

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Нижегородский государственный университет имени Н.И.Лобачевского

С.Ю. Галкина, О.Е. Галкин

**ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ**
Курс лекций

Рекомендовано методической комиссией механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 011200 «Физика», 210100 «Электроника и наноэлектроника», 230400 «Информационные системы и технологии», 222900 «Нанотехнологии и микросистемная техника».

Нижегород
2015 год

УДК 517.38

Галкина С.Ю., Галкин О.Е. «Определенный интеграл и его приложения». Курс лекций. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2015. – 40 с.

Рецензент – к.ф.-м.н, доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа механико-математического факультета
А.М. Терентьев

В настоящем методическом пособии содержатся различные определения интеграла Римана, методы его вычисления, а также рассмотрены разнообразные геометрические и физические приложения. Приведено много примеров с подробными решениями. Курс лекций составлен в соответствии с действующей программой по математическому анализу для физического факультета ННГУ. Данное пособие рекомендуется для использования не только студентами физического, но также радиофизического и химического факультетов ННГУ.

Работа выполнена на кафедре теории функций
механико-математического факультета ННГУ,
заведующий кафедрой д.ф.-м.н., профессор М.И. Сумин

Ответственный за выпуск:
Председатель методической комиссии механико-математического факультета
ННГУ, к.ф.-м.н., доцент Денисова Н.А.

УДК 517.38

© Нижегородский государственный
университет имени Н.И.Лобачевского, 2015

Определенный интеграл и его приложения

§1. Понятие определенного интеграла

1.1. Определение определённого интеграла через суммы Римана.

Пусть $f(x)$ – произвольная, ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция. Рассмотрим разбиение T отрезка $[a, b]$ на конечное число частей:

$$T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b.$$

В каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \dots, n$) выберем произвольную точку ξ_k и составим сумму, зависящую от разбиения T и выбора точек $\{\xi_k\}_{k=1, \dots, n}$. Сумма произведений значения функции в точке ξ_k на длину соответствующего частичного

отрезка разбиения $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ – это интегральная сумма Римана для

функции $f(x)$, составленная по данному разбиению T .

Обозначим через $\lambda = \max_{k=1, \dots, n} (x_k - x_{k-1})$ мелкость разбиения T .

Определение.

Если существует конечный предел интегральных сумм при $\lambda \rightarrow 0$, и этот предел не зависит ни от выбора разбиения, ни от выбора точек ξ_k внутри каждого частичного отрезка разбиения, то такой предел называется определённым интегралом Римана от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right).$$

$\mathbf{R}[a, b]$ – класс функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$.

1.2. Физический смысл определенного интеграла. Задача о массе стержня.

Рассмотрим сначала однородный стержень длины L , имеющий постоянную линейную плотность P . Тогда масса стержня находится по формуле

$$m = L \cdot P.$$

Пусть теперь стержень неоднородный, имеющий длину L и переменную линейную плотность. Выведем формулу для массы такого стержня. Расположим стержень на оси Ox . Начало стержня обозначим точкой $x = a$, конец стержня в точке $x = b$. Плотность стержня в точке $x \in [a, b]$ обозначим $P(x)$. Рассмотрим случай, когда функция $P(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на конечное число частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Обозначим через m_k массу стержня, соответствующую частичному отрезку разбиения

$[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \dots, n$). Тогда масса стержня равна сумме масс всех таких его частей

$m = \sum_{k=1}^n m_k$. Если части достаточно маленькие, то функция $P(x)$ в силу

непрерывности не может сильно измениться на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \dots, n$), поэтому на каждом таком отрезке функцию $P(x)$ можно считать постоянной, и равной значению в любой точке отрезка. Выберем внутри каждого отрезка точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Будем считать плотность стержня на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ постоянной и равной $P(\xi_k)$. Тогда верно приближенное равенство

$m_k \approx P(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$. Масса всего стержня тогда приблизительно равна

$$m \approx \sum_{k=1}^n P(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Если длину наибольшего из частичных отрезков разбиения $\lambda = \max_{k=1, \dots, n} (x_k - x_{k-1})$

устремить к нулю, то приближенное равенство для массы становится точным и верна формула

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n P(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b P(x) dx.$$

1.3. Геометрический смысл определенного интеграла.

Пусть задана $y = f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, эта функция неотрицательна, то есть $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Криволинейная трапеция – это фигура, которая ограничена снизу осью OX ($y = 0$), сверху графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, по бокам вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$.

Рассмотрим произвольное разбиение T отрезка $[a, b]$ точками

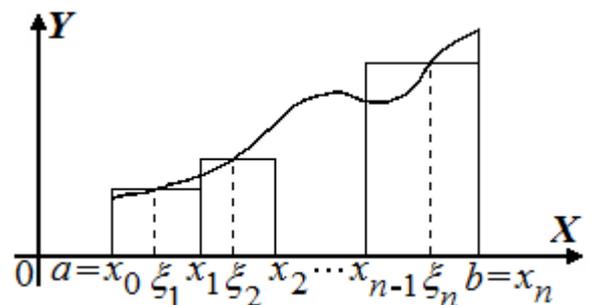
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b.$$

Выберем точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k=1, \dots, n$) внутри

каждого частичного отрезка разбиения. Произведение значения функции в точке ξ_k на длину частичного отрезка $f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$ геометрически является площадью прямоугольника с основанием $[x_{k-1}, x_k]$ и длиной высоты $f(\xi_k)$. Тогда

интегральная сумма Римана $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ представляет собой площадь

ступенчатой фигуры, составленной из таких прямоугольников. При измельчении



разбиения, то есть при $\lambda \rightarrow 0$, площадь ступенчатой фигуры стремится к площади криволинейной трапеции:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right) = S_{\text{крив.трап.}}$$

Геометрический смысл определённого интеграла.

Определенный интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равен площади криволинейной трапеции, лежащей под графиком

этой функции $S_{\text{кр.тр.}} = \int_a^b f(x) dx$.

Иногда можно вычислить определенный интеграл, пользуясь только его геометрическим смыслом.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_1^2 (2x - 1) dx$.

Решение. Подынтегральная функция $y = 2x - 1$ непрерывна и положительна на отрезке $[1, 2]$. Тогда величина интеграла равна площади фигуры под графиком этой функции. Эта фигура является обычной трапецией, по формуле площади трапеции находим

$$\int_1^2 (2x - 1) dx = S_{\text{тр.}} = \frac{1}{2} \cdot (1 + 3) \cdot 1 = 2.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$.

Решение. Подынтегральная функция $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[0, R]$. Тогда величина интеграла равна площади фигуры под графиком этой функции. Эта фигура является четвертью круга радиуса R .

По формуле площади круга, находим значение интеграла

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{\pi R^2}{4}.$$

1.4. Суммы Дарбу. Второе определение интеграла Римана

Пусть функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$ – произвольное разбиение $[a, b]$. Обозначим через $\tau[a, b]$ семейство всех разбиений отрезка $[a, b]$.

Так как функция ограничена на всём отрезке $[a, b]$, то она ограничена на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, поэтому существуют точные верхняя и нижняя грани функции на этом отрезке:

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) ; \quad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Второе определение интеграла Римана вводится с помощью величин:

$$\overline{D}(f, T) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) - \text{верхняя интегральная сумма Дарбу};$$

$$\underline{D}(f, T) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) - \text{нижняя интегральная сумма Дарбу}.$$

Эти суммы, в отличие от интегральных сумм Римана зависят только от разбиения.

Свойства сумм Дарбу

1) Для одной и той же функции и конкретного разбиения верхняя сумма Дарбу всегда не меньше, чем нижняя: $\overline{D}(f, T) \geq \underline{D}(f, T)$.

2) При измельчении разбиения, то есть при добавлении новых точек к исходному разбиению, верхние суммы Дарбу для одной и той функции не увеличиваются, а нижние суммы Дарбу не уменьшаются.

3) Для одной и той же функции и любых разбиений T_1 и T_2 верхняя сумма Дарбу, соответствующая разбиению T_1 , не меньше, чем нижняя сумма Дарбу, соответствующая разбиению T_2 :

$$\forall T_1, T_2 \in \tau[a, b] : \quad \overline{D}(f, T_1) \geq \underline{D}(f, T_2).$$

Доказательства этих свойств можно найти в литературе.

Зафиксируем некоторое разбиение T_0 . Рассмотрим семейство всех верхних сумм Дарбу $\{\overline{D}(f, T) | T \in \tau[a, b]\}$. В силу свойства 3) сумм Дарбу,

$\forall T \in \tau[a, b]: \quad \overline{D}(f, T) \geq \underline{D}(f, T_0)$, то есть множество всех верхних сумм Дарбу ограничено снизу, поэтому существует конечная точная нижняя грань у этого множества и эта величина называется верхним интегралом Римана от функции

$$f(x) \text{ по отрезку } [a, b]: \quad \int_a^b f(x) dx = \inf_{T \in \tau[a, b]} \overline{D}(f, T).$$

Аналогично существует конечная точная верхняя грань у множества всех нижних сумм Дарбу и эта величина называется нижним интегралом Римана от функции

$$f(x) \text{ по отрезку } [a, b]: \quad \int_a^b f(x) dx = \sup_{T \in \tau[a, b]} \underline{D}(f, T).$$

Определение. Если верхний интеграл равен нижнему, то функция $f(x)$ является интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$ и интеграл Римана равен любому из этих значений. То есть из равенства

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\bar{a}}^b f(x)dx \text{ следует, что } f(x) \in \mathbf{R}[a,b] \text{ и выполняется равенство}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\bar{a}} f(x)dx + \int_{\bar{a}}^b f(x)dx.$$

Геометрический смысл сумм Дарбу

Верхняя интегральная сумма Дарбу

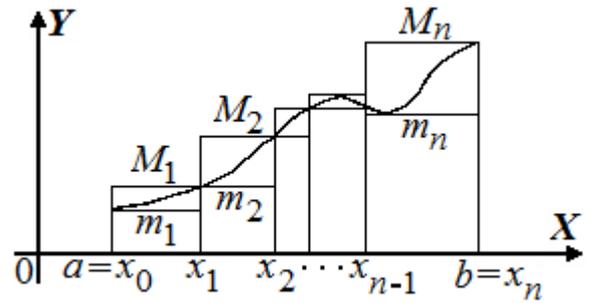
$$\bar{D}(f, T) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) \text{ равна площади}$$

ступенчатой фигуры, внутри которой лежит криволинейная трапеция.

Нижняя интегральная сумма Дарбу

$$\underline{D}(f, T) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) \text{ задаёт площадь}$$

ступенчатой фигуры, которая содержится внутри криволинейной трапеции. Для непрерывной функции при измельчении разбиения площади обеих этих ступенчатых фигур стремятся к площади криволинейной трапеции.



Теорема (критерий интегрируемости Римана).

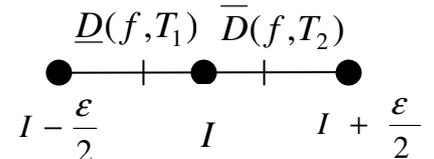
Функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, тогда и только тогда, когда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, найдётся разбиение T_ε , такое, что разность $\bar{D}(f, T_\varepsilon) - \underline{D}(f, T_\varepsilon) < \varepsilon$.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда верхний интеграл Римана совпадает с нижним и выполняется равенство

$$\sup_{T \in \tau[a,b]} \underline{D}(f, T) = \inf_{T \in \tau[a,b]} \bar{D}(f, T) = I.$$



Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

По определению точной верхней грани для $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists T_1 \in \tau[a, b]: I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{D}(f, T_1) \leq I$.

По определению точной нижней грани для $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists T_2 \in \tau[a, b]: I \leq \bar{D}(f, T_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}$.

Построим новое разбиение $T_\varepsilon = T_1 \cup T_2$, состоящее из всех точек как разбиения T_1 , так и разбиения T_2 . Разбиение T_ε является более мелким, чем каждое из разбиений T_1 и T_2 . Поскольку при измельчении разбиения верхние суммы Дарбу не увеличиваются, а нижние суммы Дарбу не уменьшаются, то

$\bar{D}(f, T_\varepsilon) - \underline{D}(f, T_\varepsilon) \leq \bar{D}(f, T_2) - \underline{D}(f, T_1) < \varepsilon$. Значит, разбиение T_ε является искомым.

Достаточность.

Пусть $\forall \varepsilon > 0 \exists T_\varepsilon \in \tau[a, b] : \overline{D}(f, T_\varepsilon) - \underline{D}(f, T_\varepsilon) < \varepsilon$.

Докажем, что для функции $f(x)$ верхний интеграл совпадает с нижним интегралом.

Из определения точных верхней и нижней граней следует

$$\text{неравенство } \inf_{T \in \tau[a, b]} \overline{D}(f, T) - \sup_{T \in \tau[a, b]} \underline{D}(f, T) \leq \overline{D}(f, T_\varepsilon) - \underline{D}(f, T_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Отсюда получаем оценку для разности верхнего и нижнего интегралов

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon. \text{ Так как число } \varepsilon \text{ произвольно мало, то}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \text{ и функция } f(x) \text{ интегрируема по Риману, что и требовалось}$$

доказать.

1.5. Классы интегрируемых функций

Необходимое условие интегрируемости – ограниченность функции. Суммы Дарбу можно составить только для ограниченных функций, так как величины m_k и M_k не определены в случае неограниченности функции.

Условие ограниченности функции не является достаточным для её интегрируемости. Есть функции ограниченные, но не интегрируемые.

Пример функции, не интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим функцию Дирихле, которая в рациональных точках отрезка $[a, b]$ принимает значение 1, а в иррациональных точках отрезка $[a, b]$ принимает значение 0:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap \mathbf{Q} \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Очевидно, что эта функция ограничена. Покажем, что она не является интегрируемой.

Пусть $T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. В силу свойства всюду плотности множества рациональных чисел во множестве действительных чисел, в каждом частичном отрезке разбиения найдется рациональное число, поэтому верхние суммы Дарбу для любого разбиения равны

$$\overline{D}(f, T) = \sum_{k=1}^n 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = b - a.$$

Отсюда верхний интеграл Римана равен $\int_a^b f(x) dx = b - a$.

Поскольку иррациональные числа также обладают свойством всюду плотности во множестве действительных чисел, то для любого разбиения нижние суммы Дарбу

$$\text{равны } \underline{D}(f, T) = \sum_{k=1}^n 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0$$

и, следовательно, нижний интеграл Римана $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Поскольку для функции Дирихле верхний интеграл Римана не совпадает с нижним интегралом, то функция Дирихле не интегрируема по Риману.

Достаточные условия интегрируемости по Риману могут быть различными.

Теорема 1 (достаточное условие интегрируемости).

Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема по Риману на этом отрезке.

Доказательство. Покажем, что функция интегрируема по Риману по критерию интегрируемости.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём разбиение $T_\varepsilon \in \tau[a, b]$ такое, что

$$\overline{D}(f, T_\varepsilon) - \underline{D}(f, T_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Так как функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на нем. Тогда для числа

$$\frac{\varepsilon}{b-a} > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1 \in [a, b] \forall x_2 \in [a, b]: |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Возьмём такое разбиение $T_\varepsilon : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$, что мелкость разбиения $\lambda = \max_{k=1, \dots, n} (x_k - x_{k-1}) < \delta$. Покажем, что это разбиение будет искомым.

Оценим разность между верхней и нижней суммами Дарбу

$$\overline{D}(f, T_\varepsilon) - \underline{D}(f, T_\varepsilon) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}), \text{ где}$$

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Так как функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она непрерывна на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$. Поскольку непрерывная функция на отрезке достигает своих верхней и нижней граней, то

$$\exists \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]: f(\zeta_k) = M_k;$$

$$\exists \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]: f(\eta_k) = m_k.$$

В силу равномерной непрерывности функции $f(x)$ из того, что

$$|\zeta_k - \eta_k| \leq x_k - x_{k-1} < \delta, \text{ следует что } |f(\zeta_k) - f(\eta_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда разность между верхней и нижней суммами Дарбу оценивается как

$$\begin{aligned} \overline{D}(f, T_\varepsilon) - \underline{D}(f, T_\varepsilon) &= \sum_{k=1}^n (f(\zeta_k) - f(\eta_k))(x_k - x_{k-1}) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (x_n - x_0) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0 \exists T_\varepsilon \in \tau[a, b]$, такое что $\overline{D}(f, T_\varepsilon) - \underline{D}(f, T_\varepsilon) < \varepsilon$. По критерию интегрируемости из этого следует, что функция интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости).

Если функция $f(x)$ определена на всем отрезке $[a, b]$ и возрастает на этом отрезке, то функция будет интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Покажем, что функция интегрируема по Риману по критерию интегрируемости.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём разбиение $T_\varepsilon \in \tau[a, b]$ такое, что

$$\overline{D}(f, T_\varepsilon) - \underline{D}(f, T_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Возьмём такое разбиение $T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$, что

$$\text{мелкость разбиения } \lambda = \max_{k=1, \dots, n} (x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Так как функция $f(x)$ возрастает, то

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_k), \quad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_{k-1}).$$

Тогда разность между верхней и нижней суммами Дарбу оценивается как

$$\begin{aligned} \overline{D}(f, T_\varepsilon) - \underline{D}(f, T_\varepsilon) &= \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(x_n) - f(x_0)) = \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашли разбиение T_ε , такое, что разность между верхней и нижней суммами Дарбу, соответствующими этому разбиению, меньше ε . Тогда функция интегрируема по критерию интегрируемости.

Пример. Рассмотрим функцию, заданную формулами

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & \text{при } x \in \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1} \right), n \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

Функция определена и возрастает на всем отрезке $[0, 1]$. Тогда, по теореме 2 она будет интегрируема на нем, хотя имеет бесконечное число точек разрыва.

Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

Функция интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда множество её точек разрыва можно покрыть системой конечного или счётного числа интервалов, сумма длин которых меньше ε , где ε - сколь угодно малое число.

1.6. Свойства определённого интеграла.

1) Если функция интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке, лежащем в отрезке $[a, b]$.

2) (аддитивность интеграла по множеству)

Если функция интегрируема на отрезках $[a, b]$ и $[b, c]$ то она интегрируема и на отрезке $[a, c]$. При этом выполняется равенство

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

3) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и k – произвольная константа, то функция $k \cdot f(x)$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$. При этом выполняется равенство

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Это свойство обычно формулируют так: постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла.

4) (аддитивность интеграла по функции) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их сумма $f(x) + g(x)$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$ и при этом выполняется равенство

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

5) Интеграл от функции $f(x) = 1$ по отрезку $[a, b]$ равен длине отрезка

$$\int_a^b 1dx = b - a.$$

6) При изменении порядка пределов интегрирования меняется знак определённого интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

7) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то её модуль $|f(x)|$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$ и модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

8) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и неотрицательна, то ее интеграл также неотрицателен

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b], \quad f \in R[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

9) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и функция $f(x)$ не превосходит функцию $g(x)$, то можно переходить к интегралу в неравенстве

$$f, g \in \mathbf{R}[a, b]; \quad f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

10) (оценка интеграла)

$$f \in \mathbf{R}[a, b]; \quad m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

11) Теорема о среднем.

Пусть $f \in \mathbf{R}[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$. Тогда $\exists \mu \in [m, M]$, такое

$$\text{что } \int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b-a).$$

В случае если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, найдется точка

$$\xi \in [a, b], \text{ такая что } \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b-a).$$

12) Обобщённая теорема о среднем.

Пусть $f \cdot g \in \mathbf{R}[a, b]$, $g \in \mathbf{R}[a, b]$; кроме того $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$.

Тогда существует число $\mu \in [m, M]$ такое что

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \mu \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

В случае если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, найдется точка

$\xi \in [a, b]$ такая что

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Пример. При расчёте нагрузки, на определённый узел конструкции получили

следующий интеграл $\int_{10}^{16} \frac{\sin x}{1+x^8} dx$ (в тоннах). Не вычисляя интеграл, оценить нагрузку

на узел.

Решение. Так как $|\sin x| \leq 1$, то при $10 \leq x \leq 16$ справедлива оценка для подынтегральной функции $\left| \frac{\sin x}{1+x^8} \right| \leq \frac{1}{1+x^8} \leq \frac{1}{1+10^8} < 10^{-8}$. Тогда, по свойствам 7) и 10), абсолютная величина интеграла оценивается $\left| \int_{10}^{16} \frac{\sin x}{1+x^8} dx \right| \leq \int_{10}^{16} \left| \frac{\sin x}{1+x^8} \right| dx < 6 \cdot 10^{-8}$.

Отсюда видно, что нагрузка на узел не превосходит $6 \cdot 10^{-8}$ тонн или 0,06 грамм, значит эта нагрузка незначительна и ее можно не учитывать.

§2. Вычисление определенного интеграла

2.1. Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть задана функция, интегрируемая на отрезке $[a, b]$. Тогда по свойству 1 определенного интеграла для любой точки $x \in [a, b]$ функция также будет интегрируема на отрезке $[a, x]$. Поэтому определена функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, она называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ будет непрерывной на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Докажем, что $F(x)$ непрерывна в любой точке $x \in [a, b]$. Для этого покажем, что приращение ΔF функции стремится к нулю, если приращение Δx аргумента стремится к нулю.

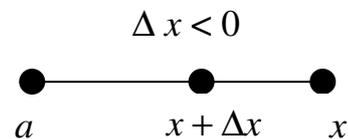
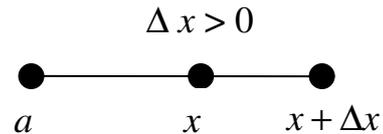
$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

Если $\Delta x > 0$, то

$$\Delta F = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Если же $\Delta x < 0$, то

$$\Delta F = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_{x+\Delta x}^x f(t)dt = \int_{x+\Delta x}^x f(t)dt.$$



Таким образом, при любом приращении переменной приращение функции выражается формулой

$$\Delta F = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \text{ По теореме о среднем } \Delta F = \mu \cdot \Delta x \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда функция

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ будет дифференцируема на интервале (a, b) , причём выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

То есть интеграл с переменным верхним пределом является первообразной для подынтегральной функции, в случае, если она непрерывна.

Доказательство. Зафиксируем точку $x \in (a, b)$. Покажем, что в этой точке существует конечная производная.

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}.$$

Также как в предыдущей теореме выводится формула для приращения функции

$$\Delta F = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Отсюда по теореме о среднем в случае непрерывной функции получаем $\Delta F = f(\xi) \cdot \Delta x$, где точка ξ является промежуточной между x и $x + \Delta x$.

Подставляя выражение для приращения функции в ее производную, получаем

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \cdot \Delta x}{\Delta x}.$$

Так как при $\Delta x \rightarrow 0$ точка $\xi \rightarrow x$, а функция $f(x)$ непрерывна в точке ξ , то $f(\xi) \rightarrow f(x)$ и тогда справедлива формула $F'(x) = f(x)$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. Формула Ньютона – Лейбница.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Функция $F(x)$ – любая из первообразных функции $f(x)$.

$$\text{Тогда } \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(t) \Big|_a^b.$$

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что интеграл с переменным верхним пределом является первообразной функции $f(x)$. Поскольку $F(x)$ также является первообразной и две различные первообразные отличаются только на константу, то

$$\int_a^x f(t) dt - F(x) = C. \quad (1)$$

Найдем константу C . Положим в последнем равенстве $x = a$:

$$\int_a^a f(t) dt - F(a) = C. \text{ Отсюда находим значение константы } C = -F(a). \text{ Подставив}$$

его в равенство (1), получаем

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Полагая в этом равенстве $x = b$, получаем искомую формулу $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

2.2. Правило интегрирования по частям в определённом интеграле.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$.

Тогда справедлива формула интегрирования по частям

$$\boxed{\int_a^b u(x) dv(x) = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x)}$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} x \cos x dx$.

Решение. Обозначим через

$$u = x ; \quad du = dx$$

$$dv = \cos x dx; \quad v = \sin x.$$

Подставляя эти выражения в формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{\pi} = -2.$$

Пример 2. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Решение. Обозначим через

$$u = (\cos x)^{n-1}; \quad du = -(n-1)(\cos x)^{n-2} \sin x dx;$$

$$dv = \cos x dx; \quad v = \sin x.$$

Подставляя эти выражения в формулу интегрирования по частям, получаем

$$I_n = (\cos x)^{n-1} \sin x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n-2} \cdot \sin^2 x dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n-2} \cdot \sin^2 x dx .$$

Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, сводим вычисление данного интеграла к таким же интегралам меньшего порядка

$$I_n = (n-1) \left(\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n-2} dx - \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx \right),$$

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n .$$

Отсюда находим рекуррентную формулу для вычисления искомого

$$\text{интеграла } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Начальные значения интегралов для этой формулы

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Пример 3. Вычислить интегралы $\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2k+1} dx$, $\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2k} dx$.

Решение. Применим рекуррентную формулу, выведенную в примере 2:

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot I_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot I_{2k-3} = \dots = \frac{2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2k+1) \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3} \cdot I_1 .$$

$$\text{Учитывая, что } I_1 = 1, \text{ получаем } \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2k+1} dx = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Применим рекуррентную формулу, выведенную в примере 2, при $n = 2k$:

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0.$$

Учитывая, что $I_0 = \frac{\pi}{2}$, получаем $\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2k} dx = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$.

2.3. Замена переменной в определённом интеграле.

Пусть функция $f(t)$ определена и непрерывна на отрезке $[A, B]$.

Функция $g(x)$ определена и непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[a, b]$, причем $A \leq g(x) \leq B$, $g(a) = A$, $g(b) = B$. Тогда справедлива формула замены переменной

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_A^B f(t) dt, \text{ где } t = g(x).$$

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$.

Решение.

Первый способ. Перепишем подынтегральную функцию в виде

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx = \int_1^{\sqrt{3}} x^{-2} (1+x^2)^{1/2} dx.$$

Этот интеграл является интегралом от дифференциального бинома

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx. \text{ В данном примере } m = -2, n = 2, p = \frac{1}{2}.$$

Число p не является целым; число $\frac{m+1}{n} = -\frac{1}{2}$ также не является целым;

число $\frac{m+1}{n} + p = 0$ – целое. Значит, исходя из общей теории, подходит подстановка

$$t = \sqrt{x^{-2} + 1} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}.$$

Возводим в квадрат и выражаем подынтегральные выражения

$$x^2 = \frac{1}{t^2 - 1}; \quad \sqrt{x^2 + 1} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}; \quad dx = \frac{-t dt}{\sqrt{(t^2 - 1)^3}}.$$

Пересчитаем пределы интегрирования из формулы $t = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$:

при $x = 1$: $t = \sqrt{2}$; при $x = \sqrt{3}$: $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Подставляя эти выражения в первоначальный интеграл, получаем

$$I = \int_{\frac{2}{\sqrt{2}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \cdot (t^2-1) \cdot \frac{-t}{\sqrt{(t^2-1)^3}} dt = - \int_{\frac{2}{\sqrt{2}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt =$$

$$= \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right| = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}.$$

Второй способ. В этом интеграле можно избавиться от иррациональности с помощью тригонометрической подстановки. Сделаем замену

$$x = tg \varphi, \quad dx = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Пересчитаем пределы интегрирования. Если $x=1$, то $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

если $x = \sqrt{3}$, то $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Подставляя эти значения в интеграл, получаем

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi \cdot tg^2 \varphi} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \varphi \cdot d\varphi}{\cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi}.$$

Сделаем еще одну замену переменной $t = \sin \varphi$, $dt = \cos \varphi$.

Если $\varphi = \frac{\pi}{4}$, то $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; если $\varphi = \frac{\pi}{3}$, то $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(1-t^2) \cdot t^2} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(1-t^2+t^2)dt}{(1-t^2) \cdot t^2} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t^2} + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= -\frac{1}{t} \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}.$$

Отметим два основных отличия замены переменной в определенном интеграле от замены переменной в неопределённом интеграле:

- 1) надо пересчитывать пределы интегрирования;
- 2) не нужно возвращаться к старой переменной.

Следующий пример показывает, что формальное применение формулы замены переменной, без учета условий ее применимости, может привести к неверному результату.

Пример 2. Интеграл $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$. Сделаем в этом интеграле замену $x = \frac{1}{t}$. Тогда $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = -\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{2}$. Получили противоречие, так как

один и тот же интеграл не может принимать два разных значения. Это произошло потому, что при изменении переменной $-1 \leq x \leq 1$ новая переменная t изменяется на лучах $t \leq -1$, $t \geq 1$. А согласно теореме о замене переменной она должна изменяться на отрезке $-1 \leq t \leq 1$.

При замене переменной определенный интеграл Римана может перейти в несобственный интеграл и наоборот. Поэтому введем понятие несобственного интеграла. Позднее этот интеграл будет изучаться более подробно.

2.4. Несобственный интеграл

Интеграл Римана рассматривается от ограниченной функции на отрезке. Этот интеграл можно обобщить в двух направлениях: сделать неограниченным промежутком или функцию неограниченной.

Несобственный интеграл первого рода – это интеграл по неограниченному промежутку. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману в собственном смысле на любом отрезке $[a, b]$ при всяком значении $b > a$. Несобственным интегралом от функции $f(x)$ по лучу $[a, \infty)$ называется следующий предел от определенного интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Возможны следующие случаи. Если предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится.

Если же предел равен бесконечности или вообще не существует, то говорят, что несобственный интеграл расходится.

Пример 1. Исследовать на сходимость в зависимости от параметра p

несобственный интеграл $I_p = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}$.

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда $p = 1$. Тогда

$$I_1 = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty.$$

В этом случае интеграл расходится.

Пусть теперь $p \neq 1$. Тогда

$$I_p = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{1-p} - 1}{1-p} \right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{при } p > 1; \\ \infty & \text{при } p < 1. \end{cases}$$

Итак, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Это важный интеграл, он широко используется при исследовании на сходимость других несобственных интегралов, а также в теории рядов.

Пример 2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \cos x dx$.

Решение. Запишем несобственный интеграл по определению

$$\int_1^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin b - \sin 1).$$

Полученный предел не существует, следовательно, интеграл расходится.

Несобственный интеграл второго рода

Пусть задан отрезок $[a, b]$ и функция $f(x)$, такая что для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a + \varepsilon, b]$;

кроме того $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$. Тогда несобственный интеграл второго рода определяется по формуле

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Если предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится. Если же предел бесконечный либо вообще не существует, то говорят, что интеграл расходится.

К несобственным интегралам применимы методы замены переменной и интегрирования по частям.

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $I = \int_0^1 \frac{dt}{t^p}$.

Решение. Если $p \leq 0$, то подынтегральная функция ограничена, интеграл является собственным и принимает конечное значение.

При $p > 0$ подынтегральная функция $f(t) = \frac{1}{t^p}$ имеет особенность в точке $t = 0$, она обращается в бесконечность в этой точке $\lim_{t \rightarrow 0+0} f(t) = +\infty$. Значит, это несобственный интеграл второго рода.

Сделаем в нем замену переменной $x = \frac{1}{t}$, $dt = -\frac{dx}{x^2}$.

Пересчитаем пределы интегрирования. При $t = 0$: $x = \infty$; при $t = 1$: $x = 1$.

Подставляя эти выражения в первоначальный интеграл, получаем

$$I = -\int_{\infty}^1 x^p \cdot \frac{dx}{x^2} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{2-p}}.$$

Этот несобственный интеграл первого рода исследован на сходимость в примере 1. Он сходится при $2 - p > 1$, $p < 1$;
расходится при $2 - p \leq 1$; $p \geq 1$.

Итак, интеграл $\int_0^1 \frac{dt}{t^p}$ сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

Этот интеграл также имеет большое значение для исследования на сходимость других несобственных интегралов.

§3. Приложения определённого интеграла

Общая схема приложений определённого интеграла

Пусть задана некоторая величина A (физическая или геометрическая). Нужно найти её значение на отрезке $[a, b]$. Пусть величина A является непрерывной и аддитивной по множеству, то есть из того, что $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$ следует, что $A_{[a, b]} = A_{[a, c]} + A_{[c, b]}$.

1) Разбиваем отрезок $[a, b]$ на n частей $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$.

2) Пусть удастся подобрать такую непрерывную функцию $f(x)$, что значение величины A на каждом частичном отрезке разбиения представимо в виде $A_k = A_{[x_{k-1}, x_k]} \approx f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

3) Тогда, в силу аддитивности величины A , верно приближенное равенство

$$A = \sum_{k=1}^n A_k \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Сумма, стоящая в правой части этого равенства, является интегральной суммой Римана для функции $f(x)$.

4) Если мелкость разбиения $\lambda = \max_{k=1, \dots, n} (x_k - x_{k-1})$ устремить к нулю, то

интегральные суммы Римана стремятся к интегралу от функции $f(x)$ и

приближенное равенство становится точным $A = \int_a^b f(x) dx$.

Более краткое изложение этой схемы.

Приращение величины A представляем в виде $\Delta A \approx f(x)\Delta x$;

отсюда дифференциал величины A равен $dA = f(x)dx$;

затем находим $A = \int_a^b f(x) dx$.

3.1. Длина дуги

Понятие длины дуги

Пусть кривая γ задана уравнениями

$$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad \text{где } t \in [a, b]. \\ z = z(t) \end{cases}$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на конечное число частей точками

$T: a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b$. Значению параметра t_k на кривой соответствует точка A_k . Таким образом, каждое разбиение T отрезка задает ломаную $A_0 A_1 \dots A_n$, вписанную в данную кривую.

Обозначим через $L(T)$ длину этой вписанной ломаной. Тогда, по определению, длина кривой – это точная верхняя грань длин всевозможных вписанных в кривую ломаных $l(\gamma) = \sup_{T \in \tau[a,b]} L(T)$.

Вычисление длины дуги

Рассмотрим общий случай, когда кривая задана параметрическими уравнениями

$$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad \text{где } t \in [a, b]. \\ z = z(t) \end{cases}$$

Обозначим через $l(t)$ переменную длину дуги на отрезке $[a, t]$.

Известна формула для дифференциала длины дуги

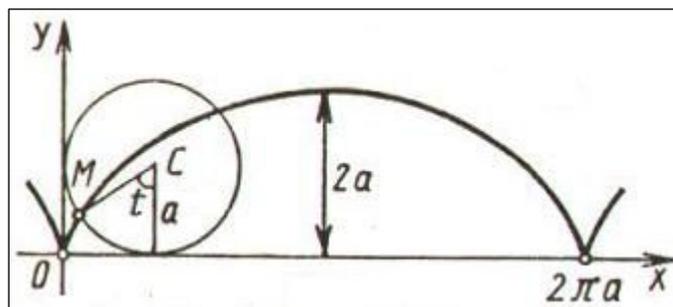
$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$. Отсюда длина дуги, соответствующая изменению параметра t на отрезке $[a, b]$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \quad (8.1)$$

Пример. Найти длину одной арки циклоиды.

Решение. Циклоида – это траектория фиксированной точки, находящейся на ободе колеса, катящегося без проскальзывания. Параметрические

уравнения циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$



Одна арка задается изменением параметра $0 \leq t \leq 2\pi$. Найдем производные координатных функций: $x'(t) = a \cdot (1 - \cos t)$; $y'(t) = a \cdot \sin t$.

Упростим подынтегральное выражение в формуле для вычисления длины дуги

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{2a^2(1 - \cos t)} = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

Подставляя в формулу и вычисляя интеграл, получаем:

$$l = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a.$$

Длина дуги плоской кривой, заданной явно

Рассмотрим часто встречающийся случай, когда плоская кривая задана явно уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$. В этом случае можно в качестве параметра взять переменную x . Подставляя уравнения $\{x = t, y = y(t)\}$ в формулу (8.1) длины дуги параметрически заданной кривой, и заменяя t на x , получаем:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Пример. Пусть по внутренней части обруча большого радиуса R движется колесо меньшего радиуса a . Точка, отмеченная на ободе колеса меньшего радиуса, будет описывать линию, называемую гипоциклоидой. Если $R = 4a$, то такая гипоциклоида называется астроидой. Уравнение астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Найдем длину астроиды. Поскольку эта кривая симметрична относительно осей OX и OY , то будем искать длину l_1 части кривой, находящейся в первой четверти. Она задается уравнением $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$, $0 \leq x \leq a$. Сделаем необходимые вычисления

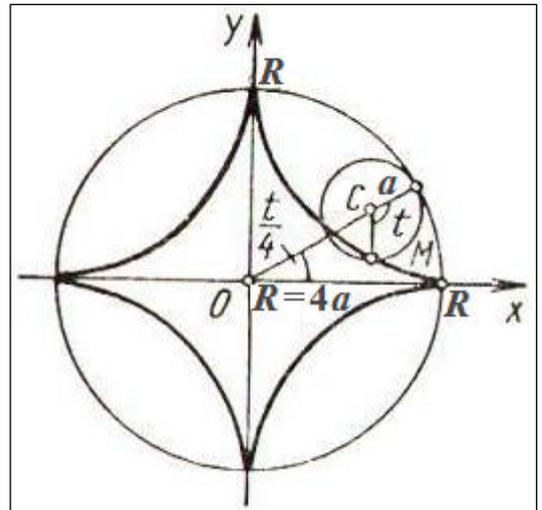
$$y' = \frac{3}{2}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2} \cdot \left(\frac{-2}{3\sqrt[3]{x}} \right);$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{a^{2/3} - x^{2/3}}{x^{2/3}} = \frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}.$$

Подставив это выражение в формулу для вычисления длины дуги, найдем длину части кривой, лежащей в первой четверти

$$l_1 = \int_0^a \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx = \frac{3a}{2}.$$

Длина всей астроиды $l = 4l_1 = \frac{4 \cdot 3 \cdot a}{2} = 6a$.



Длина дуги кривой, заданной в полярных координатах

Рассмотрим случай, когда кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$).

В этом случае в качестве параметра можно взять переменную φ .

Найдем параметрические выражения для координатных функций.

Связь декартовых координат с полярными задается формулами

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Известно, что длина дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями,

вычисляется по формуле $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} d\varphi$.

Вычислим производные координатных функций

$$x'(\varphi) = \rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi; \quad y'(\varphi) = \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi.$$

Подставим их в подкоренное выражение и упростим его

$$\begin{aligned} (x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 &= (\rho' \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 - 2\rho\rho' \sin \varphi \cos \varphi + \\ &+ (\rho \cos \varphi)^2 + (\rho' \sin \varphi)^2 + 2\rho\rho' \sin \varphi \cos \varphi = (\rho')^2 + \rho^2. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу длины дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями, получаем формулу длины дуги, заданной

в полярных координатах

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2} d\varphi.$$

Пример. Пусть по внешней части колеса радиуса R движется колесо меньшего радиуса a . Точка, зафиксированная на ободе колеса меньшего радиуса, будет описывать линию, называемую эпициклоидой.

Если $R = a$, то такая эпициклоида называется кардиоидой. Уравнение кардиоиды в полярных координатах $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Так как кривая симметрична относительно оси Ox , то можно найти длину l_1 половины кривой, расположенную выше оси Ox . Формула длины дуги в полярных координатах

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2} d\varphi.$$

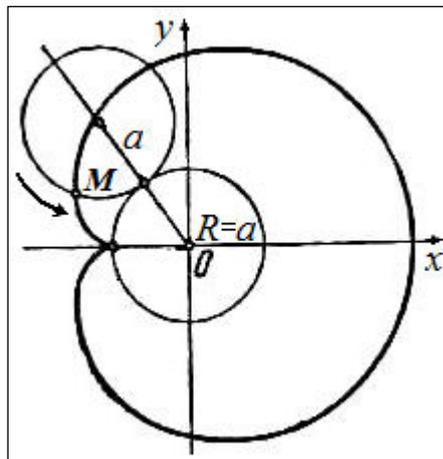
Вычислим производную $\rho' = -a \sin \varphi$ и упростим подкоренное выражение

$$(\rho'(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2 = a^2(\sin^2 \varphi + 1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) = 2a^2(1 + \cos \varphi) = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Подставляя в формулу, находим половину длины кривой

$$l_1 = \int_0^{\pi} 2a \cdot \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a.$$

Тогда длина всей кардиоиды $l = 2l_1 = 8a$.



3.2. Площадь плоской фигуры

Понятие площади плоской фигуры

1) Площадь элементарной плоской фигуры

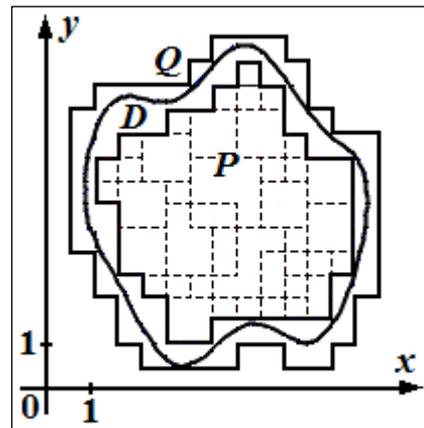
Назовем плоскую фигуру *элементарной*, если она является объединением конечного числа квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Площадь элементарной фигуры P обозначим через $S(P)$.

Поскольку любой прямоугольник является объединением конечного числа квадратов, то в определении элементарной фигуры можно вместо квадратов брать прямоугольники.

2) Площадь произвольной плоской фигуры

Пусть D – произвольная плоская фигура.

Нижней площадью фигуры D будем называть точную верхнюю грань площадей всевозможных



элементарных фигур, лежащих в D : $S_*(D) = \sup_{P \subset D} S(P)$.

Верхней площадью фигуры D будем называть точную верхнюю нижнюю грань площадей всевозможных элементарных фигур, содержащих D : $S^*(D) = \inf_{Q \supset D} S(Q)$.

Определение. Если нижняя и верхняя площади фигуры совпадают, то фигура называется квадратуемой, а их общее значение называется ее площадью.

Теорема (критерий квадратуемости).

Плоская фигура D квадратуема тогда и только тогда, когда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдутся многоугольники P_ε и Q_ε , такие, что $P_\varepsilon \subset D \subset Q_\varepsilon$ и $S_{Q_\varepsilon} - S_{P_\varepsilon} < \varepsilon$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть фигура квадратуема, то есть $\sup_{P \subset D} S_P = \inf_{D \subset Q} S_Q = S$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению точной верхней грани для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ найдется вписанный многоугольник P_ε , такой, что $P_\varepsilon \subset D$ и $S_{P_\varepsilon} > S - \frac{\varepsilon}{2}$.

По определению точной нижней грани для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ найдется описанный многоугольник Q_ε , такой, что $D \subset Q_\varepsilon$ и $S_{Q_\varepsilon} < S + \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда разность площадей описанного и вписанного многоугольников

$$S_{Q_\varepsilon} - S_{P_\varepsilon} < S + \frac{\varepsilon}{2} - S + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть нашлись многоугольники $P_\varepsilon, Q_\varepsilon$ такие, что $P_\varepsilon \subset D \subset Q_\varepsilon$ и $S_{Q_\varepsilon} - S_{P_\varepsilon} < \varepsilon$. Из определения точных верхней и нижней граней следует оценка $0 \leq \inf_{D \subset Q} S_Q - \sup_{P \subset D} S_P \leq S_{Q_\varepsilon} - S_{P_\varepsilon} < \varepsilon$.

Так как ε - сколь угодно мало, то $\sup_{P \subset D} S_P$ и $\inf_{D \subset Q} S_Q$ совпадают, следовательно, фигура квадратуема.

Теорема 1. Криволинейная трапеция, то есть фигура G , ограниченная линиями $y=0, x=a, x=b, y=f(x)$, где $f(x)$ – непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \geq 0$, является квадратуемой фигурой и ее площадь находится по формуле

$$S_{\text{кр.тр.}} = \int_a^b f(x) dx.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $f(x)$ – непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке и существует $I = \int_a^b f(x)dx$.

Тогда по критерию интегрируемости

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T_\varepsilon \in \tau[a, b] \text{ такое что } \overline{D}(f, T_\varepsilon) - \underline{D}(f, T_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Величина верхней суммы Дарбу $\overline{D}(f, T_\varepsilon) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$ равна площади ступенчатой фигуры Q_ε , описанной вокруг криволинейной трапеции G .

Величина нижней суммы Дарбу $\underline{D}(f, T_\varepsilon) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$ равна площади ступенчатой фигуры P_ε , вписанной в криволинейную трапецию G .

Так как нашли многоугольники $P_\varepsilon, Q_\varepsilon$ такие, что $P_\varepsilon \subset G \subset Q_\varepsilon$ и $S_{Q_\varepsilon} - S_{P_\varepsilon} < \varepsilon$, то по критерию квадратуемости криволинейная трапеция G является квадратуемой фигурой.

Для оценки площади криволинейной трапеции справедливы неравенства

$$\sup_{T \in \tau[a, b]} \underline{D}(f, T) \leq S_{\text{кр. тр.}} \leq \inf_{T \in \tau[a, b]} \overline{D}(f, T). \text{ Учитывая, что } \inf_{T \in \tau[a, b]} \overline{D}(f, T) = \int_a^b f(x)dx = I$$

$$\text{и } \sup_{T \in \tau[a, b]} \underline{D}(f, T) = \int_a^b f(x)dx = I,$$

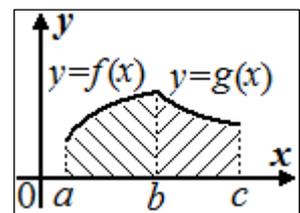
$$\text{получаем формулу } S_{\text{кр. тр.}} = \int_a^b f(x)dx.$$

Вычисление площадей плоских фигур

Площадь плоской фигуры в декартовых координатах

1) Пусть плоская фигура представляет собой криволинейную трапецию то есть фигуру, ограниченную линиями $y=0, x=a, x=b, y=f(x)$, где $f(x)$ – непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$. Тогда ее площадь находится по формуле

$$S_{\text{крив. трап.}} = \int_a^b f(x)dx.$$

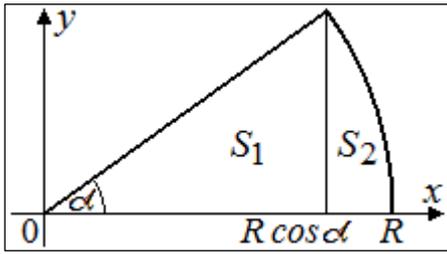


2) Пусть фигуру можно разбить на две криволинейные трапеции: под графиком $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и под графиком $y=g(x)$ на отрезке $[b, c]$. Тогда ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)dx.$$

Пример. Вычислить площадь сектора с углом α и радиусом R .

Решение.



Расположим сектор на координатной плоскости так, чтобы его вершина находилась с начале координат, и один из его радиусов лежал в положительной части оси OX . Тогда сектор можно разбить на две криволинейные трапеции, соответственно его площадь $S_{\text{сект.}} = S_1 + S_2$.

Здесь первое слагаемое является площадью криволинейной трапеции под графиком линейной функции $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$ и вычисляется по формуле

$$S_1 = \int_0^{R \cos \alpha} x \cdot \operatorname{tg} \alpha \, dx = \frac{R^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{R^2}{4} \sin 2\alpha.$$

Второе слагаемое представляет собой площадь под дугой окружности, задаваемой уравнением $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Вычислим эту площадь:

$$S_2 = \int_{R \cos \alpha}^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx.$$

Сделаем в интеграле замену переменной $x = R \cos t$, $dx = -R \sin t \, dt$.

Пересчитаем пределы интегрирования: при $x = R \cos \alpha$: $t = \alpha$; при

$x = R$: $t = 0$. Подставляя в интеграл, получаем

$$S_2 = -\int_{\alpha}^0 R^2 \sin^2 t \, dt = \frac{R^2}{2} \int_0^{\alpha} (1 - \cos 2t) \, dt = \frac{R^2}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\alpha} = \frac{R^2}{2} \alpha - \frac{R^2}{4} \sin 2\alpha.$$

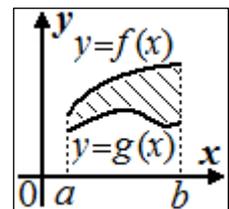
Складывая две вычисленные площади, находим площадь сектора

$$S_{\text{сект.}} = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} R^2 \alpha.$$

3) Пусть плоская фигура ограничена: сверху - графиком функции $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$; снизу - графиком функции $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$; по бокам - вертикальными отрезками $x = a$ и $x = b$, которые могут вырождаться в точку.

Тогда площадь этой фигуры равна разности площадей соответствующих криволинейных трапеций и вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$



Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6$ и $y = -x^2 + 5x - 6$.

Решение. Найдем сначала абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 6, \\ y = -x^2 + 5x - 6. \end{cases}$$

Отсюда находим $x_1 = 0$, $x_2 = 2,5$. Искомая площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_0^{2,5} ((-x^2 + 5x - 6) - (x^2 - 6)) dx = \int_0^{2,5} (-2x^2 + 5x) dx = 5 \frac{5}{24}.$$

Площадь фигуры, под графиком функции, заданной параметрически.

Пусть плоская фигура представляет собой криволинейную трапецию, верхняя граница которой задана параметрическими уравнениями

$$y(x) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [t_1, t_2].$$

В этом случае площадь вычисляется по формуле

$$S_{\text{крив. трап.}} = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt.$$

Пример. Вычислить площадь эллипса.

Решение. Зададим эллипс параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Поскольку эллипс симметричен относительно координатных осей, то можно искать площадь четверти эллипса, расположенной в первой координатной четверти. Эта фигура представляет собой криволинейную трапецию, у которой абсцисса меняется

от $x = 0$, что соответствует значению параметра $t = \frac{\pi}{2}$, до $x = a$, что соответствует значению параметра $t = 0$. Подставляя в формулу, находим

$$S_1 = \int_{\pi/2}^0 b \sin t \cdot (-a \cos t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{\pi ab}{4}.$$

Отсюда площадь всего эллипса равна $S = \pi ab$.

Площадь плоской фигуры в полярных координатах.

В полярных координатах через определенный интеграл находится площадь криволинейного сектора.

Определение

Криволинейный сектор – это фигура, ограниченная в полярных координатах лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и графиком функции $\rho = \rho(\varphi)$.

Теорема. Если функция $\rho(\varphi)$ - непрерывна, то криволинейный сектор – квадратуемая фигура и площадь его находится по формуле

$$S_{\text{крив. сектора}} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi)^2 d\varphi.$$

Доказательство.

Пусть T – разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ конечным набором точек

$$T: \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = \beta.$$

Тогда площадь криволинейного сектора разбилась на n частей. Обозначим через S_k часть площади криволинейного сектора, ограниченного линиями $\varphi = t_{k-1}$, $\varphi = t_k$,

$\rho = \rho(\varphi)$. Если мелкость разбиения $\lambda = \max_{k=1, \dots, n} (t_k - t_{k-1})$ достаточно мала, то S_k приближенно равна площади обычного кругового сектора с углом $t_k - t_{k-1}$ и радиусом $\rho(\zeta_k)$, где ζ_k – произвольная точка из интервала $t_{k-1} < \zeta_k < t_k$. Тогда

верно приближенное равенство $S_k \approx \frac{1}{2}(\rho(\zeta_k))^2 \cdot (t_k - t_{k-1})$. А так как площадь

криволинейного сектора равна $S_{\text{крив. сектора}} = \sum_{k=1}^n S_k$, то получаем приближенное равенство

$$S_{\text{крив. сектора}} \approx \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(\rho(\zeta_k))^2 \cdot (t_k - t_{k-1}).$$

Здесь в правой части интегральная сумма Римана для функции $\frac{1}{2}(\rho(\varphi))^2$.

Поскольку функция $\rho(\varphi)$ – непрерывна, то $\frac{1}{2}(\rho(\varphi))^2$ интегрируема и при $\lambda \rightarrow 0$ интегральные суммы стремятся к интегралу Римана. Таким образом

$$\text{получаем формулу } S_{\text{крив. сектора}} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (\rho(\varphi))^2 d\varphi.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли, задаваемой уравнением $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Решение. Перейдем к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

Тогда уравнение кривой примет вид

$$\rho^4 = a^2 \rho^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \text{ или}$$

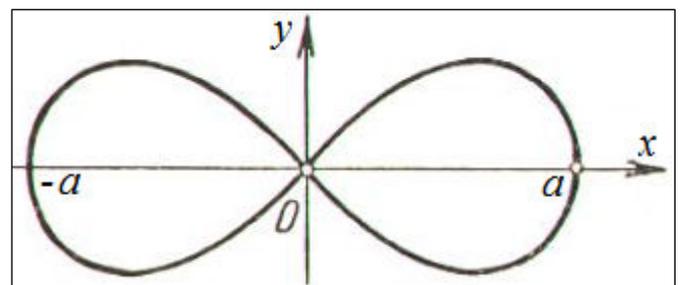
$$\rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Найдем область определения функции из условия $\cos 2\varphi \geq 0$.

Решая это неравенство, находим $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Функция имеет период π , значит ее график симметричен относительно начала координат.

Так как $\rho(-\varphi) = \rho(\varphi)$, то график функции также симметричен относительно оси Ox . В силу симметрии достаточно найти площадь части фигуры, расположенной в первой четверти



$$S_1 = \frac{a^2}{2} \cdot \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}. \text{ Тогда площадь фигуры, ограниченной лемнискойой}$$

$$S = 4S_1 = a^2.$$

3.3. Вычисление объёмов

Телом назовём часть пространства, ограниченную замкнутой несамопересекающейся поверхностью. Понятие объема пространственного тела вводится аналогично понятию площади плоской фигуры.

Пусть F – некоторое тело в пространстве. Его нижний объем определяется по формуле $V_*(F) = \sup_{G \subset F} V_G$, где $\{G\}_{G \subset F}$ – множество всех многогранников, лежащих

внутри F . Верхний объем равен $V^*(F) = \inf_{F \subset R} V_R$, где $\{R\}_{F \subset R}$ – множество всех многогранников, содержащих в себе F .

Определение. Тело F кубиреуемо, если $V_*(F) = V^*(F)$, тогда объем тела равен $V_F = V_*(F) = V^*(F)$.

Критерий кубиреуемости. Тело F кубиреуемо тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся многогранники G_ε и R_ε такие что $G_\varepsilon \subset F \subset R_\varepsilon$ и $V_{R_\varepsilon} - V_{G_\varepsilon} < \varepsilon$.

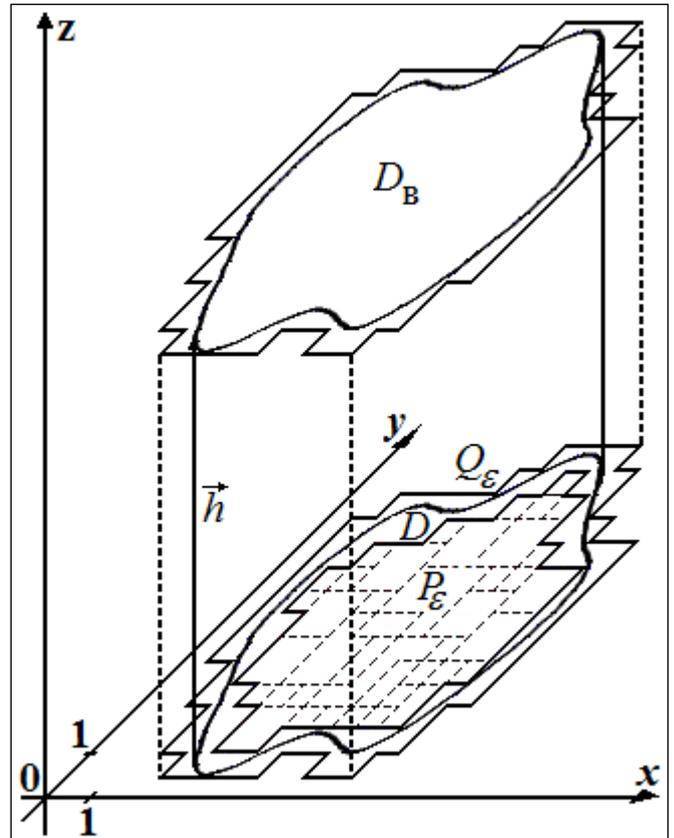
Доказательство проводится аналогично доказательству критерия квадриреуемости.

Пример. Пусть F – прямая призма, то есть тело, у которого верхнее основание D_B получено из нижнего основания D сдвигом на вектор \vec{h} , перпендикулярный нижнему основанию (при этом, конечно, фигуры D_B и D равны). Докажем, что если основание D квадриреуемо, то сама призма F кубиреуема, и ее объем вычисляется по формуле $V_F = S_D \cdot h$, где h – высота призмы, то есть длина вектора \vec{h} .

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как фигура D квадриреуема, то по критерию квадриреуемости для

$$\frac{\varepsilon}{h} > 0 \text{ найдутся многоугольники } P_\varepsilon \text{ и } Q_\varepsilon$$

такие, что $P_\varepsilon \subset D \subset Q_\varepsilon$ и $S_{Q_\varepsilon} - S_{P_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{h}$.



Многогранник с высотой h и основанием P_ε лежит внутри призмы, а многогранник с основанием Q_ε и высотой h содержит призму. Тогда разность объемов внешнего и внутреннего многогранников $\Delta V = S_{Q_\varepsilon} \cdot h - S_{P_\varepsilon} \cdot h = h \cdot (S_{Q_\varepsilon} - S_{P_\varepsilon}) < \frac{h \cdot \varepsilon}{h} = \varepsilon$.

Тогда, по критерию кубирования, призма кубируема.

По определению объема $V_F = \inf_{F \subset R} V_R \leq \inf_{D \subset Q} (S_Q \cdot h) = S_D \cdot h$. С другой стороны,

$V_F = \sup_{G \subset F} V_G \geq \sup_{P \subset D} (S_P \cdot h)$. Отсюда видно, что $V_F = S_D \cdot h$, что и требовалось доказать.

Теорема (вычисление объёма через площадь поперечных сечений).

Пусть тело ограничено плоскостями $x = a$ и $x = b$. Пусть каждое сечение тела плоскостью $x = \text{const}$ есть квадратуемая фигура $D(x)$, причем ее площадь $S(x)$ является непрерывной функцией на отрезке $[a, b]$. Тогда тело будет кубируемо и его

объем вычисляется по формуле $V = \int_a^b S(x) dx$.

Доказательство.

Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$ конечным набором точек

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$. Тогда $V = \sum_{k=1}^n V_k$, где V_k – объем части

тела, заключенной между плоскостями $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$. В каждом частичном отрезке разбиения выберем точку $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Сечение тела плоскостью $x = \zeta_k$ есть квадратуемая фигура $D(\zeta_k)$. Площадь $S(x)$ – непрерывная функция,

следовательно, если отрезок $[x_{k-1}, x_k]$ достаточно мал, то $S(x)$ на нем изменяется мало, значит можно считать, что $S(x) \approx S(\zeta_k) \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда объем V_k

приблизительно равен объему призмы с площадью основания $S(\zeta_k)$ и высотой $(x_k - x_{k-1})$. Учитывая формулу объема призмы, получаем $V_k \approx S(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})$. Тогда

объем всего тела приближенно равен $V \approx \sum_{k=1}^n S(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})$. Так как в правой части

этого равенства стоит интегральная сумма Римана для функции $S(x)$ на отрезке $[a, b]$, то при мелкости разбиения $\lambda = \max_{k=1, \dots, n} (x_k - x_{k-1})$ стремящейся к нулю,

получаем формулу $V = \int_a^b S(x) dx$.

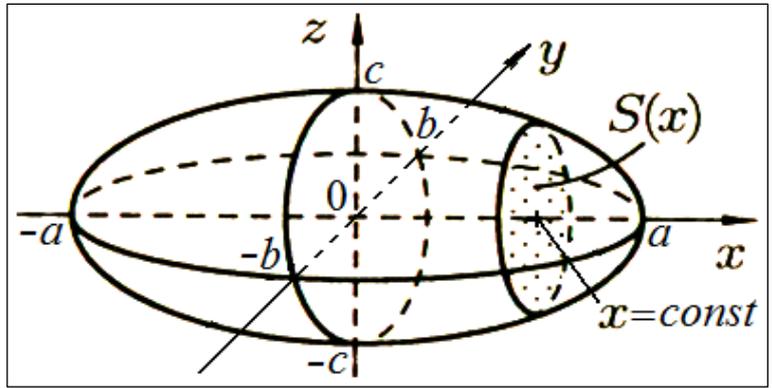
Пример. Найти объем эллипсоида.

Решение. Запишем уравнение эллипсоида: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Найдем сечение эллипсоида плоскостью $x = \text{const}$:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2};$$

$$\frac{y^2}{\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2} = 1.$$



В сечении эллипсоида плоскостью $x = const$ получился эллипс с полуосями

$\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ и $\frac{c}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$. Площадь этого эллипса равна

$S(x) = \pi \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{c}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{\pi bc}{a^2} \cdot (a^2 - x^2)$. Подставляя $S(x)$ в формулу

вычисления объема тела через площадь поперечных сечений, получаем

$$V = \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

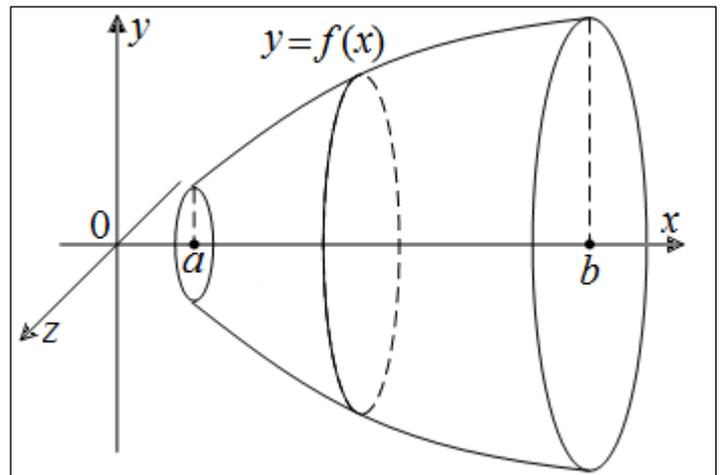
В частном случае, когда все полуоси эллипсоида одинаковы и равны R , получаем формулу объема шара $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Объём тела вращения

Рассмотрим тело, которое получается при вращении криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, вокруг оси OX . Для вычисления его объема применим общую формулу объема тела через площадь поперечных сечений. В данном случае в сечении плоскостью $x = const$ получается круг радиуса $R = f(x)$. Тогда его площадь $S(x) = \pi R^2 = \pi (f(x))^2$. Соответственно

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad \text{– объем тела}$$

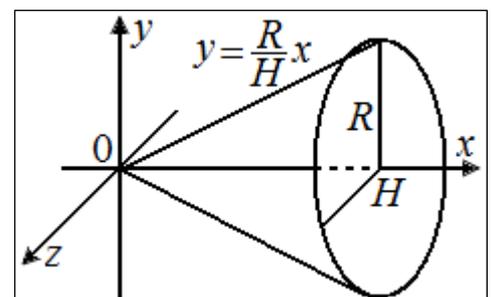
вращения вокруг оси OX .



Пример. Найти объём конуса радиуса R и высотой H .

Решение. Конус – это тело, которое можно получить вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции

под графиком линейной функции $y = \frac{R}{H}x$, где



$0 \leq x \leq H$. Подставляя $f(x) = \frac{R}{H}x$ в формулу объема тела вращения, получаем

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H}x \right)^2 dx = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

В случае вычисления объема тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры под графиком функции, заданной параметрическими уравнениями

$$y(x): \begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases} \quad (t_1 \leq t \leq t_2), \text{ формула имеет вид } V = \pi \int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 x'(t) dt.$$

Пример. Найти объём тела, полученного вращением астроида вокруг оси OX .

Решение. Параметрические уравнения астроида

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Так как кривая симметрична относительно обеих координатных осей, то можно считать только половину объема тела – это объем тела, полученного вращением части кривой, соответствующей изменению параметра

от $t = \frac{\pi}{2}$ до $t = 0$. Подставив в формулу вычисления

объема, получим

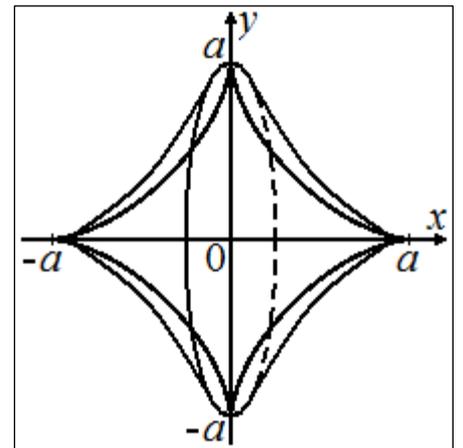
$$V_1 = \pi \int_{\pi/2}^0 a^2 \sin^6 t \cdot 3a \cos^2 t \cdot (-\sin t) dt = 3\pi a^3 \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 t)^3 \cdot \cos^2 t \cdot d(\cos t).$$

Сделаем в этом интеграле замену $z = \cos t$.

Пересчитаем пределы интегрирования: при $t = \frac{\pi}{2}$: $z = 0$; при $t = 0$: $z = 1$. Отсюда:

$$V_1 = 3\pi a^3 \int_0^1 (1 - z^2)^3 \cdot z^2 \cdot dz = 3\pi a^3 \int_0^1 (z^2 - 3z^4 + 3z^6 - z^8) dz = \frac{16\pi a^3}{105}.$$

Удваивая полученный результат, получаем окончательный ответ $V = \frac{32\pi a^3}{105}$.

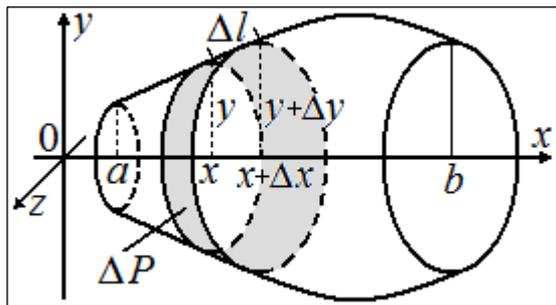


3.4. Вычисление площади поверхности тела вращения

Рассмотрим поверхность, образованную вращением вокруг оси OX графика функции $y = y(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$.

Найдём площадь малого элемента поверхности ΔP . Площадь ΔP приблизительно равна площади усечённого конуса, в основании которого круги радиуса y и $y + \Delta y$,

а образующая равна Δl . Площадь поверхности усеченного конуса с радиусом малого основания r , радиусом большого основания R и длиной образующей L вычисляется по формуле $\pi(R+r)L$. Поэтому $\Delta P \approx \pi(y+y+\Delta y)\Delta l$. Отсюда $dP = 2\pi y \cdot dl$, так как слагаемое $\Delta y \cdot \Delta l$, которое является бесконечно малой более высокого порядка, чем остальные слагаемые, можно отбросить. Для разных случаев задания кривой дифференциал длины дуги dl записывается по-разному.



Если кривая задана явно, то $dP = 2\pi y \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ и

$$P = 2\pi \int_a^b y(x) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad \text{– площадь поверхности вращения кривой,}$$

заданной явно уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$.

В случае, если кривая задана параметрическими уравнениями

$$y(x) = \begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases} \quad (t_1 \leq t \leq t_2), \text{ то}$$

$$P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad \text{– площадь поверхности вращения кривой,}$$

заданной параметрическими уравнениями.

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \sin \varphi \cdot \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi \quad \text{– площадь поверхности вращения кривой,}$$

заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.

Пример 1. Найти площадь шара радиуса R .

Решение. Поверхность шара можно получить вращением кривой, заданной уравнением $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$. В силу симметрии можно считать площадь P_1 половины поверхности, полученной вращением части окружности, лежащей в первой четверти.

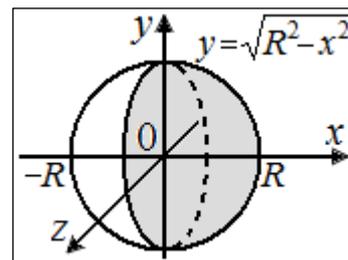
Вычислим подынтегральные выражения:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}};$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}.$$

Подставляя их в формулу $P = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$

площади поверхности кривой, заданной явными уравнениями,



получаем
$$P_1 = 2\pi \int_0^R \frac{\sqrt{R^2 - x^2} R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R^2.$$

Умножая на два, находим площадь поверхности шара $P_{\text{шара}} = 4\pi R^2$.

Пример 2. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды вокруг оси OX .

Решение. Запишем параметрические уравнения циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Найдем производные $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$. Упростим выражение

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Подставляя его в формулу $P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$, получаем

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a \cdot \sin \frac{t}{2} dt = -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) = \\ &= -16\pi a^2 \cdot \left(\cos \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \cos^3 \frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{64\pi a^2}{3}. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти площадь поверхности, полученной вращением лемнискаты Бернулли вокруг оси OX .

Решение. Запишем уравнение лемнискаты в полярных координатах:

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi} \quad (a > 0).$$

В силу симметрии можно искать площадь половины поверхности. Она получается при вращении части кривой, соответствующей значению аргумента $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

Воспользуемся формулой

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \sin \varphi \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

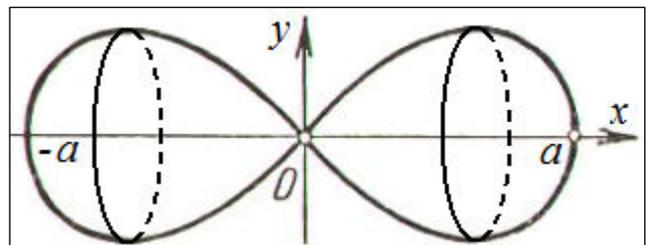
Производная от функции равна

$$\rho'(\varphi) = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Упростим подкоренное выражение

$$(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2 = a^2 \cos 2\varphi + \frac{a^2 \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = a^2 \frac{\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}.$$

Подставляя в формулу, находим площадь половины поверхности



$$P_1 = 2\pi \int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2\pi a^2 (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi/4} = \pi a^2 \cdot (2 - \sqrt{2}).$$

Удваивая этот результат, получаем окончательный ответ $P = 2\pi a^2 \cdot (2 - \sqrt{2})$.

3.5. Некоторые физические приложения определенного интеграла

Вычисление массы плоской кривой

Пусть кривая γ задана параметрически уравнениями

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, и пусть $\rho(x, y)$ – линейная плотность массы в точке $(x, y) \in \gamma$. Тогда масса кривой γ вычисляется по формуле

$$m = \int_a^b \rho(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

В случае если кривая γ задана явно уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, масса кривой

вычисляется по формуле $m = \int_a^b \rho(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$.

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести материальной кривой.

Статическим моментом точки относительно оси называется произведение массы точки на расстояние до прямой.

Рассмотрим плоскую кривую, у которой плотность равна $\rho(x, y) = 1$, тогда масса кривой равна ее длине, найдём

статический момент кривой относительно оси OX .

Пусть кривая задана уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$. Возьмем

на кривой точку (x, y) и вырежем из кривой элементарный

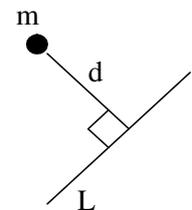
участок длины dl , содержащий точку (x, y) . Если считать массу участка, равную dl , сосредоточенной в точке (x, y) , то элементарный момент, то есть статический

момент малого элемента кривой относительно оси OX равен $dS_x = y \cdot dl$. Тогда статический момент всей кривой относительно оси OX , находится по формуле

$$S_x = \int_a^b y(x) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Аналогично выводится формула для вычисления статического момента кривой

относительно оси OY : $S_y = \int_a^b x \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$.



Определение. Центр тяжести кривой (ζ, η) – это такая точка, что если в ней сосредоточить всю массу кривой, то ее статический момент относительно оси, не пересекающей кривую, будет равен статическому моменту всей кривой:

$$l \cdot \eta = S_x; \quad l \cdot \zeta = S_y.$$

Отсюда получаем формулы для нахождения координат центра тяжести однородной

кривой $\boxed{\zeta = \frac{S_y}{l}, \quad \eta = \frac{S_x}{l}}.$

В случае если кривая задана явно уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, координаты центра тяжести кривой находятся по формулам

$$\boxed{\zeta = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx}; \quad \eta = \frac{\int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx}}.$$

Пример 1. Найти статический момент полуокружности относительно её диаметра.

Решение. Расположим полуокружность так, чтобы её диаметр находился на оси OX , а центр в начале координат.

Уравнение верхней полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Найдем значение подкоренного выражения в формуле для вычисления статического момента

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad 1 + (y'(x))^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2}. \text{ Подставляя в формулу, получаем ответ}$$

$$S_x = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot dx = 2R^2.$$

Пример 2. Найти статический момент относительно оси OX и координаты центра тяжести дуги астроида, расположенной в первой четверти.

Решение. Запишем параметрические уравнения астроида

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Формула для вычисления статического момента в случае, если кривая задана

параметрическими уравнениями $S_x = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$

Вычислим подкоренное выражение

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2 = (3a \cos t \sin t)^2.$$

Подставив в формулу, находим значение статического момента

$$S_x = \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \cdot 3a \cos t \sin t dt = 3a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t d(\sin t) = \frac{3a^2}{5}.$$

Найдем координаты центра тяжести (ζ, η) кривой.

В силу симметрии $\zeta = \eta$. Найдем ординату центра тяжести по формуле

$$\eta = \frac{S_x}{l}, \text{ где } l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 3a \int_0^{\pi/2} \sin t d(\sin t) = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Отсюда } \zeta = \eta = \frac{3a^2}{5} : \frac{3a}{2} = \frac{2a}{5}.$$

Статические моменты и координаты центра тяжести плоских фигур

Рассматриваем случай, когда фигура является однородной, то есть ее плотность в каждой точке равна 1. Пусть фигура является криволинейной трапецией, ограниченной сверху графиком функции $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$. Выделим элементарную бесконечно узкую вертикальную полоску. Приняв эту полоску приближенно за прямоугольник, находим ее массу, равную площади $y \cdot dx$. Для определения соответствующих элементарных моментов предположим всю массу полоски сосредоточенной в ее центре тяжести, то есть центре прямоугольника. Полученная материальная точка отстоит от оси OX на расстояние $\frac{1}{2}y$, от оси OY на расстояние

$\left(x + \frac{1}{2}dx\right)$, что приближенно равно x . Тогда элементарные моменты равны

$dS_x = \frac{1}{2}y^2 dx$ и $dS_y = xy \cdot dx$. Отсюда получаем формулы

$$S_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx \quad ; \quad S_y = \int_a^b xy dx.$$

Координаты центра тяжести (ζ, η) однородной криволинейной трапеции

определяются по формулам $\zeta = \frac{S_y}{S_\delta} ; \quad \eta = \frac{S_x}{S_\delta}$.

В случае явного задания функции уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, имеем

$$\zeta = \frac{\int_a^b x \cdot y(x) dx}{\int_a^b y(x) dx} \quad ; \quad \eta = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (y(x))^2 dx}{\int_a^b y(x) dx}.$$

Пример 3. Найти статический момент относительно оси OX и координаты центра тяжести фигуры ограниченной осью OX и одной аркой циклоиды.

Решение. Запишем параметрические уравнения циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Подставим эти уравнения в формулу для вычисления статического момента фигуры относительно оси OX :

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (y(t))^2 x'(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a - a \cos t)^2 a(1 - \cos t) dt = \\ &= \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \frac{5\pi a^3}{2}. \end{aligned}$$

Найдем координаты центра тяжести фигуры. Так как $y(\pi - t) = y(\pi + t)$, то фигура симметрична относительно прямой $x = \pi a$. Поэтому абсцисса центра тяжести

$$\zeta = \pi a. \text{ Ординату центра тяжести находим по формуле } \eta = \frac{S_x}{S_\delta}.$$

Вычислим площадь фигуры

$$S_\delta = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = 3\pi a^2.$$

Учитывая, что соответствующий статический момент уже посчитан, находим

$$\text{ординату центра тяжести } \eta = \frac{5\pi a^3}{2 \cdot 3\pi a^2} = \frac{5}{6} a. \text{ Итак, центр тяжести фигуры}$$

расположен в точке $\left(\pi a, \frac{5}{6} a \right)$.

Теоремы Паппа-Гульдина

Впервые эти теоремы нашел александрийский математик Папп в 3 веке н.э.

В эпоху средневековья многие достижения античной науки были в Европе утрачены. В 17-ом веке теоремы вновь открыл швейцарский математик Гульдин.

Первая теорема Паппа-Гульдина. Площадь поверхности, образованной вращением кривой вокруг не пересекающей её оси, равна произведению длины кривой на путь, проходимый центром тяжести этой кривой.

В случае вращения вокруг оси OX теорема записывается формулой

$$P = l \cdot 2\pi\eta.$$

Доказательство. Рассмотрим случай плоской кривой, когда она задана явно уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$. Ордината центра тяжести кривой находится по

формуле $\eta = \frac{S_x}{l}$. Подставив сюда формулу для нахождения статического момента и

умножив это равенство на длину кривой l , получаем

$$l \cdot \eta = \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx .$$

Затем домножим обе части этого равенства на 2π :

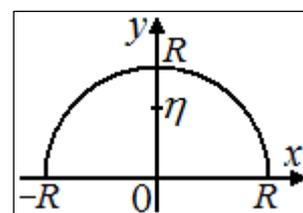
$$l \cdot 2\pi\eta = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx .$$

В правой части этого равенства стоит площадь поверхности тела, образованного вращением кривой вокруг оси OX .

В левой части равенства стоит произведение длины кривой l на длину окружности $2\pi\eta$, которую описывает центр тяжести. Теорема доказана.

Пример 1. Найти координаты центра тяжести полуокружности радиуса R с центром в начале координат, расположенной в верхней полуплоскости.

Решение. В силу симметрии абсцисса центра тяжести $\zeta = 0$. Найдем ординату центра тяжести, используя первую теорему Паппа-Гульдина. Поверхность, образованная при вращении кривой вокруг оси OX , является сферой, ее площадь $P = 4\pi R^2$. Длина кривой равна половине длины окружности $l = \pi R$. Подставив эти значения в формулу $l \cdot 2\pi\eta = P$, найдем ординату центра



тяжести $\eta = \frac{P}{2\pi l} = \frac{4\pi R^2}{2\pi^2 R} = \frac{2}{\pi} R \approx 0,637 R$.

Пример 2. Найти площадь поверхности вращения полуокружности вокруг касательной, параллельной её диаметру.

Решение. Используем результат, полученный в предыдущем примере. Ордината центра тяжести полуокружности $\eta = \frac{2}{\pi} R$.

Тогда радиус окружности, описываемой центром тяжести при вращении полуокружности вокруг

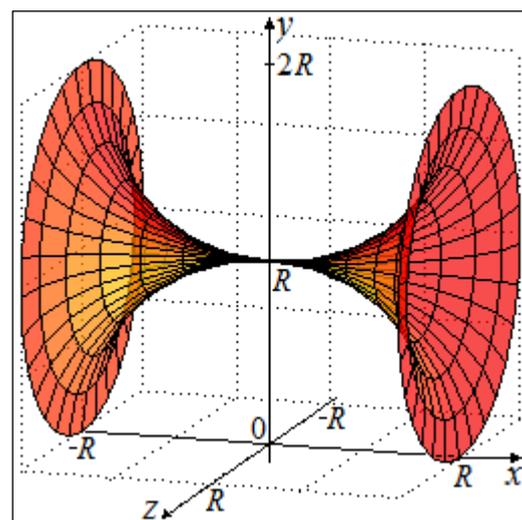
касательной, равен $R_1 = R - \frac{2}{\pi} R$. Из первой

теоремы Паппа-Гульдина имеем формулу

$P = l \cdot 2\pi R_1$. Отсюда искомая площадь

поверхности

$$P = l \cdot 2\pi \left(R - \frac{2}{\pi} R \right) = \pi R \cdot 2(\pi R - 2R) = 2\pi(\pi - 2)R^2 .$$



Вторая теорема Паппа-Гульдина. Объём тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг не пересекающей её оси, равен произведению площади фигуры на путь, проходимый центром тяжести этой фигуры. В случае вращения вокруг оси OX теорема записывается формулой

$$V = S_{\phi} \cdot 2\pi\eta.$$

Доказательство. Рассмотрим случай плоской кривой, когда она задана явно уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$. Фигура под графиком этой кривой является криволинейной трапецией. Ордината центра тяжести плоской фигуры находится по формуле $\eta = \frac{S_x}{S_{\phi}}$. Применяя формулу для вычисления статического момента S_x ,

получаем $\eta \cdot S_{\phi} = \frac{1}{2} \int_a^b (y(x))^2 dx$. Домножим на число 2π обе части этого равенства:

$$2\pi\eta \cdot S_{\phi} = \pi \int_a^b (y(x))^2 dx.$$

В правой части стоит объем тела, полученного вращением кривой вокруг оси OX . Левая часть является произведением площади фигуры на длину окружности, описываемой центром тяжести этой фигуры.

Теорема доказана.

Пример 3. Найти координаты центра тяжести полукруга радиуса R с центром в начале координат, расположенного в верхней полуплоскости.

Решение. Воспользуемся второй теоремой Паппа-Гульдина. При вращении вокруг оси OX полукруг образует шар. Объем шара вычисляется по формуле $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$,

площадь полукруга равна $S_{\phi} = \frac{\pi R^2}{2}$. Подставляя эти значения в формулу

$$V = S_{\phi} \cdot 2\pi\eta, \text{ находим } \eta = \frac{V_{\text{шара}}}{2\pi \cdot S_{\phi}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi \cdot \frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4}{3\pi} R.$$

Список литературы

1. Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа, том 1.* – М.: Дрофа, 2006.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
3. Фихтенгольц Г.М. *Основы математического анализа, том 1 и том 2.* – СПб.: Лань, 2008.
4. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. *Математический анализ в вопросах и задачах.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
5. Берман Г.Н. *Сборник задач по курсу математического анализа.* – СПб.: Лань, 2007.
6. Демидович Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* – М.: ООО Изд-во Астрель, 2009.