

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского»

**Т.И. Овсецина**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАХОВОГО КОЛЕСА  
МЕТОДОМ ВРАЩЕНИЯ**

*Практикум*

Рекомендовано методической комиссией физического факультета  
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки  
03.03.02 «Физика», 11.03.04 «Электроника и нанoeлектроника»,  
28.03.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника»,  
09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Нижегород

2018

УДК 53

ББК 22.3

Определение момента инерции махового колеса методом вращения: практикум. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2018. –13 с.

Автор: к.ф.-м.н., доцент Овсецина Т.И.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Перов А.А.

Целью практикума является изучение динамики вращательного движения твердого тела; измерение и прямой расчет момента инерции махового колеса. Используемый в работе метод экспериментального определения момента инерции базируется на анализе инерционных свойств твердого тела, закрепленного на оси, при его вращательном движении. Приведено описание лабораторной работы и указания к ее выполнению.

Учебно-методические указания предназначены для студентов 1 курса физического факультета.

Ответственный за выпуск:  
председатель методической комиссии  
физического факультета ННГУ, к.ф.-м.н., доцент Перов А.А.

УДК 53  
ББК 22.3

Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского,  
2018

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАХОВОГО КОЛЕСА МЕТОДОМ ВРАЩЕНИЯ

**Цель работы:** Экспериментальное исследование вращения твердого тела относительно неподвижной оси на примере махового колеса, измерение и прямой расчет момента инерции махового колеса. Используемый в работе метод определения момента инерции базируется на анализе инерционных свойств твердого тела, закрепленного на оси, при его вращательном движении.

Маховое колесо — массивное вращающееся колесо, использующееся в качестве накопителя (инерционный аккумулятор) кинетической энергии или для создания инерционного момента, как это используется на космических аппаратах, для сохранения ориентации в пространстве различных приборов и объектов (гироскопы). Эффект маховика использовался с древнейших времен. Например, в гончарном круге, ветряных мельницах.

## **1. Основные понятия, законы и параметры вращательного движения твердого тела**

Движение твердого тела (тела, расстояния между двумя любыми материальными точками которого не меняются) можно представить как суперпозицию поступательного и вращательного движений. Первое движение — движение, при котором прямая, соединяющая любые две материальные точки тела, перемещается параллельно самой себе; в этом случае движение твердого тела описывается так же, как и движение материальной точки. Второе — вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси (оси вращения) — плоское движение, при котором материальные точки тела двигаются по окружностям с центрами, лежащими на этой оси, а их траектории лежат в параллельных плоскостях.

Для описания вращения вводится понятие вектора  $d\varphi$ , длина которого равна углу поворота  $d\varphi$  за время  $dt$  проекции радиус-вектора любой точки твердого тела на плоскость, перпендикулярную оси вращения, а направление определяется в соответствии с правилом правого винта и совпадает с осью вращения. Также вводятся векторы угловой скорости и углового ускорения. Вектор угловой скорости определяют как

$$\omega = d\varphi/dt. \quad (1.1)$$

Вектор  $\omega$  совпадает по направлению с вектором  $d\varphi$ .

Изменение вектора  $\omega$  со временем характеризуют вектором углового ускорения  $\varepsilon$ , который определяют как

$$\varepsilon = d\omega /dt. \quad (1.2)$$

Направление вектора  $\varepsilon$  совпадает с направлением  $d\omega$  – приращения вектора  $\omega$ .

Основной закон динамики поступательного движения твердого тела выводится из законов Ньютона для материальной точки и имеет вид:

$$ma = F, \quad (1.3)$$

где  $F$  – сумма внешних сил, действующих на тело (результатирующая сила),  $m$  – масса тела,  $a$  – ускорение центра масс тела (в инерциальной системе отсчета).

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси (ось вращения в данном случае совпадает с осью координат  $z$ ) можно записать следующим образом:

$$I\varepsilon_z = M_z, \quad (1.4)$$

где  $M_z$  – сумма моментов внешних сил, действующих на тело, относительно оси вращения (резльтирующей момент сил);  $I$  – момент инерции тела относительно оси вращения;  $\varepsilon_z$  – проекция углового ускорения тела на ось  $z$ .

Величину

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (1.5)$$

называют моментом инерции твердого тела относительно закрепленной оси, где  $m_i$  и  $r_i$  – масса и расстояние от оси вращения  $i$  – той частицы твердого тела. Момент инерции тела относительно оси вращения является мерой инертности тела при вращательном движении относительно этой оси.

При непрерывном распределении массы по объему для вычисления момента инерции пользуются не суммированием, а интегрированием по всему объему тела, и тогда (1.5) приводится к следующему виду:

$$I = \int_m r^2 dm, \quad (1.6)$$

где  $r$  – расстояние от элементарной массы  $dm$  до оси  $z$ .

Скалярная величина  $M_z$  называется моментом силы относительно оси  $z$ , проходящей через точку  $O$ , она равна проекции на ось  $z$  вектора  $\mathbf{M}$  – момента силы относительно точки  $O$ .

Моментом силы относительно точки  $O$  называется векторная величина  $\mathbf{M}$ , равная векторному произведению радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , проведенного из точки  $O$  в точку приложения силы, на вектор силы  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1.7)$$

## 2. Описание установки. Методика определения параметров вращательного движения махового колеса

Установка, с помощью которой проводится исследование, состоит из единой системы двух массивных маховых колес и двух шкивов разного диаметра, насаженных на ось. Ось  $OO_1$  установлена на шарикоподшипниках, закрепленных в кронштейне на стене. Схема экспериментальной установки данной лабораторной работы показана на рис. 1.

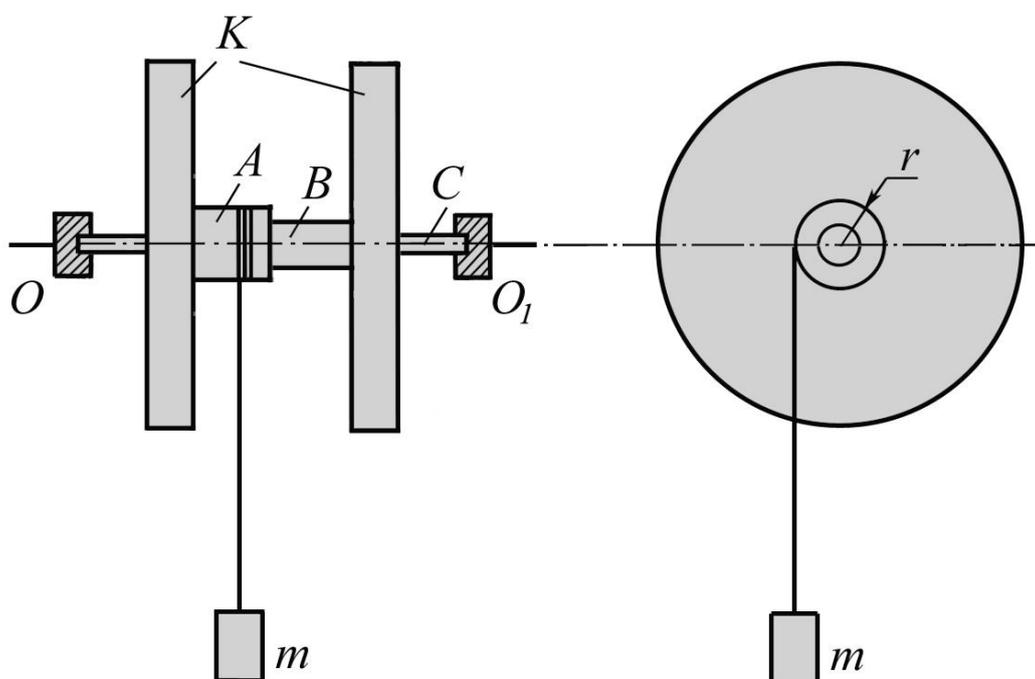


Рис. 1. Экспериментальная установка для определения момента инерции махового колеса методом вращения.

На шкив  $A$  (или  $B$ ) наматывается нить с прикреплённым к ней грузом массы  $m$ , поднимая груз за счет вращения маховых колес ( $K$ ) на высоту  $h$  и сообщая ему тем самым запас потенциальной энергии. После освобождения колес под действием груза нить разматывается и приводит систему (маховые

колеса  $K$ , шкивы  $A$  и  $B$ , ось  $C$ ) во вращательное движение. При этом потенциальная энергия груза переходит в кинетическую энергию его поступательного движения, в кинетическую энергию вращательного движения системы и работу по преодолению силы трения в подшипниках опоры оси. В момент достижения грузом нижнего положения нить отделяется от шкива, а система продолжает вращаться, совершая работу против сил трения за счёт приобретённой кинетической энергии.

Используя закон изменения полной механической энергии системы при опускании и поднятии груза, запишем:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} + A_{mp1}, \quad (2.1)$$

$$\frac{I_0\omega^2}{2} = A_{mp2}, \quad (2.2)$$

где  $m$  - масса груза;  $h$  - максимальная высота его подъёма;  $v$  - скорость груза в нижнем положении;  $I_0$  - момент инерции системы относительно оси  $OO_I$ ;  $\omega$  - её угловая скорость в момент, когда груз достигает нижнего положения;  $A_{mp1}$  и  $A_{mp2}$  - работа против сил трения в подшипниках оси при опускании груза и движении системы уже без груза.

Поскольку ось системы вращается с помощью шарикоподшипников, полагаем, что момент силы трения при движении остается постоянным, т.е. не зависит от скорости. Работа против сил трения тогда пропорциональна числу оборотов, совершаемых системой, то есть

$$A_{mp1} = A'_{mp} n_1, \quad (2.3)$$

$$A_{mp2} = A'_{mp} n_2, \quad (2.4)$$

где  $A'_{mp}$  – работа против сил трения за один оборот системы, а  $n_1$  и  $n_2$  - число оборотов маховых колес до и после отделения груза от системы, причем количество оборотов  $n_1$  можно связать с высотой подъема груза  $h$  и радиусом шкива  $r$ :

$$n_1 = \frac{h}{2\pi r}. \quad (2.5)$$

Записав второй закон Ньютона для груза и рассмотрев уравнение его движения, можно убедиться, что ускорение груза является постоянным. Тогда, зная высоту  $h$  и время движения груза  $t$ , легко подсчитать его скорость в нижнем положении:

$$v = \frac{2h}{t}. \quad (2.6)$$

Если нить идеальна и разматывается без скольжения, то линейная скорость точек на поверхности шкива равна скорости груза, и угловая скорость колеса может быть определена как:

$$\omega = \frac{2h}{rt}. \quad (2.7)$$

Используя соотношения (2.2) - (2.7), можно представить (2.1) в следующем виде:

$$mgh = \frac{2mh^2}{t^2} + \frac{2I_0h^2}{r^2t^2} + \frac{2I_0h^2}{r^2t^2} \frac{n_1}{n_2},$$

откуда после преобразования получается необходимая формула для расчета момента инерции системы:

$$I_0 = \frac{m(gt^2 - 2h)r^2 n_2}{2h(n_1 + n_2)}. \quad (2.8)$$

Все величины, входящие в правую часть этого равенства, могут быть определены с помощью серий опытов.

## ЗАДАНИЯ

1. Подготовьте экспериментальную установку как показано на рис. 1. Для этого подберите нить необходимой длины и два груза разной массы. Прикрепите к концу нити груз. Затем, зацепив нить на шкиве и вращая рукой маховое колесо, равномерно намотайте всю нить на шкив.
2. Добившись успокоения груза, отпустите маховое колесо и одновременно включите секундомер. Измерьте время опускания груза. Не останавливая вращения колеса после отсоединения нити с грузом, посчитайте число оборотов системы до ее полной остановки.
3. Проведите четыре серии опытов: для двух различных подвешенных грузов и двух шкивов разного радиуса при одной и той же длине нити.
4. Рассчитайте момент инерции системы методом вращения, используя формулу (2.8), и определите его погрешность.
5. Выведите формулы для расчета моментов инерции шкивов и оси через их линейные размеры и плотность. Оцените величину этих моментов инерции. Решите вопрос, следует ли вычитать их из момента инерции всей системы, чтобы получить момент инерции махового колеса.
6. Выведите формулу для расчета момента инерции махового колеса через его линейные размеры и плотность. Произведите расчет теоретического значения момента инерции.
7. Рассчитанное значение момента инерции колеса сравните со значением, полученным экспериментально.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется моментом инерции тела? Объясните физический смысл этого понятия.
2. Почему инерционные свойства твердого тела по отношению к вращательному движению характеризуют моментом инерции, а не массой тела?
3. Получите выражение для момента инерции твердого тела относительно произвольной оси.
4. Запишите основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела. Расставьте силы, моменты сил, действующие на груз и маховое колесо (см. рис. 1). Запишите уравнение моментов и второй закон Ньютона для этих тел.
5. Используя формулы (2.1) – (2.8) и уравнение моментов, получите выражения для момента силы трения, момента силы натяжения нити, силы трения в опорах. Рассчитайте их численные значения.
6. Как влияют на движение колеса его момент инерции, радиус шкива? Поясните ответ графиками зависимости угловой скорости и углового ускорения колеса от времени.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика. М.: Наука, 1989.  
<http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=465658>.
2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1976. <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=239865>.
3. Стрелков С.П. Механика [Электронный ресурс]: учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2005. — 560 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/589>.

Татьяна Ивановна Овсечина

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАХОВОГО КОЛЕСА  
МЕТОДОМ ВРАЩЕНИЯ**

*Практикум*