

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»

Т.И. Овсецина

**ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА**

Практикум

Рекомендовано методической комиссией физического факультета
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
03.03.02 «Физика», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
28.03.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника»,
09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Нижегород

2020

УДК 53

ББК 22.3

Изучение законов колебательного движения математического маятника: практикум. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2019. –18 с.

Автор: к.ф.-м.н., доцент Овсецина Т.И.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Перов А.А.

Данный практикум посвящен изучению особенностей гармонических и затухающих колебаний материальной точки на примере движения математического маятника. Обсуждается методика измерения ускорения свободного падения и определяется его величина.

Учебно-методические указания предназначены для студентов 1 курса физического факультета.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
физического факультета ННГУ, к.ф.-м.н., доцент Перов А.А.

УДК 53
ББК 22.3

Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского,
2020

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы: В данной работе рассматриваются различные режимы колебательного движения математического маятника, определяется ускорение свободного падения.

1. Основные понятия, законы и параметры колебательного движения математического маятника

Математический маятник – материальная точка (тело весьма малых размеров), подвешенное на длинной невесомой и нерастяжимой нити в поле тяжести Земли, способное совершать колебания в вертикальной плоскости.

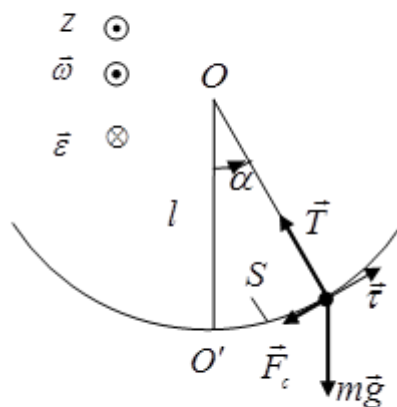


Рис.1.

Математический маятник, выведенный из состояния равновесия, движется по дуге окружности радиуса l , где l - длина маятника.

На маятник действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити \vec{T} и сила сопротивления воздуха \vec{F}_c . Последняя в любой момент

времени направлена против скорости движения маятника \vec{v} и зависит от ее величины, т.е. $\vec{F}_c = \vec{F}_c(\vec{v})$.

Дуговая координата S , определяющая отклонение маятника от положения равновесия (точка O'), и силы, действующие на него, показаны на рис.1.

Выберем для определенности, что в рассматриваемый момент времени скорость маятника совпадает по направлению с единичным вектором $\vec{\tau}$. Данный вектор является касательным к траектории в точке расположения маятника и ориентированным в положительном направлении отсчета дуговой координаты. Вектор $\vec{\tau}$ вместе с другим единичным вектором нормали \vec{n} , направленным к центру кривизны траектории, сопровождают материальную точку при ее криволинейном движении.

Второй закон Ньютона в векторной форме для математического маятника в данном случае имеет вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_c, \quad (1)$$

где \vec{a} - вектор ускорения маятника.

В проекции на направление касательной $\vec{\tau}$ это уравнение запишется в виде

$$ma_\tau = -mg \sin \alpha + F_{c\tau} \quad (2)$$

Здесь a_τ - тангенциальное ускорение маятника. Оно связано с проекцией скорости v_τ на направление $\vec{\tau}$ и дуговой координатой S соотношениями

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \quad \text{и} \quad a_\tau = \frac{d^2S}{dt^2}. \quad (3)$$

Еще одной координатой, описывающей движение математического маятника, является его угловая координата α . Угол поворота маятника вокруг оси z , проходящей через точку подвеса (точка O на рис.1), есть функция времени $\alpha = \alpha(t)$. Направление оси z согласовано с направлением отсчета дуги S по правилу правого винта. Угловые и линейные характеристики движения маятника связаны соотношениями:

$$S = \alpha \cdot l; \quad v_\tau = \dot{\alpha} \cdot l = \omega_z \cdot l; \quad a_\tau = \ddot{\alpha} \cdot l = \dot{\omega}_z \cdot l = \varepsilon_z \cdot l, \quad (4)$$

где $\omega_z = \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$ и $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ - проекции векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ на ось z .

Направление векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ на рис.1 соответствует выбранному для этого рисунка положению и направлению движения маятника от положения равновесия.

С учетом выражений (3) и (4) перепишем уравнение движения маятника в следующем виде:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha - \frac{F_{c\tau}}{ml} = 0, \quad (5)$$

при этом оставим выражение для силы сопротивления в неявном виде.

Данное уравнение будет иметь разные решения в зависимости от различных режимов движения математического маятника и определенных упрощающих предположениях.

1.1. Математический маятник как гармонический осциллятор

Если углы отклонения маятника от положения равновесия достаточно малы, так что в пределах интересующей нас точности можно положить $\sin \alpha \approx \alpha$, а сила сопротивления отсутствует, уравнение (5) принимает вид:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad (6)$$

где $\omega_0^2 = g/l$ есть собственная или циклическая частота колебаний.

Решение этого уравнения описывает гармонические, т.е. происходящие по закону синуса или косинуса, колебания:

$$\alpha(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (7)$$

Здесь величина A_0 - угловая амплитуда колебаний, выражение под косинусом $(\omega_0 t + \varphi_0)$ - фаза колебаний, φ_0 - начальная фаза колебаний.

Можно убедиться, что (7) действительно является решением уравнения (6) простой подстановкой (7) в (6), дважды продифференцировав функцию $\alpha(t)$ по времени.

Физическую систему, поведение которой во времени описывается уравнениями (6) и (7), называют гармоническим осциллятором, а уравнение (6) - уравнением гармонического осциллятора.

Частота ω_0 и период колебаний T математического маятника в приближении гармонического осциллятора определяются как:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{и} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (8)$$

т.е. зависят только от свойств самой системы (параметров l и g).

При этом амплитуда колебаний A_0 и начальная фаза φ_0 зависят еще и от начальных условий, с помощью которых и находят конкретные значения данных величин. Под начальными условиями понимают задание координаты и скорости маятника в момент $t = 0$ (или любой другой момент времени).

При любых значениях угла α выполняется неравенство $\sin \alpha < \alpha$. Учитывая это, нетрудно понять, что период колебаний маятника должен увеличиваться с ростом амплитуды. Движение будет тоже периодическим, но с зависящим от амплитуды периодом.

1.2. Затухающие колебания математического маятника

Учтем теперь влияние силы сопротивления воздуха \vec{F}_c на малые колебания маятника.

При небольших скоростях движения маятника \vec{v} , пока обтекание тела частицами среды остается ламинарным (безвихревым) основная роль в формировании сопротивления принадлежит силам вязкого трения, так что

$$\vec{F}_c = -\gamma \vec{v}, \quad (10)$$

где γ - коэффициент, зависящий от среды и ее свойств, формы и размеров самого тела. В частности, при движении шарика радиуса R в неограниченной среде с коэффициентом вязкости η эту зависимость определяет закон Стокса:

$$\vec{F}_c = -6\pi R \eta \vec{v}. \quad (11)$$

После подстановки (10) уравнение движения маятника (5) для случая малых углов α принимает вид

$$\ddot{\alpha} + 2\delta \dot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad (12)$$

где введено обозначение $2\delta = \gamma/m$. Величину δ называют коэффициентом затухания.

Если затухание невелико, т.е. $\delta < \omega_0$, решение уравнения (12) можно записать в виде

$$\alpha(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0) = A_0 \exp(-\delta t)\cos(\omega t + \varphi_0). \quad (13)$$

При этом движение маятника носит колебательный характер с уменьшающейся со временем амплитудой

$$A(t) = A_0 \exp(-\delta t)\cos(\omega t + \varphi_0). \quad (14)$$

Частота затухающих колебаний ω и период T остаются постоянными:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}; \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (15)$$

Для характеристики затухающих колебаний вводят следующие величины.

Время релаксации τ . Это время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз (e – основание натурального логарифма).

Из (14) следует, что величина τ и число колебаний N , совершаемых маятником за это время, можно найти, определив коэффициент затухания и период T :

$$\tau = \frac{1}{\delta}; \quad N = \frac{1}{\delta T}. \quad (16)$$

Логарифмический декремент затухания d . Он характеризует убывание амплитуды за период – его величина обратна числу колебаний, соответствующих убыли амплитуды в e раз:

$$d = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{1}{N}. \quad (17)$$

Добротность системы Q . Она определяется следующим образом:

$$Q = \frac{\pi}{d} = \pi N. \quad (18)$$

Величина, обратная добротности, пропорциональна относительной потере энергии системы за период.

Строго говоря, сила сопротивления линейно зависит от скорости движения маятника v , если, так называемое, число Рейнольдса Re , характеризующее систему, не очень велико:

$$Re = \frac{\rho v R}{\eta} < 100, \quad (19)$$

где ρ - плотность воздуха.

Если же число Рейнольдса существенно превышает это значение, то следует ожидать, что сила сопротивления квадратично зависит от скорости.

Уравнение движения (12) оказывается при этом, строго говоря, неприменимым.

2. Описание установки.

Методика определения ускорения свободного падения

Для выполнения настоящей работы предусмотрены два типа лабораторных установок – настольная установка и настенная.

Схема настольной установки приведена на рис. 2. Установка представляет собой основание с регулируемыми ножками, что позволяет выравнивать прибор.

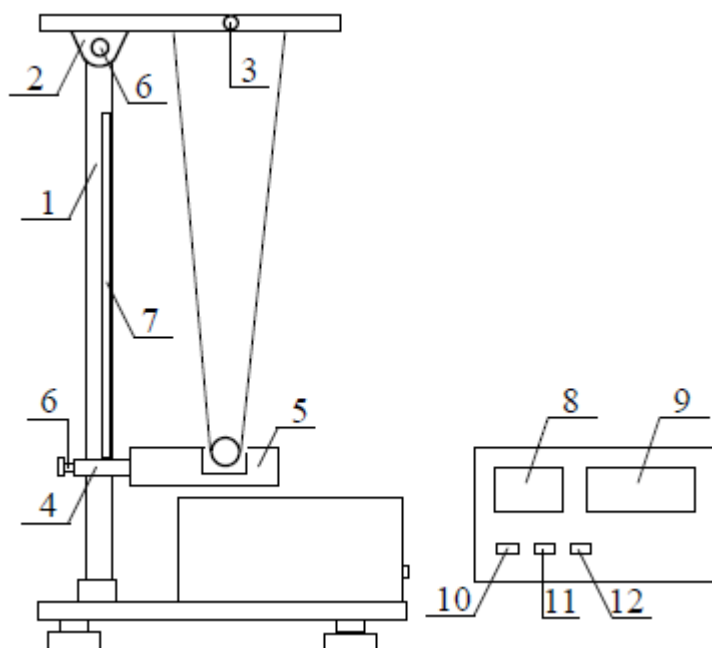


Рис.2.

В основании закреплена стальная колонка (1), на которой зафиксированы верхний (2) и нижний (4) кронштейны. На верхнем кронштейне расположен маховичок (3) для регулировки длины подвеса

маятника. На нижнем кронштейне прикреплен фотоэлектрический датчик (5).

Установка позволяет менять высоту каждого кронштейна с помощью специальных винтов (6). К колонке присоединены масштабная линейка (7) и транспорты, предназначенные для измерения длин маятника и угловых амплитуд колебаний.

Нижний кронштейн вместе с фотодатчиком фиксируется так, чтобы шарик, прикрепленный к нити, при движении перекрывал линию луча. При пересечении маятником оптической оси фотодатчика формируются сигналы, управляющие измерением времени и числа колебаний.

Измерение времени осуществляется с помощью миллисекундомера, цифровое табло которого расположено справа на лицевой панели прибора (9). На лицевую панель вынесены также управляющие клавиши: «сеть» (10), «стоп» (12), «сброс» (11) и индикатор числа *полных* колебаний (8).

Перед включением прибора в сеть проверьте наличие и исправность заземления. Работать на незаземленной установке запрещается.

Для измерения времени n колебаний подберите и зафиксируйте положение кронштейна с фотодатчиком, соответствующее выбранной длине нитей. Отклоните маятник от положения равновесия и, нажав клавишу «сброс», отпустите его. В момент, когда на левом табло высветится число $n - 1$, нажмите клавишу «стоп». При этом на левом цифровом табло высветится полное число колебаний n , а на правом – соответствующее ему время t .

В настенном варианте лабораторная установка представляет собой закрепленный на стене кронштейн, к которому подвешен маятник. Также на стене закреплена вертикальная зеркальная шкала с масштабной линейкой для удобства измерения длины маятника и регистрации моментов прохождения его через положение равновесия и устройство для измерения угловых амплитуд. Длину нити можно менять, накручивая ее на валик с помощью

маховичка, закрепленного на кронштейне. Для измерения времени в этом варианте используется секундомер.

В лабораторной работе используются два способа определения ускорения свободного падения.

Первый способ основан на зависимости периода колебаний от длины нити $T(l)$. Если условия, при которых выражение (8) справедливо, выполнены, то, измерив длину маятника l и соответствующий период колебаний маятника T , можно найти ускорение свободного падения по формуле:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l. \quad (20)$$

Период колебаний находится по формуле $T = \frac{t}{n}$, где t - время, в течение которого маятник совершает n колебаний.

Сложнее обстоит дело с измерением длины маятника l . Ее непосредственное измерение затруднено, в частности, из-за неопределенности положения центра масс маятника и сопряжено с большими погрешностями.

Заметим, однако, что согласно (8) зависимость

$$T^2(l) = \frac{4\pi^2}{g} l = kl \quad (21)$$

является линейной. Это обстоятельство позволяет избежать процедуры нахождения центра тяжести маятника, если для определения величины g использовать следующий способ.

Пусть длина математического маятника определена с точностью до некоторой постоянной Δ , т.е.

$$l = l' + \Delta. \quad (22)$$

Здесь в качестве измеримой величины l' может выступать координата нижней точки шарика, отмеченная с помощью угольника по вертикальной линейке прибора.

При этом зависимость $T^2(l')$ остается линейной:

$$T^2(l') = kl' + b, \quad b = k\Delta \quad (23)$$

с тем же самым угловым коэффициентом $k = 4\pi^2 / g$, что и в (21).

Таким образом, построив по экспериментальным точкам график $T^2(l')$ и аппроксимировав его прямой линией, мы получаем возможность определить угловой коэффициент k , а затем и g . Эти величины (k и g) можно рассчитать по методу наименьших квадратов (МНК), а, определив коэффициент корреляции экспериментальных значений (T_i^2, l'_i) , проверить линейный характер зависимости $T^2(l)$.

В этом эксперименте следует задействовать, по возможности, более широкий интервал значений l' , приблизительно равномерно заполненный экспериментальными точками, а число колебаний для измерения периода с заданной заранее точностью предварительно оценить.

Основная идея второго способа определения ускорения свободного падения заключается в положениях, приведенных ниже.

Можно измерить периоды колебаний T_1 и T_2 при различных длинах маятника l_1 и l_2 , что позволяет определить ускорение свободного падения g по формуле

$$g = 4\pi^2 \frac{l_2 - l_1}{T_2^2 - T_1^2}, \quad (24)$$

которую легко получить, используя (8) или (21).

Роль измеряемых величин в (24) играют T_1 , T_2 и разность соответствующих длин маятников $l_2 - l_1$. В этом равенстве значения g не изменятся, если к l_1 и l_2 прибавить одно и то же число – радиус шарика. Следовательно, вместо l_1 и l_2 можно подставлять значения положений нижнего края шарика вдоль вертикальной масштабной линейки прибора при измерении длины нити маятника.

Выразим величину $T_2^2 - T_1^2$ из соотношения (24):

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{l_2 - l_1}{g} \quad (25)$$

В формулы (24) и (25) входят не отдельные длины маятников l_1 и l_2 , а их разность, что освобождает от процедуры нахождения центра тяжести шарика.

3. Задания

1. Исследуйте зависимость периода колебаний маятника T от амплитуды A . По данным измерений постройте график $T(A)$. Определите, при каких угловых амплитудах период колебаний, в пределах точности измерений периода не зависит от амплитуды.

2. Оцените необходимое число колебаний, совершаемых маятником, при нахождении периода колебаний для определения g с заданной преподавателем погрешностью.

3. Выведите относительную погрешность, используя формулу (25), и покажите, при какой разности длин $l_2 - l_1$ эта погрешность минимальна (в случае выполнения работы вторым способом).

4. Определите ускорение свободного падения одним из способов, описанных выше (по указанию преподавателя). Рассчитайте погрешности g .

5. Исследуйте зависимость амплитуды колебаний от времени $A(t)$. По данным измерений постройте график $\ln A(t)$ (*не забудьте перевести градусы в радианы*). Найдите коэффициент затухания δ , время релаксации τ , логарифмический декремент затухания d и добротность системы Q .

6. По полученным в пункте 4 данным оцените коэффициент вязкости воздуха η и сравните его с табличным значением для воздуха при нормальных условиях. В случае несовпадения данных объясните возникшие расхождения этих величин.

4. Контрольные вопросы

1. Закон движения математического маятника длины l задан уравнением (7). Найдите зависимость от времени угловой скорости и углового ускорения маятника $\omega(t)$ и $\varepsilon(t)$, а также линейные характеристики его движения: скорость $v(t)$, нормальное $a_n(t)$, тангенциальное $a_\tau(t)$ и полное $a(t)$ ускорения, если: а) маятник привели в движение из положения равновесия кратковременным толчком, сообщив ему начальную скорость; б) маятник отклонили из положения равновесия на угол α_0 и отпустили без начальной скорости.

2. Постройте графики найденных величин: $\alpha(t), \omega(t), \varepsilon(t), v(t), a_n(t), a_\tau(t), a(t)$ и укажите на рисунке положения маятника и векторы $\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}, \vec{v}, \vec{a}_n, \vec{a}_\tau$ для моментов времени $t = nT/8, n = 0, 1, 2, \dots, 8$.

3. Найдите кинетическую $E_k(t)$, потенциальную $E_p(t)$ и полную энергию маятника $E(t)$ при заданных вам начальных условиях. На одном рисунке изобразите графики этих величин. Проанализируйте их.

4. Изобразите качественно графики $A(t), \ln A(t), \alpha(t)$ для случая затухающих колебаний маятника. Как изменяется со временем его полная энергия?

5. Получите уравнение движения маятника (6), исходя из закона сохранения энергии, и уравнение затухающих колебаний (12), используя закон изменения энергии и выражение для силы сопротивления в виде (10).

6. Для случая малых затуханий найдите относительную величину потерь механической энергии маятника за период. Установите связь этой величины с добротностью системы.

Указание. При $x \ll 1$ можно приближенно положить $e^x = 1 - x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика. М.: Наука, 1989.
<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=465658>.
2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1976. <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=239865>.
3. Стрелков С.П. Механика [Электронный ресурс]: учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2005. — 560 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/589>.
4. Фаддеев М.А. Элементарная обработка результатов измерений. Нижний Новгород: Изд. ННГУ, 2004, 120 с.

Татьяна Ивановна Овсецина

**ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА**

Практикум