства \mathbb{R}^n существует векторная интерпретация, в которой элементы арифметического

пространства рассматриваются как векторы с общим началом в начале координат $O = (0, 0, \dots, 0)$ и концом в точке (x_1, x_2, \dots, x_n) . Эти две интерпретации эквивалентны, потому что точка и соответствующий ей вектор представляют собой одни и тот же объект с координатами x_1, x_2, \dots, x_n (см. Рис. 6).

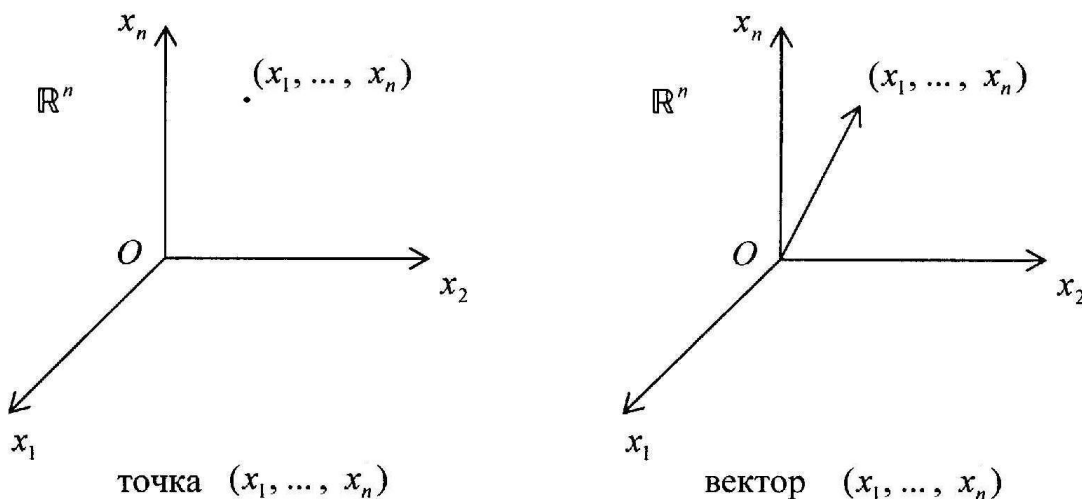


Рис. 6: Две геометрические интерпретации.

Определение 3.1. Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — два вектора (или две точки) пространства \mathbb{R}^n и α — вещественное число, то можно определить

1) операцию сложения \mathbf{x} и \mathbf{y} по формуле

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

2) операцию умножения вектора \mathbf{x} на число α по формуле

$$\alpha \cdot \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Определение 3.2. Если в арифметическом пространстве \mathbb{R}^n определены операции сложения векторов (точек) и умножения вектора (точки) на число, то оно называется *векторным пространством* (соответственно, *линейным пространством*).

Определение 3.3. Базис

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

называется *стандартным* базисом векторного пространства \mathbb{R}^n .

Лемма 3.4. Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, то $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$.

Доказательство. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$. \square

Определение 3.5. Скалярным произведением векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ называется число

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Определение 3.6. Векторное (линейное) пространство \mathbb{R}^n называется *евклидовым*, если в нем определено скалярное произведение.

Замечание 3.7. На основе скалярного произведения в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n определены следующие величины.

1) Длина вектора

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

2) Расстояние между точками-векторами

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

3) Угол α между векторами

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}.$$

4) Координаты вектора в стандартном базисе $x_i = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i)$.

Замечание 3.8. В евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 определены следующие величины.

1) Векторное произведение двух векторов

$$[\mathbf{x} \times \mathbf{y}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

2) Смешанное произведение трех векторов

$$(\mathbf{x} \cdot [\mathbf{y} \times \mathbf{z}]) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Определение 3.9. Диаметром множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется точная верхняя грань множества расстояний между любыми двумя точками множества A . Обозначение:

$$\text{Diam } A = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Множество A называется *ограниченным*, если $\text{diam } A < \infty$.

Замечание 3.10. 1) Можно заметить, что в пространстве \mathbb{R}^1 (то есть в множестве вещественных чисел) евклидова структура тривиальна, потому что угол между векторами на прямой \mathbb{R}^1 имеет только два значения 0 и π . Теория евклидовых пространств становится содержательной в размерностях $n \geq 2$. В настоящем пособии мы изучаем кривые, поверхности и объемные области в евклидовых пространствах \mathbb{R}^n при n равном 2 и 3. Дальнейший текст достаточно читать для $n = 2, 3$.

Определение 3.11. Множество

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$$

называется *стандартным n -мерным шаром*. В частности, D^0 есть точка, D^1 – отрезок $[-1, 1]$, D^2 – круг, D^3 – шар.

Множество

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$$

называется *стандартной n -мерной сферой*. В частности, S^0 состоит из двух точек $\{-1, 1\}$, S^1 есть окружность, а S^2 – сфера.

Слово "стандартный" означает, что они (при $n \geq 1$) имеют единичный радиус. При $n \leq -1$ по определению полагают $D^n = \emptyset$ и $S^n = \emptyset$.

§4. Топологические свойства подмножеств

Открытые подмножества в \mathbb{R}^n

Определение 4.1. Открытый n -мерный шар $O_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$ называется *открытой шаровой окрестностью* (или просто ε -окрестностью) точки x_0 .

Проще говоря, открытый шар — это шар без сферы, которая его ограничивает.

Замечание 4.2. Ясно, что если $x_1 \in O_\varepsilon(x_0)$, то при $\varepsilon_1 < \varepsilon - |x_1 - x_0|$ шар $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ содержится в шаре $O_\varepsilon(x_0)$, то есть $O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x_0)$ (см. Рис. 7).

Определение 4.3. Множество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если его можно представить в виде объединения n -мерных открытых шаровых окрестностей.

Замечание 4.4. Согласно предыдущему определению пустое множество \emptyset является открытым, потому что его можно представить в виде объединения пустого набора открытых шаровых окрестностей. Пространство \mathbb{R}^n тоже

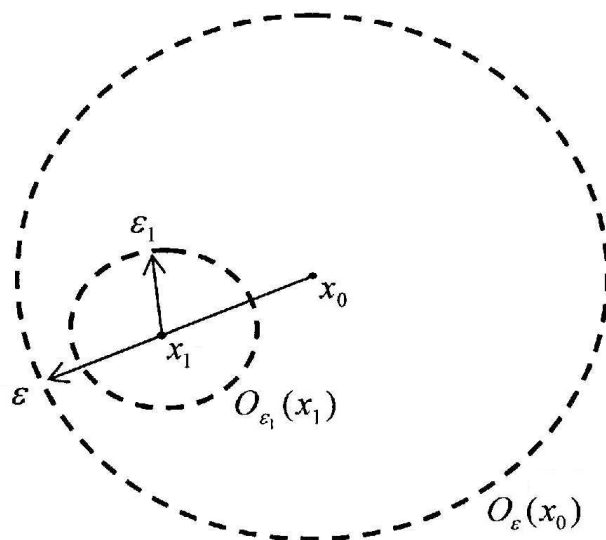


Рис. 7: К замечанию 4.2.

является открытым множеством, потому что его можно представить в виде объединения всех открытых шаровых окрестностей, которые оно содержит.

Критерий 4.5. *Множество открыто тогда и только тогда, когда любая его точка имеет открытую шаровую окрестность, целиком лежащую в этом множестве.*

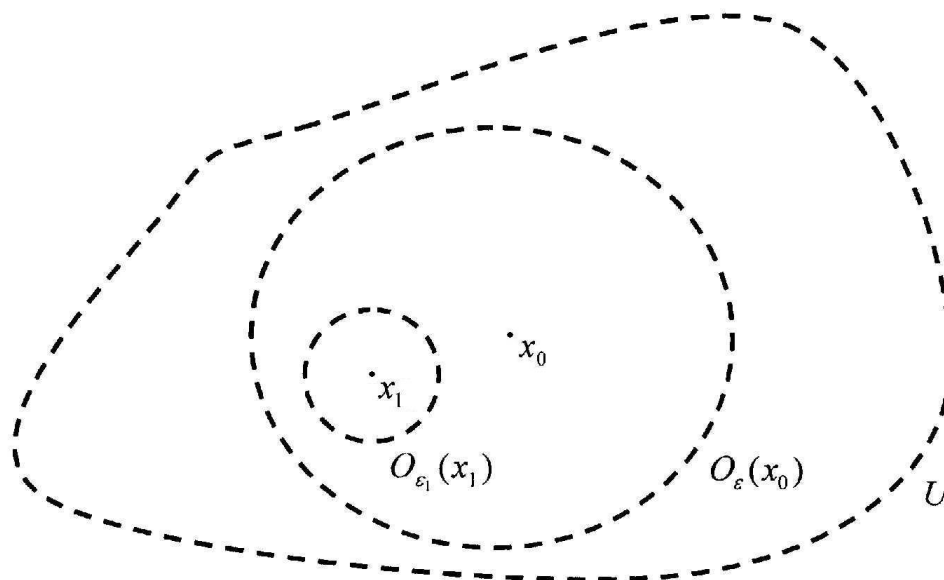


Рис. 8: К доказательству критерия 4.5.

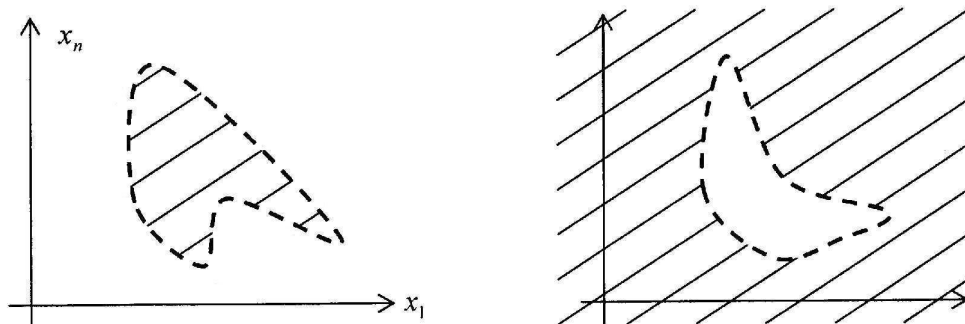
Доказательство. Пусть U — открытое множество и $x_1 \in U$ — его точка (см. Рис. 8). По опред. 4.3 множество U можно представить в виде объединения

n -мерных открытых шаровых окрестностей. Так как $x_1 \in U$, то точка x_1 содержится хотя бы в одной из окрестностей из этого объединения, скажем в $O_\varepsilon(x_0)$, то есть $x_1 \in O_\varepsilon(x_0) \subset U$. По замеч. 4.2 существует окрестность $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ точки x_1 целиком лежащая в $O_\varepsilon(x_0) \subset U$. Окрестность $O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset U$ является искомой.

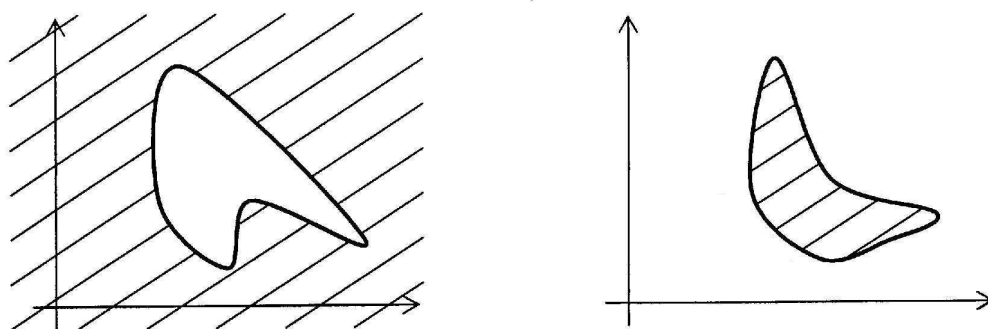
Если U — открытое множество и любая его точка $x \in U$ имеет открытую шаровую окрестность $O_\varepsilon(x)$, целиком лежащую в множестве U , то оно является объединением всех таких окрестностей

$$U = \bigcup_{x \in U} O_\varepsilon(x).$$

□



1. Открытые множества



2. Замкнутые множества

Рис. 9: Открытые и замкнутые множества.

Определение 4.6. Множество $F \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus F$ является открытым (см. Рис. 9).

Из 4.4 и 4.6 следует, что множества $\emptyset = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \emptyset$ являются замкнутыми.

Рассмотрим произвольное множество A .

Определение 4.7. Наибольшее открытое множество, содержащееся в множестве A , называется *внутренностью* множества A и обозначается A° . Каждая точка внутренней называется *внутренней* точкой множества A .

Ясно, что если множество открыто, то оно совпадает со своей внутренней, то есть $A = A^\circ$.

Определение 4.8. Наименьшее замкнутое множество, содержащее множество A , называется *замыканием* множества A и обозначается \bar{A} . Каждая точка замыкания называется точкой *прикосновения* множества A .

Ясно, что если множество замкнуто, то оно совпадает со своим замыканием, то есть $A = \bar{A}$.

Определение 4.9. Разность $\bar{A} \setminus A^\circ$ называется *границей* множества A и обозначается ∂A . Каждая точка границы называется *граничной* точкой множества A .

Примеры. 1) В дальнейшем мы будем задавать функции на "хороших" множествах. Такие множества задают с помощью (систем) равенств и неравенств, обе части которых являются непрерывными функциями одной или нескольких переменных. Например, открытый круг $\{x^2 + y^2 < 1\}$, замкнутый круг $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ и окружность $\{x^2 + y^2 = 1\}$ — "хорошие" множества.

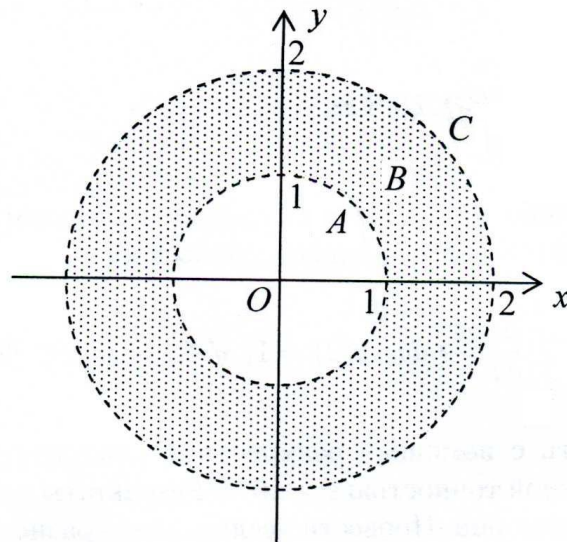


Рис. 10: Экзотическое множество.

2) Рассмотрим на плоскости \mathbb{R}^2 множества A , B и $C = A \cup B$, где $A = \{x^2 + y^2 < 1\}$ есть открытый единичный круг, а множество B состоит из точек с рациональными координатами, содержащимися в кольце $\{1 < x^2 + y^2 < 4\}$, то есть $B = \{1 < x^2 + y^2 < 4, \text{ где } x \text{ и } y \text{ — рациональные числа}\}$ (см. Рис. 10). Не трудно видеть, что внутренность C° есть множество A . Замыкание \bar{C} есть замкнутый круг $\{x^2 + y^2 \leq 4\}$. А граница $\partial C = \bar{C} \setminus C^\circ$ есть замкнутое кольцо $\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Говоря простым языком,

площадь границы множества C составляет $3/4$ его площади. Здесь свойство рациональности координат породило множество, с "толстенной" границей.

Открытые подмножества в произвольном подмножестве $A \subset \mathbb{R}^n$

Мы рассматриваем евклидово пространство \mathbb{R}^n как объемлющее пространство всех подмножеств, которые в нем содержатся. Мы определили в пространстве \mathbb{R}^n открытые и замкнутые множества, а также их границы. Так как каждое открытое множество в \mathbb{R}^n является объединением открытых шаровых окрестностей $O_\varepsilon(x_0)$, то открытые множества в \mathbb{R}^n (кроме пустого) представляют собой n -мерные подмножества \mathbb{R}^n . Важность открытых шаровых окрестностей и открытых множеств заключается в том, что они лежат в основе определений предела и непрерывности функции, тем самым лежат в фундаменте математического анализа.

Кроме n -мерных подмножеств в пространстве \mathbb{R}^n нас будут интересовать подмножества меньших размерностей. Примерами таких множеств являются кривые и поверхности в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 . Для того, чтобы построить математический анализ на каждом подмножестве $M \subset \mathbb{R}^n$, нам необходимо определить открытые и замкнутые подмножества на M .

Существует стандартный способ определения открытых окрестностей на подмножествах пространства \mathbb{R}^n .

Определение 4.1*. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество. Пусть $x_0 \in M$ — точка и $O_\varepsilon(x_0)$ — ее ε -окрестностью в \mathbb{R}^n . Тогда пересечение $M \cap O_\varepsilon(x_0)$ называется *открытой шаровой ε -окрестностью точки x_0 в M* или *ε -окрестностью* и обозначается $\Omega_\varepsilon(x_0) = M \cap O_\varepsilon(x_0)$ (см. Рис. 11).

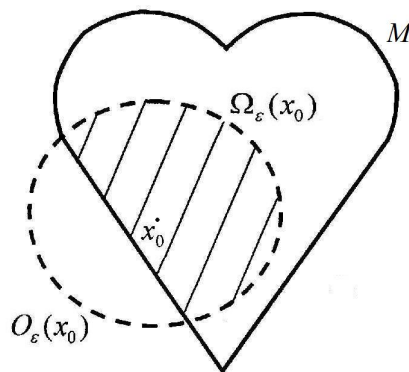


Рис. 11: Открытая ε -окрестность $\Omega_\varepsilon(x_0) = M \cap O_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 в M заштрихована.

Проще говоря, открытая шаровая окрестность $\Omega_\varepsilon(x_0)$ точки $x_0 \in M$ — это кусок шаровой окрестности $O_\varepsilon(x_0)$, который содержится в множестве в M . Из опред. 4.1 следует, что если множество M открыто в \mathbb{R}^n , то $M \cap O_\varepsilon(x_0)$

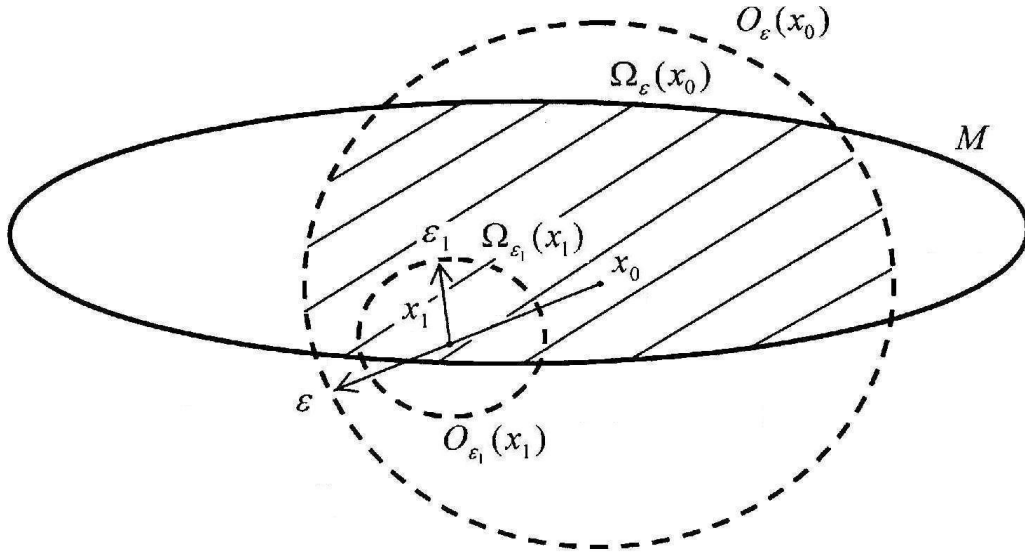


Рис. 12: К замечанию 4.2*.

является открытым в \mathbb{R}^n . Если множество M не является открытым в \mathbb{R}^n , то множество $M \cap O_\varepsilon(x_0)$ может не быть открытым в \mathbb{R}^n .

Фундаментальность опред. 4.1* состоит в том, что оно позволяет перенести математический анализ на произвольные подмножества в \mathbb{R}^n . Используя опред. 4.1*, определим в M соответствующие понятия из пунктов 4.2 – 4.9.

Замечание 4.2*. Если имеет место включение $O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x_0)$, то для любого множества M справедливо включение $M \cap O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset M \cap O_\varepsilon(x_0)$, поэтому $\Omega_{\varepsilon_1}(x_1) \subset \Omega_\varepsilon(x_0)$ (см. Рис. 12).

Определение 4.3*. Множество $U \subset M$ называется *открытым в M* , если его можно представить в виде объединения открытых в M окрестностей.

Замечание 4.4*. Согласно предыдущему определению пустое множество \emptyset является открытым в M , потому что его можно представить в виде объединения пустого набора открытых в M окрестностей. Множество M всегда является открытым в себе множеством, потому что его можно представить в виде пересечения с \mathbb{R}^n , то есть $M = M \cap \mathbb{R}^n$.

Критерий 4.5*. Множество $U \subset M$ открыто в M тогда и только тогда, когда любая точка $x_0 \in U$ имеет открытую в M окрестность $\Omega_\varepsilon(x_0)$, целиком лежащую в U .

Доказательство повторяет доказательство 4.5.

Определение 4.6*. Множество $F \subset M$ называется *замкнутым в M* , если его дополнение $M \setminus F$ является открытым в M множеством.

Из 4.4* и 4.6* следует, что множества $\emptyset = M \setminus M$ и $M = M \setminus \emptyset$ являются

замкнутыми в M .

Рассмотрим произвольное множество $A \subset M$.

Определение 4.7*. Наибольшее открытое в M множество, содержащееся в множестве A , называется *внутренностью* множества A в M и обозначается A° , а каждая точка внутренней называется *внутренней* точкой множества A .

Ясно, что если множество A открыто в M , то оно совпадает со своей внутренней в M , то есть $A = A^\circ$ в M .

Определение 4.8*. Наименьшее замкнутое в M множество, содержащее множество A , называется *замыканием* множества A в M и обозначается \bar{A} , а каждая точка замыкания называется точкой *прикосновения* множества A .

Ясно, что если множество A замкнуто в M , то оно совпадает со своим замыканием в M , то есть $A = \bar{A}$ в M .

Определение 4.9*. Множество $\bar{A} \setminus A^\circ$ называется *границей* множества A в M и обозначается ∂A , а каждая точка границы называется *граничной* точкой множества A .

Другие топологические свойства подмножеств в \mathbb{R}^n

Определение 4.10. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — множество и $x \in \mathbb{R}^n$ — точка. Точка x называется *предельной* точкой множества A , если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества A , отличную от x .

Пример. Рассмотрим множество $A \subset \mathbb{R}^2$ состоящее из открытого круга $O_1(0, 0)$ радиуса 1 и точки $(1, 1)$ (см. Рис. 13), то есть $A = O_1(0, 0) \cup (1, 1)$. Заметим, что A имеет внутренность $A^\circ = O_1(0, 0)$, замыкание $\bar{A} = D^2 \cup (1, 1)$ и границу $\partial A = S^1 \cup (1, 1)$. Легко проверить, что любая точка замкнутого круга $D^2 = \overline{O_1(0, 0)}$ является предельной точкой множества A , а точка прикосновения $(1, 1) \in A$ не является предельной точкой этого множества.

Обратим внимание, что предельная точка множества может ему не принадлежать. Рассмотрим

Определение 4.11. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество и $x \in A$ — его точка. Точка x называется *изолированной* точкой множества A , если существует окрестность точки x , которая не содержит точек множества A , отличных от x .

В предыдущем примере точка $(1, 1)$ является изолированной точкой множества A .

Определение 4.12. Множество называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой.

Линейная связность множества означает, что оно состоит из одного кус-

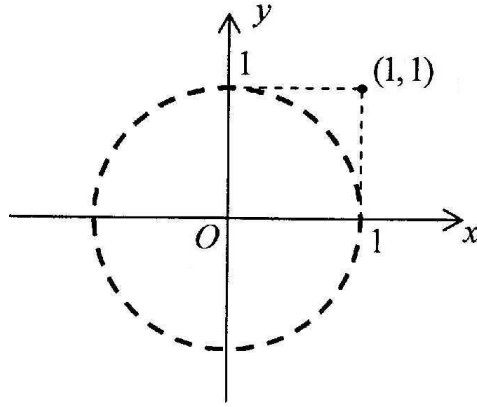


Рис. 13: Множество $A = O_1(0, 0) \cup (1, 1)$.

ка. Например, окружность S^1 , сфера S^2 , открытые и замкнутые шары, тор $S^1 \times S^1$, баранка $S^1 \times D^2$, цилиндр $S^1 \times I$ и шаровой слой являются связными множествами. Нульмерная сфера $S^0 = \{-1, 1\}$, гипербола $\{xy = 1\}$ и множество $A = O_1(O) \cup (1, 1)$, показанное на Рис. 13, не являются связными.

Определение 4.13. Линейно связное множество называется *односвязным*, если любой замкнутый контур, лежащий в этом множестве, можно стянуть по этому множеству в точку.

Односвязность множества означает, что в нем нет "дырок". Односвязными множествами являются сфера S^2 , открытые и замкнутые шары, шаровой слой. Окружность S^1 , тор $S^1 \times S^1$, баранка $S^1 \times D^2$ и цилиндр $S^1 \times I$ не являются односвязными.

Определение 4.14. Линейно связное открытое множество называется *областью*.

Определение 4.15. Если R — область, то $\bar{R} = R \cup \partial R$ называется *замкнутой областью*. Другими словами, *замкнутая область* — это область с присоединенной границей.

Определение 4.16. Точка a называется *пределом* последовательности точек $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset A$, если для любой ее открытой окрестности $O_\varepsilon(a)$ найдется номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $\{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\} \subset O_\varepsilon(a)$. При этом говорят, что последовательность *сходится* к точке a и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ или $x_n \rightarrow a$.

Справедлива следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 4.17 (о покоординатной сходимости). *Последовательность точек $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset A \subset \mathbb{R}^k$, где x_n имеет координаты $(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk})$, сходится к точке $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ тогда и только тогда, когда для каждой координаты $i = 1, 2, \dots, k$ последовательность i -ых координат $\{x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}, \dots\} \subset \mathbb{R}$ точек $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ сходится к i -ой*

координате a_i точки a .

Определение 4.18. Покрытие $\{A_k \mid k \in K\}$ множества A называется *открытым* (соответственно *замкнутым*), если оно состоит из открытых (соответственно замкнутых) множеств.

Определение 4.19. Конечное замкнутое покрытие $\{A_k \mid k \in K\}$ множества A (см. 1.7 и 1.8) называется *правильным*, если для любых $i, j \in K$ справедливо равенство $A_i \cap A_j = \partial A_i \cap \partial A_j$.

Глава 2. ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

§5. Предел вектор-функции

Пусть G — подмножество евклидова пространства \mathbb{R}^n .

Определение 5.1. Отображение $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *вектор-функцией* (см. Рис. 14). Элементы евклидова пространства \mathbb{R}^n мы будем называть *точками*, а значения вектор-функции \mathbf{f} в евклидовом пространстве \mathbb{R}^m будем называть *векторами*. Если $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$ — произвольная точка, то значение вектор-функции \mathbf{f} в точке x есть вектор $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$, компоненты которого являются скалярными функциями $f_i : G \rightarrow \mathbb{R}^1$, и $i = 1, 2, \dots, m$. Образ множества G , то есть $\mathbf{f}(G)$, называется *годографом* отображения \mathbf{f} .

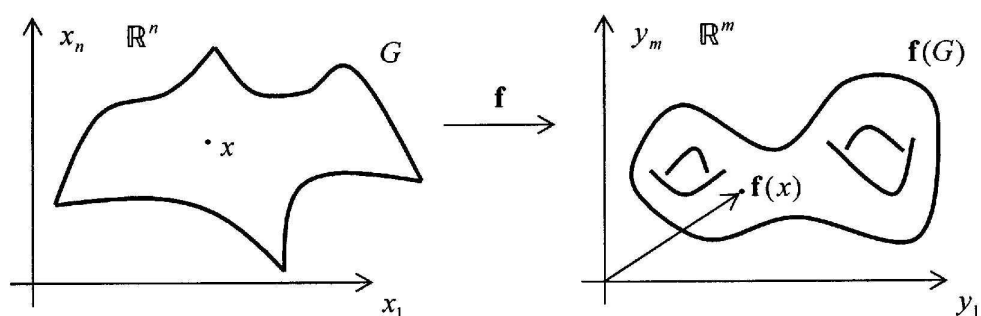


Рис. 14: Вектор-функция $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Определение 5.2 (предела вектор-функции по Коши). Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — предельная точка множества G . Вектор $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^m$ называется *пределом* вектор-функции $\mathbf{f}(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (см. Рис. 15), (короче: $\lim_{x \rightarrow x_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A}$ или $\mathbf{f}(x) \rightarrow \mathbf{A}$), если для любой ε -окрестности $O_\varepsilon(\mathbf{A})$ вектора \mathbf{A} существует такая δ -окрестность $O_\delta(x_0)$ точки x_0 , что имеет место включение

$$\mathbf{f}(G \cap O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(\mathbf{A}).$$

Замечание 5.3. Нетрудно видеть, что утверждение

если для любой ε -окрестности $O_\varepsilon(\mathbf{A})$ вектора \mathbf{A} существует δ -окрестность $O_\delta(x_0)$ точки x_0 , такая что имеет место включение $\mathbf{f}(G \cap O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(\mathbf{A})$

и утверждение

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого x , удовлетворяющего неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\mathbf{f}(x) - \mathbf{A}| < \varepsilon$

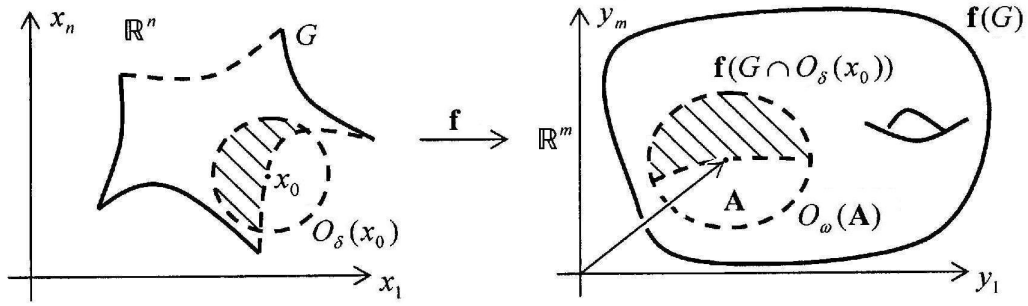


Рис. 15: Предел вектор-функции по Коши.

означают одно и то же.

Определение 5.4 (предела вектор-функции по Гейне). Вектор $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^m$ называется *пределом* вектор-функции $\mathbf{f}(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любой последовательности точек $\{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\} \subset G$, $x_k \neq x_0$, сходящейся к точке x_0 (см. Рис. 16), последовательность векторов $\{\mathbf{f}(x_1), \mathbf{f}(x_2), \dots, \mathbf{f}(x_k), \dots\} \subset \mathbb{R}^m$ сходится к вектору \mathbf{A} . Короче, из $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ следует $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}(x_k) = \mathbf{A}$.

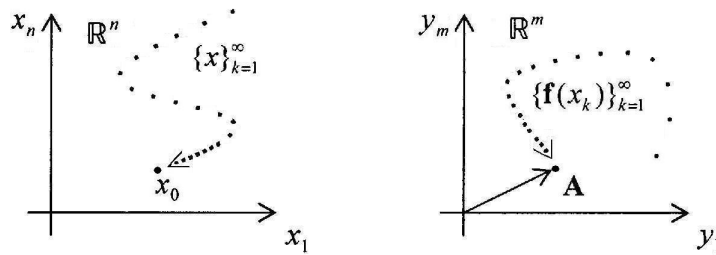


Рис. 16: Предел вектор-функции по Гейне.

Эквивалентность определений 5.2 и 5.4 доказывается так же как эквивалентность соответствующих определений предела по Коши и по Гейне в теории функций одной вещественной переменной.

Следующая теорема следует из опред. 5.4 и теор. 4.17.

Теорема 5.5 (о покоординатной сходимости вектор-функции). Пусть $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ — вектор-функция, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — предельная точка множества G и $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ — фиксированный вектор в пространстве \mathbb{R}^m . Тогда равенство $\lim_{x \rightarrow x_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A}$ имеет место тогда и только тогда, когда для всех координат $i = 1, 2, \dots, m$ имеют место равенства $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = A_i$.

Теорема 5.6. Пусть $\mathbf{f}, \mathbf{g} : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ — две вектор-функции, $h : G \rightarrow \mathbb{R}^1$ — числовая функция, x_0 — предельная точка множества $G \subset \mathbb{R}^n$, и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \mathbf{g}(x) = \mathbf{B}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = c$.

Тогда

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)) = \mathbf{A} + \mathbf{B}$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)\mathbf{f}(x) = c\mathbf{A}$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} (\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x)) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

Доказательство. Для примера мы докажем пункт 2). Доказательство пунктов 1) и 3) аналогично, и мы предлагаем доказать их самостоятельно.

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} h\mathbf{f} = \lim_{x \rightarrow x_0} (hf_1, hf_2, \dots, hf_m) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} hf_1, \lim_{x \rightarrow x_0} hf_2, \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} hf_m \right) = (cA_1, cA_2, \dots, cA_m) = c\mathbf{A}. \quad \square$$

Теорема 5.7. Пусть $\mathbf{f}, \mathbf{g} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ — две вектор-функции, x_0 — предельная точка множества $G \subset \mathbb{R}^n$, и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \mathbf{g}(x) = \mathbf{B}$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} [\mathbf{f}(x) \times \mathbf{g}(x)] = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$.

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [\mathbf{f}(x) \times \mathbf{g}(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = \lim_{x \rightarrow x_0} [(f_2g_3 - f_3g_2)\mathbf{i} + (f_3g_1 - f_1g_3)\mathbf{j} + (f_1g_2 - f_2g_1)\mathbf{k}] = (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\mathbf{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{k} = \lim_{x \rightarrow x_0} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]. \quad \square$$

§6. Непрерывность вектор-функции

Пусть G — подмножество евклидова пространства \mathbb{R}^n .

Определение 6.1. Вектор-функция $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *непрерывной в множестве G* , если прообраз $\mathbf{f}^{-1}(V)$ любого открытого подмножества $V \subset \mathbb{R}^m$ является открытым в G (см. Рис. 17).

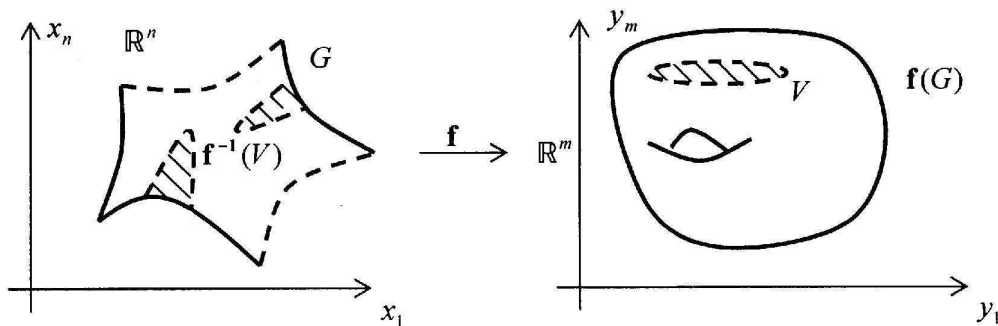


Рис. 17: Непрерывность в множестве.

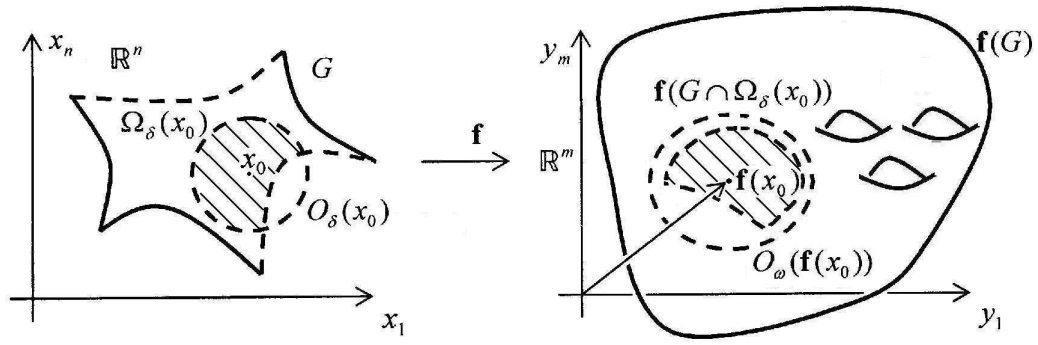


Рис. 18: Непрерывность в точке.

Определение 6.2. Вектор-функция $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in G$ (см. Рис. 18), если для любой ε -окрестности $O_\varepsilon(\mathbf{f}(x_0))$ вектора $\mathbf{f}(x_0) \in \mathbb{R}^m$ существует такая δ -окрестность $\Omega_\delta(x_0) \subset G$ точки x_0 , что имеет место включение

$$\mathbf{f}(\Omega_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(\mathbf{f}(x_0)).$$

Пример. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, заданную по формуле

$$y = f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases}.$$

1) Проверим, выполнение опред. 6.1. Чтобы показать, что функция $y = f(x)$ не является непрерывной (в множестве $\mathbb{R}^1 = Ox$), достаточно указать какой-нибудь открытый интервал $V = (\alpha, \beta)$ на оси Oy , прообраз $f^{-1}(V)$ которого не является открытым. Легко видеть (см. Рис. 19.1), что если выбрать $1 < \alpha < 2$ и $2 \leq \beta < \infty$, то прообраз $f^{-1}(V) = f^{-1}((\alpha, \beta)) = [2, \beta)$ не будет открытым. Поэтому функция $y = f(x)$ не является непрерывной (в множестве $\mathbb{R}^1 = Ox$).

2) Проверим, выполняется ли опред. 6.2. Начнем с точки $x_0 = 2$. Заметим, что образ ее δ -окрестности $O_\delta(2) = (2 - \delta, 2 + \delta)$ является объединением двух интервалов, один из которых не является открытым, а именно $f((2 - \delta, 2 + \delta)) = (1 - \delta, 1) \cup [2, 2 + \delta)$ (см. Рис. 19.1.2). По опред. 6.2 число ε может быть любым положительным, и если $0 < \varepsilon < 1$, то образ никакой δ -окрестности точки $x_0 = 2$ не будет целиком содержаться в ε -окрестности точки $f(x_0) = 2$, то есть

$$f((2 - \delta, 2 + \delta)) = (1 - \delta, 1) \cup [2, 2 + \delta) \not\subset O_\varepsilon(\mathbf{f}(x_0)) = (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon).$$

Поэтому функция $y = f(x)$ не является непрерывной в точке $x_0 = 2$.

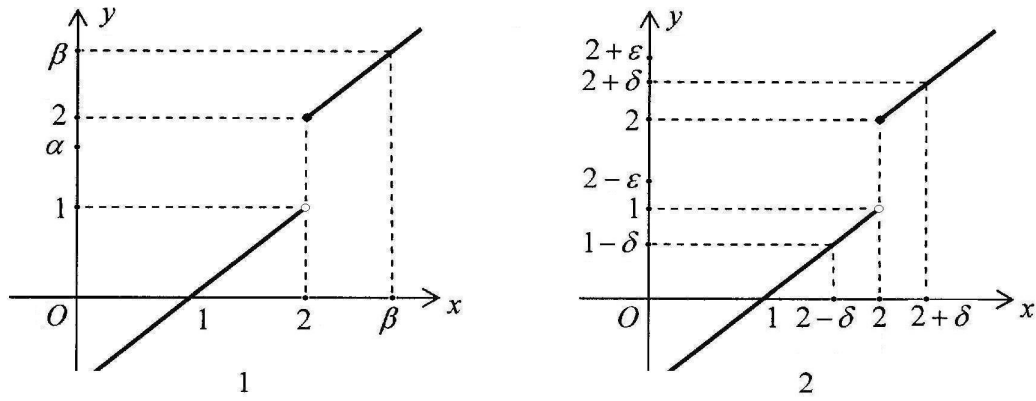


Рис. 19: Пример.

Проверить самостоятельно, что эта функция непрерывна в любой точке $x_0 \neq 2$.

Теорема 6.3. Вектор-функция $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывна в множестве G тогда и только тогда, когда она непрерывна в каждой точке этого множества.

Доказательство. Пусть функция \mathbf{f} непрерывна в множестве G , и x_0 — произвольная точка множества G . Пусть $V = O_\varepsilon(\mathbf{f}(x_0))$ — произвольная ε -окрестность вектора $\mathbf{f}(x_0)$. По опред. 6.1 множество $\mathbf{f}^{-1}(V)$ является открытым. По крит. 4.5* любая точка x_0 открытого множества $\mathbf{f}^{-1}(V)$ имеет δ -окрестность $\Omega_\delta(x_0)$, которая содержится в $\mathbf{f}^{-1}(V)$, то есть $\Omega_\delta(x_0) \subset \mathbf{f}^{-1}(V)$. Поэтому $\mathbf{f}(\Omega_\delta(x_0)) \subset V$. По опред. 6.2 это означает, что функция \mathbf{f} непрерывна в точке x_0 .

Пусть теперь функция \mathbf{f} непрерывна в каждой точке x_0 множества G и $V \subset \mathbb{R}^m$ — произвольное открытое множество. Надо показать, что прообраз $\mathbf{f}^{-1}(V)$ является открытым множеством в G . Если V — открыто, то по крит. 4.5* существует ε -окрестность $O_\varepsilon(\mathbf{f}(x_0))$ вектора $\mathbf{f}(x_0)$, целиком лежащая в V . По опред. 6.2 существует δ -окрестность $\Omega_\delta(x_0)$ точки x_0 , целиком лежащая в $\mathbf{f}^{-1}(V)$. Тогда по крит. 4.5* множество $\mathbf{f}^{-1}(V)$ открыто. \square

§7. Производные и дифференциалы

Всюду в этом параграфе G — область в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n .

Определение 7.1. Вектор-функция $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемой в точке* $x_0 \in G$, если ее приращение $\Delta \mathbf{f}(x_0) = \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)$ можно представить в виде $\Delta \mathbf{f}(x_0) = A(x_0)(\Delta x)^\top + \alpha(\Delta x)(\Delta x)^\top$, где $\Delta x = (\Delta x_1,$

$\Delta x_2, \dots, \Delta x_n$),

$$A(x_0) = \begin{pmatrix} A_{11}(x_0) & A_{12}(x_0) & \dots & A_{1n}(x_0) \\ A_{21}(x_0) & A_{22}(x_0) & \dots & A_{2n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1}(x_0) & A_{m2}(x_0) & \dots & A_{mn}(x_0) \end{pmatrix}$$

— постоянная матрица, соответствующая точке x_0 , а матрица

$$\alpha(\Delta x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(\Delta x) & \alpha_{12}(\Delta x) & \dots & \alpha_{1n}(\Delta x) \\ \alpha_{21}(\Delta x) & \alpha_{22}(\Delta x) & \dots & \alpha_{2n}(\Delta x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1}(\Delta x) & \alpha_{m2}(\Delta x) & \dots & \alpha_{mn}(\Delta x) \end{pmatrix}$$

такая, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = O$, где O — нулевая $(n \times m)$ -матрица (то есть $\alpha_{ij}(\Delta x)$ — бесконечно малые относительно Δx по крайней мере первого порядка). Вектор-столбец $A(x_0)(\Delta x)^\top$ называется *дифференциалом* вектор-функции \mathbf{f} в точке x_0 и обозначается $d\mathbf{f}(x_0) = A(x_0)(\Delta x)^\top$, где полагают по определению $\Delta x \equiv dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$. Матрица A называется *производной* вектор-функции \mathbf{f} в точке x_0 и традиционно обозначается $A = \mathbf{f}'(x_0)$.

Если $m = n = 1$, то определение 7.1 совпадает с определением дифференциала функции одной переменной.

Дифференциал $d\mathbf{f}(x_0) = A(x_0)(dx)^\top$ можно рассматривать как линейное отображение линейных пространств $d\mathbf{f}(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (см. Рис. 20).

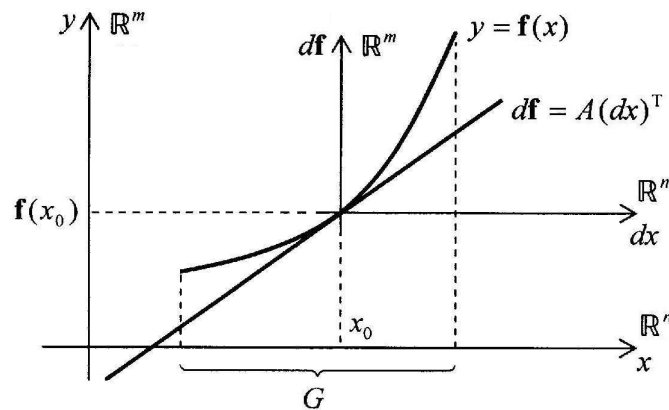


Рис. 20: Дифференциал — линейное отображение.

Теорема 7.2.

$$\mathbf{f}'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Доказательство. По опред. 5.1 вектор-функция $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ определена своими скалярными компонентами $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$. Поэтому получаем

$$\begin{aligned} d\mathbf{f} &= (df_1(x), df_2(x), \dots, df_m(x)) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n, \right. \\ &\left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} dx_n \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (dx)^\top. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. \square

Замечание 7.3. 1) Пусть $n \leq m$ и $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ — дифференцируемое взаимно однозначное отображение. Здесь дифференцируемость означает, что существует производная $\mathbf{f}'(x)$, а взаимная однозначность при этом означает, что ранг производной (как матрицы размером $n \times m$) $\mathbf{f}'(x)$ равен n . Пусть $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0i}, \dots, x_{0n}) \in G$ — точка. Для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ рассмотрим прямую $L_i : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданную параметрически $L_i(x) = (x_{01}, \dots, x, \dots, x_{0n})$. Обозначим связную компоненту множества $L_i(\mathbb{R}^1) \cap G$, которая содержит точку x_0 , через (a_i, b_i) . Ограничение $\mathbf{f} : (a_i, b_i) \rightarrow \mathbb{R}^m$ отображения $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ тоже является дифференцируемым взаимно однозначным отображением, образ которого есть гладкая кривая $\mathbf{f}((a_i, b_i))$, лежащая на годографе $\mathbf{f}(G)$ (см. Рис. 21). Так как при взятии производной по переменной

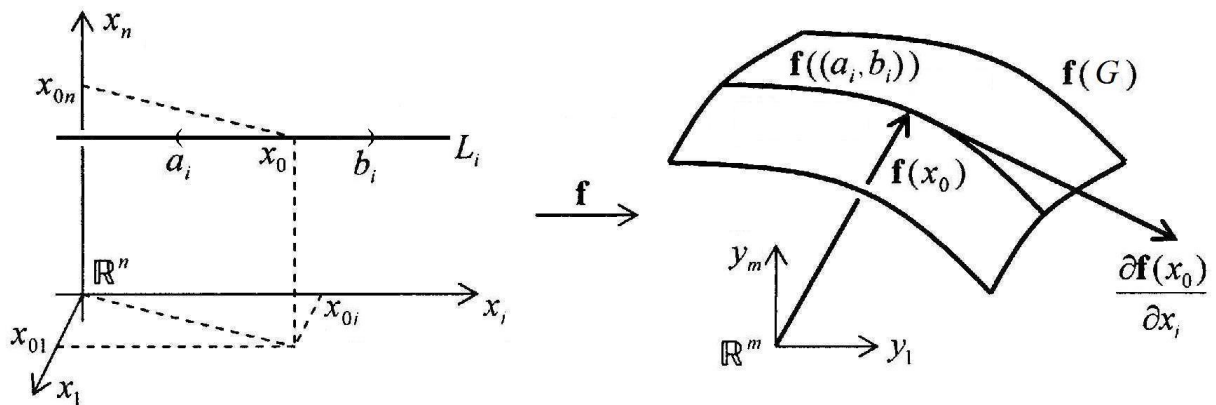


Рис. 21: Касательные к годографу векторы $\frac{\partial \mathbf{f}(x_0)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

x_i секущая, проходящая через конец вектора $\mathbf{f}(x_0)$, переходит в касательную, то вектор $\frac{\partial \mathbf{f}(x_0)}{\partial x_i}$ является касательным к кривой $\mathbf{f}((a_i, b_i))$. Мы будем по определению считать, что любой вектор касательный к гладкой кривой $\mathbf{f}((a_i, b_i)) \subset \mathbf{f}(G)$ в какой-нибудь точке, является касательным к годографу $\mathbf{f}(G)$. Так как ранг производной $\mathbf{f}'(x)$ равен n , то векторы

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}(x_0)$$

являются линейно независимыми. Их линейная оболочка реализует n -мерное векторное пространство, каждый вектор которого является касательным к годографу $\mathbf{f}(G)$. Поэтому эта линейная оболочка является касательным пространством к годографу $\mathbf{f}(G)$ в конце вектора $\mathbf{f}(x_0)$. Векторное параметрическое уравнение этого пространства можно записать в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(x_0) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(x_0)t_1 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}(x_0)t_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}(x_0)t_n.$$

Векторы

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}(x_0)$$

реализуют базис в n -мерном касательном пространстве (в общем случае этот базис не является ортогональным).

Упомянем еще одну полезную геометрическую интерпретацию дифференциала $d\mathbf{f}(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (пространство \mathbb{R}^n дифференциалов dx схематично показано на Рис. 20). В доказательстве теор. 7.2 мы получили следующее представление, где значения всех производных рассматриваются в точке x_0

$$d\mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} dx_n \right).$$

Используя опред. 3.1, перепишем последнее выражение в виде

$$d\mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \frac{\partial f_2}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \right) dx_n = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} dx_n.$$

Таким образом дифференциал $d\mathbf{f}(x_0)$ есть линейная комбинация векторов базиса

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}(x_0)$$

касательного пространства. Это означает, что при любом значении $dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ дифференциал $d\mathbf{f}(x_0)$ касается годографа $\mathbf{f}(G)$, а само касательное пространство к $\mathbf{f}(G)$ в конце вектора $\mathbf{f}(x_0)$ есть образ $d\mathbf{f}(x_0)(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$ при отображении $d\mathbf{f}(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (см. Рис. 22).

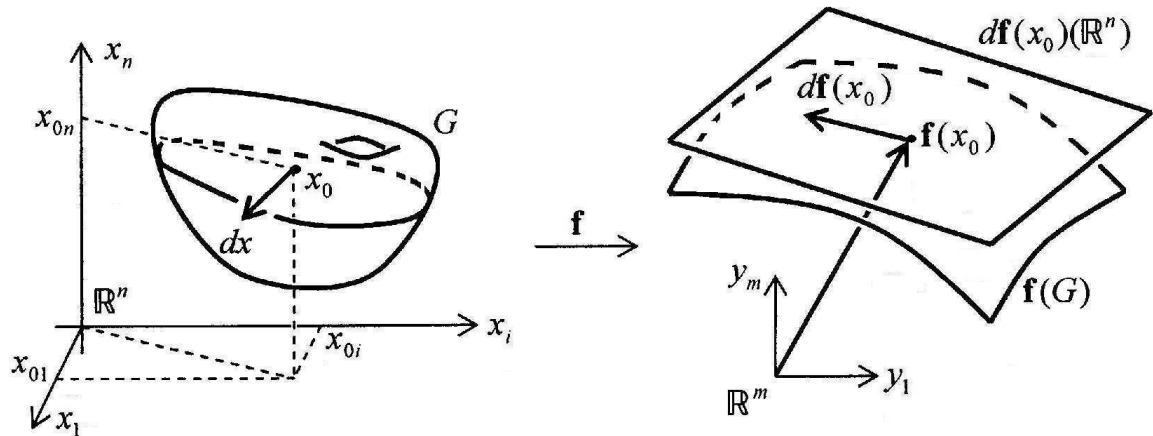


Рис. 22: Дифференциал в касательном пространстве.

2) Если $G = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$ открытый отрезок и $\mathbf{r} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ — дифференцируемая взаимно однозначная вектор-функция, то годограф $\mathbf{r}((a, b))$ является гладкой кривой в \mathbb{R}^3 , а $\mathbf{r}'(t_0) = (r'_1(t_0), r'_2(t_0), r'_3(t_0))$ есть касательный вектор к кривой $\mathbf{r}((a, b))$ в точке $\mathbf{r}(t_0)$, где $t_0 \in (a, b)$ (см. Рис. 23). Векторное параметрическое уравнение касательной прямой, проходящей через конец вектора $\mathbf{r}(t_0)$ есть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)s, \quad -\infty < s < \infty.$$

3) Если G область в \mathbb{R}^2 и $\mathbf{r} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ — дифференцируемая взаимно однозначная вектор-функция, то годограф $\mathbf{r}(G)$ является гладкой поверхностью в \mathbb{R}^3 , а векторы $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$ и $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$ реализуют базис в касательной плоскости к поверхности $\mathbf{r}(G)$ в точке $\mathbf{r}(u_0, v_0)$, где $(u_0, v_0) \in G$ (см. Рис. 24). Векторное параметрическое уравнение этой касательной плоскости есть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v_0) + \mathbf{r}'_u(u_0, v_0)t + \mathbf{r}'_v(u_0, v_0)s, \quad -\infty < t < \infty, \quad -\infty < s < \infty.$$

Теорема 7.4. Если функции $\mathbf{f}, \mathbf{g} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^1$ дифференцируемы в точке $x_0 \in (a, b)$, то

$$1) (\mathbf{f} + \mathbf{g})' = \mathbf{f}' + \mathbf{g}',$$

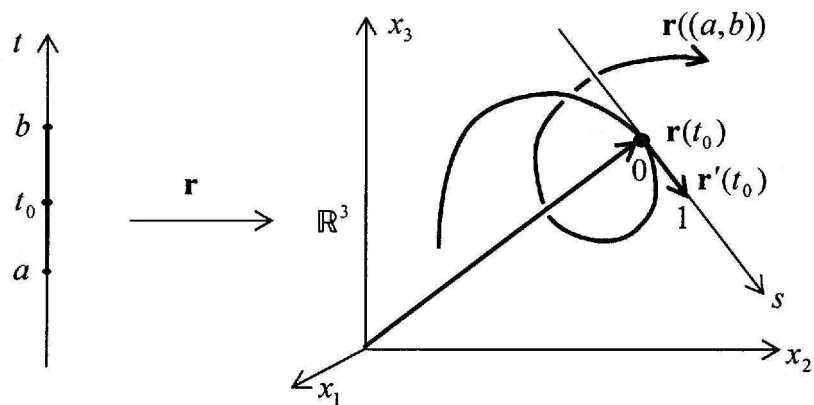


Рис. 23: Гладкая кривая.

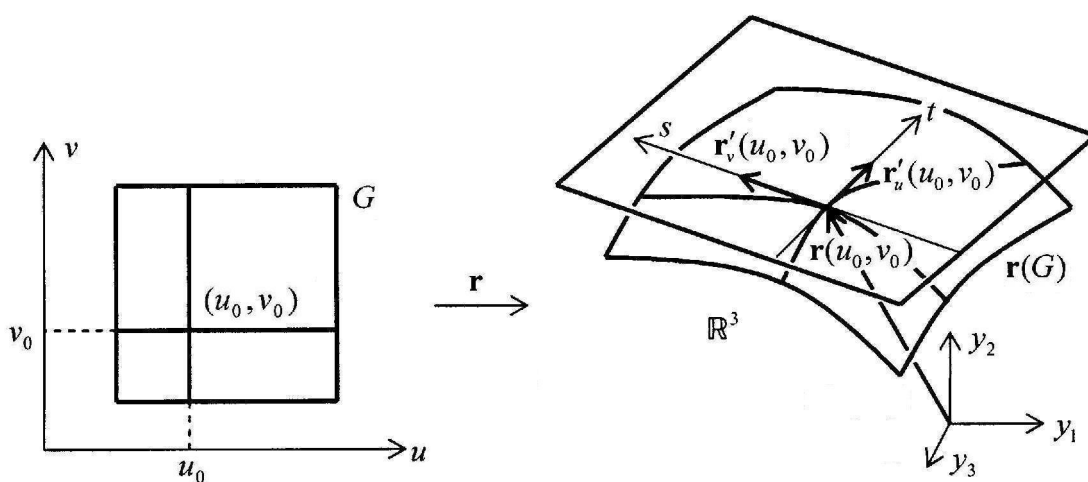


Рис. 24: Гладкая поверхность.

- 2) $(h\mathbf{f})' = h'\mathbf{f} + h\mathbf{f}'$,
- 3) $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})' = (\mathbf{f}' \cdot \mathbf{g}) + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}')$,
- 4) если $m = 3$, то $[\mathbf{f} \times \mathbf{g}]' = [\mathbf{f}' \times \mathbf{g}] + [\mathbf{f} \times \mathbf{g}']$.

Доказать самостоятельно.

§8. Формула Тейлора

Теорема 8.1 (формула Тейлора). Если вектор-функция $\mathbf{r} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ имеет на интервале $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset (a, b)$ непрерывные производные до $(n + 1)$ -го порядка включительно, то существует такое число $\xi \in I$, что для всех $t \in I$ справедлива формула

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \dots + \frac{\mathbf{r}^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \frac{\mathbf{r}^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(t - t_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Пусть \mathcal{D} — доказательство формулы Тейлора для функции одной переменной, тогда m -мерный вектор доказательств $(\mathcal{D}, \mathcal{D}, \dots, \mathcal{D})$ является доказательством теоремы 8.1. \square

§9. Интегрирование вектор-функций

Определение 9.1. Пусть $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — такая вектор-функция, что каждая ее компонента f_i интегрируема на интервале $[a, b]$, то есть для всех индексов $i = 1, 2, \dots, m$ существует определенный интеграл $\int_a^b f_i(t)dt$, тогда вектор

$$\left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \dots, \int_a^b f_m(t)dt \right)$$

называется определенным интегралом от вектор-функции $\mathbf{f}(t)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b \mathbf{f}(t)dt$. В этом случае $\mathbf{f}(t)$ называется интегрируемой вектор-функцией.

Теорема 9.2. Пусть $\mathbf{f}, \mathbf{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — интегрируемые вектор-функции, $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$ — интегрируемая числовая функция, \mathbf{A} и c — постоянные вектор и число. Тогда

- 1) $\int_a^b (\mathbf{f} + \mathbf{g})dt = \int_a^b \mathbf{f}dt + \int_a^b \mathbf{g}dt$
- 2) $\int_a^b c\mathbf{f}dt = c \int_a^b \mathbf{f}dt$
- 3) $\int_a^b \mathbf{A}hdt = \mathbf{A} \int_a^b hdt$.

Доказать самостоятельно.

Глава 3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§10. Пространственные кривые

Напомним, что если $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ — вектор-функция, то образ $\mathbf{f}(G)$ называется годографом этой функции.

Определение 10.1. Годограф $\mathbf{r}([a, b])$ вектор-функции одной переменной $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется *пространственной кривой* или просто *кривой*.

Замечание 10.2. О задании кривой в \mathbb{R}^3 .

1) Параметрическое задание:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad a \leq t \leq b \\ z = z(t) \end{cases} .$$

2) Векторно-параметрическое задание: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$.

3) x -параметрическое:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} , \quad a \leq x \leq b$$

Определение 10.3. 1) Если вектор-функция $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $[a, b]$ (соответственно, \mathbb{R}^1) и \mathbb{R}^3 , то кривая $C = \mathbf{r}([a, b])$ называется *простой*.

2) Простая кривая $C = \mathbf{r}([a, b])$ называется *гладкой*, если $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ является непрерывно дифференцируемой вектор-функцией.

3) Кривая C называется *кусочно гладкой*, если существует ее правильное покрытие (см. 4.19) гладкими кривыми.

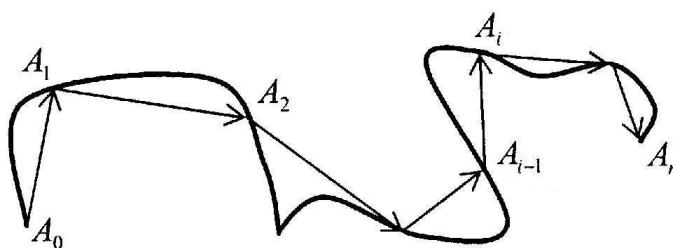


Рис. 25: Ломаная линия, вписанная в кусочно гладкую кривую.

Определение 10.4. Пусть вектор-функция $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ реализует кусочно гладкую кривую C . Выберем на ней упорядоченный набор из $n + 1$ точек $A_0 = \mathbf{r}(a), A_1, A_2, \dots, A_n = \mathbf{r}(b)$ (см. Рис. 25). Рассмотрим ломаную

линию $A_0A_1A_2 \dots A_n$, вписанную в кривую C , и пусть $p = \sum_{i=1}^n |\overrightarrow{A_{i-1}A_i}|$ — ее периметр. Точная верхняя грань $L(C) = \sup \{p\}$ периметров всевозможных вписанных ломаных линий называется *длиной* кривой C . Если длина кривой конечна, то есть $L(C) < \infty$, то кривая называется *спрямляемой*.

В дальнейшем мы будем рассматривать только спрямляемые кривые.

Лемма 10.5. *Если C — кусочно гладкая кривая, то ее длина представляема в виде*

$$L(C) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max |\overrightarrow{A_{i-1}A_i}| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n |\overrightarrow{A_{i-1}A_i}|.$$

(Без доказательства.)

Теорема 10.6. *Если $C = \mathbf{r}([a, b])$ — кусочно гладкая кривая, то*

$$L(C) = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Доказательство. Пусть $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ — числа на отрезке $[a, b]$ и $A_0 = \mathbf{r}(t_0)$, $A_1 = \mathbf{r}(t_1)$, $A_2 = \mathbf{r}(t_2)$, \dots , $A_n = \mathbf{r}(t_n)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, их образы на кривой C . Тогда

$$|\overrightarrow{A_{i-1}A_i}| = |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| \stackrel{(8.1)}{=} |\mathbf{r}'(\xi_i)\Delta t_i|,$$

По лемме 10.5 и определению определенного интеграла

$$L(C) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n |\mathbf{r}'(\xi_i)|\Delta t_i = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

□

Замечание 10.7. Пусть $C = \mathbf{r}([a, b])$ — кусочно гладкая кривая, имеющая правильное покрытие $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ гладкими кривыми. Это означает, что $C = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$, а две соседние кривые γ_i и γ_{i+1} пересекаются в общей граничной точке. Тогда $L(C) = L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_k)$ или

$$\int_C |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_{\gamma_1} |\mathbf{r}'(t)| dt + \dots + \int_{\gamma_k} |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Определение 10.8. Если параметр t вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ есть длина s кривой $\mathbf{r}([a, t])$, то есть

$$s = \int_a^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau \quad \text{и} \quad s \equiv t,$$

то такой параметр называется *натуральным* (или *естественным* и традиционно обозначается буквой s).

Это определение означает, что при отображении $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ отрезок $[a, b]$ переходит в $\mathbf{r}([a, b]) \subset \mathbb{R}^3$ без растяжений и сжатий.

Лемма 10.9. Если s — натуральный параметр, то

$$L(C) = \int_a^b |\mathbf{r}'(s)| ds = b - a.$$

Доказательство. Из опред. 10.7 следует выполнение тождества

$$s = \int_a^s |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Дифференцируя его по s , получим тождество $1 = |\mathbf{r}'(s)|$. Следовательно $L(C) = \int_a^b 1 \cdot ds = b - a$. \square

Следствие 10.10. Если s — натуральный параметр, то для всех $s \in [a, b]$ касательный вектор $\mathbf{r}'(s)$ — единичный.

Следствие 10.11. Если s — натуральный параметр, то $\mathbf{r}'(s) = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}$, где

$$\begin{cases} \cos \alpha = x'(s) \\ \cos \beta = y'(s) \\ \cos \gamma = z'(s) \end{cases}$$

суть направляющие косинусы вектора $\mathbf{r}'(s)$.

§11. Криволинейные интегралы 1-го рода

Определение 11.1. 1) Пусть $C = [A, B] \subset \mathbb{R}^3$ — кусочно гладкая кривая.
2) Пусть $f : C \rightarrow \mathbb{R}^1$ — ограниченная функция и $f(M)$ — ее значение в точке $M \in C$ (см. Рис. 26).

3) Пусть $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_n \in C$ — упорядоченный набор произвольных точек на кривой C , где $A_0 = A$ и $A_n = B$ — начальная и конечная точки кривой C .

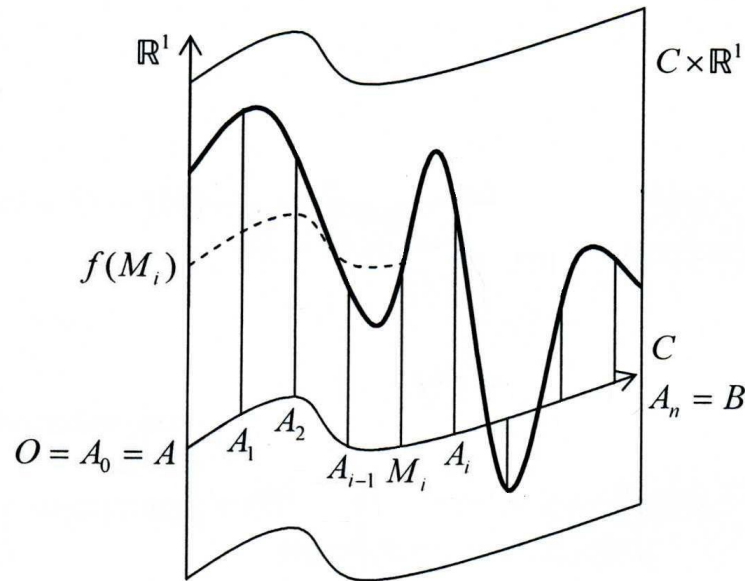


Рис. 26: График функции $f : C \rightarrow \mathbb{R}^1$ в $C \times \mathbb{R}^1$.

- 4) Обозначим через Δs_i длину криволинейного отрезка $[A_{i-1}, A_i] \subset C$.
 5) Выберем произвольную точку $M_i \in [A_{i-1}, A_i]$.
 Если предел интегральных сумм

$$\mathcal{I}_1 = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta s_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta s_i$$

существует (то есть, $-\infty < \mathcal{I}_1 < \infty$), то он называется *криволинейным интегралом 1-го рода* и обозначается $\int_C f(M) ds$ или $\int_A^B f(M) ds$, а функция $f(M)$ называется *интегрируемой* на кривой C .

Замечание 11.2. 1) Т.к. длина Δs_i положительна, то интеграл не зависит от направления интегрирования, то есть $\int_A^B f(M) ds = \int_B^A f(M) ds$.

2) Криволинейный интеграл 1-го рода есть площадь между "осью" $C \times \{0\}$ и графиком функции $f : C \rightarrow \mathbb{R}^1$ в $C \times \mathbb{R}^1$ (см. Рис. 26).

3) Криволинейный интеграл 1-го рода обладает естественным свойством аддитивности: если $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ — правильное покрытие кривой $C = \mathbf{r}([a, b])$, то

$$\int_C f(M) ds = \int_{\gamma_1} f(M) ds + \dots + \int_{\gamma_k} f(M) ds.$$

Теорема 11.3. Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ реализует кусочно гладкую кривую $C = \mathbf{r}([a, b])$ в \mathbb{R}^3 и пусть $f : C \rightarrow \mathbb{R}^1$ — интегрируемая функция. Тогда криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле

$$\int_C f(M) ds = \int_b^a f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Доказательство. Обозначим $M(t) = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ и $f(M) = f(x(t), y(t), z(t))$. Выберем на отрезке $[a, b]$ точки $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. Пусть $A_i = \mathbf{r}(t_i)$ — их образы. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta s_i.$$

По теореме 10.6 и теореме о среднем имеем $\Delta s_i = L([A_{i-1}, A_i]) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\mathbf{r}'(t)| dt = |\mathbf{r}'(\eta_i)| \Delta t_i$, где $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ и $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(\eta_i)) |\mathbf{r}'(\eta_i)| \Delta t_i.$$

Перейдя к пределу в этом равенстве при $n \rightarrow \infty$ и $\max \Delta s_i \rightarrow 0$, получим требуемый результат. \square

Замечание 11.4. 1) В декартовой системе координат

$$ds = |\mathbf{r}'(t)| dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Поэтому

$$\int_C f(M) ds = \int_b^a f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

2) Если на плоскости с полярными координатами (ρ, φ) гладкая кривая с уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ задана на угловом интервале $[\alpha, \beta]$, то дифференциал дуги этой кривой вычисляется по формуле $ds = \sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + \rho^2(\varphi)} d\varphi$. Поэтому

$$\int_C f(M) ds = \int_\alpha^\beta f(\rho(\varphi), \varphi) \sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + \rho^2(\varphi)} d\varphi.$$

Загадка. Почему определенные интегралы, стоящие в правых частях формул теор. 11.3 и замеч. 11.4. не меняют знак при изменении направления интегрирования?

Замечание 11.5. Криволинейный интеграл 1-го рода $\int_C f(M)ds$ имеет физическую интерпретацию. Если функция $f(M)$ есть линейная плотность массы (или электрического заряда) в точке M кривой C , то интеграл $\int_C f(M)ds$ есть масса кривой (или соответственно полный электрический заряд на кривой). Обратите внимание, что масса кривой и заряд на кривой не зависят от системы координат и не могут менять знак при изменении направления интегрирования.

§12. Криволинейные интегралы 2-го рода

Определение 12.1. 1) Пусть $C = AB \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая кривая, заданная вектор-функцией $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, где $\mathbf{r}(a) = A$ и $\mathbf{r}(b) = B$ (см. Рис. 27).

2) Обозначим через $\vec{\tau}(M)$ единичный вектор $\frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}$, касательный к кривой C в точке M .

3) Пусть на кривой C задана ограниченная вектор-функция $\mathbf{A} : C \rightarrow \mathbb{R}^3$. Тогда интеграл

$$\int_C (\mathbf{A}(M) \cdot \vec{\tau}(M)) ds$$

называется *криволинейным интегралом 2-го рода* от вектор-функции $\mathbf{A}(M)$.

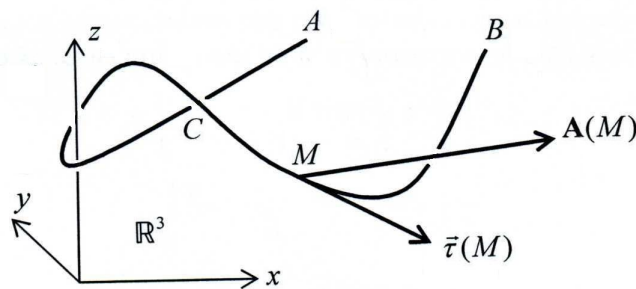


Рис. 27: К определению 12.1.

Замечание 12.2. 1) Изменение обхода кривой C с AB на BA меняет вектор $\vec{\tau}(M)$ на $-\vec{\tau}(M)$. Поэтому $\int_A^B (\mathbf{A} \cdot \vec{\tau}) ds = -\int_B^A (\mathbf{A} \cdot \vec{\tau}) ds$.

2) Криволинейный интеграл 2-го рода обладает естественным свойством аддитивности: если $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ — правильное покрытие кривой $C = \mathbf{r}([a, b])$,

то

$$\int_C (\mathbf{A} \cdot \vec{\tau}) ds = \int_{\gamma_1} (\mathbf{A} \cdot \vec{\tau}) ds + \dots + \int_{\gamma_k} (\mathbf{A} \cdot \vec{\tau}) ds.$$

Теорема 12.3. Пусть гладкая кривая C задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$, и $\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ — непрерывная вектор-функция, заданная на кривой C . Тогда

$$\begin{aligned} \int_C (\mathbf{A}(M) \cdot \vec{\tau}(M)) ds &= \int_a^b (\mathbf{A}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{\tau}(t)) dt = \\ &= \int_a^b [P(x, y, z)x' + Q(x, y, z)y' + R(x, y, z)z'] dt, \end{aligned}$$

где в последнем интеграле x, y, z и их производные x', y', z' являются функциями от параметра t .

Доказательство. Доказательство сводится к следующим вычислениям:

$$\begin{aligned} \int_C (\mathbf{A} \cdot \vec{\tau}) ds &= \int_a^b \left(\mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right) |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}') dt = \\ &= \int_a^b ((P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k})) dt = \int_a^b (Px' + Qy' + Rz') dt. \end{aligned}$$

□

Замечание 12.4. Т.к. $dx = x'dt$, $dy = y'dt$, $dz = z'dt$, то криволинейный интеграл 2-го рода можно записать в виде

$$\int_C (\mathbf{A} \cdot \vec{\tau}) ds = \int_C P dx + Q dy + R dz = \int_C (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}).$$

Замечание 12.5. Криволинейный интеграл 2-го рода $\int_C (\mathbf{A} \cdot \vec{\tau}) ds$ имеет физическую интерпретацию. Если вектор \mathbf{A} есть сила в точке M кривой C , то $(\mathbf{A} \cdot \vec{\tau})$ есть проекция этой силы на направление касательного вектора к кривой C в точке M , а интеграл $\int_C (\mathbf{A} \cdot \vec{\tau}) ds$ есть работа этой силы вдоль кривой C .

§13. Ориентации областей и их границ

Определение 13.1. Пусть $C \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая кривая без точек самопересечения (контур). На ней можно задать два взаимно противоположных направления обхода λ^+ и λ^- , каждое из которых называется *ориентацией*. Кривая C с выбранной ориентацией называется *ориентированной кривой*. Другими словами, ориентированная кривая — это пара (C, λ) , где λ есть либо λ^+ , либо λ^- . Ориентацию, соответствующую обходу против часовой стрелки, называют *положительной* и обозначают $\lambda^+ = \curvearrowright$, а ориентацию, соответствующую обходу по часовой стрелке, называют *отрицательной* и обозначают $\lambda^- = \curvearrowleft$ (см. Рис. 28).

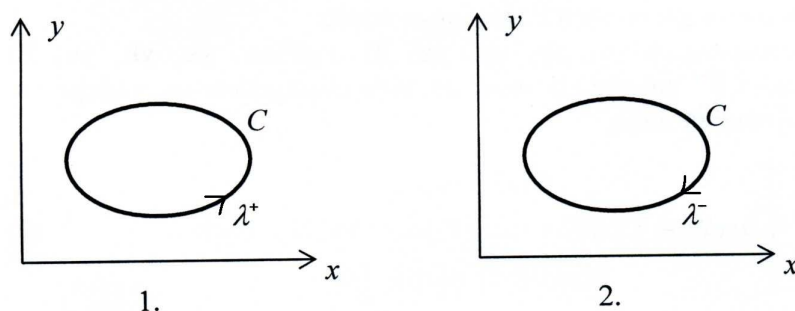


Рис. 28: Положительно (1.) и отрицательно (2.) ориентированная кривая C .

Определение 13.2. Координатные векторы $\mathbf{i} = (1, 0)$ и $\mathbf{j} = (0, 1)$ задают на плоскости \mathbb{R}^2 два базиса: правый (положительный) $\omega^+ = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ и левый (отрицательный) $\omega^- = (\mathbf{j}, \mathbf{i})$. Пара (\mathbb{R}^2, ω^+) называется плоскостью с *положительной ориентацией*, а пара (\mathbb{R}^2, ω^-) — плоскостью с *отрицательной ориентацией*.

Замечание 13.3. Если выписать координаты векторов базиса столбиком (например, как в опред. 3.3) и составить из этих координат определитель, то знак определителя соответствует ориентации базиса (плюс — положительной ориентации, а минус — отрицательной). Это замечание объясняет причину того, что вращение против часовой стрелки выбрано положительным.

Замечание 13.4. 1) Кратчайший поворот от первого вектора базиса ко второму однозначно определяет ориентацию любой окружности с центром в начале координат O ; и наоборот, любая ориентированная окружность с центром в начале координат O однозначно задает кратчайший поворот от одного вектора базиса ко второму (см. Рис. 29). Другими словами положительный базис задает положительную ориентацию окружности, отрицательный базис задает отрицательную ориентацию окружности и наоборот (ориентация окружности задает соответствующую ориентацию базиса). Эта

взаимная однозначность ориентаций базиса и окружности позволяет нам ввести следующие обозначения $\omega^+ = \lambda^+ = \odot$ и $\omega^- = \lambda^- = \ominus$.

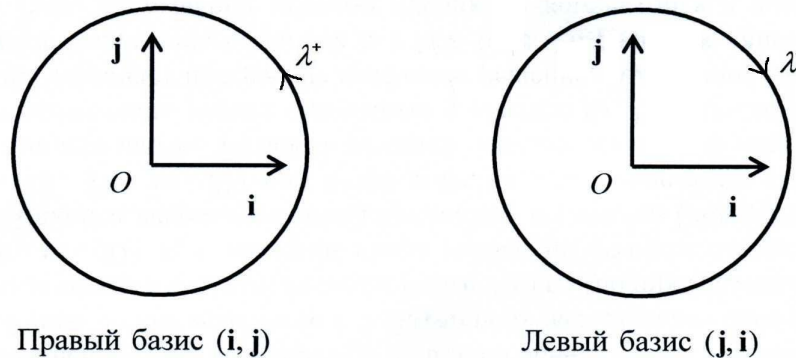


Рис. 29: К замечанию 13.3.1)

2) Каждая из двух ориентаций плоскости задает ориентацию на любом его открытом подмножестве. Например, если (\mathbb{R}^2, \odot) — плоскость с положительной ориентацией и $G \subset \mathbb{R}^2$ — область, то пара (G, \odot) есть область G с положительной ориентацией, где \odot геометрически реализуется (маленькой) положительно ориентированной окружностью $\omega^+ = \lambda^+$, целиком лежащей в G (см. Рис. 30).

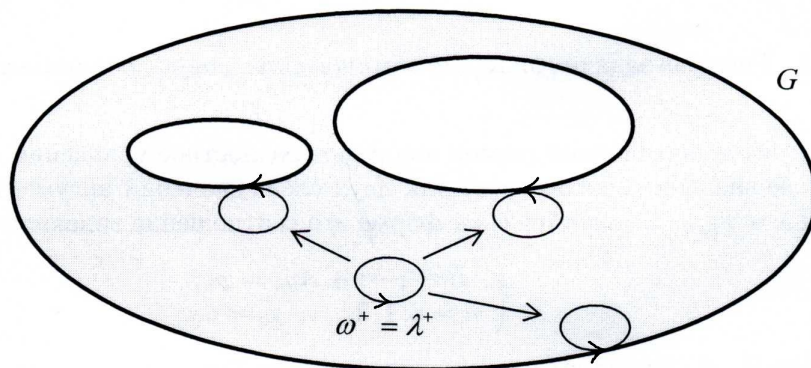


Рис. 30: Ориентация $\omega^+ = \lambda^+$ области G индуцирует ориентацию каждой компоненты границы.

3) Ориентация $\omega^+ = \lambda^+$ области G индуцирует ориентацию каждой компоненты границы ∂G следующим образом. Мы двигаем окружность $\omega^+ = \lambda^+$ по области G до ее касания с компонентой границы, и в точке касания направление обхода от окружности $\omega^+ = \lambda^+$ передается к этой компоненте границы (см. Рис. 30). Рис. 31 показывает, что использования правого (положительного) базиса $\omega^+ = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ и положительно ориентированного кружка \odot эквивалентны. Базис и кружок являются своего рода измерительными приборами, позволяющие измерить ориентацию.

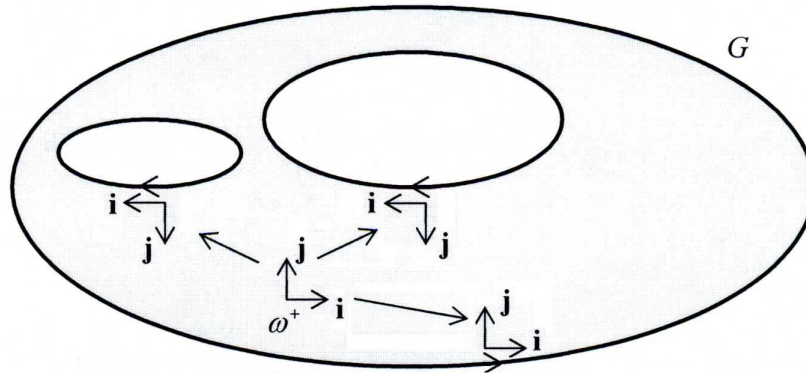


Рис. 31: Ориентация ω^+ области G индуцирует ориентацию каждой компоненты границы.

4) Мы будем рассматривать плоскость и любую ее ограниченную область G только с положительной ориентацией ω^+ . Это означает, что внешняя компонента границы ∂G всегда будет ориентирована против часовой стрелки, а внутренние компоненты границы (если таковые имеются) — по часовой стрелке.

5) Ориентация открытого или замкнутого множества G однозначно определяет ориентацию каждой компоненты его границы ∂G ; в этом случае ориентация области G и ее границы ∂G называются *согласованными*. С другой стороны, по фиксированной ориентации любой компоненты границы можно восстановить как согласованную ориентацию области, так и согласованные ориентации всех остальных компонент границы.

Загадка. Почему мы рассматриваем только открытые и замкнутые и не рассматриваем произвольные множества?

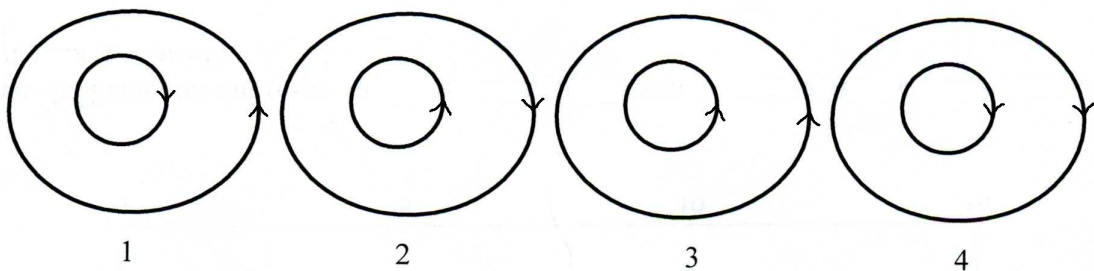


Рис. 32: Четыре ориентации границы кольца.

Пример 13.5. Рассмотрим плоское кольцо — область на плоскости, ограниченную двумя окружностями. Так как любая окружность имеет две ориентации, то пару окружностей можно ориентировать четырьмя различными способами. Эти ориентации показаны на Рис. 32. Заметим, что на Рис. 32.1

ориентация границы кольца согласована с положительной ориентацией \odot кольца. На Рис. 32.2 ориентация границы согласована с отрицательной ориентацией \ominus кольца. А на Рис. 32.3 и 32.4 ориентация границы не согласована ни с какой ориентацией кольца.

§14. Формула Грина

Определение 14.1. 1) Пусть $y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$ — гладкие ограниченные функции, такие что $y_1(x) < y < y_2(x)$ при $a < x < b$. Трапеция

$$T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

называется *трапецией 1-го типа* (см. Рис. 33).

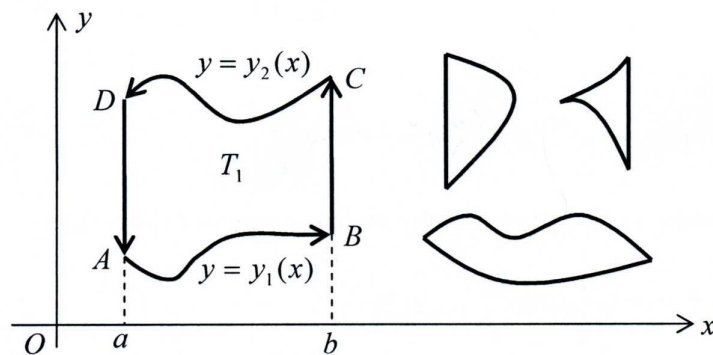


Рис. 33: Трапеции 1-го типа.

2) Пусть $x_1, x_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^1$ — гладкие ограниченные функции, такие что $x_1(y) < x < x_2(y)$ при $c < y < d$. Трапеция

$$T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \mid c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$$

называется *трапецией 2-го типа*.

При зеркальном отражении $(x, y) \mapsto (y, x)$ плоскости относительно прямой $y = x$, трапеции 1-го и 2-го типа переходят друг в друга.

Определение 14.2. Замкнутая ограниченная область $G \subset \mathbb{R}^2$, имеющая гладкую границу ∂G , называется *T-областью*, если она имеет правильные покрытия трапециями и 1-го, и 2-го типа (см. опред. 4.19).

Загадка. Рассмотрим две логарифмические спирали, имеющие в полярной системе координат уравнения $\rho = e^{-\varphi}$ и $\rho = e^{-\varphi+\pi}$. Эти спирали разбивают круг $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ на две спиралевидные ленты. Являются ли эти ленты *T-областями*?

На Рис. 34 показан фрагмент правильного покрытия области G трапециями 1-го типа, каждая из которых имеет положительную ориентацию.

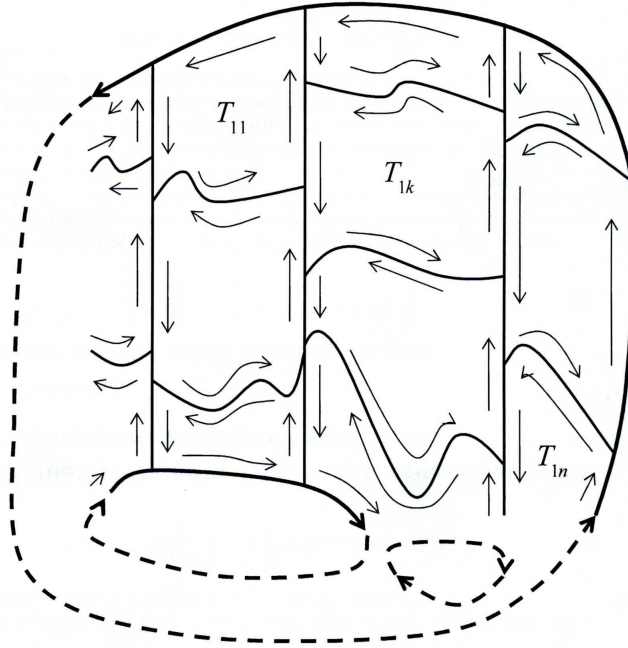


Рис. 34: T -область с правильным покрытием трапециями 1-го типа.

Ориентация трапеции в свою очередь индуцирует положительную ориентацию \odot границы трапеции. (Так как граница каждой трапеции представляет собой замкнутый контур, то ее можно использовать вместо ориентации \odot .) Две трапеции, имеющие общий фрагмент границы, индуцируют на нем противоположные ориентации. Трапеции, примыкающие к границе области G , индуцируют на ней ориентацию согласованную с положительной ориентацией области G . При этом внешняя компонента границы области G имеет положительную ориентацию \odot , а все внутренние компоненты (если таковые имеются) имеют отрицательную ориентацию \ominus . Как мы потом увидим, Рис. 34 иллюстрирует главную идею доказательства формулы Грина.

Теорема 14.3. (Формула Грина для трапеции 1-го типа.) Пусть $P : T_1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда имеет место формула

$$\int_{\partial T_1} P(x, y) dx = \iint_{T_1} \left(-\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy.$$

Доказательство. Рассмотрим трапецию T_1 , показанную на Рис. 33. Положительная ориентация трапеции согласована с ориентацией границы. По замеч. 11.2.3) имеем

$$\int_{\partial T_1} P(x, y) dx = \int_{AB} P dx + \int_{BC} P dx + \int_{CD} P dx + \int_{DA} P dx = \int_{AB} P dx + \int_{CD} P dx,$$

где последнее равенство следует из того, что $dx = 0$ на сторонах BC и DA . Оставшиеся вычисления представляют собой вычисление двойного интеграла, записанное в обратном порядке.

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y) dx - \int_{DC} P(x, y) dx &= - \left[\int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx \right] = \\ &= - \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx = - \int_a^b \left[P(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} \right] dx = \\ &= - \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy dx = - \iint_{T_1} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \iint_{T_1} \left(-\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

□

Теорема 14.4. (Формула Грина для трапеции 2-го типа.) Пусть $Q : T_2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда имеет место формула

$$\int_{\partial T_2} Q(x, y) dy = \iint_{T_2} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 14.3.

Теорема 14.5. (P -формула Грина для области.) Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ является T -областью. Пусть $P : G \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда имеет место формула

$$\int_{\partial G} P(x, y) dx = \iint_G \left(-\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy.$$

Доказательство. Пусть $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1n}$ — правильное покрытие области G трапециями 1-го типа (см. Рис. 34). По теореме 14.3 для каждой трапеции T_{1k} , где $k = 1, 2, \dots, n$, выполнена формула

$$\int_{\partial T_{1k}} P(x, y) dx = \iint_{T_{1k}} \left(-\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy.$$

Суммируя по k левые и правые части этих формул,

$$\sum_{k=1}^n \int_{\partial T_{1k}} P(x, y) dx = \sum_{k=1}^n \iint_{T_{1k}} \left(-\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy.$$

По свойству аддитивности интегралов имеем

$$\int_{\bigcup_{k=1}^n \partial T_{1k}} P(x, y) dx = \iint_{\bigcup_{k=1}^n T_{1k}} \left(-\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy.$$

Из Рис. 34 видно, что интегрирование по общим границам соседних трапеций происходит в правой части дважды: в одной трапеции в одном, а в соседней трапеции в противоположном направлении. Так как интегралы слева являются криволинейными интегралами 2-го рода, то сумма всех интегралов по общим границам соседних трапеций равна нулю. Поэтому выражение $\int_{\bigcup_{k=1}^n \partial T_{1k}}$ в интеграле слева можно заменить на $\int_{\partial G}$ (главная идея доказательства). Так как по условию покрытие области G трапециями T_{1k} является правильным, то $\bigcup_{k=1}^n T_{1k} = G$. После этой замены получим требуемый результат. \square

Теорема 14.6. (*Q-формула Грина для области.*) Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ является T -областью. Пусть $Q : G \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда имеет место формула

$$\int_{\partial G} Q(x, y) dy = \iint_G \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 14.5.

Загадка. Почему в правой части предыдущей формулы нет знака минус?

Теорема 14.7. (*Формула Грина.*) Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ является T -областью. Пусть $P, Q : G \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывно дифференцируемые функции. Тогда имеет место формула

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Доказательство. Формула получается в результате сложения формул 14.5 и 14.6. \square

§15. Независимость от пути интегрирования

Теорема 15.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная T -область; $P, Q : G \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывно дифференцируемые функции; и $C \subset G$ — замкнутая гладкая кривая, лежащая в G . Тогда равенства

$$(i) \oint_C P dx + Q dy = 0 \quad \text{и}$$

$$(ii) \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

эквивалентны.

Доказательство. 1) (i) \rightarrow (ii). Так как область G односвязна (в ней нет дырок), то контур C охватывает некоторую область A , которая тоже является односвязной. Если верно (i), то по формуле Грина имеем

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Применяя к интегралу теорему о среднем, получим

$$\left(\frac{\partial Q(M^*)}{\partial x} - \frac{\partial P(M^*)}{\partial y} \right) S = 0,$$

где S — площадь области A , а $M^* \in A$ — фиксированная точка. Выберем произвольную точку $M_0 \in A$ и непрерывно стянем контур C по области A в точку M_0 . Это стягивание можно осуществить, потому что область A односвязна (в ней нет дырок). При таком стягивании контур C стягивается в точку M_0 , то есть $C \rightarrow M_0$, и при этом $M^* \rightarrow M_0$. Можно видеть, что

$$\begin{aligned} \lim_{C \rightarrow M_0} \frac{1}{S} \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \lim_{C \rightarrow M_0} \left(\frac{\partial Q(M^*)}{\partial x} - \frac{\partial P(M^*)}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial Q(M_0)}{\partial x} - \frac{\partial P(M_0)}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Т.к. $M_0 \in A$ — произвольная точка, и $C \subset G$ — произвольный контур, то для всех точек $M \in G$ имеем $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

2) (ii) \rightarrow (i). Этот пункт очевидно следует из формулы Грина. \square

Загадка. Для областей, которые не являются односвязными предыдущая теорема, вообще говоря, не верна. Почему?

Теорема 15.2. Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная T -область и $P, Q : G \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывно дифференцируемые функции. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

- (i) Для любого контура $C \subset G$ справедливо равенство $\oint_C Pdx + Qdy = 0$.
- (ii) Для любых точек $A, B \in G$ значение интеграла $\int_A^B Pdx + Qdy$ не

зависит от пути, целиком лежащим в G .

(iii) Выражение $Pdx + Qdy$ есть полный дифференциал некоторой функции $U : G \rightarrow \mathbb{R}^1$, то есть $dU = Pdx + Qdy$.

- (iv) В области G справедливо равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Доказательство. Доказательство проведем по следующей логической схеме

$$(i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iii) \rightarrow (iv) \rightarrow (i).$$

1) (i) \rightarrow (ii). Пусть ACB и ADB — два пути целиком лежащие в G . Из утверждения (i) следует $\oint_{ACBDA} Pdx + Qdy = 0$. Из свойства аддитивности интеграла следует, что $\int_{ACB} Pdx + Qdy + \int_{BDA} Pdx + Qdy = 0$, а из 12.3 следует, что $\int_{ACB} Pdx + Qdy = \int_{ADB} Pdx + Qdy$.

2) (ii) \rightarrow (iii). Докажем, что функция $U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$ является искомой. Докажем, что $U(x, y)$ дифференцируема и что $dU = Pdx + Qdy$, то есть, что производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ существуют и $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ и $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$. Вычислим сначала

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x - \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{(x_0, y_0)}^{(x - \Delta x, y)} Pdx + Qdy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{(x, y)}^{(x - \Delta x, y)} Pdx + Qdy = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{(x, y)}^{(x - \Delta x, y)} Pdx. \end{aligned}$$

По теореме о среднем значении интеграла окончательно получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{(x, y)}^{(x - \Delta x, y)} Pdx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x, y),$$

где константа θ удовлетворяет неравенству $0 < \theta < 1$.

Аналогично можно доказать, что $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$.

3) (iii) \rightarrow (iv). Доказательство этого пункта непосредственно следует из теоремы о независимости порядка дифференцирования в смешанных производных.

4) (iv) \rightarrow (i). Это было доказано в теореме 15.1. □

Загадка. Почему в не односвязных областях интеграл 2-го рода по замкнутому контуру от полного дифференциала может быть не равен нулю?

Теорема 15.3. 1) Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная T -область.

2) Пусть $U, P, Q : G \rightarrow \mathbb{R}^1$ — такие функции, что U — дифференцируемая, P, Q — непрерывно дифференцируемые и $dU = Pdx + Qdy$.

3) Точки $A = (x_0, y_0)$, $B = (x, y_0)$ и $C = (x, y)$ вместе с прямолинейными отрезками AB и BC принадлежат области G .

Тогда первообразная функция $U(x, y)$ вычисляется по формуле

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} P(x, y_0) dx + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} Q(x, y) dy.$$

Доказательство. Доказательство следует из 15.2.(ii) и 15.2.(iii). □

Замечание 15.4. Все утверждения §14 и §15 останутся справедливыми, если

1) в опред. 14.2 условие *гладкости границы* ∂G заменить на условие ее *кусочной гладкости*, или

2) условие того, что $P, Q : G \rightarrow \mathbb{R}^1$ — *непрерывно дифференцируемые функции* заменить на их *непрерывную дифференцируемость в области* $G \setminus \partial G$ и на *непрерывность на границе* ∂G .

Глава 4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§16. Поверхности

Обозначим открытый круг $\{u^2 + v^2 < 1\}$ и полукруг $\{u^2 + v^2 < 1, u \geq 0\}$ через D и D_+ соответственно (см. Рис. 35).

Определение 16.1. Множество $S \subset \mathbb{R}^3$ называется *простой поверхностью* или короче *поверхностью*, если для каждой точки $M \in S$

либо 1) существуют окрестность Ω (т.е. $M \in \Omega \subset S$) и биективное отображение $\varphi : D \rightarrow \Omega$, такое что φ и φ^{-1} непрерывны (см. Рис. 35.1),

либо 2) существуют окрестность Ω_+ (т.е. $M \in \Omega_+ \subset S$) и биективное отображение $\varphi_+ : D_+ \rightarrow \Omega_+$, такое что φ_+ и φ_+^{-1} непрерывны (см. Рис. 35.2).

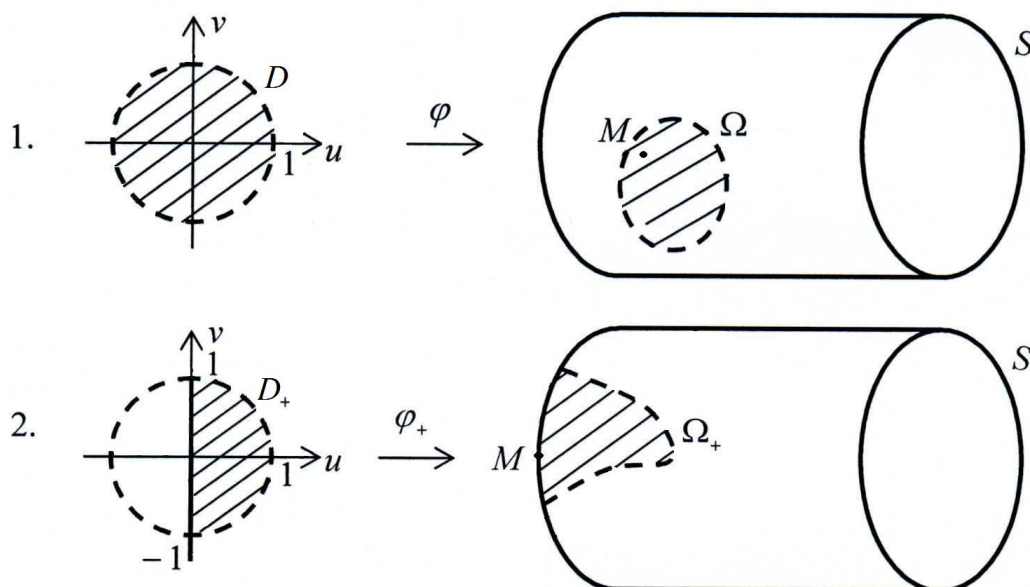


Рис. 35: Простая поверхность S в \mathbb{R}^3 .

Если точка M имеет окрестность Ω , то она называется *внутренней* точкой поверхности S . Если точка M имеет окрестность Ω_+ , то она называется *граничной* точкой поверхности S . Множество граничных точек называется *границей* поверхности S и обозначается ∂S . Если поверхность ограничена и $\partial S = \emptyset$, то поверхность называется *замкнутой*.

Проще говоря, множество $S \subset \mathbb{R}^3$ называется простой поверхностью, если каждая его точка имеет либо окрестность, похожую на открытый круг D , либо окрестность, похожую на полукруг D_+ .

Примеры. Плоскость, сфера и поверхность куба являются простыми поверхностями.

Загадка. Почему объединение двух пересекающихся плоскостей (например, $y = 0$ и $z = 0$) не является простой поверхностью?

Определение 16.2. 1) Если в опред. 16.1 отображения $\varphi, \varphi^{-1}, \varphi_+, \varphi_+^{-1}$ являются непрерывно дифференцируемыми, то поверхность S называется *гладкой*.

2) Поверхность S называется *кусочно гладкой*, если существует ее правильное покрытие (см. 4.19) гладкими поверхностями.

Примеры. Плоскость и сфера являются гладкими поверхностями. Поверхность куба не является гладкой, но является кусочно гладкой поверхностью.

Замечание 16.3 (о способах задания поверхности).

1) Явное задание $S = \{z = z(x, y)\}$.

2) Неявное задание $S = \{F(x, y, z) = 0\}$.

3) Параметрическое задание поверхности. Пусть \overline{G} замыкание области $G \subset \mathbb{R}^2$. Тогда непрерывное отображение $\mathbf{r} : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$, определяемое по формуле

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

осуществляет параметрическое задание поверхности $S = \mathbf{r}(\overline{G})$ в \mathbb{R}^3 . Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать такие отображения $\mathbf{r} : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$, для которых ограничение $\mathbf{r} : G \rightarrow \mathbf{r}(G)$ есть биективное гладкое отображение, а ограничение $\mathbf{r} : \partial G \rightarrow \mathbf{r}(\partial G)$ есть гладкое отображение.

Пример. Формула

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = R \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + R \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + R \cos \theta \mathbf{k}$$

реализует отображение прямоугольника $\overline{G} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ на сферу $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ (см. Рис. 36.2). Нетрудно видеть, что стороны $0 \times [0, \pi]$ и $2\pi \times [0, \pi]$ взаимно однозначно отображаются на меридиан, проходящий через точку $(R, 0, 0)$, а стороны $[0, 2\pi] \times 0$ и $[0, 2\pi] \times \pi$ отображаются соответственно в полюсы $(0, 0, R)$ и $(0, 0, -R)$. При этом параметр θ есть угол между радиус-вектором $\mathbf{r}(\varphi, \theta) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ и осью Oz , параметр φ есть угол между проекцией радиус-вектора $\mathbf{r}(\varphi, \theta)$ на плоскость Oxy и осью Ox .

Замечание 16.4 (о криволинейной системе координат на поверхности). Пусть G — односвязная замкнутая область в плоскости \mathbb{R}^2 с координатами (u, v) и вектор-функция $\mathbf{r} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ реализует гладкую поверхность $S = \mathbf{r}(G)$ в пространстве \mathbb{R}^3 (см. Рис. 24). Уравнения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ суть параметрические уравнения образов прямых $v = v_0$ и $u = u_0$ на поверхности S в пространстве \mathbb{R}^3 .

Другой подход внесения координат на поверхности S осуществляют так называемые криволинейные координаты. Эти координаты вводятся следую-

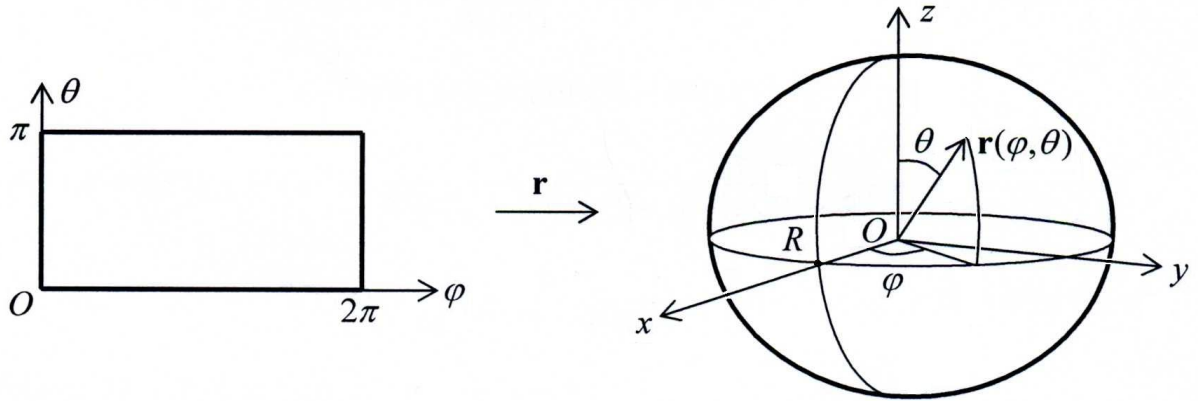


Рис. 36: Отображение прямоугольника на сферу.

щим образом (см. Рис. 37). Каждой точке $\mathbf{r}(u, v)$ на поверхности S (явочным порядком) приписывают координаты (u, v) , то есть точке приписывают координаты её прообраза (!). Поэтому точка $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ имеет криволинейные координаты (u_0, v_0) , а линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ в криволинейных координатах имеют соответственно уравнения $v = v_0$ и $u = u_0$.

Криволинейные координаты имеют простое геометрическое объяснение. По нашему соглашению внутренность множества G биективно отображается на свой образ $S = \mathbf{r}(G)$, и если координаты точек и уравнения линий из G перенести в $S = \mathbf{r}(G)$, то в образе $S = \mathbf{r}(G)$ возникнет криволинейная система координат.

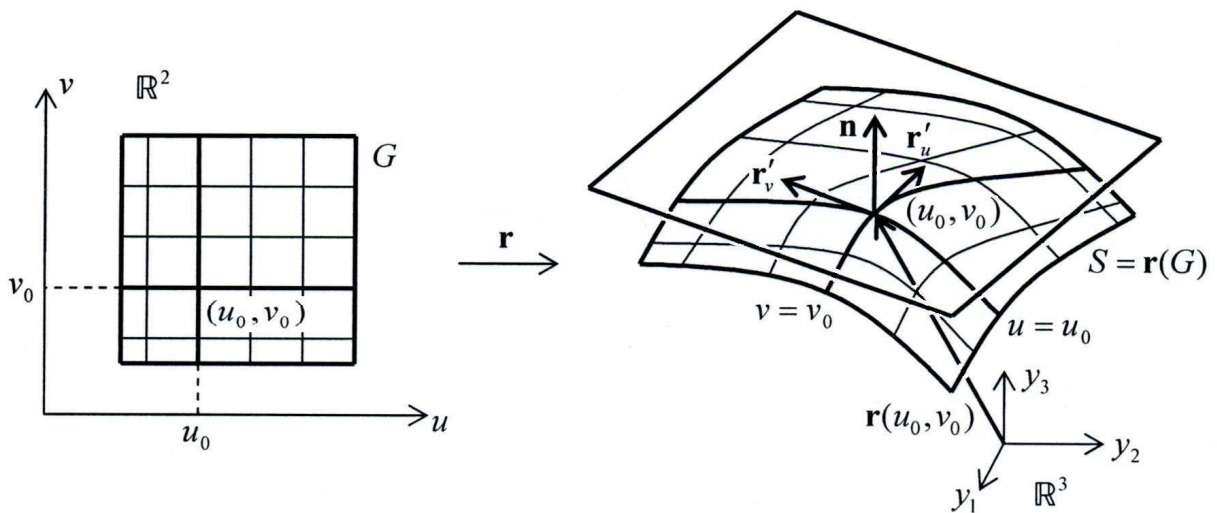


Рис. 37: Криволинейные координаты.

По замечанию 7.3 линейная оболочка векторов \mathbf{r}'_u и \mathbf{r}'_v есть касательная

плоскость к поверхности S в точке с криволинейными координатами (u_0, v_0) . Упорядоченная пара векторов $(\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v)$ есть базис векторного пространства в касательной плоскости (см. Рис. 37).

Определение 16.5. Единичный вектор $\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v]}{||[\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v]||}$, перпендикулярный к касательной плоскости, называется вектором *нормали* к поверхности S в точке (u_0, v_0) .

Замечание 16.6. 1) Из векторной алгебры известно, что уравнение касательной плоскости к поверхности S в точке M_0 есть $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, [\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v]|_{M_0}) = 0$.

2) Если поверхность задана явно $z = z(x, y)$, то уравнение $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z(x, y)\mathbf{k}$ можно рассматривать как параметрическое уравнение поверхности, и уравнение касательной плоскости можно записать в виде $z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}|_{M_0}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}|_{M_0}(y - y_0)$.

3) Если поверхность задана неявно $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

§17. Ориентируемые и неориентируемые поверхности

В этой главе мы разовьем теорию интегрирования на кусочно гладких поверхностях в трехмерном пространстве. Прежде чем начать изложение теории интегрирования, нам необходимо пополнить запас поверхностей и изучить ориентируемые и неориентируемые поверхности.

Рассмотрим квадрат, внутренность которого представляет собой эластичную (мыльную) плёнку. Будем считать, что его можно деформировать без разрывов. В частности, допустимо растяжение его в длинную прямоугольную ленту и допустимо склеивание его сторон. Например, если склеить две противоположные стороны квадрата вдоль стрелок так, как показано на Рис. 38.1, то получится цилиндр, а если склеить как показано на Рис. 38.2, то получится поверхность, называемая *лентой Мёбиуса*.

На Рис. 39 показаны три классические поверхности, которые можно получить в результате склеивания противоположных сторон квадрата. Стороны, приклеиваемые друг к другу, обозначены одной и той же буквой, а стрелки при склеивании должны быть коллинеарны. Полученные поверхности называются *тором*, *бутылкой Клейна* и *проективной плоскостью*. Процесс их склеивания показан на Рис. 41 — 43. На Рис. 43.3 для наглядности показан горизонтальный уровень γ .

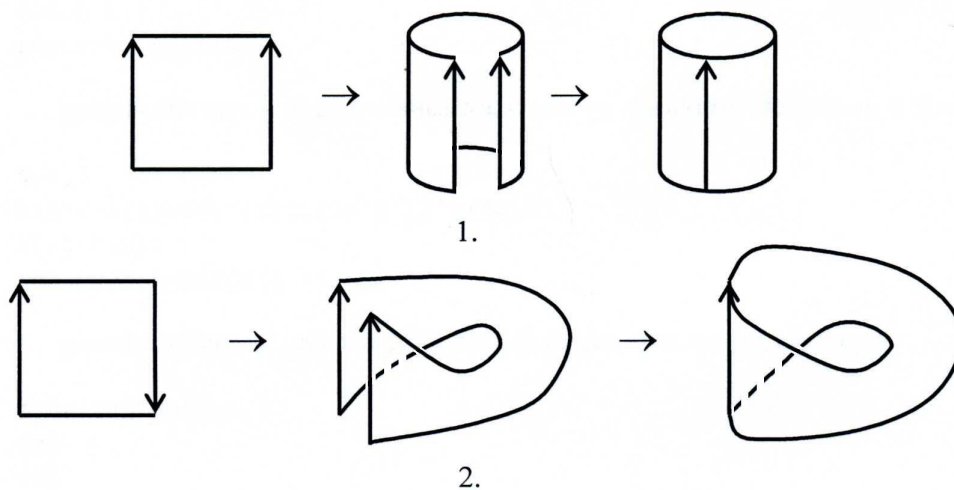


Рис. 38: Склеивание цилиндра и ленты Мёбиуса.

Заметим, что в трёхмерном пространстве бутылку Клейна и проективную плоскость нельзя реализовать как поверхности без самопересечения. Однако можно показать, что в четырёхмерном пространстве эти поверхности можно реализовать без самопересечения (как тор в трёхмерном пространстве).

Проективную плоскость (как впрочем тор и бутылку Клейна) можно склеить из круга. Напомним, что квадрат мы условились рассматривать как эластичную плёнку. Растягивая квадрат, можно получить эластичный круг как показано на Рис. 40 и склеить граничные точки круга по стрелкам в той же манере, как мы склеивали граничные точки квадрата. Модель проективной плоскости, показанная на Рис. 40, называется *проективным кругом*. Заштрихованная область на проективной плоскости на Рис. 40 является листом Мёбиуса, потому что склеивается по стрелкам a также как на Рис. 38.2.

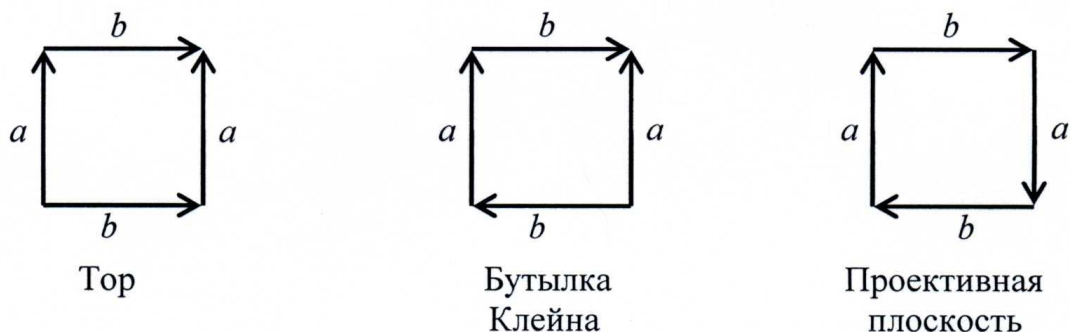


Рис. 39: Три классические поверхности.

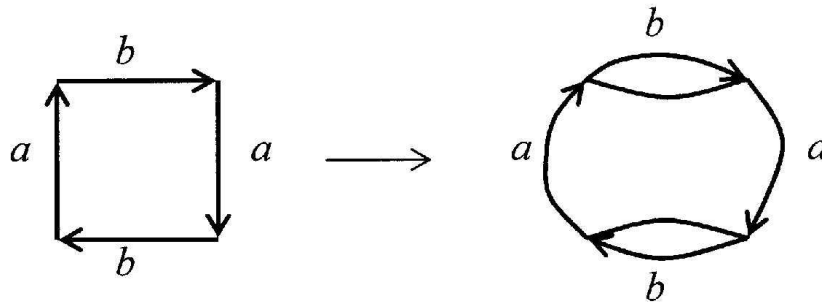


Рис. 40: Деформация квадрата в круг.

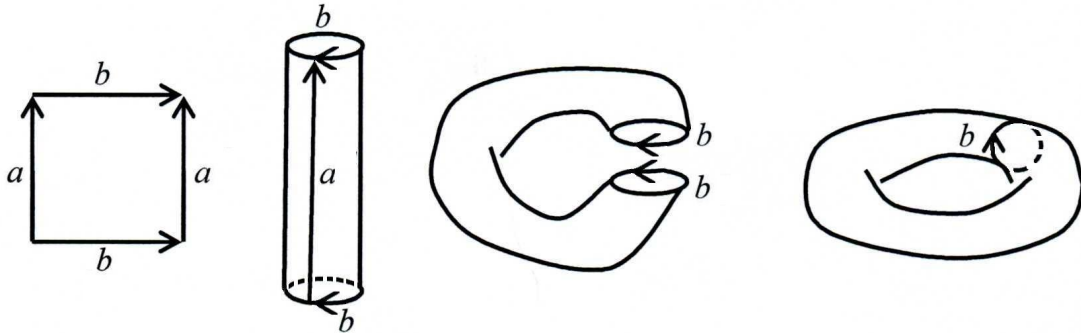


Рис. 41: Склеивание тора.

Пусть M_0 — внутренняя точка гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$, пусть $O_r(M_0) \subset \mathbb{R}^3$ — её открытая окрестность, тогда по опред. 4.1* $\Omega_r(M_0) = S \cap O_r(M_0)$ — открытая окрестность точки M_0 на поверхности S (см. Рис. 44). Выберем радиус r таким (малым), чтобы окрестность $\Omega_r(M_0)$ на поверхности S была односвязной. Базис $(\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v)$ задает ориентацию ω^+ на касательной плоскости к поверхности S в точке M_0 . Пусть ориентация ω^+ реализована маленькой окружностью в касательной плоскости. Проектируя эту окружность на поверхность S вдоль вектора нормали, получим маленькую окружность на поверхности S , охватывающую точку M_0 , которая реализует некоторую ориентацию односвязной окрестности $\Omega_r(M_0)$. Эту ориентацию мы будем обозначать тем же символом ω^+ . Таким образом определяется ориентация каждой односвязной окрестности на поверхности S .

Возникает естественный вопрос. Можно ли по ориентации ω^+ , окрестности $\Omega_r(M_0)$, определить ориентацию всей поверхности S ? Ответ на этот вопрос даёт конструкция, описанная в следующем определении.

Обозначим через C произвольный замкнутый контур на поверхности S , непроходящий через точки ее границы ∂S .

Определение 17.1. Если при движении окружности ω^+ по поверхности S вдоль любого замкнутого контура C она возвращается в исходное положение с той же ориентацией, то поверхность S называется *ориентируемой*,

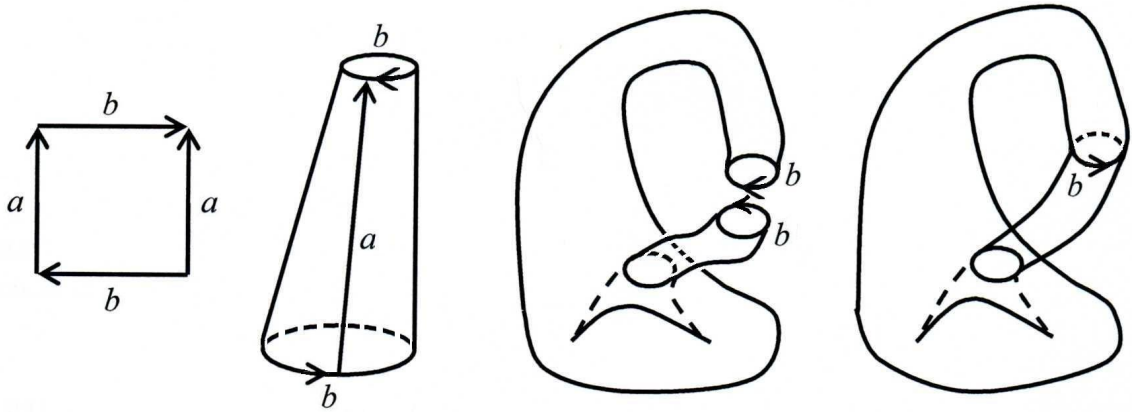


Рис. 42: Склеивание бутылки Клейна.

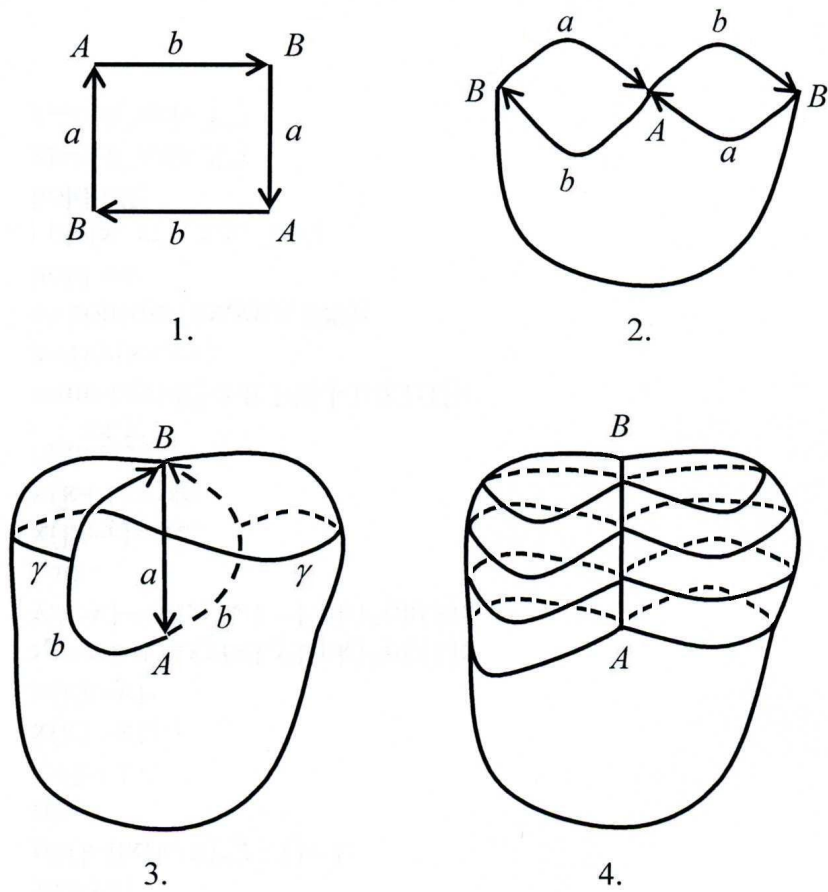


Рис. 43: Склеивание проективной плоскости.

а если с противоположной ориентацией – *неориентируемой* поверхностью. Ориентируемая поверхность с выбранной ориентацией (одной из двух) называется *ориентированной* поверхностью. Другими словами, ориентированная поверхность есть пара (S, ω) , где либо $\omega = \omega^+$ либо $\omega = \omega^-$.

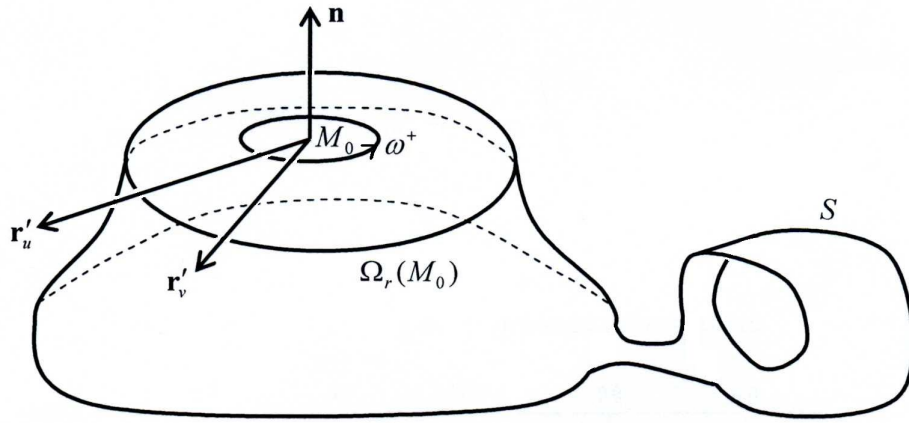


Рис. 44: Окружность $\Omega_r(M_0)$ и её ориентация ω^+ .

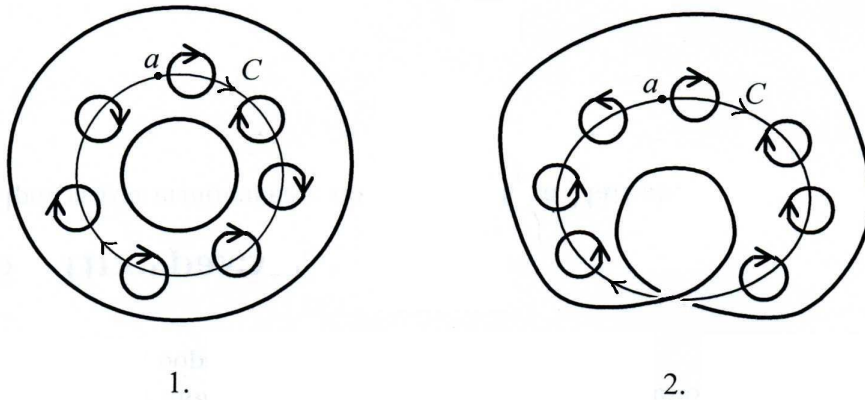


Рис. 45: Кольцо (цилиндр) — ориентируемо, а лента Мёбиуса — нет.

Замечание 17.2. Т.к. предыдущее определение использует только внутренние объекты (окружность $\omega^+ \subset S$ и произвольный контур $C \subset S$), то ориентируемость поверхности S есть её внутреннее свойство, независящее от того, является ли S подмножеством какого-либо другого множества или рассматривается сама по себе.

Примеры. Сфера, тор и цилиндр (см. Рис. 45.1) — ориентируемые поверхности. Лента Мёбиуса (см. Рис. 45.2), бутылка Клейна и проективная плоскость — неориентируемые поверхности.

Определение 17.3. Если при движении вектора нормали \mathbf{n} по поверхности S вдоль любого замкнутого контура C он возвращается в исходное положение с тем же направлением, то поверхность S называется *двусторонней*; в противном случае — *односторонней*.

Замечание 17.4. 1) Предыдущее определение использует внешний по отношению к поверхности S объект: вектор нормали \mathbf{n} . При этом молчаливо подразумевается, что поверхность S содержится в каком-то объемлющем евклидовом пространстве, в котором можно определить вектор нормали в

каждой точке поверхности. Если рассматривать поверхность S саму по себе (т.е., несодержащейся ни в каком объемлющем пространстве), то вектор нормали ни в какой её точке вообще определить нельзя. Таким образом, свойство поверхности быть двусторонней или односторонней не является внутренним свойством поверхности S и зависит от того, как она расположена в объемлющем множестве.

2) Следующие примеры показывают, что определения 17.1 и 17.3 являются независимыми. Одна и та же ориентируемая или неориентируемая поверхность может быть как односторонней, так и двусторонней.

Примеры. 1) В пространстве \mathbb{R}^3 сфера, тор и цилиндр являются ориентируемыми и двусторонними поверхностями.

2) В пространстве \mathbb{R}^3 лента Мёбиуса является неориентируемой и односторонней поверхностью.

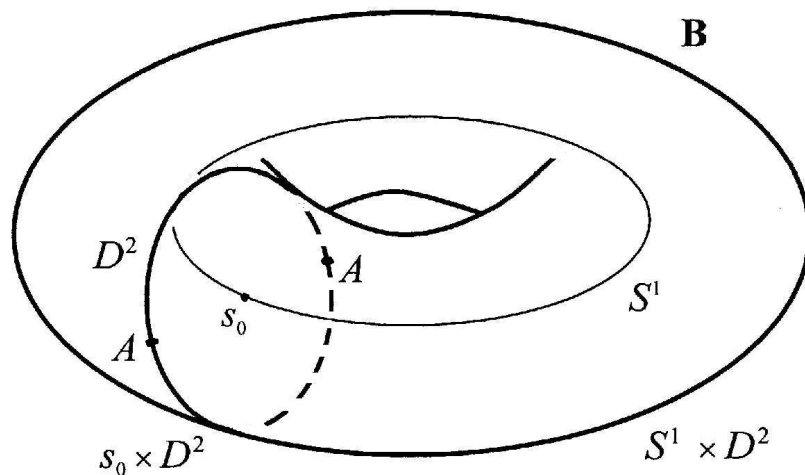


Рис. 46: Баранка со склеенной "шкурой" \mathbf{B} .

3) Рассмотрим баранку $S^1 \times D^2$, т.е. сплошной тор (см. Рис. 46). На Рис. 46 первый множитель S^1 декартова произведения представляет среднюю окружность тора. Каждый его слой $s_0 \times D^2$, где $s_0 \in S^1$ (см. опред. 1.6) есть замкнутый круг. Склеим в каждом таком слое пары диаметрально противоположных точек. На торе показана одна пара склеенных точек, обозначенных буквой A . После склейки каждый слой $s_0 \times D^2$ превратится в проективную плоскость, а вся баранка превратится в трёхмерное пространство, которое мы обозначим через \mathbf{B} и назовём *баранкой со склеенной "шкурой"*. Так как каждая точка пространства \mathbf{B} имеет открытую шаровую окрестность, то оно не имеет границы (как, например, и \mathbb{R}^3). В отличие от \mathbb{R}^3 пространство \mathbf{B} неориентируемо.

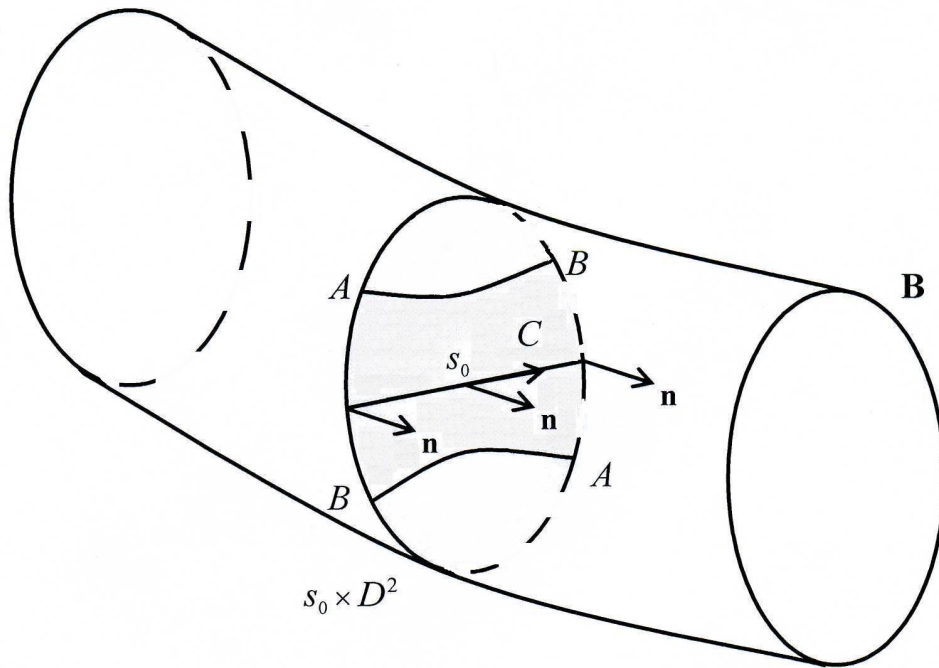


Рис. 47: Лента Мёбиуса — двусторонняя поверхность в \mathbf{B} .

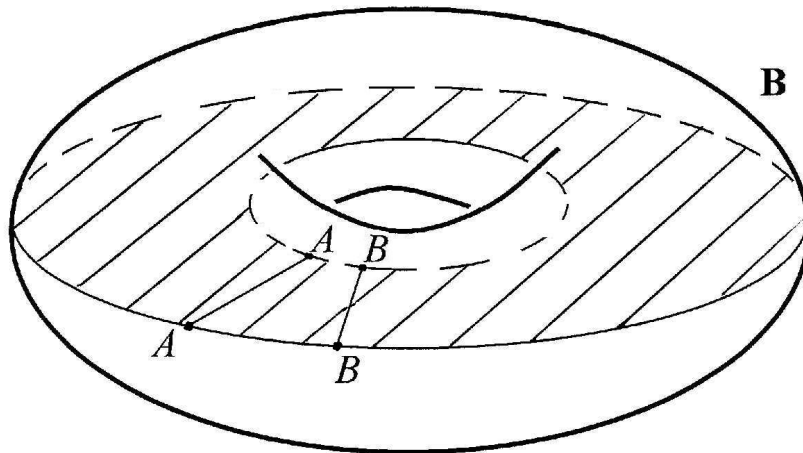


Рис. 48: Заштрихованная поверхность есть тор в \mathbf{B} .

(Заметим в скобках, что нам нет необходимости пытаться вообразить глобальное устройство пространства \mathbf{B} , потому что всё, что мы захотим увидеть, мы увидим с помощью модели, показанной на Рис. 46. Заметим также, что трёхмерное пространство, в котором мы живём, в принципе может иметь такую же глобальную структуру как пространство \mathbf{B} , а вовсе не как \mathbb{R}^3 . В настоящее время не известно, является ли пространство, в котором

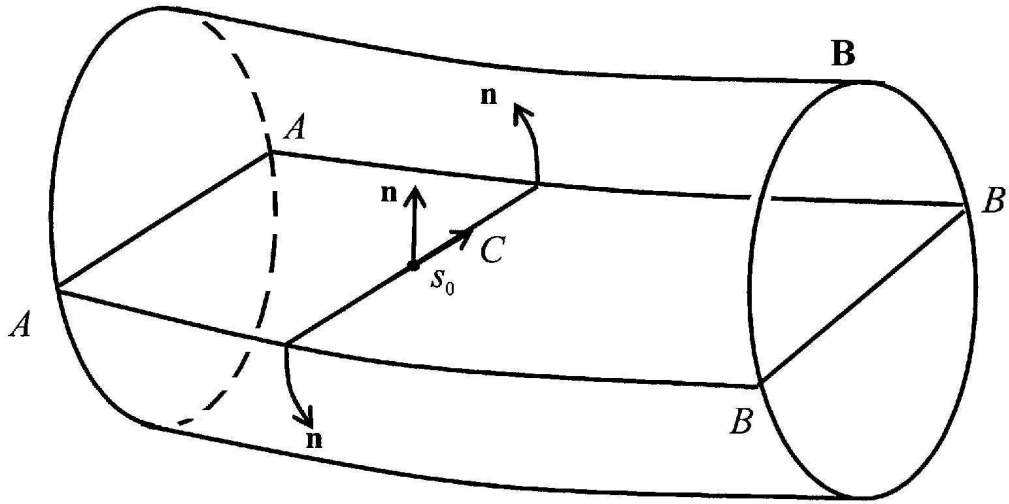


Рис. 49: Тор — односторонняя поверхность в \mathbf{V} .

мы живём, ориентируемым или нет.)

Рассмотрим фрагмент пространства \mathbf{V} вместе со слоем $s_0 \in S^1$, показанные на Рис. 47. На этом же рисунке показана (затемнённая) лента Мёбиуса $ABAB$. Проведём на ленте Мёбиуса через точку s_0 среднюю линию C . Средняя линия ленты Мёбиуса является замкнутым контуром. Выберем на контуре C в точке s_0 вектор нормали \mathbf{n} , и будем двигать его вдоль C в указанном на Рис. 47 направлении. Заметим, что крайние положения вектора \mathbf{n} на Рис. 47 представляют собой один и тот же вектор нормали к ленте Мёбиуса в пространстве \mathbf{V} . Видно, что вектор нормали вернётся в исходную точку s_0 , не изменив направления. Это означает, что в пространстве \mathbf{V} лента Мёбиуса $ABAB$ является двусторонней поверхностью.

4) Рассмотрим теперь среднее сечение баранки (кольцо), заштрихованное на Рис. 48. В пространстве \mathbf{V} это кольцо при склеивании "шкуры" превращается в тор. Рассмотрим фрагмент пространства \mathbf{V} вместе с фрагментом $AABV$ тора, показанные на Рис. 49. Проведём на торе через точку s_0 замкнутый контур C . Выберем на контуре C в точке s_0 вектор нормали \mathbf{n} , и будем двигать его вдоль C в указанном Рис. 49 направлении. Заметим, что крайние положения вектора \mathbf{n} на Рис. 49 представляют собой один и тот же вектор нормали к листу Мёбиуса в пространстве \mathbf{V} . Видно, что вектор нормали вернётся в исходную точку s_0 , изменив направление на противоположное. Это означает, что в пространстве \mathbf{V} тор T является односторонней поверхностью.

Теорема 17.5. *В евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 поверхность ориентируема тогда и только тогда, когда она двусторонняя.* (Без доказатель-

ства.)

Определение 17.6. Если S — двусторонняя поверхность и \mathbf{n} — вектор нормали к S , то пара (S, \mathbf{n}) называется *стороной* поверхности.

Выбрать сторону поверхности означает выбрать один из двух векторов нормали \mathbf{n} или $-\mathbf{n}$.

§18. Площадь поверхности

Лемма 18.1. Если $S \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая поверхность, то для любой ее внутренней точки $M_0 \in S$ существует такое число $r_0 > 0$, что для всех $r \in (0, r_0]$ окрестность $\Omega_r(M_0) \subset S$ взаимно однозначно проектируется на касательную плоскость K вдоль вектора нормали в точке M_0 . (Без доказательства.)

Определение 18.2. 1) Пусть S — гладкая ограниченная поверхность.

2) Пусть $\{S_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ — правильное покрытие поверхности S .

3) Пусть для любой точки $M_i \in S_i$ элемент S_i покрытия взаимно однозначно проектируется вдоль вектора нормали $\mathbf{n}(M_i)$ на некоторый элемент K_i в касательной плоскости, проведенной в точке M_i .

4) Обозначим через ΔK_i площадь элемента K_i и составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^n \Delta K_i$.

Тогда предел

$$\sigma = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \text{Diam } S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta K_i$$

называется *площадью* поверхности S . Если этот предел конечен, то поверхность называется *квадрируемой*.

В дальнейшем мы будем рассматривать только квадрируемые поверхности.

Теорема 18.3. Если гладкая ограниченная поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ задана в параметрической форме $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, где $(u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2$, то её площадь вычисляется по формуле

$$\sigma(S) = \iint_G |[\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v]| dudv.$$

Доказательство. Сначала заметим, что поверхность S — гладкая, то есть \mathbf{r}'_u , \mathbf{r}'_v и $[\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v]$ — непрерывны. Поэтому двойной интеграл существует.

Пусть $\{S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_n\}$ правильное покрытие поверхности S , каждый элемент которого удовлетворяет лемме 18.1. Тогда в прообразе $G =$

$\mathbf{r}^{-1}(S)$ возникает правильное покрытие $\{G_1, G_2, \dots, G_i, \dots, G_n\}$, где $G_i = \mathbf{r}^{-1}(S_i)$ и $i = 1, 2, \dots, n$. При этом из $\text{Diam } G_i \rightarrow 0$ следует $\text{Diam } S_i \rightarrow 0$ и наоборот.

Выберем произвольную точку $M_i \in S_i$ и проведем касательную плоскость K к поверхности S в этой точке. Выберем локальную декартову систему координат $\{O, (x, y, z)\}$, где начало координат O совпадает с точкой M_i , $\{O, (x, y)\}$ — система координат в касательной плоскости K , и ось Oz перпендикулярна плоскости K . Выбор такой системы координат позволит упростить вычисления.

Пусть в этой системе координат уравнения куска S_i поверхности S записаны в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), & (u, v) \in G_i \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Тогда уравнения элемента $K_i \subset K$, в который проектируется кусок S_i , запишутся в виде

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), & (u, v) \in G_i \\ z = 0 \end{cases}$$

Последние уравнения представляют собой биективное отображение замкнутых областей K_i и G_i . Это свойство вместе с гладкостью вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ обеспечивает интегрируемость функции $|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|$.

Площадь ΔK_i элемента K_i можно вычислить с помощью двойного интеграла

$$\Delta K_i = \iint_{K_i} dx dy = \iint_{G_i} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv,$$

где

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \mathbf{k} \right| = \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & x'_v & 0 \\ y'_u & y'_v & 0 \end{vmatrix} \right| = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|.$$

Поэтому $\Delta K_i = \iint_{G_i} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv$.

По теореме о среднем для двойного интеграла имеем

$$\Delta K_i = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \Big|_{(u_i^*, v_i^*)} \Delta G_i,$$

где $(u_i^*, v_i^*) \in G_i$, а ΔG_i есть площадь элемента G_i . Таким образом,

$$\sum_{i=1}^n \Delta K_i = \sum_{i=1}^n \left| [\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v] \right|_{(u_i^*, v_i^*)} \Delta G_i.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и $\max \text{Diam } G_i \rightarrow 0$ получим требуемую формулу. □

§19. Поверхностные интегралы 1-го рода

Определение 19.1. 1) Пусть S — гладкая ограниченная поверхность.

2) Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ — ограниченная функция и $f(M)$ ее значение в точке $M \in S$.

3) Пусть $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ — произвольное правильное покрытие поверхности S .

4) Обозначим через ΔS_i площадь элемента S_i .

5) Выберем произвольную точку $M_i \in S_i$ и составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$.

Если существует конечный предел интегральных сумм

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i,$$

то он называется *поверхностным интегралом 1-го рода* и обозначается $\iint_S f(M) dS$, а функция $f(M)$ называется *интегрируемой* на поверхности S .

Замечание 19.2. Поверхностный интеграл 1-го рода определен как на ориентируемых, так и на неориентируемых поверхностях.

Теорема 19.3. Пусть S — гладкая ограниченная поверхность, заданная параметрически $\mathbf{r} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ по формуле $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$, и $f : S \rightarrow \mathbb{R}^1$ — функция, интегрируемая на S . Тогда

$$\iint_S f(M) dS = \iint_G f(\mathbf{r}(u, v)) |[\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v]| dudv.$$

Доказательство. Выберем произвольное правильное покрытие $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ поверхности S , каждый элемент которого удовлетворяет лемме 18.1. Тогда $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ есть правильное покрытие области G , где

$G_i = \mathbf{r}^{-1}(S_i)$ и $i = 1, 2, \dots, n$. Выберем в каждом элементе S_i произвольную точку M_i и составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$.

По теореме 18.3 имеем $\Delta S_i = \sigma(S_i) = \iint_{G_i} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv$. По теореме о среднем значении двойного интеграла $\Delta S_i = \left| [\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v] \right|_{(u_i^*, v_i^*)} \Delta G_i$, где $(u_i^*, v_i^*) \in G_i$ и ΔG_i есть площадь элемента G_i .

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n (f(M_i) \left| [\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v] \right|)_{(u_i^*, v_i^*)} \Delta G_i.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и $\max \text{Diam } G_i \rightarrow 0$ получим требуемую формулу. □

Следствие 19.4. Если гладкая поверхность S задана явно $S = \{z = z(x, y)\}$, то

$$\iint_S f(M) dS = \iint_{\bar{G}} f((x, y, z(x, y))) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Доказательство. Т.к. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z(x, y)\mathbf{k}$, то

$$[\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

и

$$\left| [\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y] \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

□

§20. Поверхностные интегралы 2-го рода

Определение 20.1. 1) Пусть S — гладкая ограниченная ориентируемая поверхность в \mathbb{R}^3 , и ω^+ — одна из двух ее ориентаций.

2) Пусть $\mathbf{n}(M)$ — вектор нормали к поверхности S в точке $M \in S$, согласованный с выбранной ориентацией.

3) Пусть $\mathbf{A} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ — ограниченная вектор-функция, заданная на поверхности S .

Тогда интеграл $\iint_S (\mathbf{A}(M) \cdot \mathbf{n}(M)) dS$ называется *поверхностным интегралом 2-го рода*.

Замечание 20.2. При замене ориентации ω^+ на противоположную вектор нормали \mathbf{n} меняется на $-\mathbf{n}$, и поэтому при такой замене интеграл 2-го рода меняет знак.

Замечание 20.3. Если вектор-функция и вектор нормали заданы в стандартном базисе, то есть $\mathbf{A}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}$, где $M = (x, y, z)$, и $\mathbf{n}(M) = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$, где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора нормали, то поверхностный интеграл 2-го рода может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \\ &= \iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy, \end{aligned}$$

где $\cos \alpha dS = dydz$, $\cos \beta dS = dx dz$, $\cos \gamma dS = dx dy$.

Замечание 20.4. Справедлива формула

$$\iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy = \iint_S P dydz + \iint_S Q dx dz + \iint_S R dx dy$$

при условии, что все интегралы существуют.

Теорема 20.5. Пусть S — гладкая ограниченная ориентируемая поверхность в \mathbb{R}^3 и $\mathbf{r} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ — ее гладкая параметризация, где $G \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая область. Тогда

$$\iint_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_G (\mathbf{A}, \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v) dudv.$$

Доказательство. Подставим $\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v]}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}$ и $dS = |[\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v]| dudv$ в $\iint_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS$, получим требуемый результат. □

§21. Формула Гаусса-Остроградского

Определение 21.1. Пусть G_{xy} — замкнутая ограниченная область в плоскости Oxy . Пусть $z_1, z_2 : G_{xy} \rightarrow \mathbb{R}^1$ — гладкие ограниченные функции,

заданные формулами $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$, такие что для всех точек $(x, y) \in G_{xy}$ $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$, тогда замкнутое множество $T_z = \{z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$, заданное над областью G_{xy} , называется z -цилиндром (см. Рис 50).

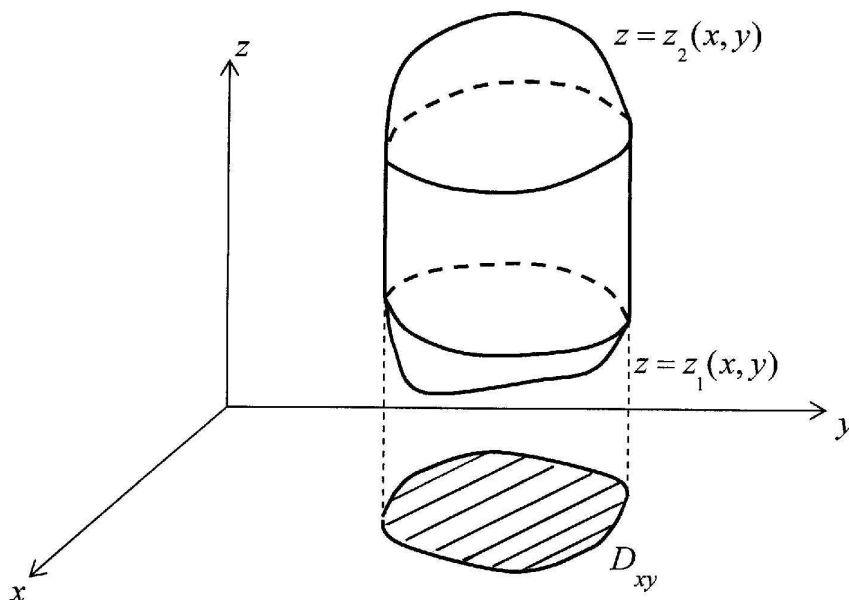


Рис. 50: z -цилиндр.

Если к определению 21.1 применить два раза циклическую перестановку $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}$, то получатся соответственно определения y - и x -цилиндров.

Замечание 21.2. Граница ∂T_z любого z -цилиндра T_z имеет правильное покрытие, состоящее из трех элементов:

- нижнего основания $S_1 = \{z = z_1(x, y), \text{ где } (x, y) \in G_{xy}\}$,
- верхнего основания $S_2 = \{z = z_2(x, y), \text{ где } (x, y) \in G_{xy}\}$,
- и боковой поверхности $S_0 = \partial T_z \setminus (S_1 \cup S_2)$.

Определение 21.3. Замкнутая область $T \subset \mathbb{R}^3$ называется *простой*, если существуют ее правильные покрытия x -, y - и z -цилиндрами.

Теорема 21.4. (Формула Гаусса-Остроградского.) 1) Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ — простая замкнутая ограниченная область, граница ∂T которой является замкнутой гладкой двусторонней поверхностью.

2) Пусть $\mathbf{n}(M) = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$ — вектор нормали к поверхности ∂T в точке $M = (x, y, z)$.

3) Пусть $P, Q, R : T \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывно дифференцируемые функции.

Тогда имеет место формула Гаусса-Остроградского

$$\iint_{\partial T} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV,$$

где $dV = dxdydz$.

Доказательство. 1) Выберем внешнюю сторону поверхности ∂T , то есть внешнюю нормаль \mathbf{n} и пусть $\{T_z^1, T_z^2, \dots, T_z^n\}$ — правильное покрытие области T z -цилиндрами такое, что нижние и верхние основания S_1^i и S_2^i каждого z -цилиндра T_z^i являются подмножествами границы ∂T , то есть $S_1^i \subset \partial T$ и $S_2^i \subset \partial T$.

Применяя процедуру сведения тройного интеграла к повторному, получим

$$\begin{aligned} \iiint_{T_z^i} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz &= \iint_{D_{xy}^i} dxdy \int_{z_{1i}(x,y)}^{z_{2i}(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_{D_{xy}^i} R(x, y, z_{2i}(x, y)) dxdy - \iint_{D_{xy}^i} R(x, y, z_{1i}(x, y)) dxdy, \end{aligned}$$

где на верхнем основании i -го z -цилиндра справедливо равенство $dxdy = \cos \gamma dS_2^i$, а на нижнем $dxdy = \cos(\pi - \gamma) dS_1^i$ (см. Рис. 51), поэтому последнее выражение равно

$$\begin{aligned} \iint_{S_2^i} R(x, y, z) \cos \gamma dS_2^i - \iint_{S_1^i} R(x, y, z) \cos(\pi - \gamma) dS_1^i &= \\ = \iint_{S_2^i} R(x, y, z) \cos \gamma dS_2^i + \iint_{S_1^i} R(x, y, z) \cos \gamma dS_1^i. \end{aligned}$$

Суммируя полученные сквозные равенства по $i = 1, 2, \dots, n$, получим

$$\sum_{i=1}^n \iiint_{T_z^i} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \sum_{i=1}^n \left(\iint_{S_2^i} R(x, y, z) \cos \gamma dS_2^i + \iint_{S_1^i} R(x, y, z) \cos \gamma dS_1^i \right),$$

где по построению покрытия z -цилиндрами имеем $T = \cup_{i=1}^n T_z^i$ и $\partial T = \cup_{i=1}^n (S_1^i \cup S_2^i)$, из чего следует формула

$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{\partial T} R(x, y, z) \cos \gamma dS.$$

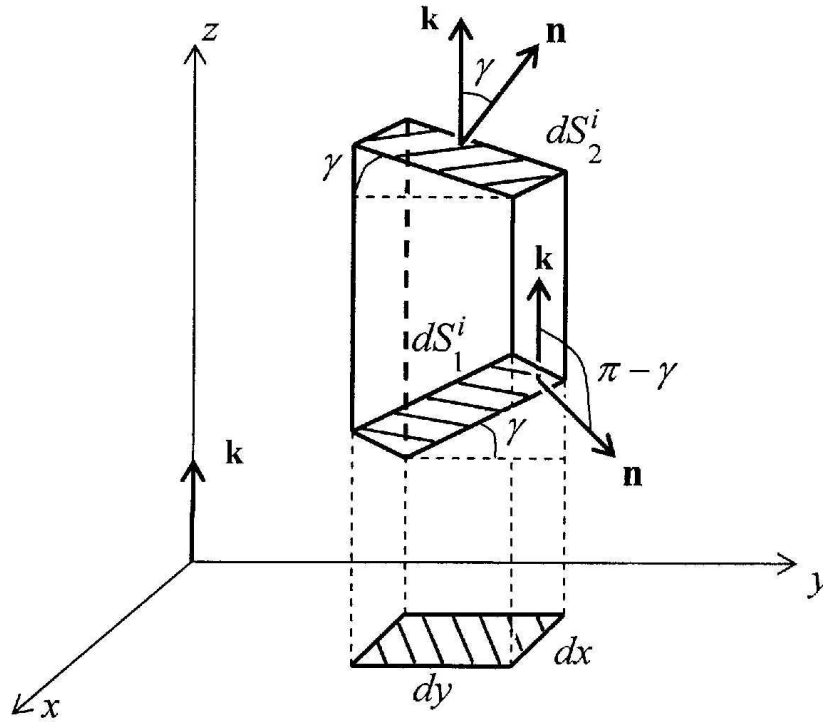


Рис. 51:

Аналогично доказывают формулы

2)

$$\iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\partial T} Q(x, y, z) \cos \beta dS,$$

3)

$$\iiint_T \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial T} P(x, y, z) \cos \alpha dS.$$

Складывая формулы из предыдущих трех пунктов, получим формулу Гаусса-Остроградского. \square

§22. Формула Стокса

Теорема 22.1 (Формула Стокса). 1) Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая связная ограниченная двусторонняя поверхность, имеющая гладкую границу ∂S .

2) Пусть $P, Q, R : S \rightarrow \mathbb{R}^1$ — функции, непрерывно дифференцируемые во внутренних точках поверхности S и непрерывные на ее границе ∂S .

3) Пусть $\mathbf{n}(M) = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$ — вектор нормали к поверхности S в точке $M \in S$, задающий сторону (S, \mathbf{n}) этой поверхности, а

также ориентацию ω^+ поверхности S , соответствующую этой стороне, и пусть ориентация λ^+ границы ∂S согласована с ориентацией ω^+ .

Тогда имеет место формула

$$\int_{(\partial S, \lambda^+)} P dx + Q dy + R dz = \\ = \iint_{(S, \omega^+)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS.$$

Доказательство. Проведем доказательство в упрощенном виде, предполагая, что поверхность S — гладкая, односвязная и взаимно однозначно проектируется на координатные плоскости Oxy , Oyz и Ozx . Полное доказательство этой теоремы можно найти в книге [5].

1) Докажем сначала формулу

$$\int_{(\partial S, \lambda^+)} P dx = \iint_{(S, \omega^+)} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS.$$

Пусть поверхность S задана вектор-функцией $\mathbf{r} : D_{xy} \rightarrow \mathbb{R}^3$ по формуле $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z(x, y)\mathbf{k}$, где $D_{xy} \subset \mathbb{R}^2$ — проекция поверхности S на плоскость Oxy . Выберем ориентации D_{xy} и ∂D_{xy} согласованно с ориентациями поверхности S и ее границы ∂S . Тогда по P -формуле Грина 14.5 имеем

$$\int_{\partial D_{xy}} P dx = - \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy.$$

Преобразуем теперь интеграл в правой части доказываемой формулы. По замечанию 20.3 и теореме 20.5

$$\iint_{(S, \omega^+)} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS = \iint_{(S, \omega^+)} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_{D_{xy}} (\mathbf{A}, \mathbf{r}'_x, \mathbf{r}'_y) dx dy,$$

где $\mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial P}{\partial y} \mathbf{k}$. Вычисляя смешанное произведение в последнем интеграле, получим

$$\iint_{D_{xy}} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy = - \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx dy.$$

Таким образом формула доказана.

Аналогично доказывают формулы

2)

$$\int_{(\partial S, \lambda^+)} Q dy = \iint_{(S, \omega^+)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) dS,$$

3)

$$\int_{(\partial S, \lambda^+)} R dz = \iint_{(S, \omega^+)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) dS.$$

Складывая формулы из этих трех пунктов, получим формулу Стокса.

Формулу Стокса можно записать в следующем виде

$$\int_{(\partial S, \lambda^+)} P dx + Q dy + R dz = \iint_{(S, \omega^+)} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS.$$

□

Замечание 22.3. Напомним, что по опред. 4.11 замкнутая область $T \subset \mathbb{R}^3$ называется односвязной, если любой замкнутый контур, целиком лежащий в T , можно стянуть по T в точку, лежащую в T .

Примеры. 1) Шар и шаровой слой — односвязные области.

2) Сплошной тор не является односвязным, т.к., например, его средняя линия не может быть стянута по нему в точку.

Теорема 22.4. (Об эквивалентности четырех в \mathbb{R}^3 .) Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ — односвязная область и $P, Q, R : T \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывно дифференцируемые функции. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

(i) Для любого контура $C \subset T$ справедливо равенство $\oint_C P dx + Q dy + R dz = 0$.

(ii) Для любых точек $A, B \in T$ значение интеграла $\int_A^B P dx + Q dy + R dz$ не зависит от пути, целиком лежащим в T .

(iii) Выражение $P dx + Q dy + R dz$ есть полный дифференциал некоторой функции $U : T \rightarrow \mathbb{R}^1$, то есть $dU = P dx + Q dy + R dz$.

(iv) В области T справедливы равенства $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 15.2. Доказать самостоятельно.

Теорема 22.5. 1) Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ — односвязная область.

2) Пусть $U, P, Q, R : T \rightarrow \mathbb{R}^1$ — такие функции, что U — дифференцируемая, P, Q, R — непрерывно дифференцируемые и $dU = P dx + Q dy + R dz$.

3) Точки $A = (x_0, y_0, z_0)$, $B = (x, y_0, z_0)$, $C = (x, y, z_0)$ и $D = (x, y, z)$ вместе с прямолинейными отрезками AB , BC и CD принадлежат области T .

Тогда первообразная функция $U(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y_0, z_0)} P(x, y_0, z_0) dx + \int_{(x, y_0, z_0)}^{(x, y, z_0)} Q(x, y, z_0) dy + \int_{(x, y, z_0)}^{(x, y, z)} R(x, y, z) dz.$$

Доказать самостоятельно.

Замечание 22.6. Все утверждения §§18 — 22 останутся справедливыми, если

- 1) везде *гладкость* поверхности S заменить на ее *кусочную гладкость*,
- 2) везде *гладкость* границ ∂T и ∂S заменить на их *кусочную гладкость*,
- 3) в теореме 21.4 *непрерывную дифференцируемость* функций $P, Q, R : G \rightarrow \mathbb{R}^1$ заменить на их *непрерывную дифференцируемость* в $T \setminus \partial T$ и *непрерывность* в ∂T .

Анатолий Борисович **Корчагин**

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебно-методическое пособие

*Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского"
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23*

*Подписано в печать . Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл.печ. л. . Уч-изд. л. .
Заказ № . Тираж 300 экз.*

*Отпечатано в типографии Нижегородского университета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01*