МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет**

Е.Л. Панкратов

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Учебно-методическое пособие
по курсу «Физика»

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов, обучающихся по направлению 09.03.03 «Прикладная информатика»

Нижний Новгород
2017

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 Панкратов Е.Л. НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. Учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. - 46 с.

Рецензент: доцент кафедры информационных систем в финансово- кредитной сфере ННГУ к.ф.-м.н., доцент О.В. Подчищаева.

Учебно-методическое пособие «Некоторые модели физических процессов с распределенными параметрами» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика». Оно содержит ряд моделей физических процессов с распределенными параметрами и их математический анализ методами математической физики (классическими методами математической физики и их дальнейшим развитием), являясь продолжением изданных ранее учебного пособия «Физика» для студентов, обучающихся по направлению 09.03.03 «Прикладная информатика», и учебно-методического пособия «Дополнительные вопросы математической физики» для студентов, обучающихся по направлению 010800 «Радиофизика». Математические разделы данного пособия могут быть полезны для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.01.01 «Экономическая безопасность» в рамках курса «Математический анализ». Для закрепления теоретических знаний по тематике данного учебно-методического пособия в его конце приведены контрольные задания.

Ответственная за выпуск:
председатель методической комиссии Института экономики и предпринимательства, **С.В. Едемская**.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время имеется большое количество физических и технических приложений, для которых необходимо проводить моделирование массопереноса, теплопереноса, распространения электромагнитных и акустических волн. В рамках проведения такого моделирования необходимо решать как линейные, так и нелинейные уравнения дифференциальные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения математической физики с распределенными в пространстве и/или времени коэффициентами. Необходимость решения таких уравнений возникает при моделировании технологических процессов производства устройств твердотельной электроники (диффузия примеси и теплоперенос при нестационарном отжиге, диффузия примеси в многослойных структурах, изменение концентрации радиационных дефектов при постимплантационном отжиге и т.д.) [1-7]; теплоперенос в многослойных строительных конструкциях [8,9]; акустические волны (в многослойных строительных конструкциях) [10,11]; электромагнитные волны (в многослойных оптических структурах) [12-14] и т.д. Пособие ориентировано на развитие у обучающихся по программе бакалавриата 09.03.03 «Прикладная информатика» компетенций ОПК-3 и ПК-7 ФГОС ВО. В результате изучения раздела математики «Некоторые модели физических процессов с распределенными параметрами» курса «Физика» студенты должны знать наиболее распространенные модели физических процессов с распределенными параметрами и методы математической физики, позволяющие проводить их анализ.

1. ***Основные определения***

В данном разделе рассмотрим несколько основных определений, необходимых для изложения материала данного пособия.

Определение 1

Уравнение, связывающее независимые переменные x_1, x_2, …, x_m, искомую функцию независимых переменных $u(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, заданной в некоторой области G, и частные производные искомой функции до n-го порядка включительно называется дифференциальным уравнением в частных производных n-го порядка.

Определение 2

Порядком уравнения называется порядок старшей из входящих в уравнение производной.

Определение 3

Функция u $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, обращающая уравнение в частных производных в тождество, называется решением или интегралом данного уравнения.

Определение 4

Дифференциальное уравнение в частных производных называется линейным, если оно линейно относительно искомой функции $u(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ и всех её производных. В противном случае уравнение называется нелинейным.

Пример 1

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка в общем случае имеет следующий вид:

$$A_1(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_1}+A_2(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_2}+\ldots+ \quad (1)$$

$$+A_m(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_m}=B_0(x_1,x_2,\ldots,x_m)+B_1(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,u(x_1,x_2,\ldots,x_m).$$

Пример 2

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка в общем случае имеет следующий вид

$$A_{11}(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_1^2}+A_{12}(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_1\,\partial x_2}+$$

$$+A_{22}(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_{12}^2}+\ldots+A_{m-1m-1}(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_{m-1}^2}+$$

$$+A_{m-1m}(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_{m-1}\,\partial x_m}+A_{mm}(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_{mm}^2}= \quad (2)$$

$$=B_0(x_1,x_2,\ldots,x_m)+B_1(x_1,x_2,\ldots,x_m)u(x_1,x_2,\ldots,x_m)+B_2(x_1,x_2,\ldots,x_m)\times$$

$$\times\frac{\partial u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_1}+\ldots+B_{m+1}(x_1,x_2,\ldots,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{\partial x_m}.$$

Определение 5

Если коэффициенты $B_i(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ равны нулю, уравнения (1), (2) и аналогичные им уравнения более высокого порядка называются однородными. В противном случае данные уравнения называются неоднородным.

Для описания физических процессов наиболее часто используются уравнения в частных второго порядка. Данные уравнения, также как и уравнения первого порядка, могут быть классифицированы как “линейные” и “нелинейные”, “однородные” и “неоднородные”. Существует также ещё одна классификация уравнений второго порядка. Наиболее просто она может быть проиллюстрирована с помощью линейного относительно старших производных уравнения для функций двух переменных $u(x,t)$. Такое уравнение может быть представлено в следующем общем виде

$$A_{xx}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+2A_{xt}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}+A_{tt}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=$$

$$=B\left(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right). \tag{3}$$

Определение 6

Уравнение (3) называется:

(*i*) гиперболическим, если $A_{xx}A_{tt}\text{-}A_{xt}^2<0$ (данное уравнение наиболее часто используется для описания волновых процессов);

(*ii*) параболическим, если $A_{xx}A_{tt}\text{-}A_{xt}^2=0$ (данное уравнение наиболее часто используется для описания теплопереноса и диффузии вещества);

(*iii*) эллиптическим, если $A_{xx}A_{tt}\text{-}A_{xt}^2>0$ (используется для описания стационарных процессов).

С помощью замены переменных данные уравнения можно преобразовать к следующим каноническим формам

канонические формы гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}=U\left(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right); \tag{3a}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=U\left(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right); \tag{3$б$}$$

каноническая форма параболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=U\left(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right); \tag{3$в$}$$

каноническая форма эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=U\left(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right). \tag{3$г$}$$

Для однозначного определения решения дифференциального уравнения его необходимо дополнить граничными и начальными условиями. Для введения основных условий рассмотрим функцию двух переменных $u(x,t)$ в некоторой области $(x,t)\in G$: $0\le x\le L$, $0\le t\le\Theta$.

Определение 7

Совокупность начального и граничного условий называется краевыми условиями. Начальное условие называется временным краевым условием, а граничное условие называется пространственным краевым условием.

Начальное условие

Начальное условие определяется заданием распределения искомой функции $u(x,t)$ и ее производной до m-1 порядка (m – порядок уравнения, решением которого является искомая функция $u(x,t)$) внутри области G в начальный момент времени, т.е.

$$u(x,0)=\chi_0(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\chi_1(t),\ \ldots,\ \left.\frac{\partial^{m-1}u(x,t)}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0}=\chi_{m-1}(t). \qquad (4)$$

Существуют несколько видов граничных условий для искомой функции.

Граничное условие первого рода (задача Дирихле)

Граничное условие первого рода (задача Дирихле) состоит в задании на границах области G искомой функции $u(x,t)$ в любой момент времени, т.е.

$$u(0,t)=\varphi_1(0,t),\ u(L,t)=\varphi_2(L,t). \qquad (4a)$$

Такие граничные условия могут быть реализованы при искусственном поддержании постоянной концентрации легирующей примеси или температуры, а также особыми условиями массо- или теплообмена между границей области G и окружающим пространством.

Граничное условие второго рода (задача Неймана)

Граничное условие второго рода (задача Неймана) состоит в задании на границе области G плотности потока тепла, частиц, … При этом поток пропорционален нормальной производной искомой функции $u(x,t)$

$$-\lambda\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x=0}=\psi_1(t),\ -\lambda\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x=L}=\psi_2(t). \qquad (4б)$$

В данном соотношении нормальная производная $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial n}$ искомой функции $u(x,t)$, имеющая смысл концентрации вещества или температуры, после умножения на коэффициент λ, имеющий смысл соответственно коэффициентов диффузии или теплопроводности, является потоком соответственно вещества или тепла через поверхность G. Такие граничные условия используются при теплообмене во время нагревания тела в высокотемпературных печах, где передача тепла происходит при помощи излучения по закону Стефана-Больцмана, когда температура тела значительно меньше температуры излучающих поверхностей. Второй пример реализации граничных условий второго рода - протекание частиц через границу области G с заданным потоком.

Граничное условие третьего рода (задача Ньютона)

Обычно граничные условия третьего рода характеризуют конвективный теплообмен между поверхностью тела и окружающей средой в процессе нагревания и охлаждения тела. Данный закон достаточно сложен, но в упрощенном виде может быть принят в виде закона Ньютона. В рамках данного закона поток тепла через поверхность тела пропорционален разности температур данного тела и окружающей среды, т.е.

$$-\lambda \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x=0} = \alpha\left[u(0,t) - T_L(t)\right],\ -\lambda \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x=L} = \alpha\left[u(L,t) - T_R(t)\right]. \qquad (4c)$$

В данном соотношении параметр α имеет смысл коэффициента теплообмена. Частным случаем третьей краевой задачи является закон Стефана-Больцмана. В рамках данного закона тепловой поток через границу от температуры пропорционален разности четвёртых степеней температур тела и окружающей среды.

Граничное условие четвертого рода

Граничное условие четвёртого рода соответствует массо- и теплообмену поверхности тела с окружающей средой (например, с другим телом). При этом обычно считается, что концентрация вещества или температура (в зависимости от рассматриваемой с физической точки зрения ситуации), а также поток вещества или тепла сохраняются с точностью до известного множителя при переходе через границу раздела, т.е.

$$k(t)\,u_1(x,t)\big|_{S_1} = u_2(x,t)\big|_{S_2},\ -D_1 \left.\frac{\partial\, u_1(x,t)}{\partial n}\right|_{S_1} = -D_2 \left.\frac{\partial\, u_2(x,t)}{\partial n}\right|_{S_2}. \qquad (4г)$$

Дифференциальное уравнение может быть преобразовано к интегральному. Рассмотрим два способа такого преобразования. В качестве примера рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_2(x)\frac{d^2 y(x)}{d x^2} + a_1(x)\frac{d\, y(x)}{d\, x} + a_0(x) y(x) = b(x), \qquad (5)$$

где $y(x)$ - искомая функция, $a_i(x)$ и $b(x)$ - известные функции независимой переменной x. В рамках первого метода перехода от дифференциального уравнения к интегральному сделаем в уравнении (5) следующую замену переменных: $z(x) = \frac{d^2 y(x)}{d\, x^2}$ [15]. Тогда производная $\frac{d\, y(x)}{d\, x}$ является интегралом от новой функции $z(x)$, т.е. $\frac{d\, y(x)}{d\, x} = \int_0^x z(v) d\, v + C_1$, где C_1 – постоянная интегрирования. Искомая функция $y(x)$ является двукратным интегралом от функции $z(x)$, т.е.

$y(x)=\int\limits_0^x\int\limits_0^v z(u)\,du\,dv + C_1x + C_2$, где C_2 – вторая постоянная интегрирования. С помощью интегрирования по частям [16] последнее соотношение можно свести к однократному интегралу: $y(x)=\int\limits_0^x (x-v)z(v)\,dv + C_1x + C_2$. После проведения такой замены переменных уравнение (5) преобразуется к следующему виду

$$a_2(x)z(x)+a_1(x)\left[\int\limits_0^x z(v)\,dv + C_1\right]+a_0(x)\left[\int\limits_0^x (x-v)z(v)\,dv + C_1x + C_2\right]=b(x). \quad (5a)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются с помощью наложенных на решение условий. Уравнение (5*a*) является интегральным уравнением относительно старшей производной искомой функции. После определения функции $z(x)$ ее необходимо проинтегрировать необходимое число раз (в данном случае – два раза) для определения исходной искомой функции $y(x)$.

В рамках второго метода перехода от дифференциальной формы уравнения к интегральной проинтегрируем правую и левую части уравнения (5) по независимой переменной x. Тогда уравнение (5) преобразуется к следующей форме

$$\int\limits_0^x a_2(v)\frac{d^2y(v)}{dv^2}dv+\int\limits_0^x a_1(v)\frac{dy(v)}{dv}dv+\int\limits_0^x a_0(v)y(v)dv=\int\limits_0^x b(v)dv+C_1.$$

Первые два слагаемых уравнения (5*б*) могут быть преобразованы к более простому виду использованием интегрирования по частям, т.е.

$$a_2(x)\frac{dy(x)}{dx}-\int\limits_0^x \frac{da_2(v)}{dv}\frac{dy(v)}{dv}dv+a_1(x)y(x)-\int\limits_0^x y(v)\frac{da_1(v)}{dv}dv+$$

$$+\int\limits_0^x a_0(v)y(v)dv=\int\limits_0^x b(v)dv+C_1.$$

Повторное применение интегрирования по частям во втором слагаемом позволяет преобразовать интегро-дифференциальное уравнение в интегральное

$$a_2(x)\frac{dy(x)}{dx}-\frac{da_2(x)}{dx}y(x)+\int\limits_0^x \frac{d^2a_2(v)}{dv^2}y(v)dv+a_1(x)y(x)-\int\limits_0^x y(v)\frac{da_1(v)}{dv}dv+$$

$$+\int\limits_0^x a_0(v)y(v)dv=\int\limits_0^x b(v)dv+C_1.$$

Или, после приведения подобных членов

$$a_2(x)\frac{dy(x)}{dx}+\left[a_1(x)-\frac{da_2(x)}{dx}\right]y(x)+\int\limits_0^x\left[\frac{d^2a_2(v)}{dv^2}-\frac{da_1(v)}{dv}+a_0(v)\right]y(v)dv=$$

$$=\int\limits_0^x b(v)dv+C_1.$$

Повторное интегрирование последнего соотношения является предпоследним шагом в преобразовании его из интегро-дифференциальной формы к интегральной, т.е.

$$\int_0^x a_2(v)\frac{d\,y(v)}{d\,v}d\,v+\int_0^x\left[a_1(v)-\frac{d\,a_2(v)}{d\,v}\right]y(v)d\,v+\int_0^x\left[\frac{d^2a_2(v)}{d\,v^2}-\frac{d\,a_1(v)}{d\,v}+a_0(v)\right]\times$$

$$\times(x-v)y(v)d\,v=\int_0^x(x-v)\,b(v)\,d\,v+C_1x+C_2.$$

Применение интегрирования по частям к первому слагаемому и приведение подобных членов в последнем уравнении позволяет получить второй интегральный аналог уравнения (5)

$$a_2(x)y(x)+\int_0^x\left\{a_1(v)-2\frac{d\,a_2(v)}{d\,v}+(x-v)\left[\frac{d^2a_2(v)}{d\,v^2}-\frac{d\,a_1(v)}{d\,v}+a_0(v)\right]\right\}y(v)d\,v=$$

$$=\int_0^x(x-v)b(v)d\,v+C_1x+C_2. \qquad (5б)$$

Введение обозначений

$$\tilde{a}_1(v)=a_1(v)-2\frac{d\,a_2(v)}{d\,v}+(x-v)\left[\frac{d^2a_2(v)}{d\,v^2}-\frac{d\,a_1(v)}{d\,v}+a_0(v)\right],$$

$$b(x)=\int_0^x(x-v)b(v)d\,v+C_1x+C_2$$

позволяет преобразовать второй интегральный аналог уравнения (5) к окончательному виду

$$a_2(x)y(x)+\int_0^x\tilde{a}_1(v)y(v)d\,v=\tilde{b}(x). \qquad (5в)$$

Интегральные уравнения также имеют свою классификацию. Существуют две основных группы интегральных уравнений: уравнения Вальтера и уравнения Фредгольма. В рамках каждой группы выделяются два рода уравнений: первый и второй. Общий вид перечисленных уравнений приведен ниже. Уравнения Вальтера соответственно первого и второго рода выглядят следующим образом:

$$\lambda\int_a^x K(x,t)y(t)d\,t=f(x), \qquad (6а)$$

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)y(t)d\,t, \qquad (6б)$$

где $y(x)$ – искомая функция, $f(x,t)$ и $K(x,t)$ – известные функции, вторая из которых называется ядром интегрального уравнения.

Уравнения Фредгольма соответственно первого и второго рода имеют вид

$$\int_a^b K(x,t)y(t)\,d\,t=f(x), \qquad (7а)$$

$$y(x)-\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x). \qquad (7б)$$

Если $f(x) = 0$, уравнения (6) и (7) называются однородными. В противном случае - неоднородными.

2. *Теплопроводность*

Теория теплопроводности в настоящее время находит широкое применение в решении различных технических проблем. Расчет тепловых аппаратов, работающих в нестационарном тепловом режиме, расчет на теплоустойчивость ограждающих конструкций в условиях переменных тепловых воздействий (теплоизоляция зданий, печей, трубопроводов), нагревание машин, электрических кабелей, температурные напряжения в мостах, технология электронных приборов и многие другие вопросы связаны с решением задач нестационарной теплопроводности. К тому же кругу вопросов относятся исследования кинетики процессов сорбции, десорбции, сушке, химических реакций, так как задачи нестационарной диффузии аналогичны задачам теплопроводности. Кроме того, изучение теплофизических свойств различных материалов и, в частности современные методы определения их термических коэффициентов основаны на закономерностях нестационарного температурного поля. Несмотря на актуальность анализа процессов теплопроводности, количество соответствующих специальных изданий ограниченно.

2.1. *Теплопроводность в однородных материалах*

На первом этапе рассмотрим простейшую модель теплопроводности, т.е. теплопроводность в однородных материалах и без учёта источников тепла и зависимости параметров от температуры. В более общем случае уравнение теплопроводности может записано в следующей форме

$$c\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right] + g(x,t). \qquad (8)$$

Решением данного уравнения является температура $T(x,t)$. Функция $g(x,t)$ описывает источники тепла. Коэффициент c имеет смысл теплоёмкости материала, а коэффициент λ имеет смысл коэффициента теплопроводности. Отношение коэффициента теплопроводности и теплоёмкости $\alpha=\lambda/c$ называется коэффициентом температуропроводности. Если коэффициенты λ и c постоянны (а именно такой случай мы и будем пока рассматривать), тогда уравнение (8) примет следующий вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \qquad (8a)$$

Дополним уравнение ($8a$) следующими граничными и начальным условиями

$$-\lambda\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ -\lambda\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0,\ T(x,0)=\chi(x). \qquad (9)$$

Следует заметить, что уравнение (1) называется вторым законом Фурье, а уравнение $q(x,t)=-\lambda\cdot\partial T(x,t)/\partial x$ - первым законом Фурье, где $q(x,t)$ - тепловой поток.

Будем искать решение уравнения (8*a*) в виде произведения двух множителей, один из которых зависит только от пространственной переменной x, другой - только от времени t, т.е. $T(x,t)=A(x)B(t)$ [15,16]. Подставим предлагаемую форму решения в уравнение (1*a*)

$$A(x)\frac{\partial B(t)}{\partial t}=\alpha B(t)\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}.$$

Далее перенесём в одну часть уравнения все множители, зависящие от одной переменной, в другую часть уравнения - все множители, зависящие от другой переменной, т.е.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{dB(t)}{dt}=\frac{\alpha}{A(x)}\frac{d^2A(x)}{dx^2}.$$

Последнее равенство может выполняться только в том случае, когда его правая и левая части равны неопределённой пока постоянной величине

$$\frac{1}{B(t)}\frac{dB(t)}{dt}=\frac{\alpha}{A(x)}\frac{d^2A(x)}{dx^2}=\gamma.$$

Тогда получаем систему уравнений для функций $A(x)$ и $B(t)$

$$\frac{1}{B(t)}\frac{dB(t)}{dt}=\gamma,\ \frac{\alpha}{A(x)}\frac{d^2A(x)}{dx^2}=\gamma. \tag{10}$$

Решим первое уравнение системы (9) методом разделения переменных [15,16]. Для использования данного метода умножим левую и правую часть данного уравнения на dt, что приводит данное соотношение к следующему виду

$$\frac{dB(t)}{B(t)}=\gamma\, dt.$$

Интегрирование левой и правой части данного уравнения с использованием таблицы интегралов (см., например, [17]) позволяет получить следующее решение первого уравнения системы (10)

$$ln[B(t)]=\gamma t+C_1.$$

Потенцирование данного соотношения дает функцию $B(t)$ в явном виде

$$B(t)=C_1e^{\gamma t}.$$

Постоянная γ из условия физической реализуемости решения должна быть выбрана отрицательной, т.е. $\gamma=-|\gamma|$. В противном случае решение уравнения (8*a*) будет неограниченно возрастать во времени. Второе уравнение системы (9) может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2 A(x)}{d\,x^2} = \frac{\gamma}{D} A(x),$$

что эквивалентно следующему уравнению

$$\frac{d^2 A(x)}{d\,x^2} + \frac{|\gamma|}{D} A(x) = 0 .$$

Далее в рамках метода Эйлера подстановка $A\,(x) = C\,e^{\xi\, x}$ позволяет получить следующее уравнение для параметра ξ

$$\xi^2 + |\gamma|/\alpha = 0.$$

Тогда

$$\xi = \pm i\,x\sqrt{|\gamma|/\alpha}\,,$$

где $i = \sqrt{-1}$.

С учётом последних соотношений функция $A\,(x)$ может быть представлена в двух эквивалентных формах

$$A(x) = C_2 \exp\left(i\,x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \right) + C_3 \exp\left(-\,i\,x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \right) \text{ и } A(x) = C_4 \cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \right) + C_5 \sin\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \right).$$

Вторая форма является более предпочтительной, т.к. с её помощью определение постоянных интегрирования является более удобной. Решение уравнения ($1a$) в окончательной форме имеет следующий вид

$$T\,(x,t) = \left[C_6\,cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \right) + C_7\,sin\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \right) \right] e^{-|\gamma|\,t}, \tag{11}$$

где $C_6 = C_1 C_4$, $C_7 = C_1 C_5$. Далее определим неизвестные пока постоянные величины C_6, C_7 и γ. Для этого найдём частную производную по переменной x от функции (10)

$$\frac{\partial T\,(x,t)}{\partial\,x} = \left[-\,C_6\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\,sin\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \right) + C_7\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\,cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \right) \right] e^{-|\gamma|\,t}.$$

Подстановка граничных значений переменной x приводит к следующим результатам

при $x=0$: $$\left.\frac{\partial T\,(x,t)}{\partial\,x}\right|_{x=0} = C_7\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\,cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \right) e^{-|\gamma|\,t}$$

при $x=L$: $$\left.\frac{\partial T\,(x,t)}{\partial\,x}\right|_{x=L} = \left[-\,C_6\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\,sin\left(L\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \right) + C_7\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\,cos\left(L\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}} \right) \right] e^{-|\gamma|\,t}.$$

Равенство нулю теплового потока $q(x,t)$ на границах рассматриваемой области позволяет получить из первого уравнения данной системы, что оно может удовлетворяться только при равенстве нулю постоянной интегрирования C_7. Остальные множители производной или не равны нулю, или равны нулю только в некоторых точках. Равенство нулю постоянной C_7 приводит второе уравнение последней системы к следующему виду

при $x=L$: $$\left.\frac{\partial T\,(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = -C_6\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\,sin\left(L\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)e^{-|\gamma|\,t}.$$

Данное соотношение может быть равно нулю или при $sin\left(L\sqrt{|\gamma|/\alpha}\right)=0$, или при $C_7=0$. Однако второе равенство приводит к нулевому решению уравнения (8*a*), что интереса не представляет. Решение уравнения $sin\left(L\sqrt{|\gamma|/\alpha}\right)=0$ позволяет получить: $|\gamma|=\alpha\,\pi^2 n^2/L^2$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Таким образом, уравнение (1*a*) имеет бесконечное число решений. Числа $\pi n/L$ называются собственными числами. Соответствующие им ненулевые (нетривиальные) решения называются собственными функциями. Задача на нахождение собственных чисел и собственных решений называется задачей Штурма-Лиувиля. Формально составим ряд из этих решений

$$T(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n6}\,cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\alpha t}. \qquad (12)$$

Для определения постоянных интегрирования C_{6n} воспользуемся начальным распределением. Представим начальное распределение $\chi(x)$ в виде ряда Фурье по собственным функциям рассматриваемой краевой задачи $f_n(x)=\cos(\pi n x/L)$, т.е.

$$\chi(x)=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)d\,x+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L\chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d\,x. \qquad (13)$$

Далее в соотношении (2) выберем нулевое значение переменной t и приравняем полученный ряд ряду (13)

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_{n6}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)d\,x+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L\chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d\,x.$$

Путём сравнения членов ряда при одинаковых значениях n получаем

$$C_{06}=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)d\,x;\ C_{n6}=\frac{2}{L}\int_0^L\chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d\,x,\ n\geq 1.$$

В окончательной форме решение уравнения (8*a*) имеет следующий вид

$$T(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)d\,x+\frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\alpha t}\int_0^L\chi(x)cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)d\,x.$$

Описанный метод называется метод разделения переменных Фурье.

2.2. ***Теплопроводность в однородных материалах с источниками тепла***

Рассмотрим линейное уравнение теплопроводности с источником тепла

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t). \qquad (8б)$$

Дополним уравнение (8*в*) следующими граничными и начальным условиями

$$-\lambda\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0,\ -\lambda\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=L} = 0,\ u(x,0)=\chi(x).$$

Будем искать решение уравнения (8*б*) в виде ряда, по собственным функциям однородной краевой задачи $f_n(x)=\cos(\pi n x/L)$ [18], т.е.

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \qquad (14)$$

где $h_n(t)$ - неизвестная пока функция переменной t. Представим функцию $g(x,t)$, а также начальное распределение $\chi(x)$ в виде рядов Фурье по собственным функциям однородной краевой задачи

$$g(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L g(x,t)dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L g(x,t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx, \qquad (15)$$

$$\chi(x) = \frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx. \qquad (16)$$

Подстановка ряда (15) в уравнение (8*б*) позволяет получить уравнение для неизвестной функции $h_n(t)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial h_n(t)}{\partial t}cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) = -\alpha\frac{\pi^2}{L^2}\sum_{n=0}^{\infty}n^2 h_n(t)\,cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) +$$

$$+\frac{1}{L}\int_0^L g(x,t)\,dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L g(x,t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Далее в полученном уравнении группируем слагаемые при одинаковых значениях n и приравниваем их. Тогда

$$\frac{\partial h_0(t)}{\partial t} = \frac{1}{L}\int_0^L g(x,t)\,dx,\ \frac{\partial h_n(t)}{\partial t} = -\alpha\frac{\pi^2 n^2}{L^2}h_n(t) + \frac{2}{L}\int_0^L g(x,t)cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Решениями данных уравнений являются следующие функции

$$h_0(t) = \frac{1}{L}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau + C_{06},\ h_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^t e^{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\alpha\tau}\int_0^L g(x,\tau)cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau + C_{n6},$$

где C_{06} и C_{n6} - постоянные интегрирования. Подстановка полученных соотношений в предлагаемую форму решения (14) уравнения (8*б*) приводит к следующему результату

$$T(x,t)=C_{06}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^t e^{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\alpha\tau}\int_0^L g(x,\tau)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau+C_{n6}\right]\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)+$$

$$+\frac{1}{L}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau\,. \qquad (17)$$

Постоянные интегрирования C_{06} и C_{n6} определим с помощью начального условия. Для этого в соотношение (17) подставим нулевое значение переменной t и приравняем полученный результат разложению начального условия $\chi(x)$ (16), т.е.

$$\frac{1}{L}\int_0^0\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^0 e^{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\alpha\tau}\int_0^L g(x,\tau)cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau+C_{n6}\right]cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)+$$

$$+C_{06}=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L\chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,.$$

Тогда

$$C_{06}=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)dx\,,\ C_{n6}=\int_0^L\chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,.$$

В окончательной форме решение уравнения (8*б*) имеет следующий вид

$$T(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau+\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)dx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^t e^{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\alpha\tau}\int_0^L g(x,\tau)cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau+\int_0^L\chi(x)cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\right]cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Рассмотренные методы решения также применимы и для решения уравнения диффузии, но в таком случае решаемой дифференциальное уравнение будет называться уравнением диффузии, решение уравнения будет называться не температурой, а концентрацией диффундирующего вещества, коэффициент α будет называться коэффициентом диффузии и обычно имеет другое обозначение (чаще D).

2.3. ***Теплопроводность в неоднородных материалах***

В данном разделе рассмотрим несколько методов решения уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, применимых для всех типов уравнений. В качестве примера выберем параболическое уравнение с коэффициентом α, зависящим в общем случае как от переменной x, так и от переменной t, а также от решения уравнения $u(x,t)$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha\,(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right] \qquad (18)$$

со следующими граничными и начальным условиями

$$-\lambda\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0,\ -\lambda\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=L}=0,\ T(x,0)=\chi(x).$$

Уравнение (18) в столь общем случае точного решения не имеет. На следующих примерах проиллюстрируем несколько приближённых методов решения.

Пример 3

В качестве первого примера рассмотрим систему из двух бесконечных цилиндров с коэффициентом теплопроводности $\alpha\,(r,t)$, принимающим два значения: α_1 при $0\le r\le R_1$ и α_2 при $R_1\le r\le R_2$ для любого значения переменной t (см. рис. 1). Обозначим температуру в каждом цилиндре аналогично $T_1\,(r,t)$ и $T_2\,(r,t)$ для $0\le r\le R_1$ и $R_1\le r\le R_2$. Рассмотрим теплообмен данной системы с окружающей средой при условии, что в начальный момент времени ($t=0$) температура в каждом цилиндре постоянна и равна $T_1(r,0)=T_2(r,0)=T_0$. Далее данную систему цилиндров помещают в среду с постоянной температурой T_c. При этом $T_c<T_0$. В данном случае изменение температуры в системе цилиндров описывается следующей системой уравнений

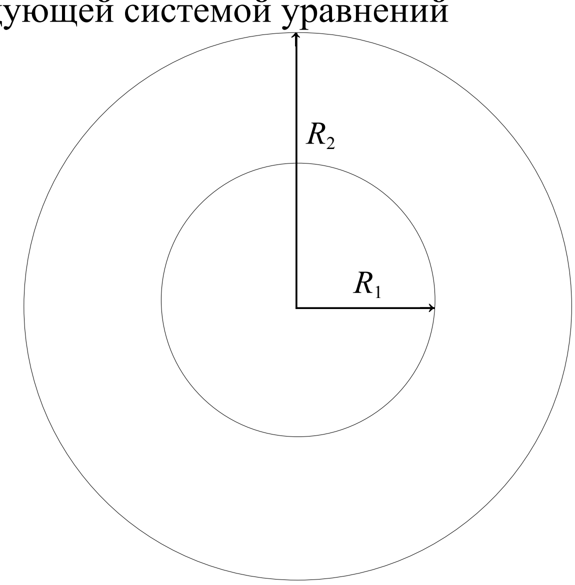

Рис. 1. Система из двух цилиндров с различными радиусами R_1 и R_2.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T_1(r,t)}{\partial t}=\dfrac{D_1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial T_1(r,t)}{\partial r}\right], & 0\le r\le R_1\\[2ex] \dfrac{\partial T_2(r,t)}{\partial t}=\dfrac{D_2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial T_2(r,t)}{\partial r}\right], & R_1\le r\le R_2.\end{cases}\tag{19}$$

со следующими граничными и начальными условиями

$$T_1(r,0)=T_2(r,0)=T_0,\ T_1(R_1,t)=T_2(R_2,t),\ -\lambda_1\frac{\partial T_1(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=R_1}=-\alpha_2\frac{\partial T_2(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=R_1},$$

$$T_1(0,t)<\infty,\ -\alpha_2\frac{\partial T_2(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=R_2}+\beta\left[T_1-T_2(R_2,t)\right]=0.$$

Для нахождения решения системы (52) воспользуемся преобразованием Лапласа. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial Y_1(r,s)}{\partial r}\right] - sY_1(r,s) = -T_0, & 0 \le r \le R_1 \\ \dfrac{\alpha_2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial Y_2(r,s)}{\partial r}\right] - sY_2(r,s) = -T_0, & R_1 \le r \le R_2. \end{cases} \qquad (19a)$$

$$T_1(0,s)<\infty,\ -\alpha_2\left.\frac{\partial T_2(r,s)}{\partial r}\right|_{r=R_2} + \beta\left[\frac{T_1}{s} - T_2(R_2,s)\right] = 0,\ T_1(R_1,s)=T_2(R_2,s),$$

$$-\alpha_1\left.\frac{\partial T_1(r,s)}{\partial r}\right|_{r=R_1} = -\alpha_2\left.\frac{\partial T_2(r,s)}{\partial r}\right|_{r=R_1}.$$

Подробно рассматривать решение уравнения (52*a*) и переход от Лаплас-образа к оригиналу не будем из-за большого объёма соотношений. Приведём лишь конечное решение уравнения (52). Оно может быть представлено в следующей форме

$$\begin{cases} T_1(r,t) = T_0 - (T_c - T_0)\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\mu_n \dfrac{r}{R_1}\right) exp\left(-\dfrac{\mu_n^2 T_1 t}{R_1^2}\right) \\ T_2(r,t) = T_0 - (T_c - T_0)\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\, exp\left(-\dfrac{\mu_n^2 T_2 t}{R_2^2}\right)\left\{J_0(\mu_n)\cos\left[\mu_n\sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}\left(\dfrac{r}{R_1}\right)-1\right] - \right. \\ \left. - J_1(\mu_n)\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}\sin\left[\mu_n\sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}\left(\dfrac{r}{R_1}\right)-1\right]\right\}, \end{cases}$$

где λ_i и α_i - коэффициенты теплопроводности и температуропроводности цилиндров, μ_n - корни уравнения

$$J_0(\mu)\left\{\frac{\alpha_j R_j}{\lambda_j}\cos\left[\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right] - \mu\frac{R_2}{R_1}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\sin\left[\mu\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right]\right\} - \qquad (20)$$

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}J_1(\mu)\left\{\frac{\alpha_j R_j}{\lambda_j}\cos\left[\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right] + \mu\frac{R_2}{R_1}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\sin\left[\mu\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right]\right\} = 0,$$

$$A_n = 2\frac{\lambda_1\alpha_j R_j}{\lambda_2\lambda_j}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\left\{\mu_n\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{\alpha_j R_j}{\lambda_j}tg\left[\mu_n\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left(\left[\mu_n^2\frac{\lambda_1^2\alpha_2}{\lambda_2^2\alpha_1}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2 + \frac{\alpha_j^2 R_j^2}{\lambda_j^2}\right]ctg\left[\mu_n\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right] - 2\left[\mu_n^2\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \right.\right.$$

$$+\frac{\alpha_j^2 R_j^2}{\lambda_j^2}\Bigg]\lambda_1\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)\left\{\lambda_2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\,sin\left[2\mu_n\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right]\right\}^{-1}+tg\left[\mu_n\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right]\times$$

$$\times\left[\mu_n^2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2+2\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\frac{\lambda_1\alpha_i R_i}{\lambda_2\lambda_i}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}+\alpha_1\alpha_2\frac{R_i^2}{\lambda_2^2}\right]+2\mu_n^2\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-$$

$$-2\mu_n\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\frac{\alpha_j R_j}{\lambda_j}-2\mu_n R_j\frac{\alpha_j\lambda_1^2}{\lambda_j\lambda_2^2}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)-\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\frac{\lambda_1 D_j^2 R_j^2}{\lambda_2\lambda_j^2\mu_n}\Bigg)^{-1}\times$$

$$\times\left\{\mu_n\,sin\left[\mu_n\sqrt{\alpha_1/\alpha_2}\left(1-R_2/R_1\right)\right]\right\}^{-1},\ j=1,2.$$

Недостатком данного метода решения является громоздкость преобразований при нахождении решения краевой задачи, необходимость решения трансцендентных уравнений типа уравнения (20) для определения постоянных интегрирования и необходимость не всегда приемлемой идеализации резкой границы между слоями.

Пример 4

В качестве следующего метода решения уравнения (18) рассмотрим метод функциональных поправок, являющийся дальнейшим развитием метода малого параметра и снимающим ограничение малости (точнее - физической малости) используемого параметра. В рамках данного метода представим коэффициент теплопроводности в виде суммы его постоянной и переменной составляющих, т.е. $\alpha(x)=\alpha_0[1+\varepsilon\, h(x)]$, где $0\le\varepsilon<<1$, $|h(x)|\le 1$, α_0 - среднее значение коэффициента теплопроводности. Будем искать решение уравнения (18) в виде степенного ряда по параметру ε:

$$T(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k T_k(x,t). \qquad (21)$$

Функции $T_k(x,t)$ являются решением системы уравнений:

$$\frac{\partial T_0(x,t)}{\partial t}=\alpha_0\frac{\partial^2 T_0(x,t)}{\partial x^2};\ \frac{\partial T_k(x,t)}{\partial t}=\alpha_0\left\{\frac{\partial^2 T_k(x,t)}{\partial x^2}+\left[\frac{\partial}{\partial x}h(x)\frac{\partial T_{k-1}(x,t)}{\partial x^2}\right]\right\},\ k\ge 1 \qquad (22)$$

с граничными и начальными условиями:

$$-\lambda\frac{\partial T_{k\ge 0}(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0,\ -\lambda\frac{\partial T_{k\ge 0}(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=L}=0,\ T_0(x,0)=\chi(x),\ T_{k\ge 1}(x,0)=0. \qquad (23)$$

Данный метод решения дает возможность найти аналитическое решение уравнения теплопроводности при произвольном профиле коэффициента теплопроводности. Функция $T_0(x,t)$ называется нулевым приближением температуры, функции $T_k(x,t)$ при $k\ge 1$ называются поправочными функциями к нулевому приближению температуры. Нулевое приближение температуры удовлетворяет первому уравнению системы (22) с условиями (23) и описывается следующим рядом

$$T_0(x,t)=\int_0^L f(x)d\,x+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\int_0^L f(x)\,cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)d\ \ x e^{-\left(\frac{\pi\,n}{L}\right)^2\alpha\,t},$$

т.е. является решением линейного уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности. Поправочные функции $T_k(x,t)$ при $k\geq 1$ определяются следующими рядами

$$T_k(x,t)=-2\frac{\pi}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\int_0^L f(x)\,cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)d\ \ x e^{-\left(\frac{\pi\,n}{L}\right)^2\alpha\,t}\times$$

$$\times\int_0^t e^{\left(\frac{\pi\,n}{L}\right)^2\alpha\,\tau}\int_0^L h(v)\frac{\partial T(v,t)}{\partial v}sin\left(\frac{\pi\,n\,v}{L}\right)d\,v\,d\,\tau,\ k\geq 1.$$

С помощью данного метода могут быть также учтены временная и температурная зависимости коэффициента теплопроводности. В случае температурной зависимости коэффициента теплопроводности уравнение теплопроводности будет нелинейным.

3. ***Диффузия***

Диффузия - процесс взаимного проникновения молекул или атомов одного вещества между молекулами или атомами другого, приводящий к самопроизвольному выравниванию их концентраций по всему занимаемому объёму. В некоторых ситуациях одно из веществ уже имеет выравненную концентрацию и говорят о диффузии одного вещества в другом. При этом перенос вещества происходит из области с высокой концентрацией в область с низкой концентрацией (вдоль вектора градиента концентрации). Для описания диффузии используется уравнение диффузии, аналогичное уравнению теплопроводности (8)

$$\frac{\partial\,C(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\right]+g(x,t). \tag{24}$$

В данном уравнении $C(x,t)$ - концентрация диффундирующего вещества, D - коэффициент диффузии диффундирующего вещества. Источник примеси $g(x,t)$ может быть отдельным слагаемым в уравнении, а может учитываться в граничном условии (в том случае, когда он находится на границе рассматриваемой области). Рассмотренные для описания теплопроводности методы решения краевых задач могут быть использованы и для описания диффузии. На примере диффузии рассмотрим метод функциональных поправок в применении к решению уравнения диффузии с переменным в пространстве и времени коэффициентом диффузии и с учётом нелинейности данного уравнения. Для этого рассмотрим уравнение (24) в следующей форме [18]

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{D_L(x,t)\left[1+\mu\frac{C^{\gamma}(x,t)}{P^{\gamma}(x,t)}\right]\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\right\} \tag{24a}$$

с граничными и начальным условиями

$$-D\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0,\ -D\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=L}=0,\ C(x,0)=\chi(x).$$

3.1. ***Нелинейная диффузия в материалах с переменным в пространстве и времени коэффициентом диффузии***

В уравнении (24*а*) $D_L(x,t)$, $P(x,t)$ и γ - соответственно известные функции и параметр. Рассмотрим пока простейший случай равенства единице параметра γ. Далее представим функцию $D_L(x,t)$ в виде суммы её среднего значения D_0 и поправочной функции, учитывающей отличие функции $D_L(x,t)$ от её среднего значения, т.е.

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial}{\partial x}\left\{[1+\varepsilon h(x,t)]\left[1+\mu\frac{C^{\gamma}(x,t)}{P^{\gamma}(x,t)}\right]\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\right\}, \tag{24б}$$

где $0\le\varepsilon<1$, $|g(x,t)|\le 1$. Ограниченность по модулю произведения $|\varepsilon\cdot h(x,t)|<1$ является следствием физической реализуемости функции $D_L(x,t)$ (например, положительность коэффициента диффузии или температуропроводности). Далее будем искать решение уравнения (24*б*) в виде степенного ряда [18]

$$C\,(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^{j}C_{ij}(x,t). \tag{25}$$

Подстановка предлагаемой формы решения в уравнение (25*а*) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях параметров ε и μ позволяет получить систему уравнений для функций $C_{ij}(x,t)$

$$\frac{\partial C_{00}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 C_{00}(x,t)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial C_{10}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 C_{10}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[h(x,t)\frac{\partial C_{00}(x,t)}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial C_{01}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 C_{01}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{C_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial C_{00}(x,t)}{\partial x}\right], \tag{26}$$

$$\frac{\partial C_{11}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 C_{11}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[h(x,t)\frac{\partial C_{01}(x,t)}{\partial x}\right]+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{C_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial C_{10}(x,t)}{\partial x}\right]+$$

$$+D_0\frac{\partial^2 C_{11}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{C_{10}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial C_{00}(x,t)}{\partial x}\right]+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[h(x,t)\frac{C_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial C_{00}(x,t)}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial C_{20}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 C_{20}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[h(x,t)\frac{\partial C_{10}(x,t)}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial C_{02}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 C_{02}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{C_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial C_{01}(x,t)}{\partial x}\right]+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{C_{01}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial C_{00}(x,t)}{\partial x}\right].$$

Подстановка ряда (25) в граничные и начальное условия для уравнения (24*a*) позволяет получить граничные и начальные условия для системы уравнений (26) в следующем виде

$$\left.\frac{\partial C_{ij}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial C_{ij}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\ i\geq 0,\ j\geq 0;\ C_{00}(x,0)=\chi(x),\ C_{ij}(x,0)=0,\ i\geq 1,\ j\geq 1.$$

Таким образом, вместо исходного нелинейного уравнения (24*a*) с зависящим от независимых переменных x и t коэффициентом D получена система линейных неоднородных (за исключением уравнения для функции $C_{00}(x,t)$) уравнений с постоянным коэффициентом D. Решая уравнения системы (26) методом разделения переменных, получаем

$$C_{00}(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)d\,x+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 D_0 t}{L^2}\right)\int_0^L\chi(v)cos\left(\frac{\pi\,n\,v}{L}\right)d\,v,$$

$$C_{10}(x,t)=2\frac{D_0}{L^2}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\int_0^t exp\left(\frac{\pi^2 m^2 D_0\tau}{L^2}\right)\int_0^L h(v,\tau)\frac{\partial C_{00}(v,\tau)}{\partial v}sin\left(\frac{\pi\,m\,v}{L}\right)d\,v\,d\,\tau\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi\,m\,x}{L}\right)\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 D_0 t}{L^2}\right),$$

$$C_{01}(x,t)=2\frac{D_0}{L^2}\sum_{m=1}^{\infty}m\int_0^t exp\left(\frac{\pi^2 m^2 D_0\tau}{L^2}\right)\int_0^L\frac{C_{00}(v,\tau)}{P(v,\tau)}\frac{\partial C_{00}(v,\tau)}{\partial v}sin\left(\frac{\pi\,m\,v}{L}\right)d\,v\,d\,\tau\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi\,m\,x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 D_0 t}{L^2}\right),$$

… … …

Подстановка нулевого приближения в поправочные функции $C_{10}(x,t)$ и $u_{01}(x,t)$ позволяет получить соотношения для них в явном виде

$$C_{10}(x,t)=2\pi\frac{D_0}{L^4}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot cos\left(\frac{\pi\,m\,x}{L}\right)\int_0^t exp\left[\left(m^2-n^2\right)\frac{\pi^2 D_0\tau}{L^2}\right]\int_0^L cos\left(\frac{\pi\,n\,w}{L}\right)\times$$

$$\times\chi(w)d\,w\int_0^L h(v,\tau)\left\{cos\left[\pi\,v\frac{m+n}{L}\right]-cos\left[\pi\,v\frac{m-n}{L}\right]\right\}d\,v\,d\,\tau\cdot exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 D_0 t}{L^2}\right),$$

$$C_{01}(x,t)=2\pi\frac{D_0}{L^4}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot cos\left(\frac{\pi\,m\,x}{L}\right)exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 D_0 t}{L^2}\right)\int_0^t exp\left[\left(m^2-n^2\right)\frac{\pi^2 D_0\tau}{L^2}\right]\times$$

$$\times\int_0^L\frac{1}{P(v,\tau)}\left\{\cos\left[\pi\,v\frac{m+n}{L}\right]-\cos\left[\pi\,v\frac{m-n}{L}\right]\right\}\int_0^L\chi(w)\cos\left(\frac{\pi\,n\,w}{L}\right)d\,w\left[\int_0^L\chi(w)d\,w+\right.$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty} exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 D_0 \tau}{L^2}\right) cos\left(\frac{\pi k v}{L}\right) \int_0^L \chi(w) cos\left(\frac{\pi k w}{L}\right) d\,w \Bigg] d\,v\,d\,\tau\,.$$

Решение следующих уравнений системы (26) позволяет увеличить точность аппроксимации решения уравнения (24*a*). Следует заметить, что положительность коэффициента *D* в уравнении (24*a*) за счёт физических ограничений, а также способ введения параметра ε и функции $h(x,t)$ приводят к сходимости ряда (25) по параметру ε.

3.2. *Диффузия примеси из постоянного источника*

Рассмотрим диффузию примеси из постоянного источника во время легирования материала и одновременно проиллюстрируем метод интегральных преобразований. Однако данный метод как правило применим для линейных уравнений с постоянными коэффициентами. В таком случае уравнение диффузии имеет следующий вид

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2}$$

с граничными и начальными условиями

$$C(0,t)=C_0,\ \left.\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0\,,\ C(x=0,0)=C,\ c(x>0,0)=0.$$

Решение данной краевой задачи может быть получено переходом к интегральному преобразованию вместо исходной концентрации $C(x,t)$. Данной преобразование определяется соотношением [19]

$$\overline{C}(\xi,y) = \int_a^b C(x,y) K(x,\xi) d\,x\,,$$

где $c \le \xi \le d$, $K(x,\xi)$ – зависящая от вида интегрального преобразования функция, определённая в области $a \le \xi \le b$, $c \le \xi \le d$, называемая ядром интегрального преобразования. Функция $C(x,y)$ обычно называется оригиналом, функция $\overline{C}(\xi,y)$ - образом или изображением.

Далее применим преобразование Лапласа к правой и левой частям последнего уравнения

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} e^{-st} d\,t = D\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} e^{-st} d\,t\,.$$

Вычисление по частям интеграла в левой части данного уравнения, а также изменение порядка дифференцирования по переменной *x* и интегрирования по переменной *t* в правой части данного уравнения приводит к следующему результату

$$s\overline{C}(x,s) - C(x,0) = D\frac{\partial^2 \overline{C}(x,s)}{\partial x^2}\,,$$

где $\overline{C}(x,s)=\int\limits_0^{\infty} C(x,t)e^{-st}dt$. Функция $C(x,0)$ равна нулю во всех точках интервала $0<x\le L$. Значение функции $C(0,0)$ может быть учтено в граничном условии. Таким образом, последнее уравнение с частными производными преобразуется к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \overline{C}(x,s)}{\partial x^2}-\frac{s}{D}\overline{C}(x,s)=0.$$

Лаплас-образ граничных условий для данного уравнения имеет вид

$$\overline{C}(0,s)=\frac{C_0}{s},\ \left.\frac{\partial \overline{C}(x,s)}{\partial x}\right|_{x=L}=0.$$

Метод Эйлера позволяет получить решение последнего уравнения в виде линейной комбинации экспоненциальных функций с одинаковыми по модулю, но разными по знаку показателями степени:

$$\overline{C}(x,s)=C_1 exp\left(x\sqrt{\frac{s}{D}}\right)+C_2 exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{D}}\right). \qquad (27)$$

Для определения постоянных интегрирования найдём производную от решения (27) переменной *x*. В данном случае имеем

$$\frac{d\,\overline{C}(x,s)}{d\,x}=C_1\sqrt{\frac{s}{D}}exp\left(x\sqrt{\frac{s}{D}}\right)-C_2\sqrt{\frac{s}{D}}exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{D}}\right). \qquad (28)$$

Далее как в решении (27), так и в его производной (28) выберем соответствующие граничные значения переменной *x*, т.е.

$$\overline{C}(0,s)=C_1+C_2,\ \left.\frac{d\,\overline{C}(x,s)}{d\,x}\right|_{x=L}=C_1\sqrt{\frac{s}{D}}exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)-C_2\sqrt{\frac{s}{D}}exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

В результате получим следующую систему уравнений для определения искомых постоянных интегрирования

$$C_1+C_2=\frac{C_0}{s},\ C_1\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)-C_2\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)=0.$$

В результате решения данной системы получаем

$$C_1=2\frac{C_0}{s}exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)\Big/ch\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right),\ C_2=2\frac{C_0}{s}exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)\Big/ch\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

В данном соотношении функция $y(x)=ch(x)$ называется гиперболическим косинусом [17]. Эту функцию можно выразить через экспоненциальную функцию $y(x)=exp(x)$ следующим образом

$$ch(x)=[exp(x)\text{-}exp(\text{-}x)]/2.$$

С учётом определённых постоянных интегрирования получаем окончательную форму решения (27)

$$\overline{C}(x,s)=\frac{2\,C_0}{s\cdot ch\left(L\sqrt{s/D}\right)}exp\left(x\sqrt{\frac{s}{D}}\right)exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)+$$

$$+\frac{2\,C_0}{s\cdot ch\left(L\sqrt{s/D}\right)}exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{D}}\right)exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

После приведения в последнем соотношении (48) подобных членов получаем

$$\overline{C}(x,s)=\frac{2\,C_0}{s}\left\{exp\left[(x-L)\sqrt{\frac{s}{D}}\right]+exp\left[(L-x)\sqrt{\frac{s}{D}}\right]\right\}\Big/ch\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

В окончательном виде Лаплас-образ решения данной краевой задачи имеет вид

$$\overline{C}(x,s)=\frac{C_0}{s}\frac{ch\left[(L-x)\sqrt{s/D}\right]}{ch\left(L\sqrt{s/D}\right)}. \qquad (27a)$$

Далее с помощью обратного преобразования Лапласа можно найти оригинал функции (27*a*). Для этого необходимо вычислить интеграл

$$C(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\overline{u}(x,s)e^{st}d\,s,$$

где $i=\sqrt{-1}$. Интегрирование происходит в комплексной плоскости $s=\xi+i\eta$ вдоль прямой $\sigma=const$, параллельной мнимой оси. Действительные числа ξ выбираются так, чтобы все особые точки подынтегрального выражения в обратном Лаплас-преобразовании лежали в левой полуплоскости комплексной плоскости. Оригинал для функции (27*a*) можно также определить, пользуясь соответствующими таблицами интегральных преобразований. Воспользовавшись таблицами данных преобразований, можно получить [19]

$$C(x,t)=C_0,\ C(x>0,t)=C_0\left\{1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+0{,}5}exp\left[\frac{\pi^2(n+0{,}5)^2Dt}{L^2}\right]sin\left[\frac{\pi(n+0{,}5)x}{L}\right]\right\}.$$

3.3. ***Конвективная диффузия***

В данном разделе рассмотрим диффузию вещества в потоке газа или жидкости. Например, такая ситуация может возникать при выращивании гетероструктур. На её примере и рассмотрим конвективную диффузию, но она может протекать и в других ситуациях. Одновременно рассмотрим ещё один метод решения краевых задач. Рассмотрим конвективную диффузию одного газа в движущемся со скоростью $\vec{v}$ другом газе внутри цилиндра с внутренним радиусом *R*. Внутри цилиндра имеется вращающийся с частотой ω диск, перпендикулярный движению газов. Радиус диска почти совпадает с радиусом цилиндра. При решении такой задачи необходимо учитывать течение смеси газов и ее концентрацию, описываемые уравнением Навье-Стокса и уравнением диффузии с конвективным членом. При этом будем считать, что радиус диска *R* существенно превышает толщину диффузионного и пограничного слоев, а течение газа будем считать ламинарным. В таком случае данные уравнения представимы в следующей форме

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v}=-\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right)+\nu\,\Delta\vec{v}\,, \tag{29}$$

$$\frac{\partial C\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial t}=div\left\{D\cdot grad\left[C\left(r,\varphi,z,t\right)\right]-\vec{v}\left(r,\varphi,z,t\right)\cdot C\left(r,\varphi,z,t\right)\right\}, \tag{30}$$

где D - коэффициент диффузии смеси газов (газов-реагентов и газа-носителя); P - давление газа в реакторе; ν - кинематическая вязкость. Параметры уравнений (29) и (30) зависят от температуры, а она может изменяться в пространстве и со временем. По этой причине уравнения (29) и (30) дополним уравнением теплопроводности

$$c\frac{\partial T\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial t}=div\left\{\lambda\cdot grad\left[T\left(r,\varphi,z,t\right)\right]-\vec{v}\left(r,\varphi,z,t\right)\cdot c\left(T\right)\cdot T\left(r,\varphi,z,t\right)\cdot C\left(r,\varphi,z,t\right)\right\}+$$

$$+\,p\left(r,\varphi,z,t\right), \tag{31}$$

Рассматривая режим предельного потока, когда все приближающиеся к диску молекулы осаждаемого вещества оседают на подложке, однородности и одномерности потока на входе в зону реакции, граничные и начальное условия представимы в виде

$$C(r,\varphi,-L,t)=C_0,\ C(r,\varphi,0,t)=0,\ C(r,0,z,t)=C(r,2\pi,z,t),\ C(r,\varphi,z,0)=C_0\delta(z+L),$$

$$C(0,\varphi,z,t)\neq\infty,\ \left.\frac{\partial C\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial r}\right|_{r=R}=0,\ \left.\frac{\partial C\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.\frac{\partial C\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi},\ T(r,0,z,t)=$$

$$=T(r,2\pi,z,t),\ -\lambda\left.\frac{\partial T\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial r}\right|_{r=R}=\sigma T^4\left(R,\varphi,z,t\right),\ T(r,\varphi,z,0)=T_r,\ -\lambda\left.\frac{\partial T\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial z}\right|_{z=-L}=$$

$$=\sigma T^4\left(r,\varphi,-L,t\right),\ \left.\frac{\partial T\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.\frac{\partial T\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi},\ \left.\frac{\partial v_r\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial r}\right|_{r=0}=\left.\frac{\partial v_r\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial r}\right|_{r=R},$$

$$\left.\frac{\partial v_r\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial r}\right|_{r=0}=\left.\frac{\partial v_r\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial r}\right|_{r=R},\ \left.\frac{\partial v_\varphi\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.\frac{\partial v_\varphi\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi},\ T(0,\varphi,z,t)\neq\infty,$$

$$\left.\frac{\partial v_r\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial r}\right|_{r=0}=\left.\frac{\partial v_r\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial r}\right|_{r=R},\ \left.\frac{\partial v_\varphi\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.\frac{\partial v_\varphi\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi},\ T(r,\varphi,z,0)=T_r,$$

$$-\lambda\left.\frac{\partial T\left(r,\varphi,z,t\right)}{\partial z}\right|_{z=L}=\sigma T^4\left(r,\varphi,z,t\right),\ v_r(r,\varphi,-L,t)=0,\ v_r(r,\varphi,0,t)=0,\ v_z(r,\varphi,-L,0)=V_0, \tag{32}$$

$$v_r(r,0,z,t)=v_r(r,2\pi,z,t),\ v_r(0,\varphi,z,t)\neq\infty,\ v_\varphi(r,\varphi,0,t)=\omega r,\ v_\varphi(r,\varphi,-L,t)=0,\ v_\varphi(r,\varphi,L,t)=0,$$

$$v_\varphi(r,0,z,t)=v_\varphi(r,2\pi,z,t),\ v_\varphi(0,\varphi,z,t)\neq\infty,\ v_z(r,\varphi,-L,t)=V_0,\ v_z(r,\varphi,0,t)=0,\ v_z(r,\varphi,L,t)=0,$$

$$v_z(r,0,z,t)=v_z(r,2\pi,z,t),\ v_z(0,\varphi,z,t)\neq\infty,\ v_r(r,\varphi,z,0)=0,\ v_\varphi(r,\varphi,z,0)=0,$$

где σ =5,67·10^{-8} $Вт{\cdot}м^{-2}{\cdot}К^{-4}$, T_r - комнатная температура, ω - частота вращения диска. В цилиндрической системе координат уравнения для проекций скорости имеют следующий вид

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}=\nu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial v_r(r,\varphi,z,t)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r(r,\varphi,z,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_r(r,\varphi,z,t)}{\partial z^2}\right\}-$$

$$-v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}-v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho}\right)\ (32a)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}=\nu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial v_\varphi(r,\varphi,z,t)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi(r,\varphi,z,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_\varphi(r,\varphi,z,t)}{\partial z^2}\right\}-$$

$$-v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}-v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{P}{\rho}\right)\ (32b)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}=\nu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial v_z(r,\varphi,z,t)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z(r,\varphi,z,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_z(r,\varphi,z,t)}{\partial z^2}\right\}-$$

$$-v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}-v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P}{\rho}\right).\ (32c)$$

Найдем решение данной системы уравнений с помощью метода осреднения функциональных поправок [20-22]. В рамках данного метода для определения первого приближения проекций скорости потока газовой смеси заменим их на пока неизвестные средние значения $v_r\to\alpha_{1r}$, $v_\varphi\to\alpha_{1\varphi}$, $v_z\to\alpha_{1z}$ в правой части уравнений системы (32). После такой подстановки получаем уравнения для первых приближений искомых компонент в следующей форме

$$\frac{\partial v_{1r}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho}\right),\ \frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial t}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{P}{\rho}\right),\ \frac{\partial v_{1z}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P}{\rho}\right).\qquad(33)$$

Решения данных уравнений имеет следующий вид

$$v_{1r}=-\frac{\partial}{\partial r}\int_0^t\frac{P}{\rho}d\tau,\ v_{1\varphi}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^t\frac{P}{\rho}d\tau,\ v_{1z}=-\frac{\partial}{\partial z}\int_0^t\frac{P}{\rho}d\tau.\qquad(34)$$

Второе приближение проекций скорости может быть получено заменой искомых проекций в правой части уравнений системы (32) на суммы $v_r\to\alpha_{2r}+v_{1r}$, $v_\varphi\to\alpha_{2\varphi}+v_{1\varphi}$, $v_z\to\alpha_{2z}+v_{1z}$. Уравнения для данных проекций имеют вид

$$\frac{\partial v_{2r}}{\partial t}=\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial z^2}\right]-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho}\right)-$$

$$-\left(\alpha_{2r}+\upsilon_{1r}\right)\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}-\frac{\left(\alpha_{2\varphi}+v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1r}}{\partial \varphi}-\left(\alpha_{2z}+v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1r}}{\partial z}\,, \quad (35a)$$

$$\frac{\partial v_{2\varphi}}{\partial t}=\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial z^2}\right]-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{P}{\rho}\right)-$$

$$-\left(\alpha_{2r}+v_{1r}\right)\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r}-\frac{\left(\alpha_{2\varphi}+v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial \varphi}-\left(\alpha_{2z}+v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial z}\,, \quad (35б)$$

$$\frac{\partial v_{2z}}{\partial t}=\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial z^2}\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P}{\rho}\right)-$$

$$-\left(\alpha_{2r}+v_{1r}\right)\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}-\frac{\left(\alpha_{2\varphi}+v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1z}}{\partial \varphi}-\left(\alpha_{2z}+v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1z}}{\partial z}\,. \quad (35в)$$

Интегрирование данных уравнений приводит к следующему результату

$$v_{2r}=\nu\int_0^t\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial z^2}\right]d\tau-\frac{\partial}{\partial r}\left(\int_0^t\frac{P}{\rho}d\tau\right)-$$

$$-\int_0^t\left(\alpha_{2r}+v_{1r}\right)\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}d\tau-\int_0^t\frac{\left(\alpha_{2\varphi}+v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1r}}{\partial \varphi}d\tau-\int_0^t\left(\alpha_{2z}+v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1r}}{\partial z}d\tau\,, \quad (35г)$$

$$v_{2\varphi}=\nu\int_0^t\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial z^2}\right]d\tau-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\int_0^t\frac{P}{\rho}d\tau\right)-$$

$$-\int_0^t\left(\alpha_{2r}+v_{1r}\right)\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r}d\tau-\int_0^t\frac{\left(\alpha_{2\varphi}+v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial \varphi}d\tau-\int_0^t\left(\alpha_{2z}+v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial z}d\tau\,, \quad (35д)$$

$$v_{2z}=V_0+\nu\int_0^t\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial z^2}\right]d\tau-\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^t\frac{P}{\rho}d\tau\right)-$$

$$-\int_0^t\left(\alpha_{2r}+v_{1r}\right)\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}d\tau-\int_0^t\frac{\left(\alpha_{2\varphi}+v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1z}}{\partial \varphi}d\tau-\int_0^t\left(\alpha_{2z}+v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1z}}{\partial z}d\tau\,. \quad (35е)$$

Средние значения α_{2r}, $\alpha_{2\varphi}$, α_{2z} определим с помощью стандартного соотношения

$$\alpha_{2r}=\frac{1}{\pi\Theta R^2 L}\int_0^{\Theta}\int_0^{R} r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left(v_{2r}-v_{1r}\right)dz\,d\varphi\,dr\,dt\,,$$

$$\alpha_{2\varphi}=\frac{1}{\pi\Theta R^2 L}\int_0^{\Theta}\int_0^{R} r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left(v_{2\varphi}-v_{1\varphi}\right)dz\,d\varphi\,dr\,dt\,,$$

$$\alpha_{2z}=\frac{1}{\pi\Theta R^2 L}\int_0^{\Theta}\int_0^{R} r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left(v_{2z}-v_{1z}\right)dz\,d\varphi\,dr\,dt\,, \quad (36)$$

где Θ - длительность протекания смеси газов. Подстановка первых двух приближений проекций скорости в соотношения (36) позволяет получить систему уравнений для искомых средних значений

$$\begin{cases} A_1\alpha_{2r} + B_1\alpha_{2\varphi} + C_1\alpha_{2z} = D_1 \\ A_2\alpha_{2r} + B_2\alpha_{2\varphi} + C_2\alpha_{2z} = D_2 \\ A_3\alpha_{2r} + B_3\alpha_{2\varphi} + C_3\alpha_{2z} = D_3 \end{cases} \tag{37}$$

где $A_1 = 1 + \int\limits_0^\Theta(\Theta - t)\int\limits_0^R r\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt$, $B_1 = \int\limits_0^\Theta(\Theta - t)\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1r}}{\partial \varphi}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt$, $C_1 = = C_2 = \frac{\pi}{2}\Theta^2R^2V_0$, $D_1 = \nu\int\limits_0^\Theta(\Theta - t)\int\limits_0^R r\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-L}^{L}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial z^2}\right]dz\,d\varphi\,dr\,dt - -\frac{\pi}{8}\Theta^2R^2V_0^2 - \int\limits_0^\Theta(\Theta - t)\int\limits_0^R r\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-L}^{L}v_{1r}\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt - \int\limits_0^\Theta(\Theta - t)\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-L}^{L}v_{1\varphi}\frac{\partial v_{1r}}{\partial \varphi}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt$, $A_2 = \int\limits_0^\Theta(\Theta - t)\int\limits_0^R r\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt$, $B_2 = 1 + \int\limits_0^\Theta(\Theta - t)\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1r}}{\partial \varphi}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt$, $D_2 = \nu \times \times\int\limits_0^\Theta(\Theta - t)\int\limits_0^R r\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-L}^{L}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \upsilon_{1\varphi}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \upsilon_{1\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_{1\varphi}}{\partial z^2}\right]dz\,d\varphi\,dr\,dt - \int\limits_0^\Theta\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-L}^{L}v_{1r}\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\,dz\,d\varphi \times \times r\,dr(\Theta - t)dt - \int\limits_0^\Theta(\Theta - t)\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-L}^{L}v_{1\varphi}\frac{\partial v_{1r}}{\partial \varphi}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt - \frac{\pi}{8}\Theta^2R^2V_0^2$, $A_3 = \int\limits_0^\Theta(\Theta - t)\int\limits_0^R r \times \times\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt$, $B_3 = \int\limits_0^\Theta(\Theta - t)\int\limits_0^R r\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1z}}{\partial \varphi}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt$, $C_3 = 1 + \frac{\pi}{2}\Theta^2R^2V_0$, $D_3 = \nu \times \times\int\limits_0^\Theta(\Theta - t)\int\limits_0^R r\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-L}^{L}\left(\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial \varphi^2}\right)dz\,d\varphi\,dr\,dt - \int\limits_0^\Theta\int\limits_0^R r\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-L}^{L}v_{1r}\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}\,dz\,d\varphi\,dr \times \times(\Theta - t)\,dt - \int\limits_0^\Theta(\Theta - t)\int\limits_0^R r\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-L}^{L}v_{1\varphi}\frac{\partial v_{1z}}{\partial \varphi}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt - \frac{\pi}{8}\Theta^2R^2V_0^2$.

Решение данной системы определяются стандартными методами [17] и представимо в следующей форме

$$\alpha_{2r}=\Delta_r/\Delta,\ \alpha_{2\varphi}=\Delta_\varphi/\Delta,\ \alpha_{2z}=\Delta_z/\Delta, \tag{38}$$

где $\Delta=A_1(B_2C_3-B_3C_2)-B_1(A_2C_3-A_3C_2)+C_1(A_2B_3-A_3B_2)$, $\Delta_r=D_1(B_2C_3-B_3C_2)-B_1(D_2C_3-D_3C_2)+C_1(D_2B_3-D_3B_2)$, $\Delta_\varphi=A_1(D_2C_3-D_3C_2)-D_1(A_2C_3-A_3C_2)+C_1(A_2D_3-A_3D_2)$, $\Delta_z=A_1(B_2D_3-B_3D_2)-B_1(A_2D_3-A_3D_2)+D_1(A_2B_3-A_3B_2)$.

В данном разделе получены проекции скорости потока смеси находящихся в газовой фазе веществ во втором приближении по методу осреднения функциональных поправок. Обычно второго приближения достаточно для проведения качественного анализа полученного решения и проведения некоторых количественных оценок. Запишем уравнения (30) и (31) в цилиндрической системе координат

$$c\frac{\partial T(r,\varphi,z,t)}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 T(r,\varphi,z,t)}{\partial r^2}+\lambda\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T(r,\varphi,z,t)}{\partial \varphi^2}+\lambda\frac{\partial^2 T(r,\varphi,z,t)}{\partial z^2}-$$

$$-c\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[v_r(r,\varphi,z,t)\cdot C(r,\varphi,z,t)\cdot T(r,\varphi,z,t)\right]-\frac{c}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[v_\varphi(r,\varphi,z,t)\cdot C(r,\varphi,z,t)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot T(r,\varphi,z,t)\right]-c\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[v_z(r,\varphi,z,t)\cdot C(r,\varphi,z,t)\cdot T(r,\varphi,z,t)\right]+p(r,\varphi,z,t), \quad (39)$$

$$\frac{\partial C(r,\varphi,z,t)}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r D\frac{\partial C(r,\varphi,z,t)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[D\frac{\partial C(r,\varphi,z,t)}{\partial \varphi}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[D\frac{\partial C(r,\varphi,z,t)}{\partial z}\right]-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r C(r,\varphi,z,t)\, v_r(r,\varphi,z,t)\right]-$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[C(r,\varphi,z,t)\, v_\varphi(r,\varphi,z,t)\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[C(r,\varphi,z,t)\, v_z(r,\varphi,z,t)\right]. \quad (40)$$

Для определения пространственно-временного распределения температуры и концентрации газовой смеси воспользуемся методом осреднения функциональных поправок. Для определения первых приближений искомых функций заменим их на пока неизвестные средние значения α_{1T} и α_{1C} в правых частях данных уравнений. Используя рассмотренный выше алгоритм получим соотношения для первых приближений температуры и концентрации смеси газов в следующей форме

$$T_1(r,\varphi,z,t)=T_r+\int_0^t\frac{p(r,\varphi,z,\tau)}{c}d\tau-\alpha_{1T}\alpha_{1C}\int_0^t\frac{\partial v_r(r,\varphi,z,\tau)}{\partial r}d\tau-$$

$$-\frac{\alpha_{1T}\alpha_{1C}}{r}\int_0^t\frac{\partial v_\varphi(r,\varphi,z,\tau)}{\partial \varphi}d\tau-\alpha_{1T}\alpha_{1C}\int_0^t\frac{\partial v_z(r,\varphi,z,\tau)}{\partial z}d\tau, \quad (41)$$

$$C_1(r,\varphi,z,t)=-\frac{\alpha_{1C}}{r}\int_0^t\frac{\partial\left[r v_r(r,\varphi,z,\tau)\right]}{\partial r}d\tau-$$

$$-\frac{\alpha_{1C}}{r}\int_0^t\frac{\partial v_\varphi(r,\varphi,z,\tau)}{\partial \varphi}d\tau-\alpha_{1C}\int_0^t\frac{\partial v_z(r,\varphi,z,\tau)}{\partial z}d\tau+C_0. \quad (42)$$

Определим неизвестные средние значения первых приближений искомых функций с помощью следующих соотношений

$$\alpha_{1T}=\frac{1}{\pi\Theta R^2 L}\int_0^\Theta\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L} T_1(r,\varphi,z,\tau)\, dz\, d\varphi\, dr\, dt,$$

$$\alpha_{1C}=\frac{1}{\pi\Theta R^2 L}\int_0^\Theta\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L} C_1(r,\varphi,z,\tau)\, dz\, d\varphi\, dr\, dt. \quad (43)$$

Подстановка первых приближений концентрации и температуры в соотношения (43) позволяет получить следующий результат

$$\alpha_{1C} = C_0 \Big/ L \cdot \left[1 + \frac{1}{\pi \Theta R L} \int_0^{\Theta} (\Theta - t) \int_0^{2\pi} \int_{-L}^{L} v_r(R, \varphi, z, t)\, dz\, d\varphi\, dt + \frac{\Theta V_0}{R L} \right],$$

$$\alpha_{1T} = \left[T_r + \frac{1}{\pi \Theta R^2 L} \int_0^{\Theta} (\Theta - t) \int_0^{R} r \int_0^{2\pi} \int_{-L}^{L} \frac{p(r,\varphi,z,t)}{c}\, dz\, d\varphi\, dr\, dt \right] \left\{ 1 + \frac{C_0}{\pi \Theta R L^2} \left[\int_0^{\Theta} (\Theta - t) \times \right.\right.$$

$$\left. \times \int_0^{2\pi} \int_{-L}^{L} v_r(R,\varphi,z,\tau)\, dz\, d\varphi\, dt - \frac{1}{\pi \Theta R^2} \int_0^{\Theta} (\Theta - t) \int_0^{R} \int_0^{2\pi} \int_{-L}^{L} v_r(r,\varphi,z,\tau)\, dz\, d\varphi\, dr\, dt + \frac{V_0}{2} \right] \times$$

$$\left. \times \left[1 + \frac{\Theta V_0}{R L} + \frac{1}{\pi \Theta R L} \int_0^{\Theta} (\Theta - t) \int_0^{2\pi} \int_{-L}^{L} v_r(R,\varphi,z,t)\, dz\, d\varphi\, dt \right]^{-1} \right\}.$$

Вторые приближения температуры и концентрации смеси газов определяются в рамках стандартной процедуры метода осреднения функциональных поправок [20-22], т.е. с помощью замены искомых функций в правых частях уравнений (39) и (40) на следующие суммы $T \to \alpha_{2T} + T_1$, $C \to \alpha_{2C} + C_1$. В данном случае вторые приближения искомых функций представимы в следующей форме

$$c \cdot T_2(r,\varphi,z,t) = \lambda \int_0^t \frac{\partial^2 T_1(r,\varphi,z,\tau)}{\partial r^2} d\tau + \lambda \frac{1}{r^2} \int_0^t \frac{\partial^2 T_1(r,\varphi,z,\tau)}{\partial \varphi^2} d\tau + \lambda \int_0^t \frac{\partial^2 T_1(r,\varphi,z,\tau)}{\partial z^2} d\tau +$$

$$+ \int_0^t p(r,\varphi,z,\tau)\, d\tau + T_r - c \cdot \frac{\partial}{\partial r} \int_0^t \left\{ v_r(r,\varphi,z,\tau) \cdot [\alpha_{2C} + C_1(r,\varphi,z,\tau)] \cdot [\alpha_{2T} + T_1(r,\varphi,z,\tau)] \right\} d\tau -$$

$$- \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^t \left\{ [\alpha_{2C} + C_1(r,\varphi,z,\tau)] \cdot v_\varphi(r,\varphi,z,\tau) \cdot [\alpha_{2T} + T_1(r,\varphi,z,\tau)] \right\} d\tau -$$

$$- c \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int_0^t \left\{ v_z(r,\varphi,z,\tau) \cdot [\alpha_{2C} + C_1(r,\varphi,z,\tau)] \cdot [\alpha_{2T} + T_1(r,\varphi,z,\tau)] \right\} d\tau, \quad (44)$$

$$C_2(r,\varphi,z,t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^t r D \frac{\partial C_1(r,\varphi,z,\tau)}{\partial r} d\tau + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^t D \frac{\partial C_1(r,\varphi,z,\tau)}{\partial \varphi} d\tau +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \int_0^t D \frac{\partial C_1(r,\varphi,z,\tau)}{\partial z} d\tau - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \int_0^t [\alpha_{2C} + C_1(r,\varphi,z,\tau)] \cdot v_r(r,\varphi,z,\tau)\, d\tau \right\} -$$

$$- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^t [\alpha_{2C} + C_1(r,\varphi,z,\tau)] \cdot v_\varphi(r,\varphi,z,\tau)\, d\tau -$$

$$- \frac{\partial}{\partial z} \int_0^t [\alpha_{2C} + C_1(r,\varphi,z,\tau)] \cdot v_z(r,\varphi,z,\tau)\, d\tau + C_0 \delta(z + L). \quad (45)$$

Средние значения вторых приближений температуры и концентрации смеси α_{2T} и α_{2C} определяются с помощью стандартных соотношений

$$\alpha_{2T} = \frac{1}{\pi\,\Theta\,R^2 L}\int_0^{\Theta}\int_0^{R} r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left(T_2 - T_1\right) d\,z\,d\,\varphi\,d\,r\,d\,t\,,$$

$$\alpha_{2C} = \frac{1}{\pi\Theta R^2 L}\int_0^{\Theta}\int_0^{R} r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left(C_2 - C_1\right) d\,z\,d\,\varphi\,d\,r\,d\,t\,. \qquad (46)$$

Подстановка первых двух приближений температуры и концентрации в соотношения (46) позволяет получить уравнения для искомых средних значений в следующей форме

$$\alpha_{2T} = \left(\frac{\lambda\sigma}{c\pi\Theta R L}\int_0^{\Theta}(\Theta - t)\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L} T^4(R,\varphi,z,t)\,d\,z\,d\,\varphi\,d\,t - \int_0^{\Theta}(\Theta - t)\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L} T_1(R,\varphi,z,t)\,d\,z\,d\,\varphi\,d\,t \times\right.$$

$$\times\frac{\lambda}{c\pi\Theta R^2 L} + \frac{\lambda}{c\pi\Theta R^2 L}\int_0^{\Theta}(\Theta - t)\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L} T_1(0,\varphi,z,t)\,d\,z\,d\,\varphi\,d\,t - \int_0^{\Theta}\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left\{\left[\alpha_{2C} + C_1(R,\varphi,z,t)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\,T_1(R,\varphi,z,t) - \alpha_{1T}\alpha_{1C}\right\} v_r(R,\varphi,z,t)\,d\,z\,d\,\varphi\,(\Theta - t)\,d\,t\,\frac{1}{\pi\Theta R L} - \frac{1}{\pi\Theta R^2 L}\int_0^{\Theta}(\Theta - t)\,\times$$

$$\times\int_0^{R}\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left\{T_1(r,\varphi,z,t)\left[\alpha_{2C} + C_1(r,\varphi,z,t)\right] - \alpha_{1T}\alpha_{1C}\right\}\cdot v_r(r,\varphi,z,\tau)\,d\,z\,d\,\varphi\,r\,d\,r\,d\,t - \frac{V_0}{\pi\Theta R^2 L}\times$$

$$\times\int_0^{\Theta}(\Theta - t)\int_0^{R} r\int_0^{2\pi}\left[\left(\alpha_{2C} + C_0\right)\cdot T_1(r,\varphi,L,t) - \alpha_{1T}\alpha_{1C}\right] d\,\varphi\,d\,r\,d\,t\left\{1 + \frac{1}{\pi\Theta R L}\int_0^{\Theta}(\Theta - t)\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left[\alpha_{2C} +\right.\right.$$

$$\left. + C_1(R,\varphi,z,t)\right] v_r(R,\varphi,z,t)\,d\,z\,d\,\varphi\,d\,t + 2V_0\left(\alpha_{2C} + C_0\right)\frac{\Theta}{L} - \frac{1}{\pi\Theta R^2 L}\int_0^{\Theta}(\Theta - t)\int_0^{R} r\,\times$$

$$\left.\left.\times\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L} v_r(r,\varphi,z,\tau)\cdot\left[\alpha_{2C} + C_1(r,\varphi,z,t)\right] d\,z\,d\,\varphi\,d\,r\,d\,t\right\}^{-1}\right.,$$

$$\alpha_{2C} = \frac{1}{\pi\Theta R^2 L}\int_0^{\Theta}(\Theta - t)\int_0^{R} r\int_0^{2\pi} D\left[\left.\frac{\partial C_1(r,\varphi,z,\tau)}{\partial z}\right|_{z=L} - \left.\frac{\partial C_1(r,\varphi,z,\tau)}{\partial z}\right|_{z=-L}\right] d\,\varphi\,d\,r\,d\,t -$$

$$-\frac{1}{\pi\Theta R^2 L}\int_0^{\Theta}(\Theta - t)\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left\{r\left[\alpha_{2C} - \alpha_{1C} + C_1(R,\varphi,z,\tau)\right]\cdot v_r(R,\varphi,z,\tau)\right\} d\,z\,d\,\varphi\,d\,t - \frac{V_0}{\pi\Theta R^2 L}\times$$

$$\times\int_0^{\Theta}(\Theta - t)\int_0^{R} r\int_0^{2\pi}\left(\alpha_{2C} - \alpha_{1C} + C_0\right) d\,z\,d\,\varphi\,d\,r\,d\,t\,.$$

4. *Волновые процессы*

В настоящее время имеется значительное количество физических и технических приложений, в рамках которых необходимо проводить моделирование электромагнитных или акустических волновых процессов. Уравнение, описывающее волновые процессы, представимо в следующей форме

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[E\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]. \qquad (47)$$

Оно может быть решено рассмотренными выше методами. Однако существует специфический метод, применяемый для решения волновых процессов и называемый “Метод бегущих волн”. Он и будет рассмотрен в данном разделе. Для этого рассмотрим волновое уравнение (47) с постоянным коэффициентом E в неограниченной области $-\infty \le x \le \infty$ с начальными условиями

$$u(x,0)=\chi_1(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\chi_2(t).$$

Введём новые переменные $\xi = x+\sqrt{E}\,t$ и $\eta = x-\sqrt{E}\,t$. Подставим данные переменные в (47). Тогда после однократного дифференцирования по исходным переменным x и t получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{E}\,\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi}-\sqrt{E}\,\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right]=E\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi}+\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right].$$

Повторное дифференцирование левой и правой частей данного соотношения по переменным x и t приводит уравнение (47) к следующему виду

$$E\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}-E\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta\partial \xi}-E\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\partial \eta}+E\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}=$$

$$=E\left[\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}\right].$$

Приведение подобных в данном уравнении позволяет получить уравнение (47) в новых переменных в следующем виде

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\partial \eta}=0. \qquad (47a)$$

Далее проинтегрируем уравнение (47*a*) по переменной ξ, что приводит к следующему результату

$$\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}=f(\eta).$$

Интегрируя данное соотношение по переменной η при фиксированном значении переменной ξ, получаем

$$u(\xi,\eta)=\int_0^{\eta} f(v)\,dv+f_1(\xi).$$

Введём обозначение $f_2(\eta)=\int_0^{\eta} f(v)dv$. Тогда

$$u(\xi,\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta).$$

Данная функция является общим интегралом уравнения (47*a*). Тогда и функция

$$u(x,t)=f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)+f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right) \tag{48}$$

также является интегралом соответствующего волнового уравнения в исходных переменных. Для определения функций $f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)$ и $f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)$ воспользуемся начальными условиями. Найдём производную по переменной t от решения (48)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\sqrt{E}\,\frac{d\,f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}-\sqrt{E}\,\frac{d\,f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}.$$

Далее и в решении (48), и в его производной выберем нулевое значение переменной t, т.е.

$$\begin{cases} f_2(x)+f_2(x)=\chi_1(x) \\ \sqrt{E}\,\left.\dfrac{d\,f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}\right|_{t=0}-\sqrt{E}\,\left.\dfrac{d\,f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}\right|_{t=0}=\chi_2(x). \end{cases} \tag{49}$$

Интегрирование второго уравнения системы (49) приводит к следующему результату

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{E}}\int_{x_0}^{x}\chi_2(v)\,d\,v+C,$$

где x_0 и C - постоянные величины. Из последнего уравнения, а также первого уравнения системы (49) можно получить

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\chi_1(x)+\frac{1}{2\sqrt{E}}\int_{x_0}^{x}\chi_2(v)\,d\,v+\frac{C}{2},\quad f_2(x)=\frac{1}{2}\chi_1(x)-\frac{1}{2\sqrt{E}}\int_{x_0}^{x}\chi_2(v)\,d\,v-\frac{C}{2}.$$

С учётом полученных соотношений искомая функция $u(x,t)$ принимает вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\chi_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)+\chi_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)\right]+\frac{1}{2\sqrt{E}}\left[\int_{x_0}^{x+\sqrt{E}\,t}\chi_2(v)\,d\,v-\int_{x_0}^{x-\sqrt{E}\,t}\chi_2(v)\,d\,v\right].$$

Пользуясь свойством определённых интегралов, окончательно получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\chi_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)+\chi_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)\right]+\frac{1}{2\sqrt{E}}\int_{x-\sqrt{E}\,t}^{x+\sqrt{E}\,t}\chi_2(v)\,d\,v. \tag{50}$$

Соотношение (50) называется формулой Даламбера.

5. *Процессы электропередачи*

5.1. *Процессы в длинных линиях*

В цепях с сосредоточенными параметрами переходные процессы протекают одновременно во всех направлениях цепи с одинаковой скоростью затухания. В цепях с распределенными параметрами переходной процесс, начавшийся в какой-либо точке цепи, распространяется на остальные элементы в виде волн, которые распространяются вдоль цепи с конечной скоростью v. Эта скорость близка к скорости света $c=3*10^5$ *км/с* в воздушных линиях и $v<c$ для кабельных линий. По мере распространения вдоль линии волна изменяет свою

форму, поэтому переходной процесс в разных точках линии выглядит по-разному. Таким образом, переходной процесс в цепи с распределенными параметрами протекает в функции двух переменных - пространства и время.

В высоковольтных линиях электропередачи переходные процессы возникают при различных коммутациях, а так же от грозовых явлений в атмосфере. При переходном процессе на отдельных участках линии могут возникнуть перенапряжения, нередко приводящие к пробою изоляции, или большие токи, вызывающие механические разрушения конструкций. Умение рассчитывать эти перенапряжения и сверхтоки необходимы в инженерной практике для правильного выбора и расчета отдельных частей электроустановок.

Анализ переходных процессов в линии с распределёнными параметрами проводится на основе решения ее дифференциальных уравнений, полученных ранее

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=Ri(x,t)+L\frac{\partial i(x,t)}{\partial x},\ -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}=Gu(x,t)+C\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

где $u(x,t)$ и $i(x,t)$ - напряжение и сила тока в линии, R - сопротивление линии, G - проводимость линии, L и C - индуктивность и ёмкость системы. Данные уравнения могут быть решены стандартными методами [23].

Рассмотрим данные уравнения без учёта потерь, т.е. при R=0 и G=0. В этом случае предыдущая система уравнений принимает следующий вид

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=L\frac{\partial i(x,t)}{\partial x},\ -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}=C\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Выполним решение этой системы дифференциальных уравнений, для чего каждое из уравнений продифференцируем сначала по переменной x, а потом по переменной t

$$-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=L\frac{\partial i^2(x,t)}{\partial x\partial t},\ -\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x\partial t}=C\frac{\partial u^2(x,t)}{\partial t^2};$$

$$-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=L\frac{\partial i^2(x,t)}{\partial x\partial t},\ -\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x\partial t}=C\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Совместное решение каждой пары полученных уравнений дает результат

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0,\ \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}=0.$$

Введем обозначение $v=1/\sqrt{LC}$ - скорость волны, после чего уравнения принимают вид [16]

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0,\ \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}=0.$$

Данные уравнения являются волновыми и могут быть решены рассмотренными ранее методами.

5.2. *Транспорт носителей заряда в твёрдых телах*

В данном разделе рассмотрим транспорт носителей заряда в твёрдых телах. Рассматриваемый транспорт проиллюстрируем на примере *p*-*n*-перехода. На рис. 2 приведена качественная структура *p*-*n*-перехода.

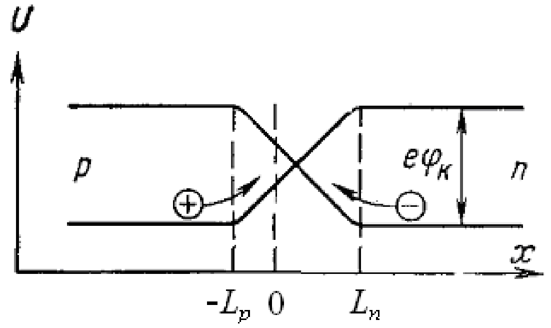

Рис. 2. Качественная структура *p*-*n*-перехода.

Пространственно-временные распределения носителей заряда в области *p*-*n*-перехода опишем с помощью следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[D_n \dfrac{\partial n(x,t)}{\partial x}\right] - \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\mu_n n(x,t) \dfrac{\partial\left[\varphi(x,t)+\varphi_h(x,t)\right]}{\partial x}\right\} + \\ \qquad + G - k_{np}\left[n(x,t)\,p(x,t) - n_0 p_0\right] \\ \dfrac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[D_p \dfrac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\mu_p p(x,t) \dfrac{\partial\left[\varphi(x,t)+\varphi_h(x,t)\right]}{\partial x}\right\} + \\ \qquad + G - k_{np}\left[n(x,t)\,p(x,t) - n_0 p_0\right] \end{cases}, \quad (51)$$

где $\rho(x,t)$ ($\rho=n, p$) – пространственно-временные (x – координата, t - время) распределения концентраций электронов (для $\rho=n$) и дырок (для $\rho=p$); ρ_0 – равновесные распределения носителей заряда; D_ρ - коэффициенты диффузии носителей заряда; μ_ρ - подвижности носителей заряда; $\varphi(x,t)$ – распределение потенциала в области пространственного заряда; $\varphi_h(x,t)$ – потенциальный барьер гетероперехода (на данном этапе будем считать, что квантовыми эффектами можно пренебречь); G – скорость генерации электронно-дырочных пар; k_{np} – параметр рекомбинации. Граничные и начальные условия для системы уравнений (51) запишем в следующем виде

$$n(L_n,t)=n_n(t),\ n(-L_p,t)=n_p(t),\ p(L_n,t)=p_n(t),\ p(-L_p,t)=p_p(t),$$
$$n(x,0)=n_0(x),\ p(x,0)=p_0(x) \quad (52)$$

Распределение потенциала в области пространственного заряда определим решением следующего уравнения Пуассона [24]

$$\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2} = e\frac{N_a(x,t)-N_d(x,t)}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (53)$$

где $N_a(x,t)$ и $N_d(x,t)$ – пространственно-временные распределения акцепторной и донорной примесей; e – элементарный заряд; ε - диэлектрическая проницаемость материалов, $\varepsilon_0 \approx 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая постоянная. Граничные условия для уравнения Пуассона представимы в виде

$$\varphi(L_n,t)=\varphi_k+U(t),\ \varphi(-L_p,t)=U(t), \tag{54}$$

где $U(t)$ – приложенная разность потенциалов. Далее будем рассматривать случай однократной ионизации, когда $N_a(x,t)=p(x,t)$ и $N_d(x,t)=n(x,t)$. Тогда

$$\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}=e\,\frac{p(x,t)-n(x,t)}{\varepsilon\,\varepsilon_0}. \tag{3a}$$

Решением данного уравнения с граничными условиями (4) является следующая функция

$$\varphi(x,t)=\varphi_k+U(t)+\frac{x-L_n}{L_p+L_n}\left\{\varphi_k+U(t)-\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\int\limits_{-L_p}^{L_n}(L_n-v)\left[p(v,t)-n(v,t)\right]dv\right\}-$$

$$-\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\int\limits_{x}^{L_n}(L_n-v)\left[p(v,t)-n(v,t)\right]dv. \tag{55}$$

Для определения пространственно-временных распределений носителей заряда приведем уравнения (51) к интегральной форме. С учетом соотношения (55) получаем интегральный аналог уравнений (51) принимает вид

$$n(x,t)=\frac{1}{L^2}\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^x(x-v)\,G\,dv\,d\tau+\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\int\limits_0^t\int\limits_x^{L_n}\mu_n(L_n-v)n(v,\tau)\left[p(v,\tau)-n(v,\tau)\right]dv\,d\tau-\right.$$

$$-\int\limits_0^x(x-v)\,n(v,t)dv-\frac{1}{L_p+L_n}\left\{\varphi_k+U(t)-\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\int\limits_{-L_p}^{L_n}(L_n-v)\left[p(v,t)-n(v,t)\right]dv\right\}\int\limits_0^t\int\limits_{L_n}^x n(v,\tau)\times$$

$$\times\mu_n\,dv\,d\tau+\int\limits_0^x(x-v)\,n_0(v)dv-\int\limits_0^t\int\limits_{L_n}^x(x-v)k_{np}\left[n(v,\tau)\,p(v,\tau)-n_0\,p_0\right]dv\,d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_{L_n}^x\mu_n n(v,\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial\varphi_h(v,\tau)}{\partial v}dv\,d\tau+\int\limits_0^t D_n\,n(x,\tau)d\tau-\int\limits_0^t D_n(L_n)n_n(\tau)d\tau+\int\limits_0^{L_n}(L_n-v)\left[n(v,t)-n_0(v)\right]dv-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_{L_n}^x n(v,\tau)\frac{\partial D_n}{\partial v}dv\,d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^{L_n}(L_n-v)G\,dv\,d\tau+\frac{x-L_n}{L_p+L_n}\left\{\frac{1}{L_p+L_n}\int\limits_0^t\int\limits_{-L_p}^{L_n}\mu_n n(v,\tau)dv\,d\tau\{\,\varphi_k+\right.$$

$$\left.+U(t)-\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\int\limits_{-L_p}^{L_n}(L_n-v)\left[p(v,t)-n(v,t)\right]dv\right\}+\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\int\limits_0^t\int\limits_{-L_p}^{L_n}(L_n-v)n(v,\tau)\left[p(v,\tau)-n(v,\tau)\right]\times$$

$$\times\mu_n dv\,d\tau-\int\limits_0^t n_n(\tau)\,D_n(L_n)\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{-L_p}^0(L_p+v)G\,dv\,d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_{-L_p}^{L_n}(L_p+v)k_{np}\left[n(v,\tau)\,p(v,\tau)-\right.$$

$$\left.-n_0p_0\right]dv\,d\tau+\int\limits_0^t D_n(-L_p)\,n_p(\tau)d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_{-L_p}^{L_n}(L_p+v)k_{np}\left[n(v,\tau)\,p(v,\tau)-n_0p_0\right]dv\,d\tau-$$

$$-\int\limits_{-L_p}^0(L_p+v)\left[n(v,t)-n_0(v)\right]dv-\int\limits_0^t\int\limits_0^{L_n}(L_n-v)\,G\,dv\,d\tau+\int\limits_0^{L_n}(L_n-v)\left[n(v,t)-n_0(v)\right]dv+$$

$$+\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}\mu_n n(v,\tau)\frac{\partial\varphi_h(v,\tau)}{\partial v}\,dv\,d\tau+\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}n(v,\tau)\frac{\partial D_n}{\partial v}\,dv\,d\tau\Bigg\}+n(x,t),\qquad(51a)$$

$$p(x,t)=\frac{1}{L^2}\Bigg(\int_0^t\int_0^x(x-v)\,G\,dv\,d\tau+\frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_0^t\int_x^{L_n}\mu_p(L_n-v)\,p(v,\tau)[p(v,\tau)-n(v,\tau)]\,dv\,d\tau-$$

$$-\int_0^x(x-v)\,p(v,t)\,dv-\frac{1}{L_p+L_n}\Bigg\{\varphi_k+U(t)-\frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_{-L_p}^{L_n}(L_p-v)[p(v,t)-n(v,t)]\,dv\Bigg\}\int_0^t\int_{L_n}^x p(v,\tau)\times$$

$$\times\mu_p\,dv\,d\tau+\int_0^x(x-v)\,p_0(v)\,dv-\int_0^t\int_{L_n}^x(x-v)k_{np}[n(v,\tau)\,p(v,\tau)-n_0p_0]\,dv\,d\tau-\int_0^t\int_{L_n}^x\mu_p\,p(v,\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial\varphi_h(v,\tau)}{\partial v}\,dv\,d\tau+\int_0^t D_p\,p(x,\tau)\,d\tau-\int_0^t D_p(L_p)\,p_p(\tau)\,d\tau+\int_0^{L_p}(L_p-v)[p(v,t)-p_0(v)]\,dv-$$

$$-\int_0^t\int_{L_n}^x p(v,\tau)\frac{\partial D_p}{\partial v}\,dv\,d\tau-\int_0^t\int_0^{L_n}(L_p-v)G\,dv\,d\tau+\frac{x-L_p}{L_p+L_n}\Bigg\{\frac{1}{L_p+L_n}\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}\mu_p\,p(v,\tau)\,dv\,d\tau\{\,\varphi_k+$$

$$+U(t)-\frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_{-L_p}^{L_n}(L_n-v)[p(v,t)-n(v,t)]\,dv\Bigg\}+\frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}(L_p-v)\,p(v,\tau)[p(v,\tau)-n(v,\tau)]\times$$

$$\times\mu_p\,dv\,d\tau-\int_0^t p_p(\tau)\,D_p(L_p)\,d\tau+\int_0^t\int_{-L_n}^0(L_n+v)G\,dv\,d\tau-\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}(L_n+v)k_{np}[n(v,\tau)\,p(v,\tau)-$$

$$-n_0p_0]\,dv\,d\tau+\int_0^t D_p(-L_n)\,p_n(\tau)\,d\tau-\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}(L_n+v)k_{np}[n(v,\tau)\,p(v,\tau)-n_0p_0]\,dv\,d\tau-$$

$$-\int_{-L_n}^0(L_n+v)\,[p(v,t)-p_0(v)]\,dv-\int_0^t\int_0^{L_n}(L_p-v)\,G\,dv\,d\tau+\int_0^{L_p}(L_p-v)\,[p(v,t)-p_0(v)]\,dv+$$

$$+\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}\mu_p\,p(v,\tau)\frac{\partial\varphi_h(v,\tau)}{\partial v}\,dv\,d\tau+\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}p(v,\tau)\frac{\partial D_p}{\partial v}\,dv\,d\tau\Bigg\}+p\,(x,t).$$

Систему уравнений (51*a*) решим методом осреднения функциональных поправок. В рамках данного метода заменяем концентрации носителей заряда $n(x,t)$ и $p(x,t)$ на их пока неизвестные средние значения α_{n1} и α_{p1}, что позволяет получить первые приближения искомых концентраций в следующей форме

$$n_1(x,t)=\frac{1}{L^2}\Bigg(\int_0^t\int_0^x(x-v)\,G\,dv\,d\tau+(\alpha_{p1}-\alpha_{n1})\frac{e\alpha_{n1}}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_0^t\int_x^{L_n}\mu_n(L_n-v)\,dv\,d\tau-\alpha_{n1}\int_0^t\int_{L_n}^x\mu_n\,dv\,d\tau\times$$

$$\times\left[\frac{\varphi_k+U(t)}{L_p+L_n}-e\,(\alpha_{p1}-\alpha_{n1})\frac{L_n+L_p}{2\varepsilon\varepsilon_0}\right]-\alpha_{n1}\int_0^t\int_{L_n}^x\mu_n\frac{\partial\varphi_h(v,\tau)}{\partial v}\,dv\,d\tau-\int_0^t\int_{L_n}^x(\alpha_{n1}\alpha_{p1}-n_0p_0)\times$$

$$\times k_{np}(x-v)\,dv\,d\tau+\int_0^t D_n\,n(x,\tau)\,d\tau-\int_0^t D_n(L_n)\,n_n(\tau)\,d\tau-\int_0^t\int_0^{L_n}(L_n-v)G\,dv\,d\tau+\int_0^t D_n(L_n)\,d\tau\times$$

$$\times\alpha_{n1}+\int_0^{L_n}(L_n-v)\left[\alpha_{n1}-n_0(v)\right]dv-\alpha_{n1}\int_0^t D_n d\tau+\int_0^x (x-v)n_0(v)\,dv-\alpha_{n1}\frac{x^2}{2}+\frac{x-L_n}{L_p+L_n}\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{\varphi_k}{L_p+L_n}-(\alpha_{p1}-\alpha_{n1})(L_n+L_p)\frac{e\alpha_{n1}}{2\varepsilon\varepsilon_0}\right]\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}\mu_n dv\,d\tau+\frac{e\alpha_{n1}}{\varepsilon\varepsilon_0}(\alpha_{p1}-\alpha_{n1})\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}(L_n-v)\mu_n dv\,d\tau+\right.$$

$$+\alpha_{n1}\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}\mu_n\frac{\partial\varphi_h(v,\tau)}{\partial v}dv\,d\tau-\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}(\alpha_{n1}\alpha_{p1}-n_0p_0)k_{np}(L_p+v)dv\,d\tau-\int_0^t D_n(L_n)n_n(\tau)d\tau-$$

$$-\int_{-L_p}^0(L_p+v)\left[\alpha_{n1}-n_0(v)\right]dv+\int_0^t D_n(-L_p)n_p(\tau)d\tau+\alpha_{n1}\int_0^t D_n(L_n)d\tau+\int_0^t\int_{-L_p}^0(L_p+v)\,G\,dv\,d\tau-$$

$$\left.\times G\,dv\,d\tau-\alpha_{n1}\int_0^t D_n(-L_p)\,d\tau+\int_0^{L_n}(L_n-v)\left[\alpha_{n1}-n_0(v)\right]dv-\int_0^t\int_0^{L_n}(L_n-v)\,G\,dv\,d\tau\right\}\Bigg)+\alpha_{n1},\ (56)$$

$$p_1(x,t)=\frac{1}{L^2}\Bigg(\int_0^t\int_0^x(x-v)\,G\,dv\,d\tau+(\alpha_{p1}-\alpha_{n1})\frac{e\alpha_{p1}}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_0^t\int_x^{L_n}\mu_p(L_p-v)\,dv\,d\tau-\alpha_{p1}\int_0^t\int_{L_n}^x\mu_p dv\,d\tau\times$$

$$\times\left[\frac{\varphi_k+U(t)}{L_p+L_n}-e\,(\alpha_{p1}-\alpha_{n1})\frac{L_n+L_p}{2\varepsilon\varepsilon_0}\right]-\alpha_{p1}\int_0^t\int_{L_n}^x\mu_p\frac{\partial\varphi_h(v,\tau)}{\partial v}dv\,d\tau-\int_0^t\int_{L_n}^x(\alpha_{n1}\alpha_{p1}-n_0p_0)\times$$

$$\times k_{np}(x-v)\,dv\,d\tau+\int_0^t D_p\,p(x,\tau)d\tau-\int_0^t D_p(L_p)\,p_p(\tau)\,d\tau-\int_0^t\int_0^{L_n}(L_p-v)G\,dv\,d\tau+\int_0^t D_p(L_p)d\tau\times$$

$$\times\alpha_{p1}+\int_{-L_p}^0(L_p-v)\left[\alpha_{p1}-p_0(v)\right]dv-\alpha_{p1}\int_0^t D_{pn}d\tau+\int_0^x(x-v)\,p_0(v)\,dv-\alpha_{p1}\frac{x^2}{2}+\frac{x+L_p}{L_p+L_n}\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{\varphi_k}{L_p+L_n}-(\alpha_{p1}-\alpha_{n1})(L_n+L_p)\frac{e\alpha_{p1}}{2\varepsilon\varepsilon_0}\right]\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}\mu_p dv\,d\tau+\frac{e\alpha_{p1}}{\varepsilon\varepsilon_0}(\alpha_{p1}-\alpha_{n1})\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}(L_p-v)\mu_p dv\,d\tau+\right.$$

$$+\alpha_{p1}\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}\mu_p\frac{\partial\varphi_h(v,\tau)}{\partial v}dv\,d\tau-\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}(\alpha_{n1}\alpha_{p1}-n_0p_0)k_{np}(L_p+v)dv\,d\tau-\int_0^t D_p(L_p)\,p_p(\tau)d\tau-$$

$$-\int_{-L_p}^0(L_n+v)\left[\alpha_{p1}-p_0(v)\right]dv+\int_0^t D_p(-L_n)\,p_n(\tau)d\tau+\alpha_{p1}\int_0^t D_p(L_p)d\tau+\int_0^t\int_{-L_n}^0(L_n+v)\,G\,dv\,d\tau-$$

$$\left.\times G\,dv\,d\tau-\alpha_{p1}\int_0^t D_p(-L_n)\,d\tau+\int_0^{L_p}(L_p-v)\left[\alpha_{p1}-p_0(v)\right]dv-\int_0^t\int_0^{L_p}(L_p-v)\,G\,dv\,d\tau\right\}\Bigg)+\alpha_{p1}.$$

Интегрируя соотношения (56) по области *p*-*n*-перехода и длительности наблюдения за динамикой изменения концентраций носителей заряда получаем систему уравнений для нахождения средних значений α_{n1} и α_{p1}. Данная система из-за громоздкости приведена в Приложении. Вторые приближения концентраций носителей заряда определяются в рамках стандартной итерационной процедуры, в рамках которой проводятся следующие замены $n\,(x,t)\to\alpha_{n2}+n_1\,(x,t)$ и $p\,(x,t)\to\alpha_{p2}+p_1(x,t)$. После проведения такой замены в уравнениях (51*a*) получаем соотношения для вторых приближений концентрации носителей заряда в следующей форме

$$n_2(x,t)=\frac{1}{L^2}\left[\int_0^t\int_0^x(x-v)\,G\,d\,v\,d\,\tau+\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\int_0^t\int_x^{L_n}\mu_n\,(L_n-v)\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)-\alpha_{n2}-n_1(v,\tau)\right]\times\right.$$

$$\times\left[\alpha_{n2}+n_1(v,\tau)\right]d\,v\,d\,\tau-\int_0^x(x-v)\left[\alpha_{n2}+n_1(v,t)\right]d\,v-\int_0^t\int_{L_n}^x\mu_n\left[\alpha_{n2}+n_1(v,\tau)\right]d\,v\,d\,\tau\{\varphi_k+$$

$$\left.+U(t)-\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\int_{-L_p}^{L_n}(L_n-v)\left[\alpha_{p2}+p_1(v,t)-\alpha_{n2}-n_1(v,t)\right]d\,v\right\}\frac{1}{L_p+L_n}+\int_0^t\int_{L_n}^x(x-v)\{\,n_0\,p_0-$$

$$-\left[\alpha_{n2}+n_1(v,\tau)\right]\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)\right]\}k_{np}\,d\,v\,d\,\tau+\int_0^x(x-v)n_0(v)\,d\,v-\int_0^t\int_{L_n}^x\left[\alpha_{n2}+n_1(v,\tau)\right]\frac{\partial\varphi_h(v,\tau)}{\partial v}\times$$

$$\times\mu_n d\,v\,d\,\tau+\int_0^t D_n\left[\alpha_{n2}+n_1(x,\tau)\right]d\,\tau+\int_0^{L_n}(L_n-v)\left[\alpha_{n2}+n_1(v,t)-n_0(v)\right]d\,v-\int_0^t\int_{L_n}^x\left[\alpha_{n2}+n_1(v,\tau)\right]\times$$

$$\times\frac{\partial D_n}{\partial v}d\,v\,d\,\tau-\int_0^t D_n(L_n)n_n(\tau)\,d\,\tau-\int_0^t\int_0^{L_n}(L_n-v)\,G\,d\,v\,d\,\tau-\int_0^t\int_0^{L_n}(L_n-v)G\,d\,v\,d\,\tau+\frac{x-L_n}{L_p+L_n}\times$$

$$\times\left(\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}\mu_n\left[\alpha_{n2}+n_1(v,\tau)\right]\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)-\alpha_{n2}-n_1(v,\tau)\right](L_n-v)\,d\,v\,d\,\tau+\int_0^t\int_{-L_p}^0(L_p+v)\times\right.$$

$$\times G\,d\,v\,d\,\tau+\frac{1}{L_p+L_n}\left\{\varphi_k+U(t)-\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\int_{-L_p}^{L_n}(L_n-v)\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)-\alpha_{n2}-n_1(v,\tau)\right]d\,v\right\}\times$$

$$\times\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}\mu_n\left[\alpha_{n2}+n_1(v,\tau)\right]d\,v\,d\,\tau-\int_0^t D_n(L_n)n_n(\tau)\,d\,\tau-\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}\{\left[\alpha_{n2}+n_1(v,\tau)\right]\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)\right]-$$

$$-n_0\,p_0\}k_{np}\,(L_p+v)\,d\,v\,d\,\tau-\int_{-L_p}^0(L_p+v)\left[\alpha_{n2}+n_1(v,t)-n_0(v)\right]d\,v+\int_0^t D_n(-L_p)\,n_p(\tau)\,d\,\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^{L_n}(L_n-v)\,G\,d\,v\,d\,\tau+\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}\mu_n\left[\alpha_{n2}+n_1(v,\tau)\right]\frac{\partial\varphi_h(v,\tau)}{\partial v}d\,v\,d\,\tau+\int_0^{L_n}\left[\alpha_{n2}+n_1(v,t)-n_0(v)\right]\times$$

$$\left.\left.\times(L_n-v)\,d\,v+\int_0^t\int_{-L_p}^{L_n}\frac{\partial D_n}{\partial v}\left[\alpha_{n2}+n_1(v,\tau)\right]d\,v\,d\,\tau\right)\right]+\alpha_{n2}+n_1(x,t),$$

$$p_2(x,t)=\frac{1}{L^2}\left[\int_0^t\int_0^x(x-v)\,G\,d\,v\,d\,\tau+\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\int_0^t\int_x^{L_n}\mu_p\,(L_p-v)\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)-\alpha_{n2}-n_1(v,\tau)\right]\times\right.$$

$$\times\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)\right]d\,v\,d\,\tau-\int_0^x(x-v)\left[\alpha_{p2}+p_1(v,t)\right]d\,v-\int_0^t\int_{L_n}^x\mu_p\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)\right]d\,v\,d\,\tau\{\varphi_k+$$

$$\left.+U(t)-\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\int_{-L_p}^{L_n}(L_p-v)\left[\alpha_{p2}+p_1(v,t)-\alpha_{n2}-n_1(v,t)\right]d\,v\right\}\frac{1}{L_p+L_n}+\int_0^t\int_{L_n}^x(x-v)\{\,n_0\,p_0-$$

$$-\left[\alpha_{n2}+n_1(v,\tau)\right]\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)\right]\Big\}k_{np}\,d\,v\,d\,\tau+\int\limits_0^x (x-v)\,p_0(v)\,d\,v-\int\limits_0^t\int\limits_{L_p}^x\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)\right]\frac{\partial\varphi_h(v,\tau)}{\partial v}\times$$

$$\times\mu_p d\,v\,d\,\tau+\int\limits_0^t D_p\left[\alpha_{p2}+p_1(x,\tau)\right]d\,\tau+\int\limits_{-L_p}^0 (L_p-v)\left[\alpha_{p2}+p_1(v,t)-p_0(v)\right]d\,v-\int\limits_0^t\int\limits_{L_p}^x\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)\right]\times$$

$$\times\frac{\partial D_p}{\partial v}d\,v\,d\,\tau-\int\limits_0^t D_p(L_p)\,p_p(\tau)\,d\,\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^{L_p}(L_p-v)\,G\,d\,v\,d\,\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^{L_p}(L_p-v)G\,d\,v\,d\,\tau+\frac{x-L_p}{L_p+L_n}\times$$

$$\times\left(\frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_0^t\int\limits_{-L_p}^{L_n}\mu_p\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)\right]\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)-\alpha_{n2}-n_1(v,\tau)\right](L_p-v)\,d\,v\,d\,\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^{L_n}(L_n+v)\times\right.$$

$$\times G\,d\,v\,d\,\tau+\frac{1}{L_p+L_n}\left\{\varphi_k+U(t)-\frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_{-L_p}^{L_n}(L_p-v)\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)-\alpha_{n2}-n_1(v,\tau)\right]d\,v\right\}\times$$

$$\times\int\limits_0^t\int\limits_{-L_p}^{L_n}\mu_p\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)\right]d\,v\,d\,\tau-\int\limits_0^t D_p(L_p)\,n_p(\tau)\,d\,\tau-\int\limits_0^t\int\limits_{-L_p}^{L_n}\Big\{\left[\alpha_{n2}+n_1(v,\tau)\right]\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)\right]-$$

$$-n_0 p_0\Big\}k_{np}\,(L_p+v)\,d\,v\,d\,\tau-\int\limits_0^{L_n}(L_n+v)\left[\alpha_{n2}+n_1(v,t)-n_0(v)\right]d\,v+\int\limits_0^t D_p(-L_n)\,p_n(\tau)\,d\,\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^{L_p}(L_p-v)\,G\,d\,v\,d\,\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{-L_p}^{L_n}\mu_p\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)\right]\frac{\partial\varphi_h(v,\tau)}{\partial v}d\,v\,d\,\tau+\int\limits_0^{L_n}\left[\alpha_{p2}+p_1(v,t)-p_0(v)\right]\times$$

$$\left.\left.\times(L_p-v)\,d\,v+\int\limits_0^t\int\limits_{-L_p}^{L_n}\frac{\partial D_p}{\partial v}\left[\alpha_{p2}+p_1(v,\tau)\right]d\,v\,d\,\tau\right)\right]+\alpha_{p2}+p_1(x,t).$$

Параметры α_{n2} и α_{p2} определялись в рамках стандартной процедуры метода осреднения функциональных поправок, т.е.

$$\alpha_{\rho 2}=\frac{1}{\Theta L}\int\limits_0^\Theta\int\limits_0^L\left[\rho_2(x,t)-\rho_1(x,t)\right]d\,x\,d\,t\,, \qquad (57)$$

где $\rho = n,p$; Θ - длительность наблюдения за динамикой носителей. Подстановка первых двух приближений концентраций носителей в соотношение (57) позволяет получить систему уравнений для параметров α_{n2} и α_{p2}. Данная система приведена в Приложении. Решением данных уравнений являются следующие значения параметров α_{n2} и α_{p2}

$$\alpha_{p2}=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}-\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}+\frac{q}{2}}-\frac{b_2b_8+b_1b_9}{3(b_2b_6+b_1b_7)},\ \alpha_{n2}=\frac{b_1\alpha_{n2}^2-b_4\alpha_{p2}-b_5}{b_2\alpha_{p2}+b_3},$$

где

$$q=\frac{2}{27}\left(\frac{b_2b_8+b_1b_9}{b_2b_6+b_1b_7}\right)^3-(b_2b_8+b_1b_9)\frac{(b_3b_8-b_7b_4-b_5b_7-b_4b_9+b_2b_{10})}{3(b_2b_6+b_1b_7)^2}+\frac{b_3b_{10}-b_5b_9}{b_2b_6+b_1b_7}$$

$$p=\frac{b_3b_8-b_7b_4-b_5b_7-b_4b_9+b_2b_{10}}{b_2b_6+b_1b_7}-\frac{1}{3}\left(\frac{b_2b_8+b_1b_9}{b_2b_6+b_1b_7}\right)^2,$$

Параметры b_i определяется соотношениями

$$b_1=M_{n00np11}+M_{n00np11}+\frac{1}{2}\left(L_n-L_p\right)^2M_{n00np10}+M_{n00np00}\frac{\left(L_n-L_p\right)^4}{4\left(L_p+L_n\right)^2},$$

где $M_{\rho ij\rho\rho kl}=\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\int\limits_0^{\Theta}(\Theta-t)\int\limits_{-L_p}^{L_n}\mu_\rho\left(L_p+x\right)^k\left(L_n-x\right)^l\rho_1^i(x,t)\rho_1^j(x,t)d\,x\,d\,t$;

$$b_2=M_{n00np01}\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_p+L_n\right)}-M_{n00np10}\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_n+L_p\right)}-M_{n00np00}\frac{\left(L_n-L_p\right)^4}{4\left(L_p+L_n\right)^2}-\frac{2L_pL_nN_{1000}}{\left(L_p+L_n\right)^2}+$$

$$+M_{n00np11},$$

где $N_{ijkl}=\int\limits_0^{\Theta}(\Theta-t)\int\limits_{-L_p}^{L_n}k_{np}\left(L_p+x\right)^i\left(L_n-x\right)^j n_1^k(x,t)p_1^l(x,t)d\,x\,d\,t$;

$$b_3=M_{n01np11}-M_{n10np11}-M_{n10np11}+\frac{eP_{n1p11n0}}{\varepsilon\,\varepsilon_0\left(L_p+L_n\right)}-\frac{1}{L_p+L_n}\int\limits_0^{\Theta}\left[\varphi_k+U(t)\right]\int\limits_0^{t}\int\limits_{L_n}^{x}\mu_n\,d\,v\,d\,\tau\,d\,t+$$

$$+\frac{N_{1001}}{2}+\int\limits_0^{\Theta}(\Theta-t)\left[D_n\left(L_n\right)-D_n\left(-L_p\right)\right]d\,t+\int\limits_0^{\Theta}(\Theta-t)\int\limits_{-L_p}^{L_n}\left(L_p+x\right)\mu_n\frac{\partial\varphi_h(x,t)}{\partial x}d\,x\,d\,t-$$

$$-M_{n10np10}\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_n+L_p\right)}+\left(M_{n01np01}-M_{n10np01}\right)\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_p+L_n\right)}+\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_p+L_n\right)^2}\int\limits_0^{\Theta}\left[\varphi_k+U(t)\right]\times$$

$$\times\int\limits_0^{t}\int\limits_{-L_p}^{L_n}\mu_n d\,x\,d\,\tau\,d\,t-\left(P_{n1p10}-P_{n1n10}\right)\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_p+L_n\right)^2}+M_{n10np00}\frac{\left(L_n-L_p\right)^4}{4\left(L_p+L_n\right)^2}-M_{n10np01}\times$$

$$\times\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_p+L_n\right)}-\Theta L_p^2\frac{3\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_p+L_n\right)^2}+\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_p+L_n\right)^2}\int\limits_0^{\Theta}(\Theta-t)\left[D_n\left(L_n\right)-D_n\left(-L_p\right)\right]d\,t+\Theta\frac{L_n^2}{4}-$$

$$-\frac{N_{1001}\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_p+L_n\right)^2}+\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{\left(L_p+L_n\right)^2}\int\limits_0^{\Theta}\frac{(\Theta-t)}{2}\int\limits_{-L_p}^{L_n}\mu_n\frac{\partial\varphi_h(x,t)}{\partial x}d\,x\,d\,t+\Theta\frac{L_n^2\left(L_n-L_p\right)^2}{4\left(L_p+L_n\right)^2},$$

где $P_{\rho isjk\,vl}=\int\limits_0^{\Theta}\int\limits_{-L_p}^{L_n}\left(L_n-x\right)^i s_1^j(x,t)d\,x\int\limits_0^{t}\int\limits_{-L_p}^{L_n}\mu_\rho\left(L_p+x\right)^k v_1^l(x,\tau)d\,x\,d\,\tau\,d\,t$;

$$b_4=M_{n10np01}\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_p+L_n\right)}-M_{n10np00}\frac{\left(L_n-L_p\right)^4}{2\left(L_p+L_n\right)^2}+\frac{2L_nL_pN_{1010}}{\left(L_p+L_n\right)^2}-M_{n10np10}\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_n+L_p\right)}+$$

$$+M_{n10np10};$$

$$b_5=M_{n11np11}-M_{n20np11}-\frac{1}{2}\int_0^{\Theta}\int_0^{L_n}(L_n-x)n_1(x,t)d\,x-\frac{1}{2}\int_0^{\Theta}\int_{-L_p}^{0}(L_p+x)\,n_1(x,t)d\,x+\frac{1}{2}\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\times$$

$$\times\int_0^{L_n}(L_n-x)^2G\,d\,v\,d\,t-\frac{1}{L_p+L_n}\frac{e\,P_{n1n11}}{\varepsilon\,\varepsilon_0}+\frac{eP_{n11p11n1}}{(L_p+L_n)\varepsilon\,\varepsilon_0}-\frac{1}{L_p+L_n}\int_0^{\Theta}[\varphi_k+U(t)]\int_0^{t}\int_{-L_p}^{L_n}(L_p+x)\times$$

$$\times\,\mu_n n_1(x,\tau)d\,x\,d\,\tau\,d\,t+\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_{-L_p}^{L_n}\mu_n(L_p+x)n_1(x,t)\frac{\partial\varphi_h(x,t)}{\partial x}d\,x\,d\,t-\frac{n_0\,p_0N_{1000}}{2}-$$

$$-(L_n+L_p)\int_0^{\Theta}(\Theta-t)D_n(L_n)\,n_n(\tau)d\,\tau+\frac{1}{2}\int_0^{\Theta}\int_0^{L_n}(L_n-x)^2n_0(x)d\,x\,d\,t+\frac{N_{1011}}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\Theta}\int_{-L_p}^{0}(L_p+x)^2\times$$

$$\times\,n_0(x)d\,x\,d\,t+\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_{-L_p}^{L_n}D_n\,n_1(x,t)d\,x\,d\,t+\int_0^{\Theta}\int_0^{L_n}(L_n-x)[n_1(x,t)-n_0(x)]d\,x\,d\,t+$$

$$+\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_{-L_p}^{L_n}n_1(x,t)\frac{\partial D_n}{\partial x}d\,x\,d\,t+\frac{(L_n-L_p)^2}{2(L_p+L_n)}\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_{-L_p}^{0}(L_p+v)G\,d\,v\,d\,\tau-(L_n+L_p)\times$$

$$\times\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{L_n}(L_n-x)G\,d\,x\,d\,t+M_{n11np01}-\frac{(L_n-L_p)^2}{2(L_p+L_n)}\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\,D_n(L_n)n_n(t)d\,t;$$

$$b_6=\frac{2eP_{p1n01p0}+2\varepsilon\,\varepsilon_0(L_p+L_n)M_{p00np11}-\varepsilon\,\varepsilon_0M_{p00np00}L_n^2+\varepsilon\,\varepsilon_0(L_n-L_p)^2M_{p00p01}}{2\varepsilon\,\varepsilon_0(L_p+L_n)};$$

$$b_7=(N_{1000}-M_{p00np01})\frac{(L_n-L_p)^2}{2(L_n+L_p)}-\frac{e\,P_{p1n0n1p1}}{\varepsilon\,\varepsilon_0(L_p+L_n)}-L_n^2\frac{M_{p00np00}}{2(L_p+L_n)}-N_{1100}-M_{p00np11};$$

$$b_8=M_{p01np11}-M_{p10np11}+M_{p01np11}+\Theta\frac{L_n^3}{3}-\frac{5}{6}\Theta L_p^3-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_{-L_p}^{L_n}\mu_p(L_p+x)\frac{\partial\varphi_h(x,t)}{\partial x}d\,x\,d\,t+$$

$$+L_n^2L_p\frac{\Theta}{2}+\frac{eL_n^2M_{p01np10}}{4\varepsilon\,\varepsilon_0(L_p+L_n)}-\frac{1}{L_p+L_n}\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\,[\varphi_k+U(t)]\int_0^{t}\int_{-L_p}^{L_n}(L_p+x)\mu_p\,d\,x\,d\,\tau\,d\,t-N_{1110}+$$

$$+\frac{1}{L_p+L_n}\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{t}\int_{-L_p}^{L_n}(L_n-x)[p_1(x,\tau)-n_1(x,\tau)]\,d\,x\int_{-L_p}^{L_n}(L_p+x)\mu_p\,d\,x\,d\,\tau\,d\,t+$$

$$+2\int_0^{\Theta}(\Theta-t)[D_p(L_n)-D_p(-L_p)]d\,t-\int_0^{\Theta}\int_{-L_p}^{L_n}(L_n-x)[p_1(x,t)-n_1(x,t)]\,d\,x\int_0^{t}\int_{-L_p}^{L_n}\mu_p d\,v\,d\,\tau\,d\,t\times$$

$$\times\frac{e}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\frac{1}{L_p+L_n}+\frac{1}{L_p+L_n}\int_0^{\Theta}[\varphi_k+U(t)]\int_0^{t}\int_{-L_p}^{L_n}\mu_p\,d\,x\,d\,\tau\,d\,t+\left\{\int_0^{\Theta}(\Theta-t)[D_p(L_n)-D_p(-L_p)]d\,t\times\right.$$

$$\times\frac{(L_n-L_p)^2}{2(L_n+L_p)}+\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_{-L_p}^{L_n}\mu_p\,\frac{\partial\varphi_h(x,t)}{\partial x}d\,x\,d\,t+(L_n^2\Theta-L_p^2\Theta)\frac{M_{p01np01}-M_{p10np01}}{2}+N_{1010}+$$

$$+2M_{p01np01}-2M_{p10np01}\};$$

$$b_9=\frac{2\left(L_n-L_p\right)^2N_{1001}-4\left(N_{1101}+M_{p01np11}\right)\left(L_n+L_p\right)-L_n^2M_{p01np10}-2\left(L_n-L_p\right)^2M_{p01np01}}{4\left(L_n+L_p\right)};$$

$$b_{10}=\frac{1}{2}\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{L_n}(L_n-x)^2G\,d\,x\,d\,t+\frac{1}{2}\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_{-L_p}^{0}(L_p+x)^2G\,d\,x\,d\,t-\frac{1}{2}\int_0^{\Theta}\int_0^{L_n}(L_n-x)^2p_1(x,t)d\,x\,d\,t+$$

$$+M_{p02np11}+\frac{e\left(P_{p1p11p1}-P_{p1p11n1}\right)}{\varepsilon\,\varepsilon_0\left(L_p+L_n\right)}-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\left[\varphi_k+U(t)\right]\int_0^{t}\int_{-L_p}^{L_n}(L_p+x)\mu_p\,p_1(x,\tau)d\,x\,d\,\tau\,d\,t\times$$

$$\times\frac{1}{L_p+L_n}-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_{-L_p}^{L_n}(L_p+x)\mu_p p_1(x,t)\frac{\partial\varphi_h(x,t)}{\partial x}d\,x\,d\,t+\frac{1}{2}\int_0^{\Theta}\int_{-L_p}^{0}(L_p-x)^2p_1(x,t)d\,x\,d\,t-$$

$$-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{L_n}(L_n-x)G\,d\,x\,d\,t+\left(L_p+L_n\right)\int_0^{\Theta}\int_0^{L_n}(L_n-x)p_1(x,t)d\,x\,d\,t-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)D_p(L_n)p_n(t)d\,t+$$

$$+p_0n_0N_{1100}\times-M_{p11np11}-N_{1111}+\frac{1}{L_p+L_n}\int_0^{\Theta}\left[\varphi_k+U(t)\right]\int_0^{t}\int_{-L_p}^{L_n}\mu_p p_1(v,\tau)d\,v\,d\,\tau\,d\,t+\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_n+L_p\right)}\times$$

$$\times\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_{-L_p}^{L_n}\mu_p p_1(x,t)\frac{\partial\varphi_h(x,t)}{\partial x}d\,x\,d\,t+\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_{-L_p}^{L_n}p_1(x,t)\frac{\partial D_p}{\partial x}d\,x\,d\,t+\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_n+L_p\right)}\times$$

$$\times\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_{-L_p}^{0}(L_p+x)G\,d\,x\,d\,t+\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_n+L_p\right)}\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_{-L_p}^{L_n}p_1(x,t)\frac{\partial D_p}{\partial x}d\,x\,d\,t-\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_n+L_p\right)}\times$$

$$\times\int_0^{\Theta}(\Theta-t)D_p(L_n)p_n(t)d\,t-\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_n+L_p\right)}\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^{L_n}(L_n-x)\,G\,d\,x\,d\,t+\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_n+L_p\right)}\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\times$$

$$\times D_p(-L_p)p_p(t)d\,t-\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_n+L_p\right)}\int_0^{\Theta}\int_{-L_p}^{0}(L_p+x)p_1(x,t)d\,x\,d\,t-\left(n_0p_0N_{1000}-N_{1011}\right)\frac{\left(L_n-L_p\right)^2}{2\left(L_n+L_p\right)}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найти решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

1.01 $\frac{1}{x^5}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y^7}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{z^4}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.02 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{ctg(y)}\frac{\partial u}{\partial y}+tg(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.03 $\frac{1}{\ln(x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{ch(y)}\frac{\partial u}{\partial y}+e^z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.04 $\frac{1}{\sin(x)}\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.05 $\frac{1}{\ln(x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{2\cdot x\cdot y}$;

1.06 $\frac{\ln(x)}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+e^y\frac{\partial u}{\partial y}+2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.07 $2\frac{\partial u}{\partial x}+ye^{y^2}\frac{\partial u}{\partial y}=2x^2u\cdot tg(y)$;

1.08 $\frac{1}{x^2\ln(x^3)}\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u\cdot th(y)$;

1.09 $x\cdot y^2\frac{\partial u}{\partial x}+x^5\cdot y^3\frac{\partial u}{\partial y}+tg(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.10 $e^{2x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\ln^2(y)}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+cth(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.11 $2x\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\sin(y)\frac{\partial u}{\partial y}=x\cdot\ln(u)$;

1.12 $\frac{\partial u}{\partial x}+th(y)\frac{\partial u}{\partial y}+cth(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.13 $y\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\ln(1+x^2)}{x}\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.14 $x^3\frac{\partial u}{\partial x}+5y^8\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.15 $\sin^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\cos^2(y)\frac{\partial u}{\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.16 $\cos^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\ln(y)}\frac{\partial u}{\partial y}+sh^2(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.17 $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y^2e^y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.18 $tg^3(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+2z^4\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.19 $\frac{e^{x^3}}{x^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y^4}{5}\frac{\partial u}{\partial y}=u$;

1.20 $\frac{tg(x)}{\sin(2x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y^3}{\ln(y^{-2})}\frac{\partial u}{\partial y}=2u$;

1.21 $\frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\sin(2x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y}{7}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{3}$;

1.22 $x\frac{\partial u}{\partial x}+\sin^2(3y)\frac{\partial u}{\partial y}=u$;

1.23 $\frac{x^2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\cos^2(y^2)}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=u$;

1.24 $tg(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\sin(y)}\frac{\partial u}{\partial y}=u$;

1.25 $ctg^3(x)\frac{\partial u}{\partial x}+y^3\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\ln(z)}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.26 $\frac{1}{\ln(x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{e^{y^3}}{y^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\ln^4(z)}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.27 $tg^5(x)\frac{\partial u}{\partial x}+2y^2\frac{\partial u}{\partial y}+sh^2(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.28 $\frac{1}{x\cdot\ln(x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{1-y^2}\frac{\partial u}{\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.29 $\frac{1}{x\cdot\ln(x^2)}\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial u}{\partial y}+3z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.30 $\frac{1}{1+x^2}\frac{\partial u}{\partial x}+(1+y^2)\frac{\partial u}{\partial y}+3z^2\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

2. Найти решения дифференциального уравнения $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+g(x,t)$

с граничными и начальным условиями $u(x,0)=\chi(x)$, $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$ при

1.01 $\chi(x)=a\cdot x+b$, $g(x,t)=c\cdot x\cdot t$;	1.02 $\chi(x)=a\cdot sin(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot x^2\cdot t^2$;	1.03 $\chi(x)=a\cdot x^2+b$, $g(x,t)=c\cdot e^{-b\cdot x\cdot t}$;
1.04 $\chi(x)=a$, $g(x,t)=b\cdot sin(\omega\cdot t)$;	1.05 $\chi(x)=a\ cos(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot cos(\omega x)$;	1.06 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c\cdot x\cdot ch(c\cdot t)$;
1.07 $\chi(x)=a\cdot sh(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot cos(\omega\cdot t)$;	1.08 $\chi(x)=a\cdot ch(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot x^2\cdot t$;	1.09 $\chi(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, $g(x,t)=d\cdot x\cdot t^2$;
1.10 $\chi(x)=a\cdot x+b$, $g(x,t)=c\cdot x\cdot t$;	1.11 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c\cdot cos(dx+et)$;	1.12 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c\cdot x\cdot sh(c\cdot t)$;
1.13 $\chi(x)=a\cdot x+b$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot x\cdot t}+e$;	1.14 $\chi(x)=a\cdot sh(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot cos(dx+et)$;	1.15 $\chi(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, $g(x,t)=c\cdot cos(dx)$;
1.16 $\chi(x)=a$, $g(x,t)=b\cdot cos(c\,x)$;	1.17 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c$;	1.18 $\chi(x)=a\cdot ch(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot sin(d\,t)$;
1.19 $\chi(x)=a\ cos(b\cdot x+c)$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot x}cos(e\,t)$;	1.20 $\chi(x)=a\ sin(b\cdot x+c)$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot x}sin(d\,t)$;	1.21 $\chi(x)=a$, $g(x,t)=c\cdot e^{-b\cdot x\cdot t}$;
1.22 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c\cdot x^2\cdot t^3$;	1.23 $\chi(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, $g(x,t)=c\cdot x^3\cdot t^2$;	1.24 $\chi(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, $g(x,t)=c\cdot x^3\cdot t^2$;
1.25 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot x}$;	1.26 $\chi(x)=a\cdot sh(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot x\cdot t}$;	1.27 $\chi(x)=a\cdot ch(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot t}$;
1.28 $\chi(x)=a$, $g(x,t)=b\cdot e^{-c\cdot x}cos(d\,t)$;	1.29 $\chi(x)=a$, $g(x,t)=b\cdot e^{-c\cdot x}sin(d\,t)$;	1.30 $\chi(x)=a\cdot cos(b\,x)$, $g(x,t)=b\cdot sh(d\,t)$;

Параметры a, b, c, d и e считать постоянными.

3. Найти решения дифференциального уравнения $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=D\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+g(x,t)$

с граничными и начальным условиями $\left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0$, $u(x,0)=\chi_1(x)$,

$\left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{x=0}=\chi_2(x)$. В качестве функции $g(x,t)$ взять функцию $g(x,t)$ из предыдущего задания, а функции $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$ считать одинаковыми и равными функции $\chi(x)$ из предыдущего задания.

ЛИТЕРАТУРА

1. З.Ю. Готра. Справочник. Технология микроэлектронных устройств. – М.: Радио и связь, 1991. – 528 с.
2. В.Г. Гусев, Ю.М. Гусев. Электроника. - М.: Высшая школа, 1991. – 622 с.
3. Н.М. Тугов, Б.А. Глебов, Н.А. Чарыков.. Полупроводниковые приборы. - М.: Энергоатомиздат, 1990. – 576 с.
4. И.П. Степаненко. Основы микроэлектроники. - М.: Советское радио, 1980. – 423 с.
5. В.С. Вавилов, Н.П. Кекеладзе, Л.С. Смирнов. Действие излучения на полупроводники. - М.: Наука, 1988. – 191с.
6. В.И. Лачин, Н.С. Савелов. Электроника. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2001. – 446 с.
7. К.В. Шалимова. Физика полупроводников. - М.: Энергоатомиздат, 1985. – 391 с.
8. В.В. Молодин. Зимнее бетонирование монолитных строительных конструкций (учебное пособие). - Новосибирск: Новосибирский архитектурно-строительный университет, 2007. – 184 с.
9. В.В. Молодин, Ю.В. Лунев. Зимнее бетонирование монолитных строительных конструкций (монография). - Новосибирск: Новосибирский архитектурно-строительный университет, 2006. – 300 с.
10. М.С. Седов. Теория инерционного прохождения звука через ограждающие конструкции. // Известия вузов. Строительство и архитектура. - 1990. - № 2. С. 37-42.
11. М.С. Седов. Звуковая теория зданий и сооружений. // Известия вузов. Строительство. - 1997. - № 8. С. 19-23.
12. М.С.Бибишкин, Ю.А. Вайнер, А.Я. Лопатин, В.И. Лучин, А. Е. Пестов, В.Н. Полковников, Н.Н. Салащенко, В.В.Чернов, Н.И. Чхало. Многослойные поляризаторы для мягкого рентгеновского диапазона длин волн. // Материалы Симпозиума “Нанофизика и наноэлектроника” / Нижний Новгород, ИФМ РАН. –2005. - С. 493 -494.
13. М.С. Бибишкин, С.Ю. Зуев, А.Ю. Климов, Е.Б. Клюенков, А.Я Лопатин, В.И. Лучин, Н.Н. Салащенко, Л.А. Суслов, Н.Н. Цыбин, Н.И. Чхало, Л.А. Шмаенок. Фильтры на пропускание для стендов проекционной EUV-литографии. // Материалы Симпозиума “Нанофизика и наноэлектроника”/ Нижний Новгород, ИФМ РАН. –2005. - С. 497 -498.
14. А.В. Митрофанов, Ф.А. Пудонин. Рентгеновские фильтры из тонких пленок циркония и оксида циркония. // Материалы Симпозиума “Нанофизика и наноэлектроника”/ Нижний Новгород, ИФМ РАН. – 2005. - С. 501-503.
15. Г. Карслоу, Д. Егер. Теплопроводность твердых тел. - М.: Наука, 1964. - 488 с.
16. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. – 735 с.
17. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1974. – 831 с.

18. E.L. Pankratov. Influence of spatial, temporal and concentrational dependence of diffusion coefficient on dopant dynamics: Optimization of annealing time. // Physical Review B. - 2005. - Vol. 72, №7. - P. 075201-075208.
19. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, В. Магнус, Ф. Оберхеттингер, Ф. Трикоми. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. - М.: Наука, 1969. - 343 с.
20. E.L. Pankratov, E.A. Bulaeva. On prognosis of epitaxy from gas phase process to improve properties of epitaxial layers. // 3D Research. - 2015. - Vol. 6, №4. - P. 40-51.
21 Ю.Д. Соколов. Об определении динамических усилий в шахтных подъёмных канатах. // Прикладная механика. – 1955. – Т.1, № 1. - С. 23-35.
22 E.L. Pankratov. Decreasing of depth of *p*-*n*-junction in a semiconductor heterostructure by serial radiation processing and microwave annealing. // J. Comp. Theor. Nanoscience. – 2012. Vol.9, № 1. - P. 41-49.
23. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1971. - 576 с.
24. К.В. Шалимова. *Физика полупроводников*. - М.: Энергоатомиздат. 1985. - 392 с.

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Автор:
Евгений Леонидович **Панкратов**

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.