МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»

Движение тел с переменной массой. Часть I

Рекомендовано методической комиссией физического факультета
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
03.03.02 «Физика», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
28.03.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника»,
09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Нижний Новгород

2018

УДК – 53
ББК – 22.3

Движение тел с переменной массой. Часть I: учебно-методическое пособие в двух частях. Часть первая. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2018. – 29 с.

Авторы: Зайцева Е.В., Овсецина Т.И., Белова О.В.
Рецензенты: Перов А.А., канд. физ.-мат. наук доцент кафедры теоретической физики физического факультета ННГУ

Учебно-методические указания содержат вывод уравнений и законов реактивного движения, а также методический разбор задач по теме «Движение тел с переменной массой».

Учебно-методические указания предназначены для студентов физического факультета и для студентов института ИТММ.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
физического факультета ННГУ, к.ф.-м.н., доцент Перов А.А.

УДК– 53
ББК – 22.3

Предисловие

Предлагаем читателям пособие, которое не только поможет в решении задач по теме «Движение тела с переменной массой», но и сможет заинтересовать людей, умеющих их решать.

Данное учебное пособие состоит из двух частей. В главе 1 первой части пособия представлен подробный вывод уравнения Мещерского. Особое внимание уделено выражению для реактивной силы. В конце главы даны общие указания по решению задач о движении тел с переменной массой.

Во главе 2 первой части пособия рассматриваются решения конкретных задач движения тел с присоединяющейся и отделяющейся массой. Задачи этой части мы условно назвали «земными», чтобы показать, что движение тел с переменной массой - это не только движение ракет.

Вторая часть пособия будет посвящена решению «космических» задач, т.е. задач о движении ракет и космических кораблей.

Опыт преподавания авторами общего курса физики показал, что необходимо приводить подробный ход решения с основными преобразованиями, а задачи располагать по степени их трудности так, что бы последующие из них были развитием предыдущих. Поэтому представлены задачи стандартные, то есть обязательные для решения, задачи повышенной сложности и материалы для любознательных. Текст последних печатается курсивом. Решение и, главное, выводы из большинства задач являются очень интересными и расширяют общий кругозор читателя.

Глава 1. Основные теоретические сведения

В ньютоновской механике полагают, что масса тела не зависит от его скорости. Однако это вовсе не означает, что всегда при движении тела его масса остается постоянной. Движение *тела переменной массы* называется *реактивным движением*.

Наблюдать реактивное движение очень просто. Можно надуть шарик и, не завязывая, отпустить его (рис.1). Шарик будет двигаться до тех пор, пока продолжается истечение воздуха. Реактивная сила $\vec{F}_p$ возникает без какого либо взаимодействия с внешними телами.

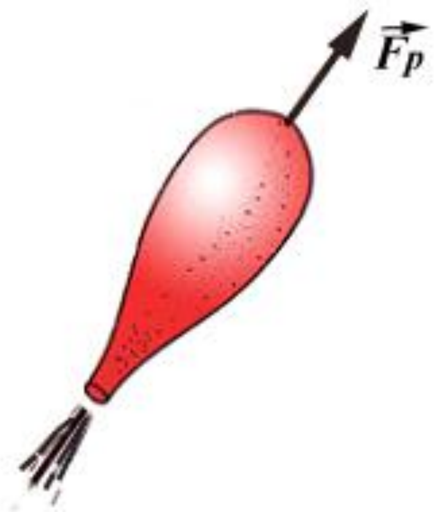


Рис.1. Пример наблюдения реактивного движения.

Реактивное движение впервые использовал древнегреческий ученый Герон. Его устройство не нашло применения и служило только забавой. В конце первого тысячелетия нашей эры в Китае с помощью реактивного движения приводили в действие «ракеты» - бамбуковые трубки, начиненные порохом, они также использовались как забава.

Одно из главнейших изобретений человечества в XX веке - это изобретение реактивного двигателя, который позволил человеку подняться в космос.

Основное уравнение динамики поступательно движущегося тела переменной массы впервые было получено И.В. Мещерским (1897 г.). Это уравнение – следствие закона изменения импульса системы материальных точек. Выведем уравнение реактивного движения [1,2,3] для медленно движущихся тел (т.е. скорость движения которых много меньше скорости света).

Уравнение Мещерского

Рассмотрим тело, масса которого $m(t)$ может изменяться в процессе движения. Будем считать, что за время dt к телу массой $m(t)$ присоединится масса $dm^{пр}$ и отделится масса $dm^{отд}$. Тело массой $m(t)$ вместе с $dm^{пр}$ и $dm^{отд}$ можно рассматривать как систему материальных точек (рис. 2).

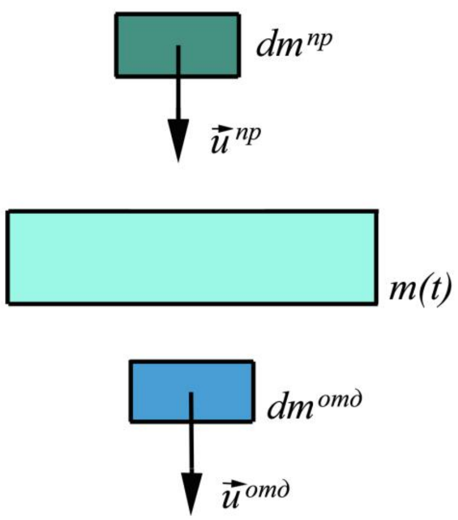


Рис.2. К выводу уравнения Мещерского.

Для этой системы материальных точек запишем закон изменения импульса в дифференциальной форме в инерциальной системе отсчета, связанной с Землей:

$$d\vec{p}_{сист} = \sum \vec{F}_{внеш} dt. \qquad (1.1)$$

Выразим приращение импульса системы $d\vec{p}_{сист}$ за промежуток времени от *t* до *t+dt.* В момент времени *t* импульс системы запишется в виде:

$$\vec{p}_{сист} = (m + dm^{отд})\vec{v} + dm^{пр}\vec{v}^{пр}, \qquad (1.2)$$

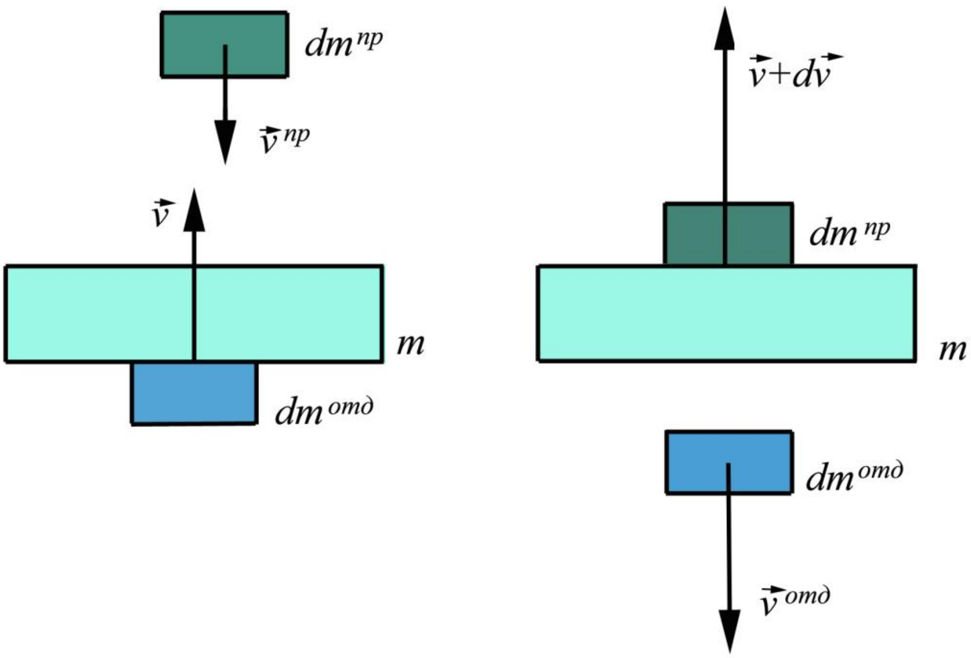
где $m\vec{v}$ - импульс тела, а $dm^{пр}\vec{v}^{пр}$ - импульс массы, которая через промежуток времени *dt* присоединится к телу (см. рис.3а).

Через промежуток времени *dt* от тела уже отделится масса $dm^{отд}$ и присоединится масса $dm^{пр}$. Скорость $dm^{отд}$ в инерциальной системе отчета связанной с Землей обозначим $\vec{v}^{отд}$.Скорость тела с присоединившейся массой изменится и станет равной $\vec{v} + d\vec{v}$ (рис.3б). Тогда импульс системы через промежуток времени *dt* (в момент времени t+dt) можно записать:

$$\vec{p}_{сист} + d\vec{p}_{сист} = (m + dm^{пр})(\vec{v} + d\vec{v}) + dm^{отд}\vec{v}^{отд}. \qquad (1.3)$$

Вычитая из выражения (1.2) выражение (1.3), найдем изменение импульса системы:

$$d\vec{p}_{сист} = md\vec{v} - dm^{отд}(\vec{v} - \vec{v}^{отд}) + dm^{пр}(\vec{v} - \vec{v}^{пр}) + dm^{пр}d\vec{v}. \qquad (1.4)$$



а) б)

Рис.3. Состояние системы в момент времени:

а) *t*, импульс системы описывается выражением (1.2),

б) *t+dt*, импульс системы описывается выражением (1.3).

Так как время *dt*, а, следовательно, и приращения $d\vec{v}$ и *dm* стремятся к нулю, то последнее слагаемое в (1.4) является бесконечно малым второго порядка по сравнению с остальными слагаемыми, и им можно пренебречь. Теперь уравнение (1.4) примет вид:

$$d\vec{p}_{cucm} = md\vec{v} + dm^{np}(\vec{v} - \vec{v}^{np}) - dm^{om\partial}(\vec{v} - \vec{v}^{om\partial})\,. \qquad (1.5)$$

Удобно рассматривать скорости отделяющейся и присоединяющейся масс не относительно системы отсчета, связанной с Землей, а относительно движущегося тела. Согласно закону сложения скоростей их можно записать в следующем виде:

$$\vec{v}^{om\partial} = \vec{v} + \vec{u}^{om\partial}\,, \qquad (1.6)$$

$$\vec{v}^{\,пр} = \vec{v} + \vec{u}^{\,пр}, \tag{1.7}$$

где $\vec{u}^{\,отд}$ и $\vec{u}^{\,пр}$ - скорости отделяющейся и присоединяющейся масс соответственно относительно тела массы m. После подстановки (1.6) и (1.7) в выражение для изменения импульса системы материальных точек (1.5), последнее примет вид:

$$d\vec{p}_{сист} = md\vec{v} + dm^{отд}\vec{u}^{\,отд} - dm^{пр}\vec{u}^{\,пр}. \tag{1.8}$$

Поделим левую и правую части уравнения (1.8) на dt и подставим полученное в закон изменения импульса для системы материальных точек (1.1)

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma\vec{F}_{внеш} - \frac{dm^{отд}}{dt}\vec{u}^{\,отд} + \frac{dm^{пр}}{dt}\vec{u}^{\,пр}. \tag{1.9}$$

Собственно, полученное уравнение (1.9) и есть **уравнение движения тела переменной массы (или уравнение Мещерского)**, однако наиболее привычный его вид следующий:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma\vec{F}_{внеш} + \vec{F}_{реакт}, \tag{1.10}$$

где $\vec{F}_{реакт}$ называют реактивной силой. Название обусловлено тем, что эта сила возникает не из взаимодействия с внешними телами, а как внутренняя сила реакции и поэтому ее называют реактивной:

$$\vec{F}_{реакт} = \frac{dm^{пр}}{dt}\vec{u}^{\,пр} - \frac{dm^{отд}}{dt}\vec{u}^{\,отд}. \tag{1.11}$$

Знак минус перед вторым слагаемым показывает, что реактивная сила, действующая со стороны отделяющейся массы направлена против относительной скорости отделяющейся массы, а знак плюс перед первым слагаемым – что реактивная сила, действующая со стороны присоединяющейся массы, сонаправлена с $\vec{u}^{\,np}$.

Особое внимание следует обратить на коэффициенты при скоростях в выражении для реактивной силы.

$\frac{dm^{omд}}{dt} = \mu^{omд}$ - скорость расхода массы (в частности, топлива), (1.12)

$\frac{dm^{np}}{dt} = \mu^{np}$ - скорость прироста массы (в частности, скорость погрузки). (1.13)

Однако чаще всего удобно рассматривать не массы присоединяющегося и отделяющегося веществ, а изменение массы тела *dm(t)*, поэтому найдем выражения для $\mu^{omд}$ и μ^{np} через *dm*. Поскольку $dm^{omд}=-dm$ (изменение массы тела) и $dm^{np}=+dm$, то

$$\mu^{omд} = \frac{dm^{omд}}{dt} = -\frac{dm}{dt} \tag{1.14}$$

$$\mu^{np} = \frac{dm^{np}}{dt} = \frac{dm}{dt}\,. \tag{1.15}$$

В этих обозначениях выражение для реактивной силы примет окончательный вид:

$$\vec{F}_{реакт} = \mu^{np} \cdot \vec{u}^{\,np} - \mu^{omд} \cdot \vec{u}^{\,omд}\,. \tag{1.16}$$

Общие указания по решению задач

Задачи механики о движение тел с переменной массой решают в следующей последовательности.

1. Сделать схематический чертеж и указать на нем направления относительных скоростей отделяющейся и присоединяющейся масс $\vec{u}^{\,отд}$ и $\vec{u}^{\,пр}$.
2. Расставить все силы, действующие на данное тело в произвольный момент времени.
3. Записать уравнение Мещерского.
4. Выбрать систему координат и записать уравнение Мещерского в проекциях на выбранные оси.
5. Решить полученные уравнения.

Глава 2. Примеры решения «земных» задач

<u>*Задача 1.1*</u>

Тележка Ньютона.

В 1663 г. Исааком Ньютоном был предложен один из первых проектов автомобилей с реактивным двигателем, использующим силу пара, так называемая «тележка Ньютона» (рис.4).

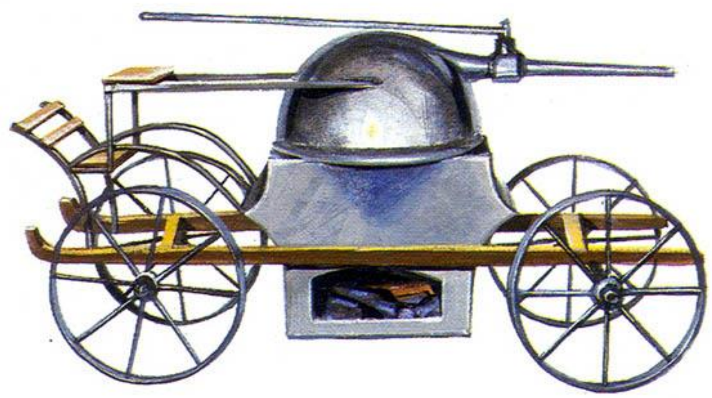


Рис.4. Тележка Ньютона.

На тележку ставится сосуд с водой. При нагревании воды образуется пар, который, выходя через узкое отверстие, создает реактивную силу, толкающую тележку. Проект этот, правда, остался на бумаге и осуществлен не был. Найдем максимальную скорость, которую может развивать такая тележка.

Решение.

Рассмотрим тележку (рис. 5). Расставим силы, действующие на нее. Запишем уравнение Мещерского (1.10) для тележки:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{реакт} + \vec{N} + m\vec{g}\ . \qquad (2.1)$$

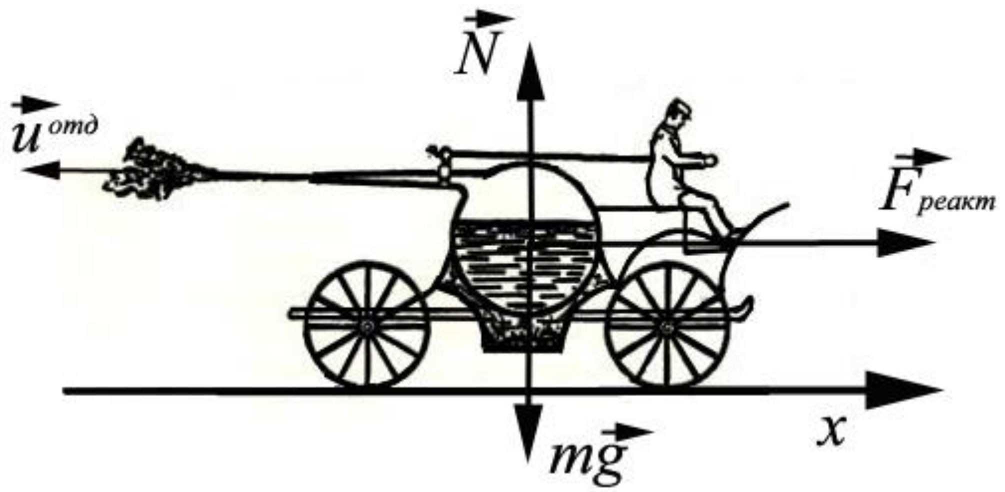


Рис.5. К задаче 1.1.

Выберем направление оси Ox и спроецируем на нее уравнение (2.1):

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_{реакт}\ .$$

Воспользуемся выражением (1.11) для реактивной силы и запишем ее модуль:

$$F_{реакт} = \mu^{отд} u^{отд}\ .$$

Воспользуемся выражением (1.14) для $\mu^{отд}$:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{dm}{dt}u^{отд}\ .$$

$$-\frac{dm}{m} = \frac{dv_x}{u}$$

$$\ln m = -\frac{v_x}{u} + C$$

Постоянная интегрирования определяется начальными условиями. В момент времени t=0 v_x=0, масса тележки с водой равна m_0:

$$m(v=0)=m_0,\ \ C = \ln m_0,$$

$$\text{тогда:} \quad \ln\frac{m}{m_0} = -\frac{v_x}{u},$$

$$v_x = u \cdot \ln\frac{m_0}{m}. \qquad (2.2)$$

Максимальное значение скорости тележка наберет, когда весь пар выйдет и значение массы станет равным $m=m_{тележ}$:

$$v_{\max x} = u \cdot \ln\frac{m_{тележ} + m_{пара}}{m_{тележ}} = u \cdot \ln(1 + \frac{m_{пара}}{m_{тележ}}) \qquad (2.3)$$

Из (2.3) видно, что тележка может достигнуть большой скорости либо за счет большого объема котла, т.е. при большой разнице масс $m_{пара}$ и $m_{тележ}$, либо при малом размере котла, т.е. при близких значениях $m_{пара}$ и $m_{тележ}$, но при высокой скорости истечения пара.

Интересно. *Проект тележки Ньютона остался на бумаге и осуществлен не был. Построена же первая в мире паровая повозка была в 1769 году французским военным инженером Николо-Жозефом Кюньо в Париже. Эта машина могла двигаться со скоростью 3,6 км/ч. Емкость парового котла и запасы воды хватало на 12-15 мин. движения. За это изобретение Кюньо получил награду - 20 тыс. франков* [4].

В журнале "Самокат" N 202 за 1898 г. были приведены данные о разных автомобилях, в том числе и о паровом: «Паровой автомобиль, рассчитанный на 100 км по 30 км/ч, весил 1000 кг (вода и уголь - 250 кг, котел - 150, карета - 350 и 4 пассажира - 200 кг). Угля будет израсходовано приблизительно на 30 коп., что составит 0,3 коп на 1 км» [4].

Задача 1.2

Реактивный катер массы M приводится в движение насосом, который забирает воду из озера и выбрасывает ее назад с кормы катера. Скорость струи выбрасываемой воды относительно катера постоянна и равна u, а масса ежесекундно выбрасываемой насосом воды также постоянна и равна μ. Найти модуль скорости катера как функцию времени. Силы трения в насосе и сопротивление воды движению катера не учитывать.

Решение:

Расставим силы, действующие на катер (см. рис.6).

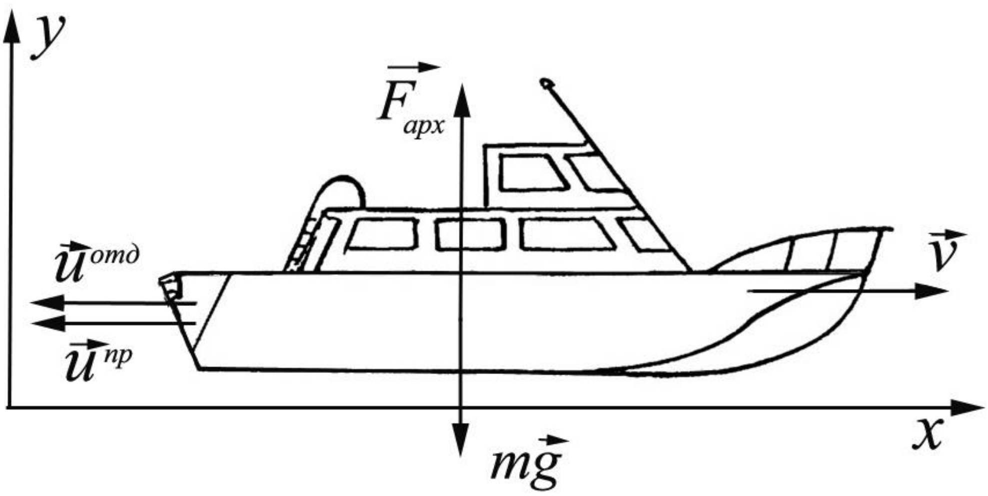


Рис.6. К задаче 1.2.

Уравнение Мещерского, описывающее движение катера в ИСО, связанной с озером, имеет вид:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_{арх} + \vec{F}_{реакт}. \qquad (2.4)$$

Запишем это уравнение в проекции на ось *Ox*, используя выражение для реактивной силы (1.16):

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\mu^{отд} u_x^{отд} + \mu^{пр} u_x^{пр}. \qquad (2.5)$$

За время dt катер забирает из озера воду массой μdt и выбрасывает точно такую же массу воды обратно. Поэтому в любой момент времени масса катера остается постоянной и равной *M*. Можно ввести обозначения: $\mu^{отд} = \mu^{пр} = \mu$, Тогда уравнение (2.5) примет вид:

$$M\frac{dv_x}{dt} = -\mu \cdot u_x^{отд} + \mu \cdot u_x^{пр}.$$

Используя закон преобразования скоростей (1.7), можно получить выражение для проекции скорости присоединяющейся массы $u_x^{пр}$, учитывая, что скорость забираемой воды относительно озера равна нулю:

$$v_x^{пр} = v_x + u_x^{пр} = 0, \; u_x^{пр} = -v_x.$$

Из рис.6 видно, что проекция относительной скорости выброса воды отрицательна, $u_x^{отд} < 0$, а модуль скорости по условию задачи равен *u*:

$$M\frac{dv_x}{dt} = \mu \cdot u - \mu \cdot v_x \, .$$

Теперь разделим переменные и проинтегрируем уравнение:

$$-\ln(u - v_x) = \frac{\mu}{M}t + C$$

Константу интегрирования найдем из начальных условий: $v_x(t=0) = 0$, преобразуем выражение и запишем ответ:

$$v_x(t) = u \cdot (1 - \exp(-\frac{\mu}{M}t)) \tag{2.6}$$

Из формулы (2.6) видно, что максимальное значение скорости, которую может развить катер v_{max} равно относительной скорости выбрасываемой воды u (рис.7). Количество же выбрасываемой воды μ определяет, насколько быстро будет достигнута максимальная скорость v_{max}.

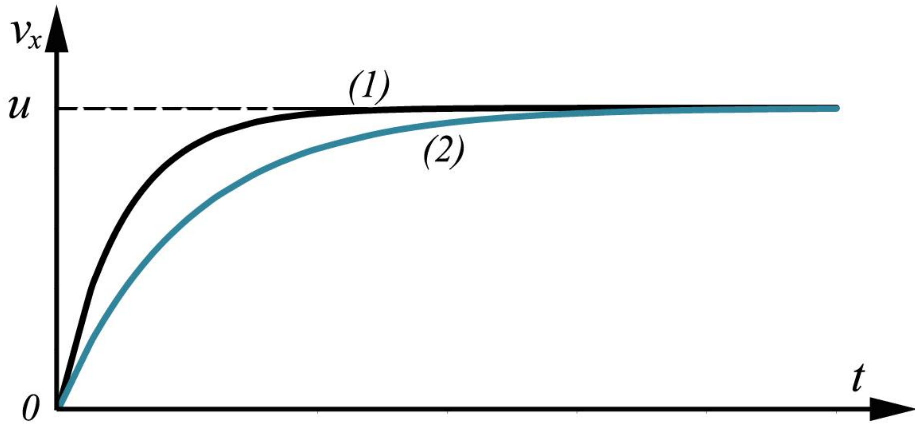


Рис.7. Зависимость скорости катера от времени при различных значениях μ.

Определите сами, какая зависимость *(1)* или *(2)* соответствует бÓльшему значению μ.

Интересно. *По тому же принципу, что и катер, передвигаются некоторые представители животного мира, например, кальмары и осьминоги. Периодически выбрасывая, вбираемую в себя воду они способны развивать скорость 60 - 70 км/ч* [5].

Рис. 8. Кальмар – живой пример реактивного движения.

Задача 1.3

По горизонтальным рельсам без трения движутся параллельно две одинаковые тележки с дворниками. На тележки падает μ [г/с] снега. В момент времени $t=0$ массы тележек равны m_0, а скорости v_0. Начиная с момента $t=0$, один из дворников начинает сметать с тележки снег, так что масса ее в дальнейшем остается постоянной. Снег сметается в направлении, перпендикулярном движению тележки. Дворник на другой тележке все время спит. Определить скорости тележек. Какая тележка будет двигаться быстрее? Почему?

Решение:

Сделаем схематический рисунок и расставим силы, действующие на первую тележку (см. рис.9).

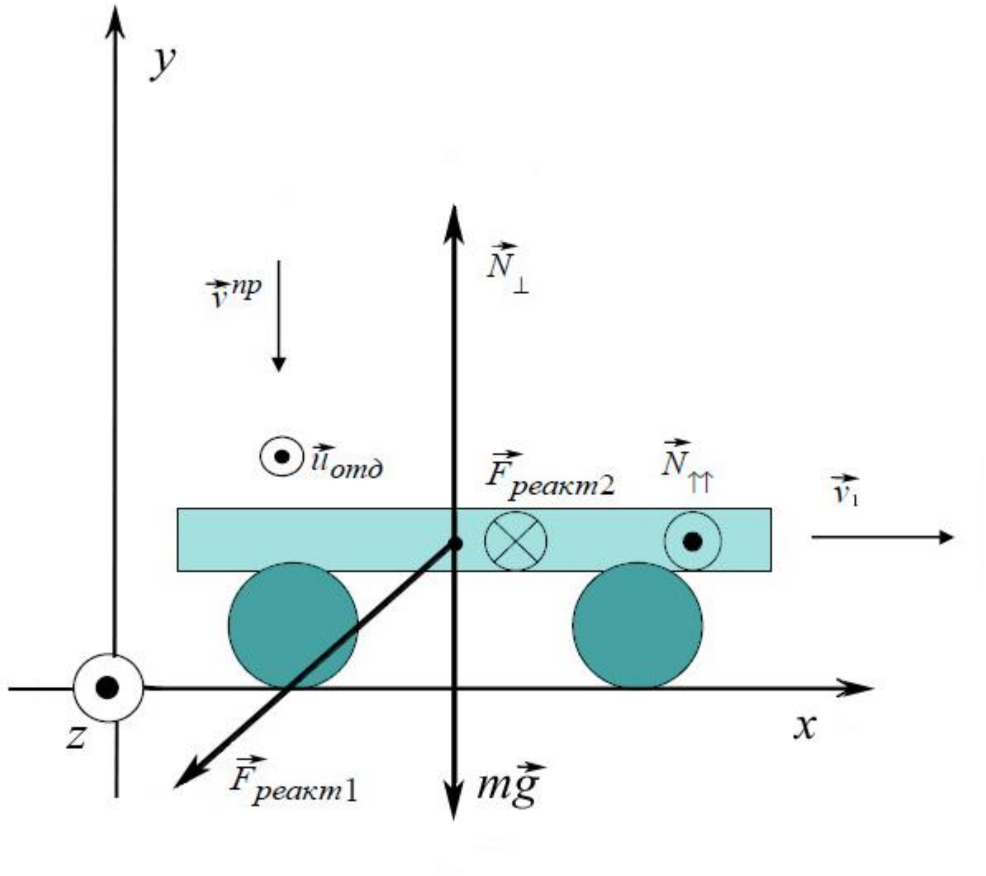


Рис.9. Схематический рисунок первой тележки.

Помимо сил тяжести $m\vec{g}$ и нормальной реакции опоры $\vec{N}_{\perp}$, на тележку действует реактивная сила $\vec{F}_{реакт}$.

$$\vec{F}_{реакт} = \vec{F}_{реакт1} + \vec{F}_{реакт2}, \tag{2.6}$$

где $\vec{F}_{реакт1}$ - реактивная сила, обусловленная присоединяющейся массой, а $\vec{F}_{реакт2}$ - реактивная сила, обусловленная отделяющейся массой. Обратите внимание, что реактивная сила $\vec{F}_{реакт2}$ расположена вдоль оси z, а реактивная сила $\vec{F}_{реакт1}$ лежит в плоскости (xy). Эти силы указаны на рисунке.

Так как тележка не двигается в направлении оси z (этому препятствуют рельсы), то реактивная сила $\vec{F}_{реакт2}$ должна компенсироваться силой реакции со стороны рельсов $\vec{N}_{\uparrow\uparrow}$.

Запишем уравнение Мещерского для первой тележки:

$$m\frac{d\vec{v}_1}{dt} = m\vec{g} + \vec{N}_{\perp} + \vec{F}_{реакт} + \vec{N}_{\uparrow\uparrow}\,. \qquad (2.7)$$

В проекции на оси *Ox, Oy* и *Oz* (рис. 9) получим:

$$m\frac{dv_{1x}}{dt} = F_{реакт1x}, \qquad (2.8)$$

$$m\frac{dv_{1y}}{dt} = -mg + N_{\perp} + F_{реакт1y}, \qquad (2.9)$$

$$m\frac{dv_{1z}}{dt} = N_{\uparrow\uparrow} - F_{реакт2}. \qquad (2.10)$$

Поскольку тележка движется только вдоль оси *Ox*, то проекции ее ускорения на оси *Oy* и *Oz* равно нулю. Теперь уравнения (2.8) – (2.10) перепишутся в виде:

$$m\frac{dv_{1x}}{dt} = F_{реакт1x}, \qquad (2.11)$$

$$0 = -mg + N_{\perp} + F_{реакт1y},$$

$$0 = N_{\uparrow\uparrow} - F_{реакт2}. \qquad (2.12)$$

Что бы правильно написать проекции реактивной силы $F_{реакт1x}$ и $F_{реакт1y}$ необходимо найти проекции относительной скорости присоединяющейся массы. Для этого запишем закон преобразования скоростей:

$$\vec{v}^{\,пр} = \vec{v}_1 + \vec{u}^{\,пр}$$

или

$$\vec{u}^{\,np} = -\vec{v}_1 + \vec{v}^{\,np}. \qquad (2.13)$$

Так как снег падает вертикально относительно земли, то $v_x^{np} = 0$ (см. рис. 9), следовательно, в проекции на оси *Ox* и *Oy* выражение (2.13) примет вид:

$$u_x^{np} = -v_{1x} \qquad (2.14)$$

$$u_y^{np} = -v^{np}$$

Подставим (2.14) в (2.11) и получим, с учетом (1.16):

$$m\frac{dv_{1x}}{dt} = -\mu^{np} v_{1x}. \qquad (2.15)$$

Так как по условию задачи масса тележки постоянна, т.е. $m=const=m_o$, то в выражении (2.15), разделяя переменные, получим:

$$\frac{dv_{1x}}{v_{1x}} = -\frac{\mu^{np}}{m_0}dt.$$

Проинтегрируем полученное уравнение, константу интегрирования найдем из начальных условий:

$$\ln v_{1x} = -\frac{\mu^{np}}{m_0}t + C, \qquad v_1(t=0)=v_0,\ C = \ln v_0$$

Таким образом, скорость первой тележки:

$$v_{1x} = v_0 \exp(-\frac{\mu^{np}}{m_0} t) \qquad (2.16)$$

Рассмотрим движение второй тележки. По условию задачи, второй дворник спит, а значит, на вторую тележку не действует $\vec{F}_{реакт2}$ (см. рис. 10).

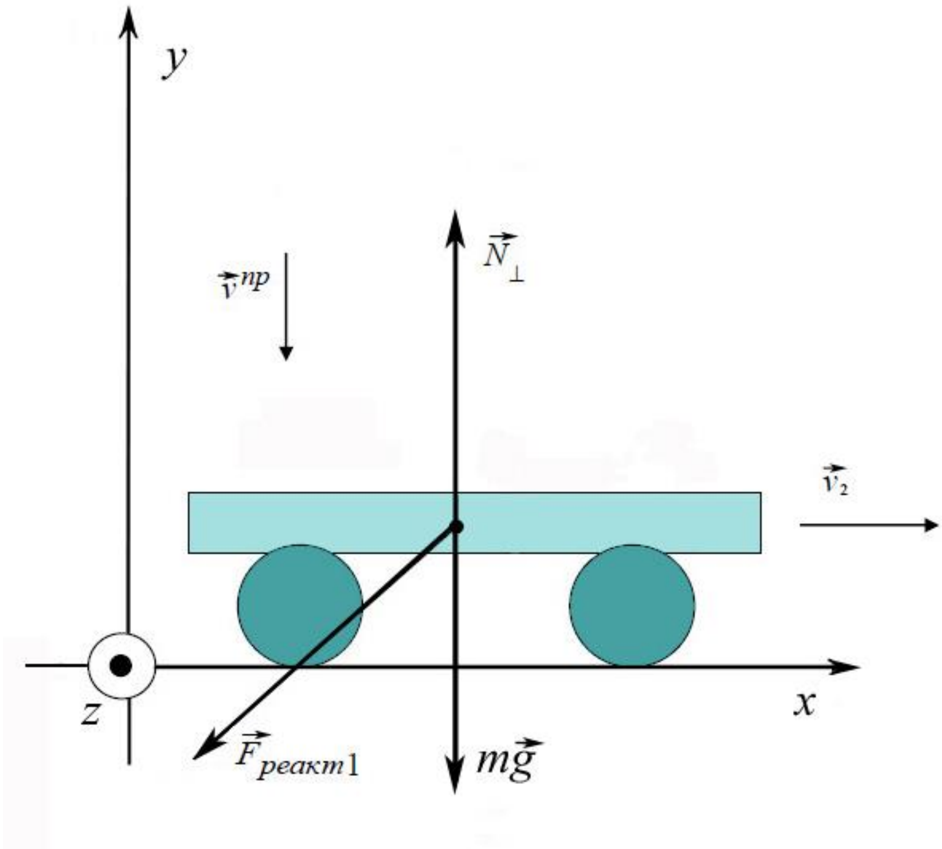


Рис. 10. Схематический рисунок второй тележки.

Запишем уравнение Мещерского в проекции на ось *Ox* с учетом выражения (1.16):

$$m\frac{dv_{2x}}{dt} = \mu^{np} u_x^{np}.$$

Закон преобразования скоростей (2.13) для второй тележки имеет вид: $u_x^{np} = -v_{2x}$, следовательно:

$$m\frac{dv_{2x}}{dt} = -\mu^{np} v_{2x}\,. \qquad (2.17)$$

Уравнение (2.17) – это дифференциальное уравнение первого порядка относительно трех переменных: m, v_{2x}, t. Чтобы его решить, надо исключить одну переменную. Запишем закон изменения массы тележки в явном виде, т.к. μ постоянна, то $m(t)=m_0+\mu^{np}t$, подставим в (2.17):

$$(m_0 + \mu^{np}t)\frac{dv_{2x}}{dt} = -\mu^{np} v_{2x}\,,$$

разделим переменные и проинтегрируем полученное уравнение:

$$\frac{dv_{2x}}{v_{2x}} = -\frac{\mu^{np}dt}{m_0 + \mu^{np}t}\,,$$

$$-\ln v_{2x} = \ln(m_0 + \mu^{np}t) + C\,.$$

Для поиска константы интегрирования воспользуемся начальным условием:

$$v_{2x}(t=0)=v_0.$$

Таким образом, скорость второй тележки изменяется со временем по закону:

$$v_{2x} = v_0\frac{m_0}{m_0 + \mu^{np}t}\,. \qquad (2.18)$$

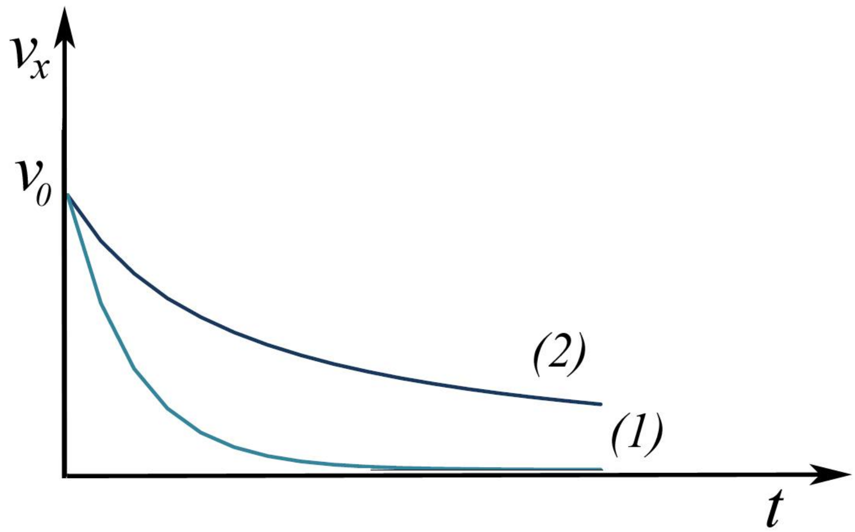


Рис.11. Зависимость скоростей первой *(1)* и второй *(2)* тележек от времени.

Сравните выражения (2.16) и (2.18): скорость (2) второй тележки с ленивым дворником в любой момент времени больше, чем тележки с метущим (рис.11). Но почему? Попробуйте объяснить самостоятельно.

Задача 1.4

Сферическая капля воды свободно падает в атмосфере перенасыщенного водяного пара. Считая, что скорость возрастания массы капли пропорциональна ее поверхности и пренебрегая силой сопротивления среды, определить скорость движения капли в зависимости от ее радиуса. Предполагается, что в начальный момент движения капли радиусом r_0, скорость ее падения равна v_0.

Решение:

Капля будет увеличивать свои размеры, если скорость конденсации будет больше, чем скорость испарения. Поскольку скорости молекул существенно превышают скорость движения капли, полагаем, что скорости конденсации и испарения (следовательно, и скорость изменения массы капли) пропорциональны площади поверхности капли:

По условию задачи:

$$\frac{dm}{dt}=\alpha S \qquad (2.19)$$

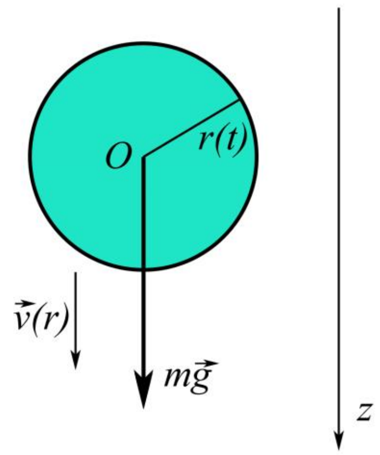


Рис. 12. К задаче 1.4.

Т.к. считаем каплю шаром (рис.12), то $m=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$, $S=4\pi r^2$ и из (2.19) находим:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\alpha}{\rho} \qquad (2.20)$$

$$r=\frac{\alpha}{\rho}t+r_o \qquad (2.21)$$

Уравнение движения в проекции на ось z, направленную вертикально вниз, имеет вид:

$$\frac{d}{dt}(mv_z)=mg$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho v_z\right) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$

$$\frac{d}{dt}(r^3 v_z) = r^3 g$$

Здесь три переменных величины – $r(t)$, $v_z(t)$, t, поэтому сначала выполним преобразования, исключающие одну переменную. Используем (2.20) для исключения dt, а массу выразим через r:

$$\frac{\alpha}{\rho}\frac{d}{dr}(r^3 v_z) = r^3 g \tag{2.22}$$

Не раскрывая скобки в (2.22), разделим переменные:

$$d(r^3 v_z) = \frac{g\rho}{\alpha} r^3 dr\,,$$

откуда после интегрирования получаем:

$$r^3 v_z = \frac{g\rho}{4\alpha} r^4 + C\,, \tag{2.23}$$

где C — произвольная постоянная, определяемая из начальных условий.

Начальные условия следующие: $r(0) = r_0$, $v_z(0) = v_0$. Тогда:

$$C = r_o^3 v_o - \frac{g\rho}{4\alpha} r_o^4\,.$$

Итак, получаем ответ, выражающий скорость капли в зависимости от ее радиуса:

$$v_z = v_o \frac{r_o^3}{r^3} + \frac{g\rho}{4\alpha}(r - \frac{r_o^4}{r^3}), \tag{2.24}$$

Построим график полученной зависимости (рис. 13). При $v_{0}= g\rho/(4\alpha)r_0$ первое и третье слагаемые в (2.24) сокращаются, и график $v_z(r)$ приобретает линейный вид (прямая *1*). При $v_{01}>v_0$ (кривая *2*) и $v_{02}<v_0$ (кривая *3*) зависимости становятся нелинейными, но стремящимися асимптотически к прямой *1*.

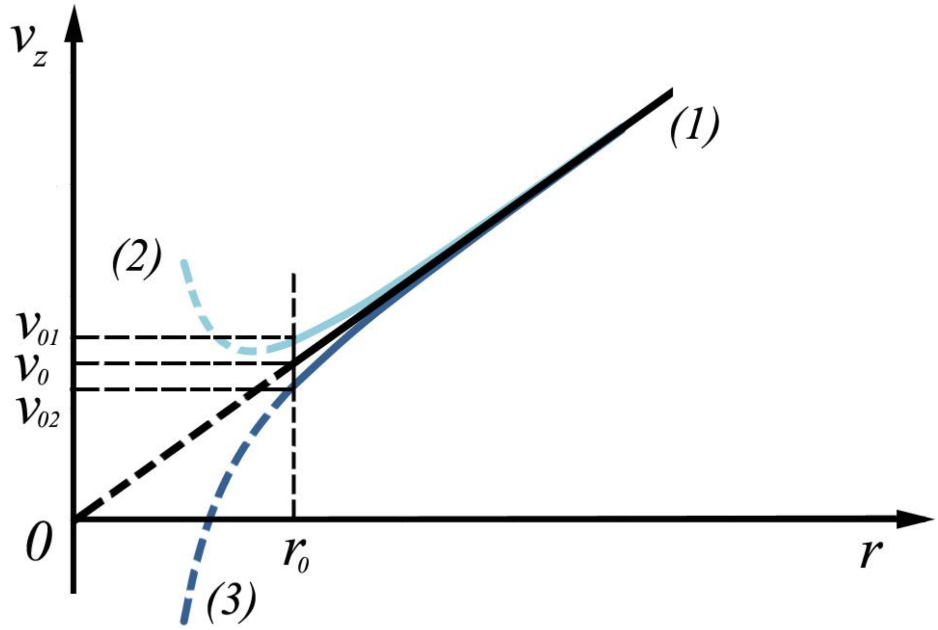


Рис.13. Зависимость скорости движения капли от ее радиуса.

С помощью (2.21) легко вывести явное выражение скорости капли как функции времени.

$$v_z(t) = v_o \frac{r_o^3}{\left(\frac{\alpha}{\rho}t + r_o\right)^3} + \frac{g\rho}{4\alpha}\left(\frac{\alpha}{\rho}t + r_o - \frac{r_o^4}{\left(\frac{\alpha}{\rho}t + r_o\right)^3}\right) \tag{2.25}$$

Можно проверить, что при уменьшении скорости конденсации до нуля (т.е. при $\alpha \to 0$) из (2.25) получается зависимость: $v_z = v_o + gt/4$, очень похожая на закон свободного падения материальной точки.

Литература

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1976. http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=239865.
2. Стрелков С.П. Механика [Электронный ресурс]: учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2005. — 560 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/589.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика. М.: Наука, 1989. http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=465658.
4. http://class-fizika.narod.ru/paravto.htm
5. http://www.poznavayka.org/fizika/reaktivnoe-dvizhenie-v-prirode-i-tehnike/#a3

Зайцева Екатерина Владимировна

Овсецина Татьяна Ивановна

Белова Ольга Васильевна

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ. ЧАСТЬ I

учебно-методическое пособие