

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования “Национальный исследовательский Нижегород-
ский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”**

**Е.Л. Панкратов
Е.А. Булаева**

ФИЗИКА
Учебное пособие

Рекомендовано Ученым советом Института экономики и предпринима-
тельства ННГУ для студентов, обучающихся по направлению подго-
товки 09.03.03 «Прикладная информатика»

Нижний Новгород
2016

УДК 517.958 (075)

ББК В311

П-16

П-16 ФИЗИКА: Автор: Панкратов Е.Л., Булаева Е.А. учебное пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. - 225 с.

Рецензенты:

Заведующий кафедрой физики
и прикладной механики НГСХА,
д. б. н., профессор
Доцент кафедры общей физики и
теоретической механики ННГАСУ,
к.ф.-м.н., доцент

А.В. Чурмасов

Л.П. Коган

Учебное пособие «Физика» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по специальности 09.03.03 «Прикладная информатика», с основными понятиями курса «Физика». Оно содержит основные понятия механики, термодинамики и молекулярной физики, электричества и магнетизма, теории колебаний, квантовой физики, а также примеры решения задач. Для закрепления теоретических знаний по физике в данном пособии приведены контрольные задания.

Ответственный за выпуск:

председатель Ученого совета Института экономики и предпринимательства,
А.О. Грудзинский.

УДК 517.958 (075)

ББК В311

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2016

Содержание

Введение	2
1. Кинематика материальной точки	3
2. Динамика материальной точки	18
3. Работа и энергия	36
4. Динамика твёрдого тела	44
5. Основные понятия молекулярной физики и термодинамики	54
6. Температура. Шкалы температур	56
7. Идеальный газ	57
8. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа	63
9. Первое начало термодинамики	67
10. Циклические процессы. Тепловой двигатель. Второе начало термодинамики	74
11. Реальные газы. Отклонение свойств газов от идеальности	78
12. Электростатика	82
13. Постоянный электрический ток	117
14. Магнитное поле. Основные понятия	172
15. Механические колебания	141
16. Волны в упругой среде	158
17. Электромагнитные колебания и волны	161
18. Тепловое излучение	186
19. Основы квантовой теории	189
20. Физика атома	191
Контрольные задания	200
Литература	224

Введение

В данном пособии приведены основные понятия курса «Физика». Пособие ориентировано на развитие у обучающихся по программе бакалавриата 09.03.03 «Прикладная информатика» компетенций ОПК-3 и ПК-7 ФГОС ВО. В результате изучения курса «Физика» студенты должны знать основные понятия физики, уметь решать задачи с использованием основных законов физики.

Механика - раздел физики, изучающий механическое движение тел и происходящие при этом взаимодействия между ними. Основные разделы механики - кинематика и динамика. Кинематика - раздел механики, изучающий движение тел, без учёта взаимодействия тел, физических причин или сил, вызывающих это движение. Динамика - раздел механики, в котором изучаются причины возникновения механического движения. Механическое движение тел - это изменение взаимного положения тел с течением времени.

Молекулярная физика - раздел физики, который изучает физические свойства тел на основе рассмотрения их молекулярного строения. Задачи молекулярной физики решаются методами статистической механики, термодинамики и физической кинетики, они связаны с изучением движения и взаимодействия частиц (атомов, молекул, ионов), составляющих физические тела.

Термодинамика - раздел физики, изучающий наиболее общие свойства макроскопических систем и способы передачи и превращения энергии в таких системах. В термодинамике изучаются состояния и процессы, для описания которых можно ввести понятие температуры. Термодинамика - это феноменологическая наука, опирающаяся на обобщения опытных фактов. Процессы, происходящие в термодинамических системах, описываются макроскопическими величинами (температура, давление, концентрации компонентов), которые вводятся для описания систем, состоящих из большого числа частиц, и не применимы к отдельным молекулам и атомам, в отличие, например, от величин, вводимых в механике или электродинамике.

Электричество - совокупность явлений, обусловленных существованием, взаимодействием и движением электрических зарядов. Магнетизм - форма взаимодействия движущихся электрических зарядов, осуществляемая на расстоянии посредством магнитного поля. Наряду с электричеством, магнетизм - одно из проявлений электромагнитного взаимодействия. С точки зрения квантовой теории поля электромагнитное взаимодействие переносится бозоном - фотоном (частицей, которую можно представить как квантовое возбуждение электромагнитного поля).

Теория колебаний - теория, рассматривающая различные виды колебаний без учёта их физической природы.

Волна - изменение некоторой совокупности физических величин (характеристик некоторого физического поля или материальной среды), которое способно перемещаться, удаляясь от места их возникновения, или колебаться внутри ограниченных областей пространства.

Волновой процесс может иметь самую разную физическую природу: меха-

ническую, химическую (реакция Белоусова - Жаботинского, протекающая в автоколебательном режиме каталитического окисления различных восстановителей бромисто-водородной кислотой $HBrO_3$), электромагнитную (электромагнитное излучение), гравитационную (гравитационные волны), спиновую (магنون), плотности вероятности (ток вероятности) и т. д. Как правило, распространение волны сопровождается переносом энергии, но не переносом массы.

Квантовая физика - раздел теоретической физики, в котором изучаются квантово-механические и квантово-полевые системы и законы их движения. Основные законы квантовой физики изучаются в рамках квантовой механики и квантовой теории поля и применяются в других разделах физики.

МЕХАНИКА

1. Кинематика материальной точки

Определение 1

Кинематика - раздел механики, в котором изучаются геометрические законы движения тел без учёта их масс и действующих на них сил.

Задача кинематики - дать способы описания движения твёрдого тела и, исходя из закона его движения, определить положение, скорость и ускорение любой точки тела в любой момент времени. Всякое движение тела можно разложить на два основных вида: поступательное и вращательное.

Определение 2

Под поступательным движением тела понимают такое движение тела, при котором любая прямая (ось), связанная с движущимся телом, остаётся параллельной себе самой (см. рис. 1).

Определение 3

Движение, при котором все точки тела движутся по окружности, центры которых лежат на одной и той же прямой (оси вращения), называется вращательным движением (см. рис. 2).

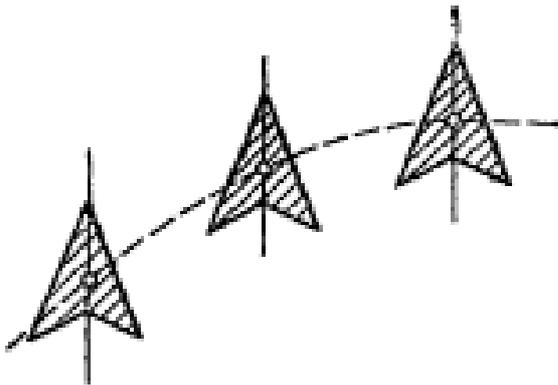


Рис. 1.

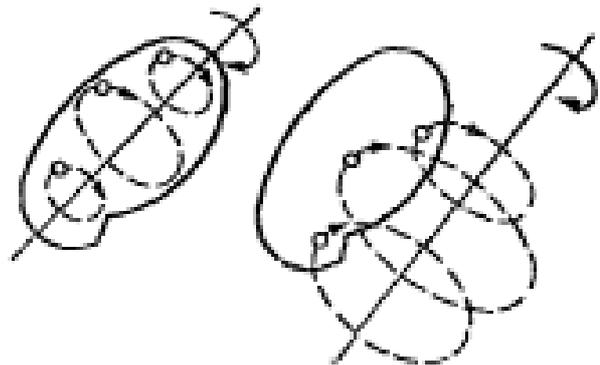


Рис. 2.

Определение 4

Материальной точкой называется макроскопическое тело, размерами которого можно пренебречь при описании его движения.

Вопрос о том, можно ли данное тело рассматривать как материальную точку, зависит не от размеров этого тела, а от условий решаемой задачи. Например, радиус Земли значительно меньше расстояния от Земли до Солнца и её орбитальное движение можно описать как движение материальной точки с массой, равной массе Земли и расположенной в её центре. Однако, при рассмотрении суточного движения Земли вокруг собственной оси замена её материальной точкой не представляется возможной.

Система координат

Определение 5

Движением в механике называется изменение взаимного расположения тел.

Если рассмотреть отдельное изолированное тело, находящееся в пространстве, где никаких других тел нет, не представляется возможным говорить о дви-

жении такого тела, потому что нет ничего, по отношению к чему это тело могло бы изменять своё положение. По этой причине, если необходимо изучать движение какого-либо тела, то обязательно необходимо указать, по отношению к каким другим телам происходит данное движение. Движение происходит как в пространстве, так и во времени. По этой причине для описания движения необходимо также определять время. Это делается с помощью часов. Совокупность неподвижных друг относительно друга тел, по отношению к которым рассматривается движение, и отсчитывающих время часов образуют систему отсчёта.

Определение 6

Тело или совокупность неподвижных одно относительно другого тел, относительно которых определяется пространственное и временное расположение других тел, называется системой отсчёта.

С точки зрения кинематики все системы отсчёта кинематически эквивалентны. При решении задач кинематики выбор се системы отсчёта определяется соображениями целесообразности (удобства).

Для описания пространства, в котором осуществляется движение материальной точки, с системой отсчёта связывают пространственную систему координат.

Определение 7

Под системой координат понимают тройку линейно независимых направленных отрезков прямых (координатных осей), выходящих из одной точки (начала отсчёта).

В этом случае положение материальной точки M в пространстве определяется радиус-вектором \vec{r} , проведённым из начала координат O в эту точку, а движение представляется в виде векторной суммы независимых движений вдоль трёх пространственных осей выбранной системы координат.

В декартовой системе координат (рис. 3) имеем:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1)$$

где \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} - орты, направленные вдоль положительных направлений координатных осей x , y и z ; x , y и z - проекции радиус-вектора \vec{r} на эти оси, выражающиеся числами. Положение точки M задаётся тремя координатами x , y и z :

$$M=M(x,y,z). \quad (2)$$

В цилиндрической системе координат (рис. 3) положение точки M задаётся тремя другими координатами ρ , φ и z :

$$M=M(\rho,\varphi,z),$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg(y/x), \quad z=z, \quad (3)$$

$$x = \rho \cdot \cos(\varphi), \quad y = \rho \cdot \sin(\varphi), \quad z=z, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

В цилиндрической системе координат (рис. 3) положение точки M задаётся тремя другими координатами r , θ и φ :

$$M=M(r,\theta,\varphi),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctg(\sqrt{x^2 + y^2}/z), \quad \varphi = \arctg(y/x), \quad (4)$$

$$x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi), \quad y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi), \quad z = r \cdot \cos(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

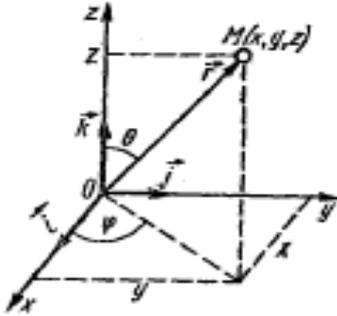


Рис. 3.



Рис. 4.

Для однозначного определения положения точки M в пространстве радиус-вектор \vec{r} полагают зависящим от параметра t , называемого временем. При этом одному значению t соответствует одно значение функции \vec{r} :

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (5)$$

Определение 8

Соотношение (5) называется кинематическим уравнением движения точки M , записанным в векторной форме.

Определение 9

Линия, описываемая материальной точкой M при своём движении, называется траекторией.

Определение 10

Расстояния между двумя заданными точками, отсчитанными вдоль траектории, называется ΔS .

Определение 11

Прямолинейный направленный отрезок (вектор), проведённый из начальной точки в конечную, называется перемещением $\Delta \vec{r}$ (рис. 3).

Перемещение является вектором, а путь – скаляром. Сумма двух последовательных перемещений из точки 1 в точку 2 и из точки 2 в точку 3 – перемещение из точки 1 в точку 3 (рис. 4):

$$\Delta \vec{r}_{13} = \Delta \vec{r}_{12} + \Delta \vec{r}_{23} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = \vec{r}_3 - \vec{r}_1. \quad (6)$$

Скорость

Определение 12

Средней скоростью $\langle \vec{v} \rangle$ за промежуток времени Δt называется перемещение $\Delta \vec{r}$ за единицу этого промежутка времени:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (7)$$

Пример 1

Первую половину времени своего движения Δt автомобиль двигался со ско-

ростью $v_1=80$ км/ч, а вторую половину времени - со скоростью $v_2=40$ км/ч. Какова средняя скорость движения автомобиля?

Решение

Абсолютная величина перемещения Δr равна $\Delta r=0,5\Delta t \cdot v_1+0,5\Delta t \cdot v_2=0,5\Delta t(v_1+v_2)$. Абсолютная величина средней скорости равна $\langle v \rangle = \Delta r / \Delta t = 0,5(v_1+v_2)$. Подстановка значений скоростей v_1 и v_2 в полученное соотношение позволяет получить, что средняя скорость автомобиля равна 60 км/ч.

Определение 13

Мгновенной скоростью называется предел, к которому стремится средняя скорость \bar{v} при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (8)$$

Вектор \bar{v} направлен по касательной к траектории движения, т.к. бесконечно малое (элементарное) перемещение $d\vec{r}$ совпадает с бесконечно малым элементом траектории ds . В декартовой системе координат последнее соотношение эквивалентно трём следующим:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \quad (8a)$$

где v_x , v_y и v_z – проекции вектора \bar{v} на координатные оси с ортами \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} :

$$\bar{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}. \quad (9)$$

Модуль вектора \bar{v} определяется следующим соотношением:

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (10)$$

Ускорение

Определение 14

Средним ускорением $\langle \vec{a} \rangle$ за промежуток времени Δt называется приращение скорости $\Delta \bar{v} = \bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)$ за единицу промежутка времени Δt :

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)}{\Delta t}. \quad (11)$$

Определение 15

Мгновенным ускорением называется предел, к которому стремится среднего ускорения $\langle \vec{a} \rangle$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \ddot{\vec{r}}. \quad (12)$$

В декартовой системе координат последнее соотношение эквивалентно трём следующим:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = v_x, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = v_y, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = v_z, \quad (12a)$$

где a_x , a_y и a_z - проекции вектора \vec{a} на координатные оси с ортами \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}. \quad (13)$$

Модуль вектора \vec{a} определяется следующим соотношением:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (14)$$

Пример 2

Радиус-вектор точки изменяется со временем по закону: $\vec{r} = 2t^2 \vec{i} + t \vec{j} + \vec{k}$. Найти скорость \vec{v} и ускорение \vec{a} точки, модуль скорости v в момент времени $t=2$ с, приближённое значение пути S , пройденного точкой за 10 секунд движения.

Решение

Скорость \vec{v} являются первой производной от радиус-вектора $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4t \vec{i} + \vec{j}$. Ускорение \vec{a} являются второй производной от радиус-вектора $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 4t \vec{i}$. Вектор ускорения a в момент времени $t=2$ с равен $\vec{a} = 8 \vec{i} + \vec{j}$. Тогда модуль ускорения a в момент времени $t=2$ с равен $a = \sqrt{64+1} \text{ м/с}^2 = \sqrt{65} \text{ м/с}^2$. Путь S , пройденный точкой за 10 секунд движения, равен $S = a \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 t = (1 \cdot 10 + \sqrt{1600+1} \cdot \frac{10^2}{2}) \text{ м} = (50\sqrt{1601} + 10) \text{ м}$.

Классификация механических движений

Механические движения классифицируют в зависимости от конкретных условий движения:

	Равномерное движение.	Неравномерное движение.
Прямолинейное движение	$\vec{v} = const, v=const, \vec{a} = 0, a_n=0, a_\tau=0.$	$\vec{v} \neq const, v \neq const, \vec{a} = \vec{a}_\tau, a_n=0, a_\tau \neq 0.$
Криволинейное движение	$\vec{v} \neq const, v=const, \vec{a} = \vec{a}_n, a_n \neq 0, a_\tau=0.$	$\vec{v} \neq const, v \neq const, \vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, a_n \neq 0, a_\tau \neq 0.$

Равномерное прямолинейное движение

Определение 16

Равномерным называется движение, при котором за равные сколь угодно малые промежутки времени материальная точка (тело) проходит одинаковые пути.

При прямолинейном движении модуль вектора перемещений $|\Delta \vec{r}|$ равен пройденному пути ΔS . При равномерном прямолинейном движении скорость \vec{v}

постоянна и равна средней скорости $\langle \bar{v} \rangle$. Уравнение траектории $\bar{r}(t)$ имеет вид:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \bar{v}(t - t_0), \quad (15)$$

где $\bar{r}(t_0)$ - радиус-вектор тела в начальный момент времени t_0 . Векторное уравнение (15) эквивалентно трём уравнениям для координат $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ радиус-вектора $\bar{r}(t)$:

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t - t_0), \quad y(t) = y(t_0) + v_y(t - t_0), \quad z(t) = z(t_0) + v_z(t - t_0), \quad (15a)$$

где v_x , v_y и v_z - проекции вектора скорости \bar{v} на оси координат. Путь, пройденный телом, равен

$$S = \int v dt = vt. \quad (16)$$

Соотношение (16) показывает, что пройденный путь численно равен площади под линией $v = \text{const}$ (см. рис.5) и линейно растёт со временем (рис. 6).

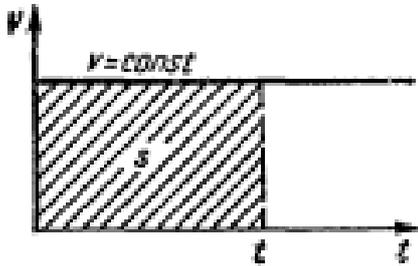


Рис. 5.

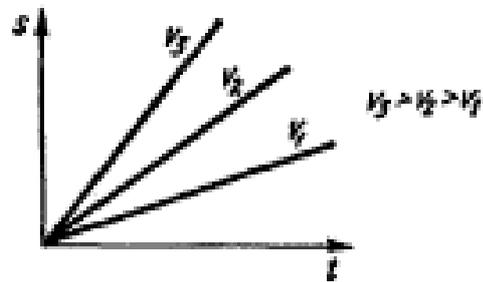


Рис. 6.

Равноускоренное движение

Поступательное движение называется равноускоренным, если ускорение \bar{a} с течением времени остаётся постоянным. При таком движении ускорение \bar{a} равно среднему ускорению $\langle \bar{a} \rangle$. При $a > 0$ движение ускоренное, при $a < 0$ - движение замедленное. Скорость $\bar{v}(t)$ в момент времени t определяется выражением:

$$\bar{v}(t) = \bar{v}(t_0) + \bar{a}(t - t_0), \quad (17)$$

которое эквивалентно трём уравнениям для составляющих скорости v_x , v_y и v_z :

$$v_x(t) = v_x(t_0) + a_x(t - t_0), \quad v_y(t) = v_y(t_0) + a_y(t - t_0), \quad v_z(t) = v_z(t_0) + a_z(t - t_0), \quad (17a)$$

где a_x , a_y и a_z - проекции вектора \bar{a} на оси координат. Уравнение траектории $\bar{r}(t)$ имеет вид:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \bar{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{\bar{a}}{2}(t - t_0)^2. \quad (18)$$

Уравнения для координат вектора $\bar{r}(t)$ записываются аналогично.

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) + \frac{a_x}{2}(t - t_0)^2,$$

$$y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t - t_0) + \frac{a_y}{2}(t - t_0)^2, \quad (18)$$

$$z(t) = z(t_0) + v_z(t_0)(t - t_0) + \frac{a_z}{2}(t - t_0)^2.$$

Путь, пройденный телом, равен

$$S = \int v dt = v_0 t + at^2/2, \quad (19)$$

где v_0 - скорость в начальный момент времени t_0 . При $t_0=0$ для пути, мгновенной и средней скоростей и ускорений, времени движения можно получить следующие формулы для равноускоренного движения:

$$S = (v^2 - v_0^2)/2a = v_0 t + at^2/2 = (v_0 + v)t/2, \quad (20a)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2as} = v_0 + at, \quad \langle v \rangle = (v_0 + v)/2 = v_0 + at/2 = s/t, \quad (20б)$$

$$a = (v^2 - v_0^2)/2s = 2t^{-1}(st^{-1} - v_0), \quad \langle a \rangle = (a_0 + a)/2, \quad (20в)$$

$$t = 2s/(v_0 + v) = (\sqrt{2aS + v_0^2} - v_0)/a. \quad (20г)$$

Зависимости пути и скорости от времени при равноускоренном и равнозамедленном движениях приведены на рис. 7-9.

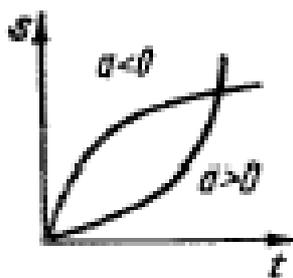


Рис. 7.

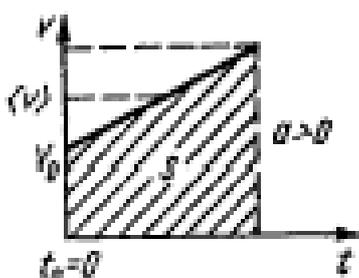


Рис. 8.

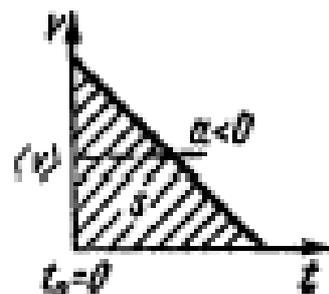


Рис. 9.

Пример 3

Точка движется со скоростью $\vec{v} = at(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})$, $a=1 \text{ м/с}^2$. Найти:

- модуль скорости точки в момент времени $t=1 \text{ с}$;
- ускорение точки \vec{a} и его модуль a ;
- путь S , пройденный точкой с момента времени $t_1=2 \text{ с}$ до момента времени $t_2=3 \text{ с}$;
- какой характер имеет движение точки?

Решение

- модуль скорости точки в момент времени $t=1 \text{ с}$ равен $v = \sqrt{4+9+16} \text{ м/с} = \sqrt{29} \text{ м/с}$;
- ускорение точки \vec{a} является производной по времени от скорости точки $\vec{a} = a(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})$. Модуль ускорения точки равен $a = \sqrt{4+9+16} \text{ м/с}^2 = \sqrt{29} \text{ м/с}^2$;
- путь S , пройденный точкой с момента времени $t_1 = 2 \text{ с}$ до момента времени $t_2 = 3 \text{ с}$, равен $S = S = a \cdot \frac{(t_2 - t_1)^2}{2} + v_0(t_2 - t_1) = \sqrt{29} \frac{(3-2)^2}{2} \text{ м/с}^2 = \frac{\sqrt{29}}{2} \text{ м/с}^2$;
- равноускоренное.

Падение тел

Свободное падение тел представляет собой частный случай равномерно ускоренного движения без начальной скорости $v_0=0$. Ускорение при таком падении равно ускорению свободного падения $a = g = 9,81 \text{ м/с}^2$. В пренебрежении суточным движением Земли, зависимостью g от расстояния до центра Земли и сопротивлением воздуха в соответствии с (20а) и (20б) при $v_0=0$ получаем:

$$v = g t = \sqrt{2gh}, \quad S = g t^2 / 2 = vt/2, \quad (21)$$

где v - скорость падения тела через время t , h - высота, с которой падает тело.

Пример 4

Тело падает с высоты $h=19,6 \text{ м}$ с нулевой начальной скоростью. Какой путь пройдёт тело:

а) за первую $0,1 \text{ с}$ своего движения;

б) за последнюю $0,1 \text{ с}$ своего движения.

Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение

Время падения в соответствии с соотношением (21) равно $t = \sqrt{2S/g} = 2 \text{ с}$.

а) Путь, пройденный за первую $0,1 \text{ с}$ падения, равен $S = 9,8 \cdot 0,1^2 / 2 \text{ м} = 0,049 \text{ м}$.

б) За первые $1,9 \text{ с}$ падения тело в соответствии с соотношением (21) пройдёт $17,7 \text{ м}$. Тогда за последнюю $0,1 \text{ с}$ падения тело проходит $S = 19,6 - 17,7 \text{ м} = 1,9 \text{ м}$.

Падение тела, брошенного вертикально вверх

Тело, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью v_0 , движется равнозамедленно с ускорением $a = -g = -9,81 \text{ м/с}^2$. Высота подъёма h за время t и скорость v через время t согласно (20а) и (20б) определяются соотношениями:

$$h = (v_0 + v)t/2 = v_0 t - g t^2 / 2, \quad v = v_0 - g t = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \quad (22)$$

(без учёта сопротивления воздуха). Соотношения для времени t_{\max} , за которое тело достигнет максимальной высоты $h_{\max} = h$ ($v = 0$), и высоты h_{\max} могут быть представлены в следующей форме:

$$t_{\max} = v_0 / g, \quad h_{\max} = v_0^2 / 2g. \quad (23)$$

Движение тела, брошенного горизонтально

Движение тела, брошенного горизонтально со скоростью v_0 , является векторной суммой двух независимых движений: равномерного горизонтального с постоянной скоростью v_0 вдоль оси x и равноускоренного вертикального свободного падения вдоль оси y с ускорением g (см. рис. 10). Согласно (18) и (20г) перемещения тела в горизонтальном и вертикальном направлениях за время t равны соответственно

$$x = S = v_0 t = v_0 \sqrt{2h/g}, \quad y = h = g t^2 / 2, \quad t = s/v_0 = \sqrt{2h/g}. \quad (24)$$

Уравнением траектории тела является парабола

$$y = g x^2 / 2v_0^2. \quad (25)$$

Другие характеристики движения:

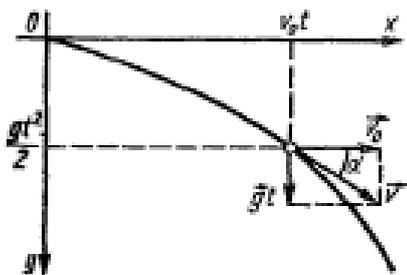


Рис. 10.

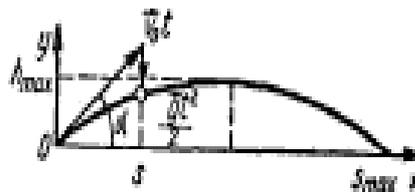


Рис. 11.

радиус-вектор

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{g} t^2 / 2, \quad (26)$$

мгновенная скорость

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t, \quad (27)$$

угол между начальной и мгновенной скоростями

$$\operatorname{tg}(\alpha) = gt/v_0, \quad (28)$$

величина (модуль мгновенной скорости)

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}. \quad (29)$$

В соотношениях (24)-(29) не учитывается сопротивление воздуха и суточное вращение Земли.

Пример 5

Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через 0,5 с на расстоянии 0,5 м по горизонтали от места бросания.

- С какой высоты h был брошен камень?
- С какой начальной скоростью v_0 был брошен камень?
- С какой скоростью v камень упал на землю?
- Какой угол α составляет траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю?

Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение

- Высота падения равна $h = gt^2/2 = 9,8 \cdot (0,5)^2 / 2 = 1,225$ м (см. соотношение (24))
- Начальная скорость v_0 определяется соотношением (24), т.е. $S_x = v_0 t$, где S_x - горизонтальная составляющая перемещения. Тогда $v_0 = 0,5 / 0,5 = 1$ м/с.
- Искомая скорость может быть определена с помощью соотношения (29), т.е. $v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$. Подстановка параметров в данное соотношение позволяет получить следующее значение скорости: $v = \sqrt{1^2 + 9,8^2 \cdot 0,5^2} = \sqrt{1^2 + 24,01} \approx 5$ м/с.
- Искомый угол можно определить с помощью соотношения (28): $\operatorname{tg}(\alpha) = gt/v_0$. Подстановка параметров в данное соотношение позволяет получить следующее значение искомого угла: $\alpha = \operatorname{arctg}(gt/v_0) = \operatorname{arctg}(9,8 \cdot 0,5/1) \approx 78^\circ 28'$.

Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Движение тела, брошенного под углом α к горизонту со скоростью v_0 , являет-

ся векторной суммой двух независимых движений: равномерного горизонтального с постоянной скоростью v_0 вдоль оси x и свободного падения в вертикальном направлении против оси y (см. рис. 11). Пусть за время t перемещение тела в горизонтальном направлении имеет значение S , а высота подъёма - h . Тогда

$$x = S = v_0 t \cos(\alpha), \quad y = h = v_0 t \sin(\alpha) - \frac{g t^2}{2}, \quad t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}. \quad (30)$$

Траектория движения тела является параболой:

$$y = x \operatorname{tg}(\alpha) - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)}. \quad (31)$$

Горизонтальная v_x и вертикальная v_y составляющие вектора мгновенной скорости \vec{v} определяются следующими соотношениями:

$$v_x = \frac{d x}{d t} = v_0 \cos(\alpha), \quad v_y = \frac{d y}{d t} = v_0 \sin(\alpha) - g t. \quad (32)$$

Другие характеристики движения:

величина мгновенной скорости

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2 g h}, \quad (33)$$

время подъёма тела на максимальную величину (при условии $v_y=0$)

$$t_{\max} = \frac{v_0}{g} \sin(\alpha), \quad (34)$$

общее время движения ($t_s=2t_{\max}$)

$$t_{\max} = 2 \frac{v_0}{g} \sin(\alpha), \quad (35)$$

максимальная высота подъёма (за время t_{\max})

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2(\alpha), \quad (36)$$

максимальный путь (дальность S_{\max} за время t_s)

$$S_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha). \quad (37)$$

В соотношениях (30)-(37) не учитываются сопротивление воздуха и суточное вращение Земли.

Пример 6

Мяч бросили со скоростью $v_0=10$ м/с под углом $\alpha=40^\circ$ к горизонту. Найти:

- на какую высоту S_y поднимается мяч;
- на каком расстоянии S_x от места бросания он упадёт на землю;
- сколько времени он будет в движении.

Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение

а) искомую высоту определим с помощью соотношения (36). Подстановка параметров в данное соотношение позволяет получить следующее значение искомой высоты:

$$S_y = \frac{10^2}{2 \cdot 9,8} \sin^2(40^\circ) \approx 2,1 \text{ м.}$$

б) искомое расстояние определим с помощью соотношения (37). Подстановка параметров в данное соотношение позволяет получить следующее значение искомой высоты:

$$S_{\max} = \frac{10^2}{9,8} \sin(80^\circ) \approx 10,05 \text{ м.}$$

в) искомое время определим с помощью соотношения (35). Подстановка параметров в данное соотношение позволяет получить следующее значение искомого времени:

$$t_{\max} = 2 \frac{10}{9,8} \sin(40) \approx 1,31 \text{ с.}$$

Равномерное и неравномерное движения по окружности

Движение материальной точки по окружности является частным случаем криволинейного движения по траектории, лежащей в одной плоскости (т.е. по плоской кривой). Выберем в качестве этой плоскости плоскость xOy (рис. 12). Радиус кривизны R траектории в этом случае постоянен и равен радиусу окружности:

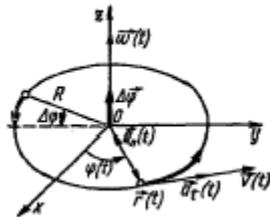


Рис. 12.

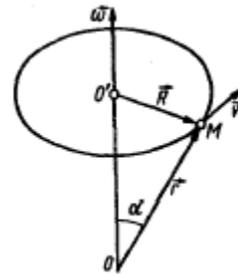


Рис. 13.

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const.} \quad (38)$$

Радиус-вектор $\vec{r}(t)$ равен

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad (39)$$

или в полярных координатах

$$x(t) = R \cos[\varphi(t)], \quad y(t) = R \sin[\varphi(t)], \quad (40)$$

где $\varphi(t)$ - угол поворота радиус-вектора $\vec{r}(t)$ в плоскости xOy в данный момент времени t , отсчитанный в направлении от оси x к оси y (правый винт на рис. 12). Скорость $\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt$, с которой материальная точка движется по окружности, называется линейной функцией.

Угловые скорость и ускорение

Движение по окружности характеризуют также угловыми скоростью и ускорением. Для определения этих величин зададим поворот на малый угол $\Delta\varphi$ в ви-

де вектора $\Delta\vec{\varphi}$, модуль которого равен величине угла поворота, $|\Delta\vec{\varphi}| = \Delta\varphi$, а направление совпадает с осью вращения, вокруг которой производится поворот, и определяется по правилу правого винта (рис. 12). Вектор $\Delta\vec{\varphi}$ не является истинным вектором, а псевдовектором, т.к. его направление связано с направлением вращения материальной точки.

Определение 17

Угловой скоростью $\vec{\omega}$ материальной точки называется предел, к которому стремится отношение малого угла $\Delta\vec{\varphi}$ к промежутку времени Δt , за который произошёл этот поворот, при стремлении Δt к нулю, т.е.

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\dot{\varphi}}. \quad (41)$$

Угловая скорость - псевдовектор. Её направление совпадает с направлением бесконечно малого вектора $d\vec{\varphi}$. При выборе направления вращения, как на рис. 12, вектор направлен вдоль положительного направления оси z . Связь линейной скорости $\vec{v}(t)$ с угловой $\vec{\omega}$ в общем случае имеет вид (см. рис. 13):

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}], \quad v = \omega r \sin(\alpha) = \omega R, \quad (42)$$

где \vec{r} - радиус-вектор, проведённый из лежащего на оси начала координат O , α - угол между векторами $\vec{\omega}$ и \vec{r} , R - расстояние от материальной точки M до оси вращения (радиус окружности, по которой движется точка M). Нормальное ускорение равно

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}, \quad a_n = v^2/R = \omega^2 R, \quad |\vec{R}| = R, \quad (43)$$

где \vec{R} - вектор, проведённый из центра окружности O' в точку M на ней. Знак минус в первом соотношении (43) отражает тот факт, что векторы \vec{a}_n и \vec{R} имеют противоположные направления (рис. 12).

Определение 18

Угловым ускорением $\vec{\beta}$ называется предел, к которому стремится отношение малого приращения угловой скорости $\Delta\vec{\omega}$ за счёт изменения скорости вращения материальной точки вокруг оси или малого поворота оси вращения в пространстве за время Δt при стремлении Δt к нулю, т.е.:

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\dot{\omega}} = \vec{\ddot{\varphi}}. \quad (44)$$

Угловое ускорение - псевдовектор. Модуль тангенциального ускорения \vec{a}_τ связан с модулем углового ускорения $\vec{\beta}$ следующим соотношением:

$$a_\tau = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| = \beta R. \quad (45)$$

Элементарное приращение угла поворота представимо в виде:

$$d\varphi = \omega dt. \quad (46)$$

Угол поворота $\Delta\varphi$ (угловое перемещение) за промежуток времени от t_0 до t определяется интегрированием угловой скорости по времени, т.е.

$$\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t \omega(u) du, \quad (47)$$

где $\varphi(t_0)$ - значение угла поворота в начальный момент времени t_0 . Геометрический смысл соотношения (47) показан на рис. 14. Элементарное приращение угловой скорости и её приращение за промежуток времени от t_0 до t определяются соотношениями:

$$d\omega = \beta dt, \quad \Delta\omega = \omega(t) - \omega(t_0) = \int_{t_0}^t \beta(u) du, \quad (48)$$

где $\omega(t_0)$ - значение угловой скорости в начальный момент времени t_0 . Геометрический смысл соотношения (48) показан на рис. 15.

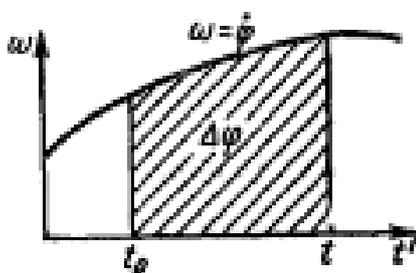


Рис. 14.

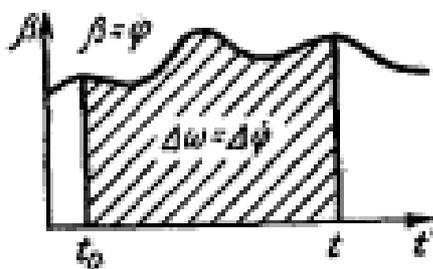


Рис. 15.

Средние угловые скорость $\langle \bar{\omega} \rangle$ и ускорение $\langle \bar{\beta} \rangle$ за промежуток времени $\Delta t_0 = t - t_0$ определяются стандартными соотношениями

$$\langle \bar{\omega} \rangle = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \omega(u) du = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad \langle \bar{\beta} \rangle = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \beta(u) du = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (49)$$

Единицы измерения в СИ данных величин следующие:

$$[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \frac{1}{\text{с}}, \quad [\beta] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = \frac{1}{\text{с}^2}. \quad (50)$$

Период обращения T материальной точки вокруг неподвижной оси вращения называется время, в течении которого точка поворота поворачивается на угол $\Delta\varphi$, т.е.

$$\int_0^{\Delta\varphi} \omega(u) du = 2\pi. \quad (51)$$

Число оборотов ν за единицу времени равно:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Delta\varphi} \omega(u) du. \quad (52)$$

Равномерное движение по окружности

Определение 19

Равномерным движением по окружности (или равномерным вращением) называется движение, при котором за равные промежутки времени происходит поворот на один и тот же угол. При таком движении угловая скорость $\bar{\omega}$ постоянна и равна средней угловой скорости $\langle \bar{\omega} \rangle$. Равномерное вращение характеризуется периодом обращения T . При $\Delta\varphi = 2\pi$ имеем $\Delta t = T$ и $T = 2\pi/\omega$. Число оборотов в единицу времени (частота) $\nu = \omega/2\pi = 1/T$. Если N - полное число оборотов, то угловое перемещение определяется соотношением: $\varphi = 2\pi N$. Между соотношениями, описывающими поступательное движение, и соотношениями, описывающими движение по окружности, существует прямая аналогия.

Поступательное движение	Вращательное движение
Путь S	Угол φ (в радианах)
Скорость v	Угловая скорость ω
Ускорение a	Угловое ускорение β

Равномерное движение

$$S = vt$$

$$\varphi = \omega t$$

Равноускоренное движение

$$S = (v^2 - v_0^2)/2a = v_0 t + at^2/2$$

$$\varphi = (\omega^2 - \omega_0^2)/2\beta = \omega_0 t + \beta t^2/2$$

$$S = (v + v_0)t/2$$

$$\varphi = (\omega + \omega_0)t/2$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2as} + v_0 + at$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\beta\varphi} + \omega_0 + \beta t$$

$$\langle v \rangle = (v_0 + v)/2 = v_0 + at = S/t$$

$$\langle \omega \rangle = (\omega_0 + \omega)/2 = \omega_0 + \beta t = \varphi/t$$

$$a = (v^2 - v_0^2)/2t = 2t^{-2}(S - v_0 t)$$

$$\beta = (\omega^2 - \omega_0^2)/2t = 2t^{-2}(\varphi - \omega_0 t)$$

$$\langle a \rangle = (a_0 + a)/2$$

$$\langle \beta \rangle = (\beta_0 + \beta)/2$$

$$t = 2S/(v_0 + v) = (\sqrt{2Sa + v_0^2} - v_0)/a$$

$$t = 2\varphi/(\omega_0 + \omega) = (\sqrt{2\varphi\beta + \omega_0^2} - \omega_0)/\beta$$

Пример 7

Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости $\omega = 20 \text{ рад/с}$ через $N = 10$ оборотов после начала вращения. Найти угловое ускорение β колеса.

Решение

При равноускоренном вращательном движении в рамках данной задачи применимы следующие уравнения движения: $\varphi = \omega_0 t + \beta t^2/2$ и $\omega = \omega_0 + \beta t$. В данной задаче $\omega_0 = 0$. Тогда уравнения движения принимают вид: $\varphi = \beta t^2/2$ и $\omega = \beta t$. Из последнего уравнения выражаем время $t = \omega/\beta$ и подставляем в первое уравнение $\varphi = \omega^2/2\beta$. Учитывая соотношение $\varphi = 2\pi N$ получаем уравнение для определения углового ускорения β в окончательной форме: $2\pi N = \omega^2/2\beta$. Тогда $\beta = \omega^2/4\pi N = 3,2 \text{ рад/с}^2$.

Пример 8

Колесо радиусом $R = 10 \text{ см}$ вращается с постоянным угловым ускорением $\beta =$

$3,14 \text{ рад/с}^2$. Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения:

- а) угловую скорость; б) линейную скорость; в) тангенциальное ускорение;
- г) нормальное ускорение; д) полное ускорение;
- е) угол, составляемый направлением полного ускорения с радиусом колеса.

Решение

- а) при равноускоренном вращательном движении угловая скорость ω изменяется со временем линейно $\omega = \omega_0 + \beta t$. В рамках данной задачи $\omega_0 = 0$. Тогда $\omega = \beta t$. К концу первой секунды $\omega = 3,14 \text{ рад/с}^2$;
- б) с учетом соотношений $v = \omega R$ и $\omega = \omega_0 + \beta t$ получаем следующую зависимость линейной скорости от времени $v = \beta t R$. Тогда к концу первой секунды $v = 0,314 \text{ м/с}$;
- в) тангенциальное ускорение определяется следующим соотношением $a_\tau = \beta R$. Подстановка указанных в условии задачи параметров позволяет получить: $a_\tau = 0,314 \text{ м/с}^2$;
- г) нормальное ускорение определяется следующим соотношением $a_n = \omega^2 R = \omega \beta t^2 R$. Подстановка указанных в условии задачи параметров позволяет получить: $a_n = 0,986 \text{ м/с}^2$;
- д) полное ускорение определяется следующим соотношением: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = a_\tau \sqrt{1 + \beta^2 t^2}$. Подстановка указанных в условии задачи параметров позволяет получить: $a = 1,03 \text{ м/с}^2$;
- е) синус искомого угла определяется отношением тангенциального и полного ускорений: $\sin(\alpha) = a_\tau / a = 1 / \sqrt{1 + \beta^2 t^2}$. К концу первой секунды движения $\sin(\alpha) = 0,305$. Тогда $\alpha = 17^\circ 46'$. Следует заметить, что в начальный момент времени полное ускорение направлено по касательной, т.е. $a = a_\tau$. При $t \rightarrow \infty$ полное ускорение направлено по нормали, т.к. тангенциальное ускорение постоянно, а нормальное ускорение возрастает пропорционально квадрату времени.

2. Динамика материальной точки

Определение 20

Динамика - раздел механики, в котором изучаются законы движения тел под действием приложенных к ним сил. Различают динамику вращательного движения и динамику поступательного движения.

Причиной движения тел и изменения его характера с течением времени является взаимодействие тел. Различают 4 типа взаимодействия:

- 1) гравитационное, действующее между всеми телами, имеющими массу;
- 2) электромагнитное, действующее между частицами и телами, обладающими электрическими зарядами;
- 3) сильное, действующее между элементарными частицами, называемыми адронами;
- 4) слабое, обуславливающее процессы превращения некоторых элементарных частиц и атомных ядер.

Определение 21

Сила как количественная характеристика является мерой интенсивности взаимодействия. Сила является вектором. Она задаётся модулем, направлением и точкой приложения.

Определение 22

Линия, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы.

В механике учитываются силы гравитации, а также упругости и трения, являющиеся остаточными от более общих электромагнитных сил. Основная задача динамики состоит в определении положения тела в произвольный момент времени по известному начальному положению тела, начальной скорости и силам, действующим на тело.

Определение 23

Силы, действующие на данное тело со стороны других тел (или системы тел), называются внешними силами. Силы, действующие между частями одного и того же тела, называются внутренними силами.

Определение 24

Система тел, на которую не действуют внешние силы, называется изолированной (замкнутой) системой.

Законы сложения сил

Если на тело действует несколько внешних сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$, то их можно заменить одной равнодействующей силой \vec{F} , равной геометрической сумме всех действующих на тело сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N \equiv \sum_{n=1}^N \vec{F}_n. \quad (53)$$

1. Если две силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 действуют вдоль одной прямой, то равнодействующая сила направлена в сторону большей силы, а по величине равна их сумме:

$$F = F_1 + F_2, \quad (53a)$$

если \vec{F}_1 и \vec{F}_2 направлены в одну сторону, или разности

$$F = F_1 - F_2, \quad (53б)$$

если \vec{F}_1 и \vec{F}_2 имеют противоположное направление (рис. 16).

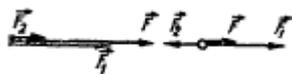


Рис. 16.

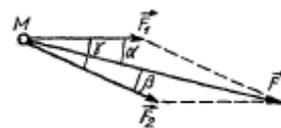


Рис. 17.

2. Если две силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 приложены к одной точке M и направлены под углом γ друг к другу, то равнодействующая сила \vec{F} определяется правилом параллелограмма (рис. 17). Её величину можно оценить с помощью соотношения:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\gamma)}, F = F_1 \sin(\gamma) / \sin(\beta), F = F_2 \sin(\gamma) / \sin(\alpha), \quad (53в)$$

3. Если на тело действует более двух сил, то, применяя к ним последовательно

правило параллелограмма, можно найти их равнодействующую.

Другой способ сложения сил показан на рис. 18. Он заключается в том, что вектор \vec{F}_2 переносится параллельно самому себе в конец силы \vec{F}_1 , а вектор \vec{F}_3 - в конец перенесённой силы \vec{F}_2 . Соединяя начало силы \vec{F}_1 с концом перенесённой силы \vec{F}_3 , получаем равнодействующую силу \vec{F} . Этот способ можно обобщить на случай большего, чем три числа внешних сил.

Если силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 приложены к различным точкам M_1 и M_2 макроскопического тела, то для определения равнодействующей силы \vec{F} следует перенести силы вдоль их линий действия до точки пересечения O , а затем найти силу \vec{F} по правилу параллелограмма. При этом будут определены величина и направление силы \vec{F} , но не точка её приложения (O не является точкой приложения силы \vec{F}). Движение тел под действием внешних сил описывается законами динамики. Эти законы являются обобщением опытных фактов. В основе классической механики лежат три закона динамики, сформулированные Ньютоном в 1687 году.

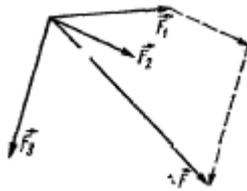


Рис. 18.

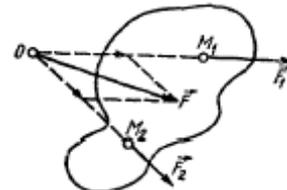


Рис. 19.

Первый закон Ньютона

Формулировка

Тело (материальная точка) находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, если оно не подвержено внешним воздействиям со стороны других тел.

Свойство тела сохранять свою скорость в отсутствие взаимодействия с другими телами называется инертностью. Мерой инертности тела (материальной точки) в поступательном движении является физическая величина, называемая “инертной массой” или просто “массой” тела. Наличие у тела массы подтверждается опытами, которые показывают, что одинаковое воздействие сообщает разным телам разные по величине ускорения. Масса является одной из основных величин, характеризующих механическое движение тела. Масса тела, содержащаяся в единице объёма, называется её плотностью. Плотность ρ тела в данной точке равна пределу, к которому стремится отношение массы Δm элемента тела в окрестности данной точки к объёму ΔV этого элемента при неограниченном его уменьшении:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{d m}{d V}. \quad (54)$$

Плотность ρ является функцией трёх пространственных координат x , y и z , характеризующих точку внутри объёма V , заданного размерами тела:

$\rho = \rho(x, y, z) = \rho(\vec{r})$. Массу тела m можно получить интегрированием плотности по объёму тела:

$$m = \int_V \rho dV = \int_V \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad (55)$$

где dx , dy и dz - линейные размеры элементарного объёма dV , отсчитанные по осям координат x , y и z . Средняя плотность определяется соотношением:

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{V} \int_V \rho dV = \frac{m}{V}. \quad (56)$$

Определение 25

Тело называется однородным, если его плотность совпадает с её средним значением, т.е. $\rho = \langle \rho \rangle = m/V$. Единицей плотности в Си является отношение $[\rho] = \text{кг/м}^3$.

Следствие первого закона Ньютона

Из первого закона Ньютона следует, что любое изменение состояния движения тела является следствием действия на него сил. Связь между действующей силой и ускорением, приобретаемой телом под действием силы, устанавливает второй закон Ньютона. Первый закон Ньютона не является абсолютным, т.к. он выполняется не во всех системах отсчёта.

Определение 26

Система отсчёта, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется инерциальной. Эквивалентным определением инерциальной системы отсчёта является следующее: система, по отношению к которой пространство является однородным (т.е. в нём выполняется закон сохранения импульса) и изотропным (т.е. справедлив закон сохранения момента импульса), а время - однородным (т.е. справедлив закон сохранения энергии системы) называется инерциальной системой отсчёта.

Существование инерциальной системы отсчёта в классической механике является постулатом, обобщающим большую совокупность опытных данных. Физическое содержание первого закона Ньютона, таким образом, сводится к утверждению, что существует по крайней мере одна инерциальная система отсчёта.

Пример 8

На горизонтальном участке пути маневровый тепловоз толкнул вагон. Какие тела действуют на вагон во время и после толчка? Как будет двигаться вагон под влиянием этих сил?

Решение

Если тепловоз в состоянии преодолеть трение, вагон сдвинется с места, двигаясь ускоренно. После толчка на движущийся вагон будет действовать трение о рельсы и сопротивление воздуха, а также компенсирующие друг друга сила тяжести и сила реакции рельсов. В этой ситуации вагон будет двигаться равномерно в горизонтальном направлении.

Второй закон Ньютона

Формулировка

Второй закон Ньютона (1687) устанавливает связь между действующей на тело силой \vec{F} и ускорением \vec{a} , приобретаемым телом под действием этой силы: ускорение \vec{a} прямо пропорционально действующей силе \vec{F} и обратно пропорционально массе m тела, т.е.

$$\vec{a} = \vec{F}/m, \quad (57)$$

или произведение массы тела на ускорение равно действующей силе:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad m\dot{\vec{v}} = \vec{F}, \quad m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}, \quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (58)$$

Согласно второму закону Ньютона сила \vec{F} в общем случае является функцией радиус-вектора \vec{r} , скорости \vec{v} и времени t , т.е. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Из принципа относительности Галилея и однородности пространства следует, что сила \vec{F} зависит не от \vec{r} и \vec{v} , а от разности координат и скоростей материальной точки и точек, с которыми она взаимодействует. Для двух материальных точек 1 и 2, взаимодействующих с силой \vec{F} , получаем:

$$\vec{F} = \vec{F}(r_2 - r_1, v_2 - v_1, t), \quad (59)$$

где r_1, r_2, v_1, v_2 - координаты и скорости точек 1 и 2. Установлением вида функции (59) занимается физическая механика. Единицей измерения силы является ньютон: $[F] = \text{H} = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$. Ньютон является силой, которая сообщает телу массой 1 кг ускорение $1 \text{ м}/\text{с}^2$.

Уравнение (58) называется уравнением движения тела (материальной точки) или основным законом движения. Относительно времени это дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение с начальными условиями, определяющими положение материальной точки $\vec{r}(t_0)$ в начальный момент времени t_0 и её скорость $\vec{v}(t_0)$ в любой последующий момент времени $t > t_0$. Дифференциальное уравнение (58) эквивалентно трём следующим:

1) в декартовой системе координат:

$$m\dot{x} = F_x, \quad m\dot{y} = F_y, \quad m\dot{z} = F_z, \quad (60a)$$

где F_x, F_y и F_z - проекции вектора силы \vec{F} на координатные оси с ортами \vec{i}, \vec{j} и \vec{k} ;

2) в сферической системе координат:

$$m[r - t\dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) - t\dot{\theta}^2] = F_r, \quad m(r\dot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin(\theta) + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta) = F_\varphi, \\ m[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin(\theta)\cos(\theta)] = F_\theta, \quad (60b)$$

где F_r, F_φ и F_θ - проекции вектора силы \vec{F} на координатные оси с ортами $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ и \vec{e}_θ .

В общем случае, когда масса тела является функцией времени (движение с

переменной массой), основной закон динамики имеет вид:

$$d \vec{p} / d t = \vec{F}, \quad (61)$$

где величина

$$\vec{p} = m \vec{v} = m d \vec{r} / d t \quad (62)$$

называется импульсом или количеством движения материальной точки массой m , движущейся со скоростью \vec{v} .

Интегральная форма основного закона движения

Закон динамики (61) можно переписать в интегральной форме:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{F}(\tau) d \tau, \quad (61a)$$

где $\Delta \vec{p}$ характеризует изменение импульса за промежуток времени от t_0 до t и называется импульсом силы.

При движении тела под действием силы \vec{F} , не зависящей от времени, импульс силы:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F}(t) \Delta t, \quad \Delta t = t - t_0. \quad (63)$$

Импульс $\vec{p}(t)$ при этом определяется соотношением:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(t_0) + \vec{F}(t - t_0), \quad (64)$$

где $\vec{p}(t_0)$ - импульс тела в начальный момент времени t_0 . При движении по инерции $\vec{F} = 0$ и $\vec{p}(t) = const$. При движении под действием переменной силы изменение импульса определяется соотношением (61a).

Пример 9

Тело массой $m = 0,5$ кг движется прямолинейно. Зависимость пройденного телом пути S от времени t определяется уравнением: $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, где $C = 5$ м/с² и $D = 1$ м/с³. Найти силу F , действующую на тело в конце первой секунды движения.

Решение

Согласно второму закону Ньютона сила определяется произведением массы тела на его ускорение, т.е. $F = ma$. Ускорение является второй производной по времени от пройденного пути. Тогда $a = 2C - 6Dt$. Подстановка указанных в условии параметров во второй закон Ньютона позволяет получить: $F = 0,5(2 \cdot 5 - 6 \cdot 1 \cdot 1) = 2$.

Пример 10

Стальная проволока некоторого диаметра выдерживает силу натяжения $F = 4400$ Н. С каким наибольшим ускорением можно поднимать груз массой $m = 400$ кг, подвешенный на этой проволоке, чтобы она при этом не разорвалась?

Решение

Согласно второму закону Ньютона сила определяется произведением массы тела на его ускорение, т.е. $F = ma$. Тогда $a = F/m$. Подстановка указанных в условии параметров в последнее соотношение позволяет получить: $a = 4400/400 = 11$

m/c^2 .

Третий закон Ньютона

Формулировка (1687)

Силы, с которыми действует одно на другое взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению. Пусть \vec{F}_{12} - сила, с которой тело 1 действует на тело 2, а \vec{F}_{21} - сила, с которой тело 2 действует на тело 1. Тогда $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (65)$$

Третий закон Ньютона неявно содержит предположение о бесконечно большой скорости распространения в поле, через которое осуществляется взаимодействие тел. В классической механике, рассматривающей движение тел со скоростями v , много меньшими скорости света в вакууме c , ($v \ll c$), указанное выше предположение выполняется с очень высокой точностью.

Следствия законов Ньютона

1) Закон сохранения импульса.

Пусть система двух взаимодействующих тел 1 и 2. Тогда из (61) и (62) следует закон сохранения полного импульса системы:

$$\vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) = const, \quad (66)$$

где $\vec{p}_1(t)$ и $\vec{p}_2(t)$ - импульсы тел 1 и 2. Этот результат обобщается на случай системы из N взаимодействующих материальных точек (частиц). Предполагая, что взаимодействие частиц парное, из (65) получаем:

$$\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0, \quad (67)$$

где i и k - любые частицы системы, $i \neq k$. Величины \vec{F}_{ik} являются внутренними силами данной системы. Согласно (67), геометрическая сумма всех внутренних сил, действующих в системе, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \vec{F}_{ik} = 0, \quad (68)$$

т.е. равнодействующая внутренних сил системы равна нулю. Уравнения движения для всех N частиц имеют вид:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \vec{F}_{ik}, \quad (69)$$

где \vec{F}_i - внешние силы, действующие на i -ю частицу; $\sum \vec{F}_{ik}$ - сумма внутренних сил, действующие на эту частицу со стороны всех остальных частиц системы ($i \neq k$). Для всей системы из N частиц, просуммировав N уравнений (69), получим уравнение

$$d \vec{p} / dt = \vec{F},$$

где

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N = \sum_{k=1}^N \vec{p}_k \quad (70)$$

- импульс всей системы (или полный импульс),

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \quad (71)$$

- равнодействующая всех сил. Для замкнутой системы внешние силы \vec{F}_i , действующие на систему, равны нулю и полный импульс сохраняется:

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^N \vec{p}_k = \text{const} . \quad (72)$$

Соотношение (72) является законом сохранения полного импульса для замкнутой системы материальных точек. Закон сохранения импульса является следствием однородности пространства. Однородность пространства означает, что при любом параллельном переносе замкнутой системы как целого в пространстве её механические свойства не изменяются. Закон сохранения полного импульса справедлив для незамкнутых систем, при условии, что сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю.

Пример 11

Тело массой $m_1=1$ кг, движущееся горизонтально со скоростью $v_1=1$ м/с, догоняет второе тело массой $m_2=0,5$ кг и неупруго сталкивается с ним. Какую скорость получают тела, если

а) второе тело стояло неподвижно, т.е. $v_1=0$ м/с;

б) второе тело двигалось со скоростью $v_1=0,5$ м/с в том же направлении, что и первое тело;

в) второе тело двигалось со скоростью $v_1=-0,5$ м/с в направлении, противоположном направлению первого тела.

Решение

В соответствии с соотношением (70) получаем: $m_1v_1+m_2v_2=m_{\Sigma}v_{\Sigma}$, m_{Σ} и v_{Σ} - результирующая масса и скорость тел после столкновения. Искомая результирующая скорость определяется следующим соотношением: $v_{\Sigma}=(m_1v_1+m_2v_2)/m_{\Sigma}$. Подстановка указанных в условии параметров в последнее соотношение позволяет получить следующие значения искомой скорости:

а) $v_{\Sigma}=2/3$ м/с; б) $v_{\Sigma}=5/6$ м/с; в) $v_{\Sigma}=0,5$ м/с.

1) Закон сохранения момента импульса.

Определение 27

Моментом импульса частицы массой m относительно точки O (рис. 20) называется псевдовектор \vec{L} , равный векторному произведению векторов \vec{r} и \vec{p} :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}), \quad (73)$$

где \vec{r} - радиус-вектор частицы, проведённой из точки O , $\vec{p} = m\vec{v}$ - её импульс, \vec{v} - скорость.

Определение 27а

Моментом импульса системы частиц массой m относительно точки O (рис.

21) называется векторная сумма моментов импульсов частиц \vec{L}_i , составляющих систему. Для системы из N частиц:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i). \quad (73a)$$

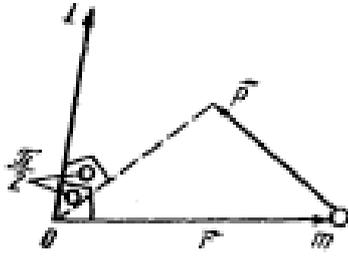


Рис. 20.

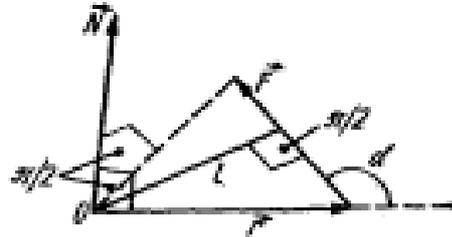


Рис. 21.

Определение 28

Моментом силы \vec{F} относительно точки O , из которой проведён радиус-вектор \vec{r} в точку приложения силы (рис. 21), называется псевдовектор \vec{N} , равный векторному произведению векторов \vec{r} и \vec{F} :

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (74)$$

Модуль момента силы (рис. 21) определяется стандартным соотношением:

$$N = r \cdot F \cdot \sin(\alpha). \quad (75)$$

Величина $l = r \cdot \sin(\alpha)$ называется плечом силы \vec{F} относительно точки O .

Из уравнений движения для N частиц системы (69) и определений (73), (73a) и (74) следуют уравнения движения для моментов импульсов \vec{L}_i :

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{N}_i + \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^N \vec{N}_{ik}, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (76)$$

где $\vec{N}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ - момент внешней силы \vec{F}_i относительно точки O , действующей на i -ю частицу с радиус-вектором \vec{r}_i , проведённым из точки O , $\vec{N}_{ik} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}$ - момент внутренней силы \vec{F}_{ik} .

Из равенства нулю равнодействующей внутренних сил (68) следует, что момент этой силы также равен нулю:

$$\vec{N}_{\text{внутр}} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \vec{N}_{ik} = 0. \quad (77)$$

Момент импульса системы из N частиц относительно точки O согласно (73a), (76) и (77) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}, \quad (78)$$

где $\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i$ - геометрическая сумма моментов внешних сил относительно точки O . Для замкнутой системы моменты внешних сил равны нулю: $\vec{N}_i = 0$ и

справедлив закон сохранения импульса:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \vec{L} = const. \quad (79)$$

Закон сохранения импульса является следствием изотропии (свойства замкнутой механической системы не зависят от её поворота как целого в пространстве). Закон сохранения момента импульса выполняется и для незамкнутых систем в случае, когда сумма моментов всех внешних сил равна нулю: $\vec{N} = 0$. Соотношения (73) и (73a) определяют момент импульса частицы \vec{L} и момент силы \vec{N} относительно точки O (рис. 20, 21). Моменты \vec{L} и \vec{N} являются векторами. Их проекции на ось z , проходящую через точку O , называют моментами импульса и силы относительно этой оси и обозначают соответственно L_z и N_z . Величины L_z и N_z связаны друг с другом уравнением движения: $dL_z/dt = N_z$. Для остальных компонент можно записать аналогичные уравнения.

Плечом силы \vec{F} относительно оси z называется кратчайшее расстояние между осью z и линией действия силы \vec{F} . Момент силы относительно оси z равен произведению составляющей силы \vec{F} , перпендикулярной этой оси, на соответствующее плечо силы. Момент импульса относительно оси равен произведению составляющей импульса \vec{p} , перпендикулярной оси, на то же плечо силы. Знаки этих произведений определяются векторами \vec{r} , \vec{p} , \vec{F} .

Моменты силы и импульса частицы зависят от положения точки, относительно которой они определяются. Пусть \vec{L} и \vec{N} - моменты относительно точки O , а \vec{L}' и \vec{N}' - моменты относительно точки O' . Тогда

$$\vec{L} = \vec{L}' - \vec{R} \times \vec{p}, \vec{N} = \vec{N}' - \vec{R} \times \vec{F}, \vec{R} = \vec{r}' - \vec{r}, \quad (80)$$

где \vec{r}' и \vec{r} - радиус-векторы одной и той же частицы относительно точек O' и O .

Пример 12

Шар радиусом 10 см и массой 5 кг вращается вокруг оси симметрии по закону $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $B = 2 \text{ рад/с}^2$, $C = -0,5 \text{ рад/с}^3$. Определить моменты силы и импульса относительно оси вращения для момента времени $t = 3 \text{ с}$.

Решение

Согласно уравнению динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси: $N_z = J_z \beta$, где $J_z = 2mR^2/5$ - момент инерции шара; угловое ускорение определяется следующим соотношением: $\beta = d\varphi/dt = 2B + 3Ct$. В окончательной форме общее соотношение для рассматриваемой компоненты момента силы имеет следующий вид: $N_z = 2mR^2(2B + 3Ct)/5$. Подстановка указанных в условии задачи параметров в последнее соотношение позволяет получить следующие значения искомой компоненты момента силы: $N_z = -0,01 \text{ Н}\cdot\text{м}$. С учё-

том уравнения $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$ получаем соотношение для компоненты момента силы:

$L_z = 2mR^2(2Bt + 3Ct^2/2)/5$. Подстановка указанных в условии задачи параметров в последнее соотношение позволяет получить следующие значения искомой ком-

поненты момента импульса: $L_z=0,105 \text{ м}^2/\text{с}$.

Движение центра масс системы

В нерелятивистской механике из-за независимости массы от скорости полный импульс системы можно представить в виде произведения суммарной массы системы

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_N = \sum_{i=1}^N m_i, \quad (81)$$

где m_i - масса i -й частицы, на скорость центра инерции системы \vec{v}_C :

$$\vec{p} = M \vec{V}_C. \quad (82)$$

Определение 29

Центром инерции (центром масс) системы называется точка C , положение которой задаётся радиус-вектором:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}. \quad (83)$$

При этом

$$\vec{V}_C = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i / M, \quad (84)$$

где \vec{v}_i - скорость частицы i .

Для замкнутых систем

$$\vec{p} = M \vec{V}_C = \text{const}, \quad (82a)$$

т.е. центр инерции замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно или остаётся в состоянии покоя. Система отсчёта, в которой центр инерции покоится ($\vec{V}_C = 0$), называется системой центра инерции. Система отсчёта, связанная с измерительным прибором, называется лабораторной системой отсчёта. Между динамическими переменными, описывающими свойства системы в обеих системах отсчёта, существует однозначная связь.

В общем случае $\vec{V}_C \neq 0$ согласно (61) и (82) имеем уравнение движения для центра масс системы:

$$M \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{F}. \quad (85)$$

Из последнего уравнения следует теорема о движении центра масс: центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе системы, а действующая сила - геометрической сумме внешних сил, действующих на систему.

Движение тела с переменной массой

Уравнение Мещерского

Определение 30

Под движением с переменной массой понимают такое движения тела, при

котором его масса с течением времени изменяется, т.е. масса m является функцией времени t : $m=m(t)$.

Согласно второму закону Ньютона (61) бесконечно малое приращение импульса

$$d \vec{p} = \vec{F} dt, \quad (86)$$

где \vec{F} - равнодействующая всех внешних сил. Приращение $d \vec{p}$ - изменение импульса тела за бесконечно малое приращение времени dt :

$$d \vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t). \quad (87)$$

Пусть в момент времени t масса тела равна $m(t)$, а его скорость - \vec{v} . Через время dt его масса будет $m(t+dt)$, а скорость $\vec{v} + d\vec{v}$. Если масса тела со временем уменьшается (реактивное движение), то приращение массы dm за время dt отрицательно:

$$m(t+dt) - m(t) = -dm < 0. \quad (88)$$

Пусть масса dm покидает тело со скоростью \vec{v}' . Тогда

$$\vec{p}(t+dt) = (m - dm)(\vec{v} - d\vec{v}) + \vec{v}' dm, \quad \vec{p}(t) = m\vec{v}. \quad (89)$$

Принебрегая произведением $dm d\vec{v}$ как бесконечно малой высшего порядка, из (86)-(89) получаем

$$m d\vec{v} = (\vec{v}' - \vec{v}) dm + \vec{F} dt. \quad (90)$$

Из данного соотношения следует уравнение Мещерского для движения тела с переменной массой:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_{отн} \frac{dm}{dt} + \vec{F}, \quad (91)$$

где $\vec{v}_{отн} = \vec{v}' - \vec{v}$ - скорость истечения массы относительно тела. Величина

$$\vec{F}_{тяг} = \vec{v}_{отн} \frac{dm}{dt}, \quad (92)$$

называется силой тяги или реактивной силой. Она равна силе, с которой действует на тело покидающая его масса.

Формула Циолковского

Следствия из уравнения Мещерского:

1) внешние силы равны нулю: $\vec{F} = 0$. Тогда уравнение движения

$$m d\vec{v} = \vec{v}_{отн} dm \quad (90a)$$

при $\vec{v}_{отн} = const$ имеет решение вида

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - \vec{v}_{отн} \ln[m_0/m(t)], \quad (93)$$

где \vec{v}_0 и m_0 - скорость и масса тела в начальный момент времени;

2) движение тела прямолинейно в направлении, противоположном вектору $\vec{v}_{отн} = const$. Из (91) следует формула Циолковского (1895)

$$m_0/m(t) = \exp(v/v_{омн}). \quad (94)$$

3) движение ракеты в вертикальном направлении в гравитационном поле Земли (g - ускорение свободного падения).

Уравнение движения

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v}_{омн} \frac{dm}{dt} - m\vec{g}. \quad (95)$$

Его решение при условии $\vec{v}_{омн} = const$ имеет вид

$$\vec{v} = \vec{v}_{омн} \ln[m_0/m(t)] - \vec{g}t. \quad (96)$$

(сопротивление воздуха и изменение g с высотой не учитывается). Для того, чтобы ракета могла двигаться в поле тяготения, масса, выбрасываемая ракетой за единицу времени, должна удовлетворять условию

$$m_{газ} > -\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 g}{v_{омн}} e^{\frac{-gt}{v_{омн}}}. \quad (97)$$

Пример 13

Автоматическая станция совершила мягкую посадку на поверхность Луны. Масса станции после выведения на траекторию полета к Луне была равна $m_0 = 1583$ кг. За время $t_0 = 48$ с до посадки станции была включена тормозная двигательная установка. Система управления посадкой обеспечила гашение скорости с $v_0 = 2600$ м/с до нуля у поверхности Луны. Масса топлива составляла половину массы станции перед ее торможением, и можно считать, что оно израсходовано полностью. Какая реактивная сила действовала на станцию при посадке? Силу тяготения не учитывать.

Решение

Требование отсутствия сил тяготения означает, что в процессе торможения внешние силы на станцию не действуют. Следовательно, уравнение движения станции (уравнение Мещерского) имеет вид: $m \frac{dv}{dt} = -v_{омн} \frac{dm}{dt}$, где m - масса станции с топливом в момент времени t после начала торможения, v - ее скорость,

$v_{омн}$ - скорость выбрасываемых газов относительно станции. Реактивная сила торможения, всегда направленная навстречу скорости $v_{омн}$, равна $F_R = -v_{омн} \frac{dm}{dt}$.

При посадке станции тормозные двигатели выбрасывают струю газа по направлению движения. Определим скорость истечения газов $v_{омн}$. Для этого разделим переменные в первом уравнении данной задачи и проинтегрируем обе части

полученного выражения: $\int_{v_0}^0 dv = -v_{омн} \int_{m_0}^{m_0/2} \frac{dm}{m}$. Интегрирование обеих частей

уравнения позволяет получить $v_{омн} = -v_0 / \ln 2$. Аналогично, разделив переменные в во втором уравнении данной задачи и интегрируя обе его части получаем:

$F_R \int_0^{t_0} dv = -v_{\text{омн}} \int_{m_0}^{m_0/2} dm$, получаем $F_R = m_0 v_{\text{омн}} / 2t_0$. Из последнего соотношения с учётом предыдущего окончательно получаем: $F_R = -m_0 v_0 / 2t_0 \ln 2$. Знак «минус» означает, что сила торможения противоположна направлению скорости станции \vec{v}_0 . Подстановка указанных в условии задачи параметров в последнее соотношение позволяет получить следующую величину искомой силы: $F_R = 6,2 \cdot 10^4$ Н.

Движение тела под действием силы трения

При соприкосновении твёрдых тел между ними возникает взаимодействие, препятствующее их относительному перемещению. Силы такого взаимодействия называются силами трения. Силы трения действуют вдоль поверхностей соприкасающихся тел (т.е. по касательной к трущимся поверхностям) и направлены в сторону, противоположную перемещению этих тел относительно друг друга.

Определение 31

Трение между поверхностями двух твёрдых тел при отсутствии какой-либо прослойки называется сухим трением.

Виды сил сухого трения

1) Сила, возникающая соприкасающимися и покоящимися одно относительно другого телами, называется силой трения покоя. Сила трения покоя не является однозначной величиной. С увеличением величины внешней силы $\vec{F}_{\text{вн}}$, стремящейся придать покоящимся телам относительное перемещение, сила трения покоя возрастает от нуля до некоторой максимальной величины $\vec{F}_{\text{мп}}$, такой, что при выполнении условия $\vec{F}_{\text{вн}} > \vec{F}_{\text{мп}}$ тела будут двигаться. Пусть \vec{F} - минимальная внешняя сила, при которой тела начинают двигаться, F_n - модуль силы нормального давления, прижимающей одно тело к другому (или опоре). Тогда по определению (рис. 22)

$$\vec{F}_{\text{мп}} = -\vec{F}, F_{\text{мп}} = \mu F_n, \quad (98)$$

где μ - коэффициент трения покоя. Сила \vec{N} , равная по величине \vec{F}_n и противоположная ей по направлению, называется силой нормальной реакции опоры

$$\vec{N} = -\vec{F}_n. \quad (99)$$

В соответствии с (98) сила трения покоя равна по модулю и противоположна по направлению той минимальной внешней силе, которая может вызвать скольжение одного тела относительно другого. Она увеличивается с увеличением силы нормального давления и не зависит от площади соприкасающихся поверхностей. Гладкая обработка поверхностей уменьшает коэффициент трения.

2) Сила, возникающая между соприкасающимися и движущимися одно относительно другого телами, называется силой трения скольжения. Сила трения скольжения меньше силы трения покоя. Она зависит от рода и состояния трущихся поверхностей, а также скорости их взаимного перемещения. По определению сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{мп}}^c$ равна по модулю и противоположна по направлению той внешней силе \vec{F}^c , при которой соприкасающиеся те-

ла движутся равномерно относительно друг друга:

$$\vec{F}_{mp} = -\vec{F}^C, F_{mp}^C = \mu^C N. \quad (100)$$

Величина μ^C называется коэффициентом трения скольжения. В общем случае $\mu^C < \mu$ и зависит от скорости взаимного перемещения тел v , т.е. $\mu^C < \mu(v)$. При малых скоростях для заданной пары $\mu^C \approx \mu$.

3) Сила, действующая со стороны опоры на катящееся по нему тело, называется силой трения качения. Сила трения качения F_{mp}^k много меньше силы трения скольжения F_{mp}^C :

$$F_{mp}^k \ll F_{mp}^C. \quad (101)$$

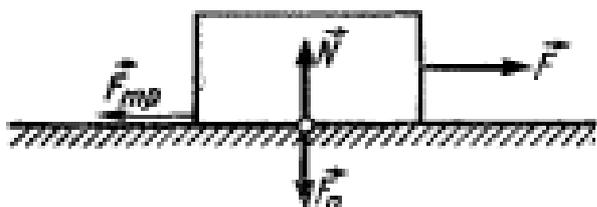


Рис. 22.

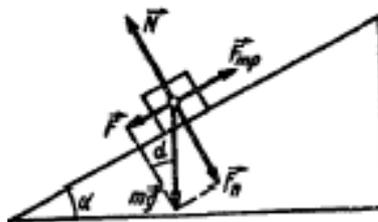


Рис. 23.

Сила трения качения F_{mp}^k равна по модулю и противоположна по направлению той внешней силе F^k , при которой тело катится по опоре равномерно:

$$\vec{F}_{mp}^k = -\vec{F}^k, F_{mp}^k = \mu^k N, \quad (102)$$

где μ^k - коэффициент трения качения, $\mu^k \ll \mu^C$. Коэффициент μ^k зависит от радиуса катящегося тела.

Определения коэффициента трения

Коэффициент трения можно определить с помощью изучения движения тела по наклонной плоскости под действием силы тяжести $\vec{P} = m \vec{g}$, где \vec{g} - ускорение свободного падения. Уравнение движения тела массой m по наклонной плоскости с углом наклона α (рис. 23) имеет согласно второму закону Ньютона вид:

$$m \vec{a} = \vec{F}_{mp}^k + \vec{N} + m \vec{g}. \quad (103)$$

Учитывая, что

$$F = m \cdot g \cdot \sin(\alpha), F_{mp}^k = \mu \cdot F_n = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha), \quad (104)$$

получаем для ускорения \vec{a} , с которым движется тело, соотношение

$$\vec{a} = \vec{g} [\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)]. \quad (105)$$

При движении тела с постоянной скоростью ускорение $a = dv/dt = 0$ и коэффициент трения скольжения

$$\mu^C = \tan(\alpha). \quad (106)$$

Соотношение (106) позволяет определить и коэффициент трения покоя μ . В этом

случае α - угол наклонной плоскости, при котором тело начинается двигаться по ней.

Пример 14

Тело лежит на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha=4^\circ$ (рис. 24).

- а) При каком предельном коэффициенте трения μ_{np} тело начинает скользить по наклонной плоскости?
 б) С каким ускорением a будет скользить тело по плоскости, если коэффициент трения $\mu=0,03$?

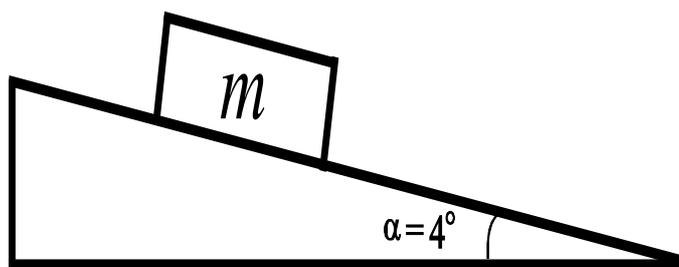


Рис.24.

Решение

- а) На первом этапе определим какие силы действуют на рассматриваемое тело. К ним относятся сила тяжести \vec{F}_T , сила реакции опоры \vec{N} , сила трения \vec{F}_{Tp} . Выберем систему координат Oxy таким образом, чтобы ось абсцисс совпадала с наклонной плоскостью. Второй закон Ньютона в данном случае имеет следующий вид: $\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_T + \vec{N} + \vec{F}_{Tp}$. Проекция силы \vec{F} на координатные оси имеют следующий вид:

$$\begin{cases} m a_x = F_T \sin(\alpha) - F_{Tp} = m g \sin(\alpha) - \mu N \\ m a_y = -F_T \cos(\alpha) + N = 0 \end{cases}$$

С учётом второго уравнения данной системы первое уравнение принимает следующий вид

$$m a_x = m g \sin(\alpha) - \mu m g \cos(\alpha) = m g [\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)].$$

Сокращение массы в левой и правой частях уравнения приводит данное уравнение к более простому виду

$$a_x = g [\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)].$$

Если значение коэффициента трения не превышает предельного значения μ_{np} , тело останется неподвижным. Тогда

$$\sin(\alpha) - \mu_{np} \cos(\alpha) = 0,$$

т.е.

$$\mu_{np} = \operatorname{tg}(\alpha) \approx 0,07.$$

- б) Подстановка указанных в условии задачи параметров в уравнение

$$a_x = g [\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)].$$

позволяет получить $a_x \approx 0,0098 \text{ м/с}^2$.

3. Работа и энергия

Работа и мощность

Определение 32

Если сила, действующая на материальную точку, перемещает её на некоторое расстояние, то считается, что эта сила совершает над материальной точкой работу. Элементарной работой dA силы \vec{F} , которую можно считать постоянной (не зависящей от перемещения) на элементарном перемещении $d\vec{r}$, называется скалярное произведение силы \vec{F} на перемещение $d\vec{r}$:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F \cos(\alpha) ds = F_r ds, \quad (107)$$

где α - угол между векторами \vec{F} и $d\vec{r}$ (рис. 25), $ds = |d\vec{r}|$ - длина элементарного перемещения $d\vec{r}$, $F_r = F \cdot \cos(\alpha)$ - проекция силы \vec{F} на направление перемещения $d\vec{r}$.

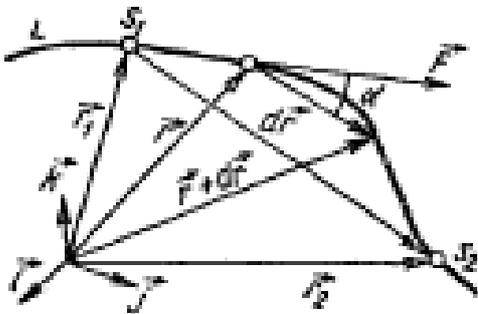


Рис. 25.

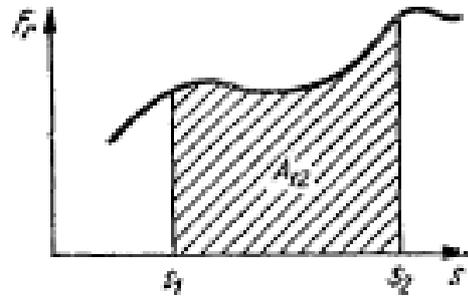


Рис. 26.

В декартовых координатах

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (108)$$

где dx , dy и dz - приращения координат x , y и z радиус-вектора \vec{r} , F_x , F_y , и F_z - проекции силы на координатные оси. Работа A_{12} силы \vec{F} вдоль криволинейной траектории L от точки s_1 до точки s_2 равна сумме всех элементарных работ dA , производимых силой \vec{F} на этом отрезке траектории, и определяемой интегралом

$$A_{12} = \int_L \vec{F} d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos(\alpha) ds = \int_{s_1}^{s_2} F_r ds. \quad (109)$$

Другие представления:

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz, \quad A_{12} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = \int \vec{v} d\vec{p}, \quad A_{12} = m \int_{v_1}^{v_2} v dv, \quad (110)$$

где x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 - декартовы координаты точек s_1 и s_2 , v_1 и v_2 - начальная и конечная скорости материальной точки. Работа A_{12} - скалярная величина. Она представляет собой площадь под кривой $F_r(s)$ между точками s_1 и s_2 (рис. 26).

Если сила \vec{F} остаётся постоянной при перемещении материальной точки по траектории из s_1 с радиус-вектором \vec{r}_1 в точку s_2 с радиус-вектором \vec{r}_2 , то работа

равна скалярному произведению силы \vec{F} на перемещение $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$:

$$A_{12} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F |\Delta\vec{r}| \cos(\alpha), \quad (111)$$

где α - угол между векторами \vec{F} и $\Delta\vec{r}$.

Единицей измерения работы в СИ является джоуль (Дж):

$$[A] = H \cdot m = Дж = Вт \cdot c = кг \cdot м^2 / c^2. \quad (112)$$

Работа A результирующей силы \vec{F} равна сумме работ всех действующих на материальную точку сил \vec{F}_i :

$$A = \sum_{i=1}^N A_i = \sum_{i=1}^N \int \vec{F}_i d\vec{r} = \int \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) d\vec{r} = \int \vec{F} d\vec{r}. \quad (113)$$

Мгновенная и средняя мощность

Определение 33

Средней мощностью $\langle P \rangle$ называется работа ΔA за единицу времени Δt , затраченной на совершение этой работы:

$$\langle P \rangle = \Delta A / \Delta t. \quad (114)$$

Определение 34

Мгновенной мощностью называется предел, к которому стремится средняя мощность $\langle P \rangle$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} \equiv \frac{dA}{dt}. \quad (115)$$

Единицей измерения мощности в СИ является ватт (Вт):

$$[P] = Вт = Дж / c = кг \cdot м^2 / c^3. \quad (116)$$

Для мощности справедливо соотношение:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v \cdot \cos(\alpha), \quad (117)$$

где $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ - мгновенная скорость частицы, на которую действует мгновенная (постоянная на перемещении $d\vec{r}$) сила \vec{F} , α - угол между векторами \vec{F} и \vec{v} .

Если работа пропорциональна времени, то мощность постоянна. При равномерном ускоренном движении ($\vec{F} = const$):

$$\langle P \rangle = \vec{F} \cdot \langle \vec{v} \rangle, \quad (118)$$

где $\langle \vec{v} \rangle$ - средняя скорость частицы.

Коэффициент полезного действия

Определение 35

Коэффициентом полезного действия (КПД) η называется отношение полезной работы $A_{пол}$, совершаемой силами при перемещении тела, к общей работе $A_{зам}$ сил, приложенных к телу:

$$\eta = A_{пол} / A_{зам}. \quad (119)$$

КПД можно определить и как отношение отдаваемой (полезной) мощности $P_{отд}$

к подводимой мощности $P_{\text{подв}}$:

$$\eta = (P_{\text{подв}} - P_{\text{потерь}}) / P_{\text{подв}} = P_{\text{омд}} / P_{\text{подв}}. \quad (120)$$

КПД также выражают в процентах:

$$\eta = (A_{\text{пол}} / A_{\text{зам}}) \cdot 100\%, \quad \eta = (P_{\text{омд}} / P_{\text{подв}}) \cdot 100\%. \quad (121)$$

Если тело участвует в различных процессах, связанных с передачей или преобразованием энергии, то общий КПД равен произведению КПД каждого из этих процессов:

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \quad (122)$$

Кинетическая и потенциальная энергия *Кинетическая энергия*

Определение 36

Кинетической энергией называется величина

$$W_{\kappa} = \frac{m v^2}{2} = \frac{p^2}{2m}, \quad (123)$$

где m - масса материальной точки, v и p - её скорость и импульс. Из второго закона Ньютона (57) следует, что

$$d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = \vec{F} d\vec{r}, \quad (124)$$

где \vec{F} - равнодействующая внешних сил, действующих на материальную точку. Для замкнутой системы ($\vec{F} = 0$) согласно (124) выполняется закон сохранения кинетической энергии (123)

$$T = \text{const}. \quad (125)$$

Из соотношений (109) и (124) следует

Теорема 1

Работа всех внешних сил, действующих на материальную точку, равна приращению кинетической энергии этой точки:

$$A_{12} = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = W_{\kappa 2} - W_{\kappa 1}, \quad (126)$$

где v_1 и v_2 - начальная и конечная скорости точки, $W_{\kappa 1}$ и $W_{\kappa 2}$ - соответствующие им кинетические энергии, A_{12} - работа по перемещению материальной точки из начального положения 1 в конечное положение 2. Соотношение (126) позволяет дать следующее определение кинетической энергии:

Определение 37

Кинетическая энергия материальной точки - мера её механического движения. Она измеряется работой, которую может совершить эта точка при её торможении до полной остановки. Если $A_{12} > 0$, то над материальной точкой производится работа и её кинетическая энергия возрастает. Если $A_{12} < 0$, точка отдаёт свою кинетическую энергию, совершая работу против внешних сил.

Определение 38

Кинетической энергией W_{κ} системы N материальных точек называется сумма кинетических энергий $W_{\kappa i}$ этих точек:

$$W_{\kappa} = \sum_{i=1}^N W_{\kappa i} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad (127)$$

где m_i и v_i - масса и скорость i -й частицы.

Теорема 2

Работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии этой системы. Приращение кинетической энергии определяется работой как внешних, так и внутренних сил. В замкнутой системе приращение кинетической энергии в общем случае отлично от нуля и равно работе внутренних сил.

Кинетическая энергия имеет размерность работы. В системе СИ единицей энергии является джоуль:

$$[W_{\kappa}] = \text{Дж}. \quad (128)$$

В атомной и ядерной физике используется единица энергии электронвольт (эВ):

$$1 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}. \quad (129)$$

Кинетическая энергия материальной точки зависит от выбора системы отсчёта, относительно которой рассматривается её движение. Пусть W_{κ} – кинетическая энергия точки в системе отсчёта S , W'_{κ} – кинетическая энергия точки в системе отсчёта S' , движущейся относительно S поступательно со скоростью \vec{V} . Тогда

$$W_{\kappa} = W'_{\kappa} + \frac{1}{2} m V^2 + \vec{p}' \vec{V}, \quad (130)$$

где $\vec{p}' = m \vec{v}'$ - импульс материальной точки в системе S' . Предыдущее соотношение справедливо и для системы из N материальных точек, однако в этом случае m является полной массой системы ($m = \sum m_i$), \vec{p}' - её полный импульс $\vec{p}' = \sum m_i \vec{v}'_i = m \vec{v}'_c$, \vec{v}'_c - скорость центра масс системы относительно S' .

Теорема 3 (теорема Кёнига)

Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетических энергий движения материальных точек относительно поступательно движущейся системы координат с началом в центре масс системы ($\vec{v}'_c = 0$):

$$W_{\kappa} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i'^2}{2} + \frac{m V^2}{2}. \quad (131)$$

Виды механических сил

Все силы, встречающиеся в механике материальных точек, принято разделять на консервативные и неконсервативные.

Определение 39

Консервативными называются силы, работа которых не зависит от пути перехода системы материальных точек из начального положения в конечное, а определяется только координатами этих положений.

Сила тяжести и все центральные силы являются консервативными.

Определение 40

Центральной называется сила, которая направлена к одной и той же точке в пространстве, называемой силовым центром, и зависит только от расстояния до центра. Работа центральных сил определяется соотношением

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (132)$$

Работа (132) зависит только от вида функции $\vec{F}(\vec{r})$, начального r_1 и конечного r_2 положений материальной точки, но не зависит от вида траектории. В соответствии с (132) работа консервативных сил по любому замкнутому пути равна нулю:

$$A_{12} + A_{21} = 0. \quad (133)$$

Все силы, которые не являются консервативными, называются неконсервативными. Диссипативные и гироскопические силы являются неконсервативными.

Определение 41

Диссипативными называются такие силы, полная работа которых при любых движениях в замкнутой системе всегда отрицательна: $A < 0$. Диссипативными являются силы трения и силы сопротивления, испытываемые телом при его движении в жидкости или газе. Эти силы зависят от координат начальных и конечных положений тел и от их относительных скоростей.

Определение 42

Гироскопическими называются силы, которые зависят от скорости материальной точки и действуют всегда перпендикулярно этим скоростям. Такими силами являются силы Лоренца и Кориолиса.

Потенциальная энергия системы

Если на систему материальных точек действуют только консервативные и гироскопические силы, то для этой системы можно ввести понятие потенциальной энергии. Если на материальную точку в каждом месте пространства действует сила, то говорят, что эта точка находится в поле сил.

Определение 43

Поле сил называется потенциальным, если его можно описать некоторой функцией $U = U(x, y, z, t) = U(\vec{r}, t)$, зависящей от координат и времени, такой, что её частные производные по координатам определяют проекции F_x , F_y , и F_z силы \vec{F} на декартовы оси:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (134)$$

Функция U называется потенциалом. В случае потенциального силового поля сила \vec{F} определяется соотношением:

$$\vec{F} = -grad U. \quad (135)$$

Для стационарных полей потенциал U является функцией только пространственных координат $U = U(x, y, z) = U(\vec{r})$. В этом случае элементарная работа dA представляет собой полный дифференциал dU , взятый с обратным знаком:

$$dA = -dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right). \quad (136)$$

или

$$\vec{F} d\vec{r} = -dU, \quad U = -\int_{(1)}^{(2)} \vec{F} d\vec{r}. \quad (136a)$$

Потенциал U имеет размерность работы. Функция U называется потенциальной энергией. Единицей потенциальной энергии в СИ является джоуль:

$$[U] = Дж = Вт \cdot с = Н \cdot м. \quad (137)$$

Закон сохранения энергии невзаимодействующих частей

Взаимодействие материальной точки с полем сил согласно последнему соотношению можно описать с помощью силы \vec{F} или потенциальной энергии U . Последний способ применим только тогда, когда силы, действующие на материальную точку, консервативны.

Работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии материальной точки при её перемещении из положения 1 в положение 2:

$$A_{12} = -\int_{(1)}^{(2)} dU = U_1 - U_2. \quad (138)$$

В соответствии с (126) эта убыль потенциальной энергии идёт на приращение кинетической энергии:

$$W_{к2} - W_{к1} = U_1 - U_2. \quad (139)$$

Из последнего соотношения следует закон сохранения энергии в механике: если на материальную точку действуют только консервативные (или гироскопические) силы, то полная энергия E , равная сумме кинетической W и потенциальной U энергий,

$$E = W + U. \quad (140)$$

сохраняется:

$$E_1 = E_2 = E = const. \quad (141)$$

В данном соотношении $E_1 = W_1 + U_1$ и $E_2 = W_2 + U_2$ - полные энергии материальной точки в положениях 1 и 2. Согласно (138) работа может совершаться за счёт запаса (при $U_1 > U_2$) потенциальной энергии. Суммарная работа всех приложенных к материальной точке сил затрачивается на приращение кинетической энергии этой точки (126), а работа консервативных сил идёт на убыль её потенциальной

энергии (138).

Если на материальную точку кроме консервативных сил действуют и неконсервативные силы с равнодействующей \vec{F}^* , то работа неконсервативных сил A_{12}^* при перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2 идёт на приращение полной энергии материальной точки:

$$A_{12}^* = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}^* d\vec{r} = E_2 - E_1. \quad (142)$$

Условие $E > U$ определяет область допустимых значений координат материальной точки. Если полная энергия точки положительна ($E > 0$), то её движение инфинитно, т.е. точка может уйти на бесконечность. Если полная энергия отрицательна ($E < 0$), то движение материальной точки финитно, т.е. она может двигаться только в ограниченной области пространства. На рис. 27 показан случай одномерного движения материальной точки (частицы) под действием потенциала $U(x)$.

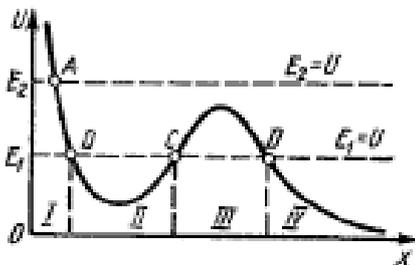


Рис. 27.

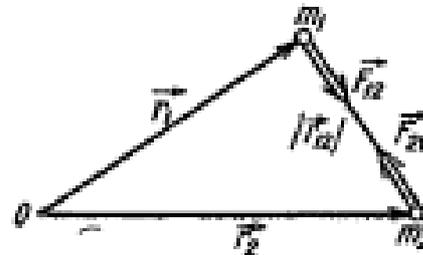


Рис. 28.

1. Если полная энергия частицы равна E_1 , то её движение в области II будет финитным, а в области IV - инфинитным. В области II частица будет совершать колебательные движения между точками B и C, которые называются точками поворота, а в области IV, отразившись от точки D, частица уйдёт на бесконечность. Области I и III запрещены для движения частицы с полной энергией E_1 .
2. Если полная энергия частицы $E_2 > E_1$, то её движение правее точки поворота A будет инфинитным, а левее точки A движение запрещено законами классической механики.

Конкретный вид потенциальной энергии U зависит от характера силового поля. В общем случае потенциальная энергия материальной точки, находящейся в поле консервативных сил, определяется согласно (138), работой, совершаемой этими силами при перемещении точки из начального положения 1 в конечное положение 2. Начальное положение выбирается так, чтобы потенциал U_1 можно было принять равным нулю.

Примеры потенциальных энергий

- 1) Потенциальная энергия материальной точки с массой m в однородном поле тяготения на высоте h над уровнем моря $U = mgh$, где потенциал уровня моря принят равным нулю.
- 2) Потенциальная энергия гравитационного притяжения двух материальных точек с массами M и m на расстоянии r одна от другой: $U = -GMm/r$, где по-

тенциал гравитационного поля на бесконечности принят равным нулю.

3) Потенциальная энергия растянутой пружины с коэффициентом упругости k при растяжении x : $U = kx^2/2$, где потенциал пружины в недеформированном состоянии принят равным нулю.

Полная энергия системы N невзаимодействующих частиц E , равная сумме всех кинетических W_{ki} и потенциальных U_i энергий отдельных частиц $i=1, 2, \dots, N$, на которые действуют только внешние консервативные силы, остаётся постоянной

$$E = \sum_{i=1}^N (W_{ki} + T_i) = const. \quad (143)$$

До полной энергии системы N невзаимодействующих частиц справедливо представление:

$$E = W_k + U_{внеш}, \quad (144)$$

где $W_k = \sum_{i=1}^N W_{ki}$ - кинетическая энергия системы, $U_{внеш} = \sum_{i=1}^N U_i$ - потенциальная энергия системы частиц во внешнем поле сил. Сила, действующая на i -ю частицу со стороны внешнего поля, определяется соотношением:

$$\vec{F}_i = -grad_i U \equiv - \left(\frac{\partial U_{внеш}}{\partial x_i} \vec{i} + \frac{\partial U_{внеш}}{\partial y_i} \vec{j} + \frac{\partial U_{внеш}}{\partial z_i} \vec{k} \right), \quad (145)$$

где x_i, y_i и z_i - координаты i -й частицы.

Энергия взаимодействия

В случае системы двух и большего числа взаимодействующих частиц вводится понятие потенциальной энергии взаимодействия $U_{вз}$. Для замкнутой системы из двух частиц, взаимодействующих с силой $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, где \vec{F}_{12} - сила, действующая на частицу 1 со стороны частицы 2, имеем

$$\vec{F}_{12} = -grad_1 U_{вз}(\vec{r}_{12}), \quad \vec{F}_{21} = -grad_2 U_{вз}(\vec{r}_{12}), \quad (146)$$

где $U_{вз}(\vec{r}_{12})$ - энергия взаимодействия частиц 1 и 2. Она зависит от модуля радиус вектора $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (рис. 27) имеет тот же вид, что и в выражении (145). Сила \vec{F}_{12} является внутренней силой замкнутой системы двух частиц. Производимая ею работа

$$d A_{внутр} = -\vec{F}_{12} d \vec{r}_{12} = -d U_{вз}. \quad (147)$$

В случае действия внешних сил \vec{F}_1 на частицу 1 и \vec{F}_2 на частицу 2 имеем

$$d E = d (W_k + U_{вз}) = d A_{внеш} = \vec{F}_1 d \vec{r}_1 + \vec{F}_2 d \vec{r}_2, \quad (148)$$

где W_k - кинетическая энергия двух частиц с $N=2$, $d E$ - приращение полной энергии за время dt , $d A_{внеш}$ - работа внешних сил за это же время. Для замкнутой системы из трёх попарно взаимодействующих частиц с силами $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, где i и k принимают значения от 1 до 3 при условии, что $i < k$, работа внутренних сил определяется соотношением:

$$d A_{\text{выт}} = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}) d \vec{r}_1 + (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}) d \vec{r}_2 + (\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}) d \vec{r}_3 = \\ = -\vec{F}_{12} d \vec{r}_{12} - \vec{F}_{13} d \vec{r}_{13} - \vec{F}_{23} d \vec{r}_{23} = -d U_{\text{вз}}, \quad (149)$$

где

$$U_{\text{вз}} = U_{12}(r_{12}) + U_{13}(r_{13}) + U_{23}(r_{23}) \quad (150)$$

- энергия взаимодействия системы трёх частей, равная сумме энергий взаимодействия пар, r_{ij} – расстояние между частицами i и j .

Для системы из N взаимодействующих частиц потенциальная энергия взаимодействия равна энергиям парных взаимодействий:

$$U_{\text{вз}} = \sum_{(i < k)} U_{ik}(r_{ik}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} U_{ik}(r_{ik}), \quad U_{ik}(r_{ik}) = U_{ki}(r_{ki}). \quad (151)$$

Закон сохранения энергии для системы взаимодействующих частиц

Полная энергия системы взаимодействующих частиц, находящихся во внешнем поле консервативных сил, сохраняется:

$$E = W_k + U_{\text{вз}} + U_{\text{внеш}} = \text{const}, \quad (152)$$

где W_k - кинетическая энергия системы, $U_{\text{внеш}}$ - потенциальная энергия внешних консервативных сил, $U_{\text{вз}}$ - энергия взаимодействия частиц системы. В замкнутой системе $U_{\text{внеш}} = 0$, в которой действуют также и неконсервативные силы, полная энергия не сохраняется: приращение энергии dE за время dt равно работе неконсервативных сил dA^* за это время:

$$dE = d(W_k + U_{\text{вз}}) \equiv dA^*. \quad (153)$$

Полная работа dA^* неконсервативных сил замкнутой системы при перемещении её из положения 1 в положение 2 с полными энергиями E_1 и E_2 соответственно идёт на приращение полной энергии системы и определяется соотношением (142).

Закон сохранения энергии связан со свойством однородности времени. Однородность времени означает, что механические свойства замкнутой системы не зависят от выбора начала отсчёта времени.

Пример 15

Поезд массы $m = 1500 \text{ т}$ движется со скоростью $v = 57,6 \text{ км/ч}$ и при торможении останавливается, пройдя путь $S = 200 \text{ м}$.

а) Какова сила торможения F_m ?

б) Как должна измениться сила торможения, чтобы поезд остановился, пройдя в два раза меньший путь?

Решение

а) Кинетическая энергия поезда равна $W_k = mv^2/2 = 1\,500\,000 \text{ кг} \cdot (16 \text{ м/с})^2/2 = 192\,000\,000 \text{ Дж}$. Работа силы торможения равна $A_m = F_m S$. В случае полной остановки поезда его кинетическая энергия совпадает с работой силы торможения. Тогда искомая сила торможения равна $F_m = W_k/S = 860\,000 \text{ Н}$.

б) Кинетическая энергия поезда равна $W_k = 192 \text{ МДж}$. Её величина в случае полной остановки поезда совпадает с работой силы торможения, пропорцио-

нальной и силе торможения, и пройденному поездом пути. Уменьшение пройденного поездом пути в 2 раза приводит к необходимости увеличения силы торможения также в 2 раза.

Пример 16

Четыре одинаковых тела равной массы по $m = 20$ г каждое расположены на одной горизонтальной прямой на некотором расстоянии друг от друга. В крайнее тело ударяется такое же тело, имеющее скорость $v_0 = 20$ м/с и движущееся вдоль прямой, на которой расположены тела. Считая соударения тел абсолютно неупругими, найдите кинетическую энергию E_k системы после прекращения соударений.

Решение

Так как удар неупругий, то полная механическая энергия системы тел не сохраняется. Но будет сохраняться полный импульс системы, то есть $m v_0 = 5m v$. Тогда вся система слипшихся шаров будет двигаться со скоростью $v = v_0/5$, равна $E_k = m v_0^2/10 = 0,8$ Дж.

Пример 17

На балконе третьего этажа, расположенного на высоте 12 м от земли, находится тело массой 5 кг. Найти его потенциальную энергию относительно

- поверхности земли;
- относительно пятого этажа, расположенного на высоте 20 м от земли;
- относительно дна колодезя глубиной 4 м.

Решение

На тело действует сила тяжести, являющаяся потенциальной. В данном случае тело обладает зависящей от высоты потенциальной энергией. Потенциальная энергия равна работе потенциальной силы по перемещению тела из данного состояния в состояние, выбранное за нулевое.

- Потенциальная энергия тела относительно поверхности земли равна $E_p = m g h = 5 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 12 \text{ м} = 588 \text{ Дж}$.
- Потенциальная энергия тела относительно поверхности земли равна $E_p = m g h = 5 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot (20-12) \text{ м} = -392 \text{ Дж}$.
- Потенциальная энергия тела относительно поверхности земли равна $E_p = m g h = 5 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot (12+4) \text{ м} = 784 \text{ Дж}$.

Пример 18

Тело брошено с поверхности земли под углом к горизонту со скоростью v_0 . Найти его скорость v на высоте h . Соппротивлением воздуха пренебречь.

Решение

В данном случае на тело действует только сила тяжести. Закон сохранения энергии имеет следующий вид:

$$m v_0^2/2 = m v^2/2 + m g h.$$

Тогда искомая скорость v определяется следующим соотношением:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2 g h}.$$

Следует заметить, что данная задача может быть решена и кинематически.

Но кинематическое решение является заметно более громоздким.

4. Динамика твёрдого тела

Определение 44

Абсолютно твёрдым телом (или просто твёрдым телом) называется идеализированная система материальных точек, все расстояния между которыми остаются неизменными при движении этой системы как целого в пространстве и времени. Реальные тела можно рассматривать как идеально твёрдые, если деформации, возникающие под действием внешних сил, малы и при решении поставленной задачи о движении твёрдого тела не рассматриваются.

Для однозначного определения положения твёрдого тела в пространстве достаточно задать положение любых трёх точек, не лежащих на одной прямой. Так как у твёрдого тела расстояния между этими точками не изменяются при движении тела, то из девяти координат, характеризующие выбранные три точки, независимыми являются только шесть. По этой причине, твёрдое тело, на движение которого не наложены никакие ограничения (связи), является механической системой, имеющей шесть степеней свободы: $s=6$. Наложение связей уменьшает их число.

Примеры связей

- 1) Тело, имеющее одну закреплённую неподвижную точку, вокруг которой может вращаться, имеет три степени свободы $s=3$.
- 2) Тело, которое может вращаться вокруг закреплённой оси, имеет одну степень свободы $s=1$.
- 3) Вращающееся тело, которое может при этом двигаться вдоль закреплённой оси, имеет две степени свободы: $s=2$.

Уравнения движения

Уравнения движения твёрдого тела, рассматриваемого как систему материальных точек, имеют вид:

$$M \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}, \quad (154)$$

где первое равенство описывает поступательное движение со скоростью \vec{V}_c центра инерции твёрдого тела с массой M под действием суммарной внешней силы \vec{F} , а второе является уравнением момента импульса тела \vec{L} , который изменяется со временем под влиянием суммарного момента внешних сил \vec{N} . Момент импульса \vec{L} и момент внешних сил \vec{N} можно брать относительно произвольной неподвижной точки или относительно центра инерции твёрдого тела. В уравнения (154) входят только внешние силы. Внутренние силы не влияют на движение абсолютно твёрдого тела. Если $\vec{F} = 0$ и $\vec{N} = 0$, то тело может, как находится в состоянии равновесия, так и перемещаться в пространстве таким образом, что его центр инерции будет двигаться равномерно и прямолинейно с произвольной скоростью \vec{V}_c , а само тело будет вращаться с сохранением момента импульса \vec{L} . В состоянии равновесия $\vec{F} = 0$ момент данных сил \vec{N} не зависит от выбора точки, относительно которой он определяется. Произвол в вы-

боре точки отсчёта момента сил \vec{N} значительно облегчает решение ряда задач механики твёрдого тела.

Момент инерции

Вращение вокруг неподвижной оси

Определение 45

Моментом инерции твёрдого тела относительно оси вращения называется величина I , равная сумме произведений масс материальных точек m_i , составляющих это тело, на квадраты их расстояний до оси вращения r_i :

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \quad (155)$$

Момент инерции является аддитивной величиной. Момент импульса \vec{L} однородного тела (т.е. тела, у которого плотность распределения массы в пределах объёма, занимаемого телом одинаковая), вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг своей оси симметрии, связан с моментом инерции следующим соотношением:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}. \quad (156)$$

Из (154) и (156) следует основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси:

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{N}. \quad (157)$$

В случае твёрдого тела любой формы и с произвольным распределением массы, вращающегося вокруг заданной оси z , имеем

$$I\beta_z = N_z, L_z = I\omega, \quad (158)$$

где $\beta_z = \dot{\omega}_z$ - проекция углового ускорения на ось вращения z , N_z и L_z - проекции моментов внешних сил и импульса на ось z .

В механике вращательного движения момент инерции I играет роль, аналогичную роли массы в механике поступательного движения, описываемого уравнением Ньютона (58). Каждое тело независимо от того, вращается оно или нет, обладает определённым моментом инерции. Для тела, распределение массы которого в каждой точке тела характеризуется плотностью $\rho = \rho(x,y,z)$, момент инерции определяется соотношением:

$$I = \int r^2 dm, dm = \rho(x,y,z)dV, dV = dx dy dz, \quad (159)$$

где dm - элемент массы тела, dV - элемент объёма, r - расстояние от заданной оси до элемента объёма, которое в общем случае является функцией координат точек тела: $r = r(x,y,z)$.

Вычисление момента инерции

Моменты инерции тела относительно выбранных осей x , y , и z можно вычислить, воспользовавшись соотношением (159) и задав форму тела и распределение массы.

Частные случаи:

1) Момент инерции I_y относительно оси y плоской фигуры, например криволинейной трапеции (рис. 29), определяется соотношением

$$I_y = \int_a^b x^2 \rho(x) [f_2(x) - f_1(x)] dx, \quad (160)$$

где $\rho(x)$ – линейная плотность, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ задают фигуру в плоскости xy .

2) Моменты инерции I_x и I_y относительно осей x , y плоского тела, занимающего область S с массой, распределённой с плотностью $\rho(x,y)$, равны соответственно

$$I_x = \int_a^b y^2 \rho(x,y) dS, \quad I_y = \int_a^b x^2 \rho(x,y) dS, \quad (161)$$

где $dS = dx dy$ – элемент площади. Момент инерции относительно начала координат описывается соотношением:

$$I_o = \int_S (x^2 + y^2) \rho(x,y) dS. \quad (162)$$

3) Моменты инерции I_x , I_y и I_z относительно осей x , y и z , занимающей объём V , с плотностью распределения массы $\rho(x,y,z)$, определяются соотношениями

$$I_x = \int_V (y^2 + z^2) \rho(x,y,z) dV, \quad I_y = \int_V (x^2 + z^2) \rho(x,y,z) dV, \\ I_z = \int_V (x^2 + y^2) \rho(x,y,z) dV, \quad (163)$$

где $dV = dx dy dz$ – элемент объёма.

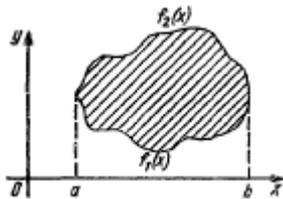


Рис. 29.

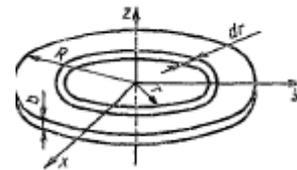


Рис. 30.

Моменты инерции простых тел

1) Однородный диск радиусом R и толщиной b . Ось проходит через центр масс перпендикулярно оси диска (рис. 30), оси x и y лежат в плоскости диска:

$$I_z = \rho \int_V r^2 dV = \rho \int_0^R r^2 b 2\pi r dr = 2\pi b \rho \frac{R^4}{4} = \frac{m R^2}{2}, \quad I_x = I_y = m R^2 / 4, \quad I_z = I_x + I_y, \quad (164)$$

где $m = \rho V = \rho \pi b R^2$ – масса диска.

2) Однородный цилиндр длиной h с основанием радиуса R . Ось z проходит через центр масс перпендикулярно плоскости оснований (рис. 31):

$$I_z = \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cdot r dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \frac{m R^2}{2}, \quad (165)$$

где $m = \pi \rho h R^2$ – масса цилиндра.

3) Однородный конус высотой h и радиусом основания R . Ось z проходит через

центр масс перпендикулярно основанию (рис. 32):

$$I_z = \rho \int_0^h \int_0^{2\pi R z/h} \int_0^r r^2 \cdot r dr = 2\pi \rho \frac{h R^4}{20} = 3 R^3 \frac{m}{10}, \quad (166)$$

где $m = \pi \rho h R^2/3$ - масса конуса. Здесь учтено уравнение конуса $z^2 = (x^2 + y^2) h^2 / R^2$ и соотношение $x^2 + y^2 = r^2$.

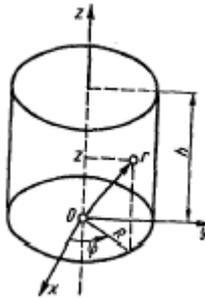


Рис. 31.

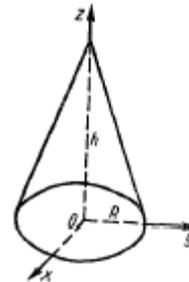


Рис. 32.

4) Однородный стержень массой m и длиной l . Ось z проходит через центр масс перпендикулярно стержню (рис. 33): $I_z = m l^2 / 12$.

5) Однородная прямоугольная пластинка длиной a и шириной b . Ось z перпендикулярна пластинке и проходит через её центр масс, оси x и y лежат в плоскости пластинки (рис. 34):

$$I_x = m b^2 / 12, I_y = m a^2 / 12, I_z = m (a^2 + b^2) / 12. \quad (167)$$

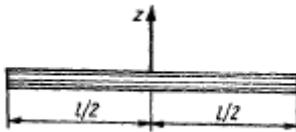


Рис. 33.

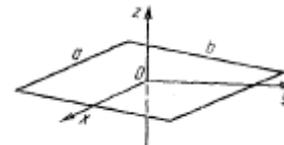


Рис. 34.

6) Полый шар с бесконечно тонкими стенками:

$$I = I_x = I_y = I_z = 2m R^2 / 3, I_x = I_y = I_z = 2m R^2, \quad (168)$$

где R – радиус шара, m – его масса.

7) Однородный сплошной шар:

$$I = I_x = I_y = I_z = \rho \int_0^R r^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4}{5} m R^2, \quad (169)$$

где $m = 4\pi \rho R^3 / 3$ - масса шара. Здесь учтено, что момент инерции сферического слоя относительно диаметра, т.е. полого шара с бесконечно тонкими стенками радиуса r и массой dm , равен $dl = 2r^2 dm = 2mr^4 dr / R^3$.

8) Однородный эллипс с полуосями a и b (рис. 35):

$$I_x = m a^2 / 4, I_y = m b^2 / 4, I_z = m (a^2 + b^2) / 4, \quad (170)$$

где m - масса эллипса.

9) Однородный эллипсоид с полуосями a , b и c , направленными вдоль осей x , y и z , совпадающими с главными осями инерции:

$$I_x = m (c^2 + b^2) / 5, I_y = m (a^2 + c^2) / 5, I_z = m (a^2 + b^2) / 5, \quad (171)$$

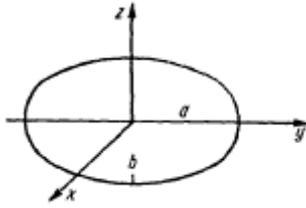


Рис. 35.

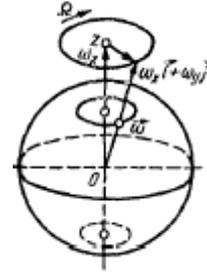


Рис. 36.

где m - масса эллипсоида.

Теорема Гюйгенса-Штейнера

Момент инерции I относительно какой-либо заданной оси определяется соотношением:

$$I = I_c + m a^2, \quad (172)$$

где I_c - момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельно заданной, m - масса тела, a - расстояние между осями.

Эта теорема сводит вычисление момента инерции относительно произвольной оси к вычислению момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела.

Работа и энергия движущихся твёрдых тел

При вращении тела внутренние силы работы не совершают. Элементарная работа dA внешних сил при повороте тела на угол $d\varphi$ за время dt определяется соотношением:

$$dA = \bar{\omega} \bar{N} dt = \omega N_z dt = N_z d\varphi, \quad (173)$$

где $\bar{\omega}$ - угловая скорость, \bar{N} - суммарный момент внешних сил, $N_z = N \cdot \cos(\alpha)$ - проекция вектора \bar{N} на ось вращения z , α - угол между векторами \bar{N} и $\bar{\omega}$.

Работа A внешних сил при повороте тела на конечный угол $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, определяется следующим соотношением:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} N_z d\varphi, \quad (174)$$

где φ_1 и φ_2 - значения угла в начальном и конечном положении тела. Проекция момента сил на ось вращения N_z в общем случае зависит от угла поворота: $N_z = N_z(\varphi)$.

Мгновенная мощность P в случае вращательного движения определяется производной по времени от угла вращения:

$$P = N_z \frac{d\varphi}{dt} = N_z \dot{\varphi} = N_z \omega. \quad (175)$$

Тело, вращающееся вокруг некоторой неподвижной оси z , обладает кинетической энергией:

$$W_k = I_z \omega^2, \quad (176)$$

где I_z - момент инерции относительно оси вращения, ω - угловая скорость. Изменение кинетической энергии этого тела ΔW_k при изменении угловой скорости от ω_1 до ω_2 определяется соотношением:

$$\Delta W_k = I_z(\omega_2^2 - \omega_1^2)/2. \quad (177)$$

Если тело вращается произвольным образом относительно неподвижной точки, то соотношение для его кинетической энергии имеет вид:

$$W_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k=x,y,z} I_{ik} \omega_i \omega_k. \quad (178)$$

где суммирование производится независимо по трём значениям осей x , y и z декартовой системы координат с началом в центре масс тела, жёстко связанной с телом, I_{ik} - компонента тензора инерции, ω_i и ω_k - угловые скорости вращения вокруг осей i и k соответственно.

Если оси декартовой системы координат совпадают с главными осями инерции тела, тогда

$$W_k = (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2)/2, \quad (179)$$

где I_x , I_y и I_z - его главные моменты инерции. Если тело вращается вокруг одной из главных осей, например, оси z , с угловой скоростью $\omega_z = \omega$, то $\omega_x = \omega_y = 0$ и соотношение (179) переходит в (176).

В случае плоского движения тела - поступательного со скоростью заданной точки тела O \vec{v}_0 и вращательного вокруг оси, проходящей через эту точку O , с угловой скоростью $\vec{\omega}$ - его кинетическая энергия имеет вид:

$$W_k = \frac{1}{2} m v_0^2 + m (\vec{R}_c [\vec{v}_0 \vec{\omega}]) + \frac{1}{2} I_c \omega^2, \quad (180)$$

где m - масса тела, \vec{R}_c - радиус-вектор его центра масс, I_c - момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку O . Если в качестве точки O выбрать центр масс тела O , то кинетическая энергия этого тела при плоском движении будет равна сумме кинетической энергии поступательного движения центра масс со скоростью, равной скорости движения центра масс \vec{V}_c и энергии вращательного движения с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси, проходящей через центр масс тела с моментом инерции относительно этой оси I_c :

$$W_k = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2. \quad (181)$$

В случае произвольного движения тела имеем

$$W_k = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k=x,y,z} I_{ik} \omega_k, \quad (182)$$

где обозначения те же, что и в соотношении (178).

Движение твёрдого тела с одной неподвижной точкой

Уравнения (154) описывают движение твёрдого тела относительно неподвижной системы координат. В подвижной системе координат с осями, направ-

ленными по главным осям инерции, проекции L_x , L_y и L_z момента импульса \vec{L} тела и проекции ω_x , ω_y и ω_z угловой скорости $\vec{\omega}$ на эти оси, связаны соотношениями:

$$L_x = I_x \omega_x, L_y = I_y \omega_y, L_z = I_z \omega_z, \quad (183)$$

где I_x , I_y и I_z - главные моменты инерции тела. Уравнения движения (154) для \vec{L} в данном случае сводятся к уравнениям:

$$\begin{cases} I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z = N_x \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x) \omega_x \omega_z = N_y, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y = N_z \end{cases} \quad (184)$$

которые называются уравнениями Эйлера (1765). Все величины в этих уравнениях отнесены к движущимся осям координат, жёстко связанным с твёрдым телом. Они описывают движение тела с одной неподвижной точкой, в которой помещено начало координат. Свободному движению твёрдого тела соответствует случай, когда проекции N_x , N_y и N_z момента внешних сил \vec{N} на главные оси инерции равны нулю: $N_x = N_y = N_z = 0$.

Следствия законов Эйлера

- 1) свободное вращение твёрдого тела возможно лишь вокоруг главных осей, проходящих через центр масс тела;
- 2) вращение твёрдого тела устойчиво только относительно главной оси, проходящей через центр масс тела, которой соответствует максимальный или минимальный момент инерции. Вращение вокоруг главной оси со средним моментом инерции неустойчиво;
- 3) свободное движение симметричного волчка ($I_x = I_y$) описывается соотношениями:

$$\omega_x = A \cdot \cos(\Omega t), \omega_y = A \cdot \sin(\Omega t), \omega_z \approx \text{const}, \quad (185)$$

где A - постоянная, $\Omega = \omega_z (I_z - I_x) / I_x$. Согласно (185) вектор $\vec{\omega}$ равномерно вращается с угловой скоростью Ω вокоруг оси волчка (оси z), его величина остаётся постоянной. В этом случае считается, что угловая скорость $\vec{\omega}$ прецессирует вокоруг оси z (см. рис. 35). Примером такого движения является прецессия оси вращения Земли вокоруг оси, проходящей через Северный полюс. Угловая скорость прецессии Земли равна $\Omega \approx 0,0033 \omega_z$, $\omega_z = \omega$. Ось вращения Земли удаляется от Северного полюса на расстояние около 5 м. Расчётный период прецессии Земли составляет 300 дней, а наблюдаемый - 427 дней. Расхождение связано с тем, что Земля является не твёрдым, а упругим телом.

Аналогия с поступательным движением

Между формулами механики поступательного движения материальной точки и механики вращательного движения твёрдого тела существует формальная

аналогия, позволяющая сопоставить данные величины:

Поступательное движение

\vec{v} - линейная скорость

$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ - линейное ускорение

m - масса

$\vec{p} = m\vec{v}$ - импульс

\vec{F} - сила

Вращательное движение

$\vec{\omega}$ - угловая скорость

$\vec{\beta} = \dot{\vec{\omega}}$ - угловое ускорение

I - момент инерции

$\vec{L} = I\vec{\omega}$ - момент импульса

\vec{N} - момент силы

Уравнения движения

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}$$

$$I\vec{\beta} = \vec{N}$$

Кинетическая энергия

$$W_k = m v^2 / 2$$

$$W_k = I_z \omega^2 / 2$$

Работа

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$dA = \vec{N} \cdot d\vec{\varphi}$$

Мощность

$$P = (\vec{F}, \vec{v})$$

$$P = (\vec{N}, \vec{\omega})$$

Пример 19

На тонкий однородный полый цилиндр массы M и радиуса R плотно намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массы m (рис. 37). В момент времени $t=0$ система пришла в движение. Пренебрегая трением в оси цилиндра и массой ступицы и спиц, найдите зависимость от времени:

а) угловой скорости цилиндра;

б) кинетической энергии всей системы.

Решение

Система движущихся тел в данной задаче включает в себя вращающийся вокруг своей оси цилиндр и груз массой m , движущийся поступательно. На груз действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} . На цилиндр действуют сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила натяжения нити \vec{T}' (рис. 37).

Сила тяжести и сила реакции опоры проходят через ось вращения цилиндра и, следовательно, момент этих сил относительно этой оси равен нулю. Вращение цилиндра вызвано силой натяжения нити \vec{T}' . Момент этой силы относительно оси вращения равен $T'R$. Основное уравнение вращательного движения для цилиндра запишется следующим образом:

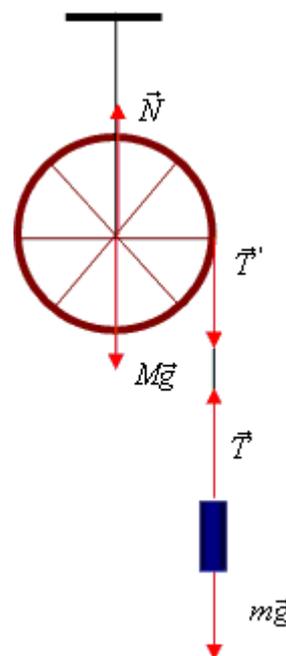


Рис. 37.

$$I \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = T' R. \quad (186)$$

Движение груза массой m описывается вторым законом Ньютона:

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T}.$$

Проекция данного уравнения на ось X имеет следующий вид:

$$m a = m g - T. \quad (187)$$

Учитывая, что по условию задачи нить легкая, получаем $T = T'$. Момент инерции цилиндра $I = MR^2$. Уравнений (186)-(187) недостаточно для решения задачи. Поэтому воспользуемся кинематической связью между угловым и линейным ускорением. Так как проскальзывания нити нет, то линейная скорость движения груза v связана с угловой скоростью вращения цилиндра соотношением $v = \omega R$. Тогда приращения линейной и угловой скоростей за один и тот же промежуток времени Δt будут связаны соотношением $\Delta v = \Delta \omega R$. Отсюда следует:

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta t} R = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a.$$

Таким образом, получается следующая система уравнений:

$$M R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = T, \quad m a = m g - T, \quad \frac{\Delta \omega}{\Delta t} R = a.$$

Решение полученной системы уравнений позволяет получить:

$$\Delta \omega = \frac{m g \Delta t}{R(M + m)}.$$

Равенство нулю угловой скорости цилиндра в начальный момент времени позволяет получить следующую зависимость угловой скорости от времени:

$$\omega = \frac{m g t}{R(M + m)}. \quad (188)$$

Кинетическая энергия системы "груз-цилиндр" включает в себя кинетическую энергию вращательного движения цилиндра и кинетическую энергию поступательного движения груза, т.е.

$$E_k = \frac{I \omega^2}{2} + \frac{m v^2}{2}. \quad (189)$$

Подстановка значения угловой скорости (188) в соотношение для энергии (189) с учётом соотношения $v = \omega R$ получим окончательное выражение для кинетической энергии:

$$E_k = \frac{(m g t)^2}{2(M + m)}.$$

Пример 20

Однородный полый цилиндр радиуса R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и поместили затем в угол. Коэффициент трения между стенками угла и цилиндра равен μ . Через какое время цилиндр остановится?

Решение

На цилиндр действует пять сил (рис. 38): сила тяжести $M \vec{g}$, две силы реакции опоры \vec{N}_1 и \vec{N}_2 , две силы трения \vec{F}_{mp1} и \vec{F}_{mp2} . Линии действия силы тяжести и сил реакции опоры проходят через ось вращения, поэтому момент этих сил относительно этой оси равен нулю. Следовательно, угловое ускорение цилиндра обусловлено моментами сил трения. Уравнение вращательного движения цилиндра запишется следующим образом:

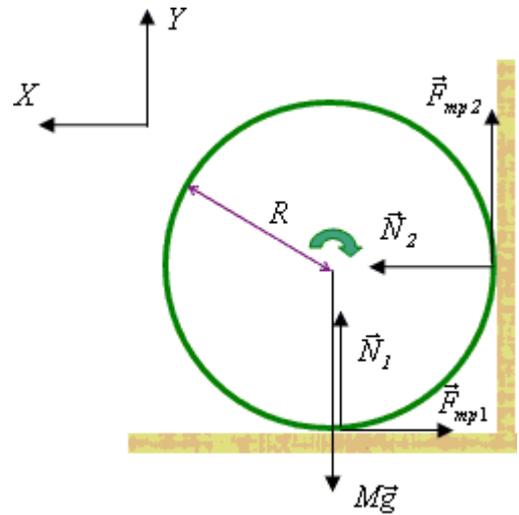


Рис. 38.

$$I \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = -R(F_{mp1} + F_{mp2}). \quad (190)$$

Знак минус учитывает, что угловая скорость со временем убывает. Поскольку цилиндр не совершает поступательное движение, результирующая всех приложенных к нему сил должна быть равна нулю.

$$M \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{mp1} + \vec{F}_{mp2} = 0.$$

Далее рассмотрим проекции сил на координатные оси X и Y . Рассматриваемые проекции имеют вид:

$$\begin{cases} X: N_2 - F_{mp1} = 0 \\ Y: N_1 + F_{mp2} - M g = 0 \end{cases}$$

С учётом соотношений: $F_{mp1} = \mu N_1$ и $F_{mp2} = \mu N_2$ получаем следующие соотношения для сил трения:

$$F_{mp1} = \frac{\mu M g}{\mu^2 + 1}, \quad F_{mp2} = \frac{\mu^2 M g}{\mu^2 + 1}.$$

Подстановка полученных соотношений для сил трения в основное уравнение вращательного движения (190) с учётом соотношения $I = MR^2$ получаем:

$$\Delta \omega = -\mu g \Delta t \frac{\mu + 1}{\mu^2 + 1},$$

где $\Delta \omega = \omega_0$, $\Delta t = t$. Тогда:

$$t = \frac{\omega_0}{\mu g} \frac{\mu^2 + 1}{\mu + 1}.$$

5. Основные понятия молекулярной физики и термодинамики

Определение 46

Молекулярная физика - наука о строении, физических свойствах и агрегатных состояниях вещества, рассматриваемого как совокупность большого числа молекул, которые взаимодействуют между собой и находятся в тепловом движении.

Определение 47

Молекулой называется наименьшая частица вещества, сохраняющая все его химические свойства.

Определение 48

Тепловым движением молекул называется их хаотическое движение, т.е. беспорядочное движение, не имеющее какого-либо преимущественного направления.

Интенсивность хаотического движения молекул зависит от температуры тела. Молекула может состоять из одного или нескольких атомов, одинаковых или различных химических элементов. Молекула электрически нейтральна. Она содержит равное количество положительно и отрицательно заряженных частиц. Примеры молекул: H_2 , O_2 , CO , CO_2 , NO , NH_3 , H_2SO_4 .

Основными задачами молекулярной физики являются:

- 1) исследование строения вещества и его изменения под влиянием внешних воздействий;
- 2) изучение явления переноса: диффузии, теплопроводности, внутреннего трения;
- 3) изучение фазовых превращений: испарение и конденсация, плавление и кристаллизация;
- 4) исследование критических состояний вещества;
- 5) исследование явлений на границах раздела фаз.

Макроскопические свойства вещества, которые описывает молекулярная физика, считаются независимыми от внутреннего строения молекул. Состояние данного вещества характеризуется физическими величинами, называемыми параметрами состояния. К ним относятся: давление, объём, удельный объём, температура, молекулярная масса и др.

Определение 49

Давлением P нормальная составляющая силы, приходящейся на единицу площади поверхности, на которую эта сила действует:

$$P = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S} = \frac{d F_n}{d S}, \quad (191)$$

где ΔF_n - сила, перпендикулярная участку поверхности площадью ΔS .

Определение 50

Удельным объёмом v называют величину, обратную плотности ρ :

$$v = 1/\rho = dV/dm, \quad (192)$$

где dV - бесконечно малый элемент объёма, содержащий массу вещества dm .

Если вещество однородно, то удельный объём равен объёму тела, приходящемуся на единицу его массы:

$$v = V/m, \quad (193)$$

где V - объём тела, m - масса вещества.

Определение 51

Молекулярной массой вещества μ называется безразмерная величина, равная отношению массы его молекулы к $1/12$ массы ^{12}C .

Определение 52

Масса, равная $1/12$ массы ядра атома ^{12}C , называется атомной единицей массы (*а.е.м.*).

Определение 53

Количество вещества, содержащее столько молекул, сколько атомов содержится в 12 г изотопа углерода ^{12}C , называется молем.

Определение 54

По определению в одном моле различных веществ содержится одно и то же число молекул. Это число называется числом Авагадро:

$$N_a = 6,022045(31) \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}. \quad (194)$$

Определение 55

Масса моля называется молярной массой M . Она равна (в кг)

$$M = \mu N_a \cdot 1 \text{ а.е.м.} \equiv N_a m_0, \quad (195)$$

где N_a - число Авагадро, μ - молекулярная масса. Атомная единица массы, выраженная в килограммах:

$$1 \text{ а.е.м.} = 1,6605655(86) \cdot 10^{-27} \text{ кг}, \quad 1 \text{ кг} = 6,022045 \cdot 10^{26} \text{ а.е.м.} \quad (196)$$

Величина $m_0 = \mu \cdot 1 \text{ а.е.м.}$ является массой молекулы вещества, выраженной в килограммах. Молярная масса M , выраженная в граммах, численно равна молекулярной массе μ :

$$M = 0,001 \mu \cdot \text{кг/моль}, \quad (197)$$

т.к. $N_a \cdot 1 \text{ а.е.м.} = 0,001 \text{ кг/моль} = 1 \text{ г/моль}$. Моль - единица количества вещества, используемая в молекулярной физике. Т.к. отдельные молекулы различных веществ имеют разную массу, то масса в данном случае не является мерой количества вещества.

Определение 56

Объём одного моля называется молярным объёмом:

$$V_M = M/\rho, \quad (198)$$

где M - молярная масса, ρ - плотность вещества. Число молей ν вещества с массой m и число его молекул N связаны следующими соотношениями:

$$\nu = M/m = V/V_M, \quad N = \nu N_a = V N_a / V_M = V N_L, \quad (199)$$

где N_L - число Лошмидта. Единицами молярной массы M и молярного объёма V_M в СИ являются:

$$[M]=\text{кг/моль}, [V_M]=\text{м}^3/\text{моль}. \quad (200)$$

6. Температура. Шкалы температур

Определение 57

Температурой называется физическая величина, характеризующая степень нагретости тела.

Мерой температуры является средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул. Если соприкасающиеся тела не обмениваются энергией путём теплообмена, то говорят, что эти тела имеют одинаковую температуру. Если привести в соприкосновение несколько тел с различными значениями средней кинетической энергии молекул, то через некоторое время эти значения станут одинаковыми. При этом происходит переход энергии от тела с более высоким значением средней энергии к телу с более низким её значением. Телу, отдающему энергию, приписывают более высокую температуру по сравнению с температурой тела, которое эту энергию принимает.

Физические свойства тел зависят от температуры. Те из них, которые можно непосредственно измерить, могут быть использованы для количественного определения температуры (объём тела, электрическое сопротивление и т.д.). В основе процесса измерения температуры лежит свойство установления состояния теплового равновесия системы тел. Тело, служащее для измерения температуры, называется термометрическим телом. Термометрическое тело, снабжённое по определённому правилу шкалой температур, называется термометром. Физическая величина, служащая индикатором температуры, называется термометрической величиной. Например, в ртутных термометрах термометрическим телом является ртуть, а термометрической величиной - объём. Правила, по которым проводится градуировка термометра, определяются соображениями простоты. Температурная шкала строится по двум реперным точкам, разности температур которых приписывается определённое (произвольное) значение. В качестве реперных точек принимают температуру перехода химически чистых веществ из одного агрегатного состояния в другое (например, температуры плавления льда t_n и кипения воды t_k). По определению разность $t_k - t_n = 100^\circ$ (градусам). Если термометрической величиной является объём, то температура t (в градусах Цельсия) определяется с помощью следующего соотношения:

$$t = \frac{V - V_n}{V_k - V_n} \cdot 100^\circ, \quad (201)$$

где V , V_n и V_k - объёмы термометрического тела при измеряемой температуре, температурах плавления льда и кипения воды. Для однозначного определения температурной шкалы необходимо кроме выбора правила градуировки условиться также о выборе термометрического тела и термометрической величины.

Определение 58

Шкала температур, установленная с использованием состояния идеального газа, где в качестве термометрического тела выбран идеальный газ, называется идеальной газовой шкалой температур.

Определение 59

Шкала называется эмпирической шкалой температур, если она проградуирована в соответствии с уравнением состояния идеального газа с водородом в качестве термометрического тела.

В настоящее время различают две температурные шкалы: термодинамическую температурную шкалу и международную практическую температурную шкалу. Обе эти шкалы можно градуировать и в градусах Кельвина (K), и Цельсия ($^{\circ}C$). Соотношение между этими температурами по любой из шкал

$$T=t+273,15, \quad (202)$$

где T - абсолютная температура, K ; t - температура, $^{\circ}C$. Размер градусов Кельвина и Цельсия один и тот же для разности температур.

В термодинамической температурной шкале или абсолютной в качестве одной из реперных точек взята температура

$$T=T_0 \equiv 0 \text{ K} = -273,15 \text{ } ^{\circ}C, \quad (203)$$

называется абсолютным нулём.

Определение 60

Абсолютный нуль - это такая температура, при которой в веществе полностью отсутствует тепловое движение молекул.

Никакое вещество нельзя охладить до температуры ниже $T_0=0$. Второй реперной точкой принята тройная точка равновесия воды (в твёрдой, жидкой и газообразной фазах). Для этой точки температура составляет $273,15 \text{ K}$. При таком выборе реперных точек разность температур между точкой кипения воды (при нормальном давлении) и точкой плавления льда с достаточной точностью равна 100 K . Единица абсолютной температуры, т.е. температуры, отсчитываемой от абсолютного нуля, называется кельвином.

Иногда для измерения температуры используют шкалы Фаренгейта ($t_l=32 \text{ } ^{\circ}F$, $t_k=212 \text{ } ^{\circ}F$) и Реомюра ($t_l=0 \text{ } ^{\circ}R$, $t_k=80 \text{ } ^{\circ}R$). Здесь t_l и t_k - реперные точки, соответствующие плавлению льда и кипению воды. Между температурами, выраженными в градусах Цельсия ($^{\circ}C$), Фаренгейта ($^{\circ}F$) и Реомюра ($^{\circ}R$) существует следующая связь:

$$t(^{\circ}F)=32+9 \cdot t(^{\circ}C)/5, \quad t(^{\circ}R)=4 \cdot t(^{\circ}C)/5. \quad (204)$$

Единицей измерения температуры в СИ является кельвин (K):

$$[T]=K. \quad (205)$$

Абсолютная шкала температур является основной температурной шкалой в физике.

Определение 61

Процесс перехода системы из неравновесного состояния в равновесное называется процессом релаксации (релаксацией).

Определение 62

Время, затраченное на такой переход, называется временем релаксации.

В качестве времени релаксации принимается время, за которое первоначаль-

ное отклонение какой-либо величины от равновесного значения уменьшится в e раз. Для каждого параметра системы имеется своё время релаксации. Наибольшее из этих времён играет роль времени релаксации системы.

Определение 63

Равновесным состоянием системы называется такое состояние, при котором все параметры системы имеют определённые значения, остающиеся при неизменных внешних условиях постоянно сколь угодно долго.

7. Идеальный газ

Определение 64

Идеальным газом называется газ, в котором собственным объёмом и межмолекулярным взаимодействием можно пренебречь. Т.е. идеальный газ - совокупность невзаимодействующих материальных точек, которые при своём движении сталкиваются между собой и со стенками сосуда, в котором они заключены. Весь объём, в котором находится идеальный газ, доступен для движения его молекул.

При определённых условиях некоторые идеальные газы ведут себя как идеальный газ (например, гелий при комнатной температуре и атмосферном давлении).

Давление идеального газа

Давление идеального газа P в замкнутой системе описывается соотношением:

$$P = mn \langle v^2 \rangle / 3, P = nkT, \quad (206)$$

где m - масса молекулы, $n = N/V$ - концентрация, $\langle v^2 \rangle$ - средний квадрат скорости молекул, k - постоянная Больцмана, T - температура. Давление идеального газа определяется средней кинетической энергией его молекул. Оно пропорционально температуре T .

Уравнение состояния вещества

Состояние заданной массы вещества определяется тремя параметрами: давлением P , объёмом V и температурой T . Данные параметры связаны между собой.

Определение 65

Уравнением состояния вещества называется соотношение, определяющее связь между P , V и T . В общем случае оно может быть записано в виде условия:

$$F(P, V, T) = 0. \quad (207)$$

Явный вид функции F зависит от свойств вещества (силы взаимодействия молекул, плотности и т.д.).

Уравнение состояния идеального газа

Уравнение состояния идеального газа устанавливает связь между давлением P , объёмом V и температурой T . Оно следует из соотношения (206) и имеет вид:

$$PV = NkT, \quad (208)$$

где N - число молекул, содержащееся в объёме V . Если известна масса газа m , то

$$PV = mN_A kT/M, \quad PV = mRT/M, \quad (209)$$

где M - молярная масса, N_A - число Авагадро, k - постоянная Больцмана, R - уни-

версальная газовая постоянная.

Определение 66

Уравнение состояния идеального газа называется уравнение Менделеева-Клапейрона.

Для одного моля газа имеем

$$PV_M = RT, \quad (210)$$

где V_M - молярный объём.

Справедливо утверждение: если состояние данного газа описывается уравнением Менделеева-Клапейрона или одним из его следствий, то такой газ является идеальным.

Законы идеального газа

Число молекул в единице объёма

Число молекул в единице объёма $n = N/V = N_A/V_M$ (концентрация) и плотность ρ идеального газа в соответствии с уравнением состояния (208) определяются соотношениями:

$$n = PN_A/RT = P/kT, \quad \rho = MP/RT. \quad (211)$$

Закон Бойля-Мариотта

Для идеального газа выполняется закон Бойля-Мариотта, согласно которому при постоянной массе газа и постоянной температуре произведение давления P на объём V газа постоянно:

$$PV = const, \text{ при } T = const \text{ и } m = const. \quad (212)$$

Это уравнение называется уравнением изотермы.

На P - V диаграмме состояния газа изотерма представляет собой гиперболу, положение которой зависит от температуры газа.

Определение 67

Процесс, при котором $T = const$, называется изотермическим.

При $T = const$ внутренняя энергия газа U остаётся постоянной. При изотермическом расширении газа вся теплота переходит в работу. Работа, совершаемая газом при изотермическом расширении, равна количеству теплоты Q , которое необходимо подвести газу для совершения этой работы:

$$\delta A = dQ = P dV, \quad (213)$$

где δA - элементарная работа, dV - элементарный объём, P - давление. Пусть V_1 и P_1 - начальные, а V_2 и P_2 - конечные объём и давление газа. Тогда согласно (212)

$$P_1 V_1 = P_2 V_2. \quad (214)$$

Полная работа A_{12} идеального газа равна объёму криволинейной трапеции (рис. 1):

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \frac{m}{M} RT \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{m}{M} \cdot \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) = P_1 V_1 \cdot \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) = P_2 V_2 \cdot \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right). \quad (215)$$

При $V_1 > V_2$ или $P_1 < P_2$ происходит сжатие газа и работа отрицательна: $A < 0$. Сле-

дует отметить, что для реализации условия $T = const$, изменения давления P и объёма V должны происходить бесконечно медленно. Кроме того, газ должен находиться в среде с очень большой теплоёмкостью. Соотношения (215) справедливы и в том случае, когда к системе подводится тепловая энергия.

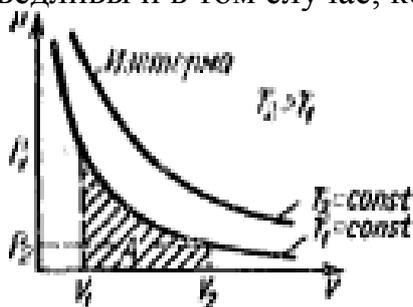


Рис. 39.

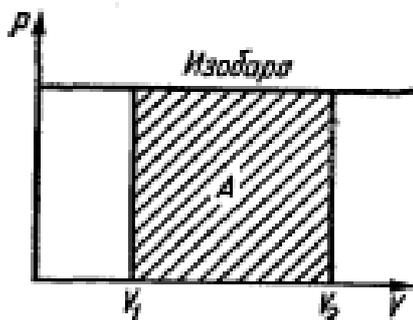


Рис. 40.

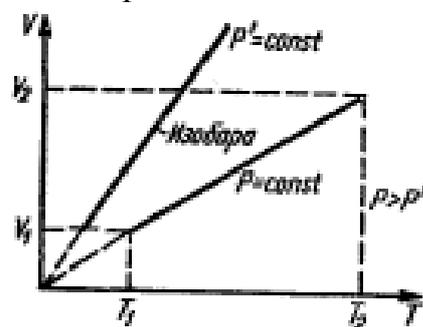


Рис. 41.

Определение 68

Свойство газа изменять свой объём при изменении давления называется сжимаемостью.

Определение 69

Изотермическим коэффициентом сжимаемости любого вещества называется следующая величина:

$$\chi = \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP} \right)_T, \quad (216)$$

где производная берётся при $T = const$. Он характеризует относительное изменение объёма при изменении давления. В случае идеального газа

$$\chi \sim 1/P. \quad (217)$$

Единицей измерения изотермического коэффициента сжимаемости χ в СИ является:

$$[\chi] = \text{м}^2/\text{Н}. \quad (218)$$

Закон Гей-Люссака

При постоянном давлении газа и постоянной массе отношение объёма газа V к его температуре T постоянно:

$$V/T = mR/MP = const, \text{ при } P = const \text{ и } m = const. \quad (219)$$

Это уравнение называется уравнением изобары. На P - V диаграмме состояния газа изобара параллельна оси V (рис. 40).

Определение 70

Процесс, при котором $P = const$, называется изобарическим.

Пусть V_1 и T_1 - начальные, а V_2 и T_2 - конечные объём и температура газа. Тогда:

$$V_1/T_1 = V_2/T_2. \quad (220)$$

Работа газа A , совершаемая при его расширении, равна площади прямоугольника на P - V диаграмме:

$$A_{12} = P\Delta V = mR\Delta T/M, \quad (221)$$

где $\Delta V = V_2 - V_1$ - изменение объёма, $\Delta T = T_2 - T_1$ - изменение температуры. На V - T диаграмме имеет вид прямой, выходящей из начала координат (рис. 3). Закон Гей-Люссака (219) можно представить в виде:

$$V = V_0(1 + \alpha_V t), \quad (222)$$

где V - объём идеального газа при температуре t , отсчитанной от 0°C , V_0 - объём идеального газа при температуре $T_0 = 273,16 \text{ K}$. Величина

$$\alpha_V = \frac{V}{V_0 T} = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{273,16} \text{ K}^{-1} \quad (223)$$

называется коэффициентом объёмного расширения. В общем случае любого вещества коэффициентом объёмного расширения при постоянном давлении называют величину

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dT} \right)_P, \quad (224)$$

где V - начальный объём, а производная берётся при $P = \text{const}$. Для идеального газа

$$\alpha \sim 1/T. \quad (225)$$

При 0°C имеем $\alpha = \alpha_V$. При низких температурах (вблизи $T = 0 \text{ K}$) для реальных газов закон Гей-Люссака не выполняется. Все газы (кроме гелия) при низких температурах переходят в жидкое состояние.

Закон Шарля

При постоянных объёме и массе газа отношение давления газа к его температуре постоянно:

$$P/V = mR/MV = \text{const}, \text{ при } V = \text{const} \text{ и } m = \text{const}. \quad (226)$$

Это уравнение называется уравнением изохоры. На P - V диаграмме состояния газа изохора параллельна оси P (рис. 42), а на P - T диаграмме изохора имеет вид прямой, выходящей из начала координат (рис. 43).

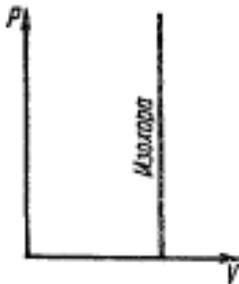


Рис. 42.

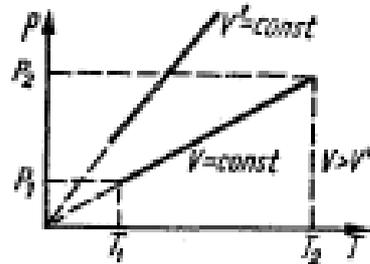


Рис. 43.

Определение 71

Процесс, при котором $V = \text{const}$, называется изохорическим.

При изохорическом процессе газ работы не совершает. Подводимая к газу тепловая энергия расходуется на увеличение его внутренней энергии U . Пусть

P_1 и T_1 - начальные, а P_2 и T_2 - конечные давление и температура газа. Тогда:

$$P_1/T_1 = P_2/T_2, \quad (227)$$

а изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = m C_V \Delta T / M, \quad (228)$$

где M - молярная масса, C_V - молярная теплоёмкость, $\Delta T = T_2 - T_1$ - изменение температуры. Закон Шарля (226) можно представить в виде:

$$P = P_0(1 + \alpha_p t), \quad (229)$$

где P - давление при температуре t , отсчитанной от 0°C , P_0 - давление газа при температуре $T_0 = 273,16$ К. Величина

$$\alpha_p = P/P_0 T_p = 1/T_0 \quad (230)$$

называется температурным коэффициентом изменения давления или просто термическим коэффициентом давления. Следует заметить, что $\alpha_p = \alpha_V$, где α_V - коэффициент объёмного расширения. Закон Шарля иногда называют вторым законом Гей-Люссака.

Закон Авагадро (1811)

При одинаковых давлении и температуре в равных объёмах любого газа содержится одинаковое число молекул $N_a = 6,022045(31) \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Этот закон следует из уравнения состояния (206).

Пример 21

Какую температуру имеют 2 г азота, занимающего объём 820 см^3 при давлении 0,2 МПа?

Решение

Для определения искомой температуры воспользуемся уравнением состояния идеального газа $PV = mRT/M$. Тогда искомая температура определяется следующим соотношением: $T = PVM/mR$. Подстановка заданных по условию параметров в данное соотношение позволяет получить: $T = 200000 \text{ Па} \cdot 0,00082 \text{ м}^3 \cdot (28 \text{ г/моль}) / [2 \text{ г} \cdot 8,31 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})] = 276,3^\circ \text{ К}$.

Пример 22

Какой объём занимают 10 г кислорода при давлении 750 мм рт. ст. и температуре 20° C ?

Решение

Для определения искомого объёма воспользуемся уравнением состояния идеального газа $PV = mRT/M$. Тогда искомая температура определяется следующим соотношением: $V = mRT/MP$. Подстановка заданных по условию параметров в данное соотношение с учётом перевода всех используемых физических величин к единицам системы СИ ($750 \text{ мм рт. ст.} \approx 100000 \text{ Па}$) позволяет получить: $V = 10 \text{ г} \cdot 8,31 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot 293^\circ \text{ К} / (32 \text{ г/моль}) \cdot 100000 \text{ Па} = 0,076 \text{ м}^3$.

8. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

Может быть показано, что давление связано со средней энергией поступательного движения молекул $\langle E_{\text{пост}} \rangle$:

$$P = 2n \langle E_{\text{ном}} \rangle / 3. \quad (231)$$

Сравним данное соотношение с рассмотренным ранее уравнением $P = n k T$ (206). Левые части уравнений равны. По этой причине равны и правые. Тогда

$$\langle E_{\text{ном}} \rangle = 3 k T / 2. \quad (332)$$

Данное уравнение является основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеального газа. Из данного уравнения можно сделать следующий вывод: абсолютная температура - величина, пропорциональная средней энергии поступательного движения молекул. Данный вывод является молекулярно-кинетическим толкованием температуры. Следует заметить, что поступательно движутся только молекулы газа. Для жидких и твёрдых тел средняя энергия молекул пропорциональна абсолютной температуре только в том случае, когда движение молекул имеет классический характер. В квантовой области пропорциональность между средней энергией молекул и абсолютной температурой перестаёт соблюдаться.

Из последнего выражения следует, что средняя энергия оказывается зависящей только от температуры, но не от массы молекулы. Поскольку $\langle E_{\text{ном}} \rangle = m \langle v^2 \rangle / 2$, то из (232) следует, что

$$\langle v^2 \rangle = 3 k T / m. \quad (233)$$

Подставив v^2 в виде суммы квадратов компонент скорости, можно записать:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle. \quad (234)$$

Из-за равномерности всех направлений движения выполняется равенство:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle. \quad (235)$$

С учётом этого получаем:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v^2 \rangle / 3 = k T / m. \quad (236)$$

Данное соотношение - математическая формулировка закона равномерного распределения энергии по степеням свободы.

Соотношение (233) определяет энергию только поступательного движения молекулы. Однако наряду с поступательным движением возможны также вращение молекулы и колебания атомов, входящих в состав молекулы. Оба эти вида движения связаны с некоторым запасом энергии, определить который позволяет устанавливаемое статистической физикой положение о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекулы.

Определение 72

Числом степеней свободы механической системы называется количество независимых величин, с помощью которых может быть задано положение системы.

Положение в пространстве материальной точки полностью определяется заданием трёх её координат (декартовых координат x , y и z ; сферических координат r , θ и φ и т.д.). В соответствии с этим материальная точка имеет три степени свободы.

Средняя скорость молекул

Молекулы газа движутся с различными скоростями. Поскольку движение молекул подчиняется законам статистической физики, средние скорости всех молекул одинаковые. Представление о скоростях движения молекул дают следующие средние величины:

1) средняя арифметическая скорость (или просто средняя скорость):

$$\langle v \rangle = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad (237)$$

где v_n - скорость n -й молекулы, N - число молекул газа, R - универсальная газовая постоянная, T - температура газа, M - молярная масса, m - масса молекулы.

2) Средняя квадратичная скорость

$$\bar{v}_{кв} \equiv \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{3 \frac{P}{\rho}}, \quad (238)$$

где

$$\langle v^2 \rangle = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n^2, \quad \langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m} \quad (239)$$

- средний квадрат скорости движения молекул, P - давление газа, ρ - плотность газа. Скорость $\bar{v}_{кв}$ по порядку величины равна скорости звука в газе. Некоторые числовые значения $\bar{v}_{кв}$:

для водорода (H_2)	$\bar{v}_{кв} = 1838 \text{ м/с}$
Для азота (N_2)	$\bar{v}_{кв} = 493 \text{ м/с}$
для кислорода (O_2)	$\bar{v}_{кв} = 461 \text{ м/с}$

Закон распределения молекул по скоростям. Распределение Максвелла

В состоянии статистического равновесия все направления скоростей молекул газа при тепловом движении равновероятны, а их абсолютные значения распределены в соответствии с законом Максвелла (1859): число молекул dN , имеющих значения скоростей в интервале между v и $v+dv$, где dv - бесконечно малое приращение скорости, определяемое соотношением:

$$\frac{dN}{N} = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv, \quad (240)$$

где N - общее число молекул газа, m - масса молекулы, k - постоянная Больцмана, T - температура газа. Соотношение (240) определяет распределение молекул по абсолютным значениям их скоростей и называется распределением Максвелла. Функция

$$F(v) \equiv \frac{1}{N} \frac{dN}{dv} = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \quad (241)$$

называется функцией распределения по скоростям. Поскольку общее число мо-

лекул N сохраняется, функция (241) удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^{\infty} F(v) dv = 1. \quad (242)$$

Функция $F(v)$ представлена на рис. 6. Её график асимметричен. С повышением температуры или уменьшением массы молекулы, максимум распределения сдвигается в сторону больших скоростей (рис. 7). Кривая при этом становится более плоской. При этом площадь под кривой, согласно (242), остаётся постоянной и равной единице.

Скорость, при которой $F(v)$ максимальна, называется наиболее вероятной скоростью v_m :

$$v_m = \sqrt{2kT/m} \quad (243)$$

- средняя скорость $\langle v \rangle$ и средний квадрат скорости $\langle v^2 \rangle$ определяются следующими соотношениями:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v F(v) dv, \quad \langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv. \quad (244)$$

Средняя $\langle v \rangle$ и среднеквадратичная скорости $\bar{v}_{кв}$ связаны с наиболее вероятной скоростью следующими соотношениями:

$$\langle v \rangle = \sqrt{4/\pi} v_m \approx 1,128 v_m, \quad \bar{v}_{кв} = \sqrt{1,5} v_m \approx 1,225 v_m. \quad (245)$$

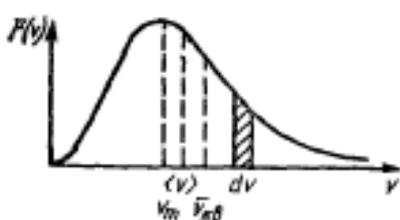


Рис. 44.

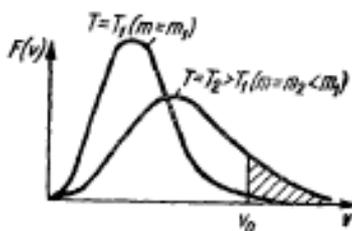


Рис. 45.

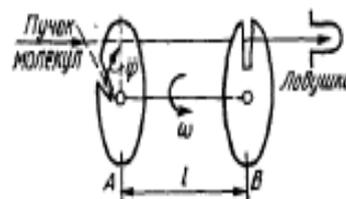


Рис. 46.

Между этими скоростями выполняется неравенство:

$$\bar{v}_{кв} > \langle v \rangle > v_m. \quad (246)$$

Из (245) следует, что все эти три величины дают общее представление о скоростях теплового движения молекул газа.

Пользуясь кривой распределения $F(v)$ (рис. 44), можно графически определить число молекул, скорости которых лежат в заданном интервале v и $v + dv$. Это число равно площади заштрихованной криволинейной трапеции с основанием dv и высотой $F(v)$.

Число молекул ΔN , скорости которых больше некоторой величины v_0 , определяется соотношением

$$\Delta N = N \int_{v_0}^{\infty} F(v) dv. \quad (247)$$

Число ΔN растёт с повышением температуры (рис. 45). Можно показать, что 70 % молекул газа имеют скорости, которые отличаются от v_m не более, чем на 50

% . Скорость, большую чем $3v_m$, имеют в среднем только 0,04 % молекул.

Если по какой-либо причине газ не находится в состоянии равновесия, то распределение молекул по скоростям отличается от максвелловского. Поскольку тепловое движение молекул является хаотичным, столкновения между ними не могут нарушить установившееся распределение по скоростям. С другой стороны, справедливо обратное утверждение: движение молекул хаотично в соответствии с законом Максвелла (240).

Закон Максвелла (240) был подтверждён экспериментально в опытах Ламперта (1929). Схема опыта показана на рис. 3. Меняя скорость вращения дисков A и B в рамках данного опыта или угол между щелями в дисках φ , можно выделить из пучка молекул те из них, которые обладают средней скоростью $v = \omega l / \varphi$. Накапливая эти молекулы в ловушке, можно определить их относительное количество $\Delta N / N$ в пучке.

Пример 23

Какое количество молекул находится в комнате объёмом $V = 80 \text{ м}^3$ при температуре $T = 17^\circ \text{ C}$ и давлении $P = 100 \text{ кПа}$?

Решение

На первом этапе определения искомого количества молекул воспользуемся соотношением (206): $P = nkT$. С помощью данного соотношения может быть получена концентрация молекул: $n = P/kT$. Подстановка заданных по условию параметров в данное соотношение позволяет получить: $n = 100\,000 \text{ Па} / (1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} \cdot 290^\circ \text{ K}) = 0,25 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3}$. Искомое количество молекул N можно получить умножением их концентрации на объём. Тогда $N = 0,25 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3} \cdot 80 \text{ м}^3 = 2 \cdot 10^{27}$.

Пример 24

При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул азота больше их наиболее вероятной скорости на $\Delta v = 50 \text{ м/с}$?

Решение

Для определения наиболее вероятной скорости воспользуемся соотношением (243): $v_m = \sqrt{2kT/m}$. Среднеквадратическая скорость определяется соотношением (238): $\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{3kT/m}$. Их разница посл подстановки заданных по условию параметров определяется следующим соотношением: $\Delta v = \sqrt{1,72T} - \sqrt{1,05T}$. Возведение его в квадрат позволяет получить: $\Delta v^2 = 1,72T - 2\sqrt{1,72 \cdot 1,05T^2} + 1,05T$. В окрнчательном виде для квадрата разницы Δv получаем: $\Delta v^2 = 0,06T$. Тогда: $T = 0,25 \cdot \Delta v = 12,5 \text{ м/с}$.

9. Первое начало термодинамики

Определение 73

Первое начало термодинамики - закон сохранения энергии для изолированной термодинамической системы. Оно устанавливает однозначную связь между количеством теплоты, сообщённом замкнутой системе, и изменениями её внутренней энергии и выполненной за счёт этой теплоты работы над внешней средой.

Математическая формулировка данного начала имеет следующий вид:

$$Q = \Delta U + A_{12} \quad (248)$$

- полное количество теплоты Q , полученное системой, идёт на приращение её внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ и на совершение работы над внешней средой A_{12} .

Определение 74

Количеством теплоты Q называется энергия, которое передаёт одно тело другому непосредственно при контакте или путём излучения. Процесс передачи теплоты связан с работой, которую совершают молекулы вещества при хаотическом движении. Единицей измерения количества теплоты в СИ является джоуль (Дж):

$$[Q] = \text{Дж}. \quad (249)$$

Ранее использовалась единица измерения теплоты калория:

$$1 \text{ кал} = 4,1868 \text{ Дж}. \quad (250)$$

Подобно другим видам энергии количество теплоты подчиняется закону сохранения. Если тело участвует в процессе, в котором оно получает и отдаёт теплоту, которое получает это тело, приписывают знак "+", а количеству теплоты, которое оно отдаёт - знак "-".

Элементарное количество теплоты δQ , сообщаемое телу для изменения его температуры от T до $T+dT$, определяется соотношением:

$$\delta Q = C dT, \quad (251)$$

где C характеризует вещество, из которого сделано тело, и называется теплоёмкостью тела. Из (250) следует, что

$$C = \delta Q / dT, \quad (252)$$

т.е. теплоёмкость какого-либо тела является величиной, равной количеству теплоты, которое необходимо сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один кельвин. Теплоёмкость C зависит от массы тела, его химического состава и термодинамического состояния. Различают удельную и молярную теплоёмкости.

Определение 75

Удельной теплоёмкостью c называется теплоёмкость единицы массы вещества. Если тело однородно, то $c = C/m$, где m - масса тела.

Определение 76

Молярная (молекулярная) теплоёмкость C - теплоёмкость одного моля вещества.

Связь между молярной и удельной теплоёмкостями имеет вид: $c = C/M$. Данные теплоёмкости имеют следующие единицы измерения:

$$[c] = \text{Дж/кг}\cdot\text{К}, [C] = \text{Дж/моль}\cdot\text{К}. \quad (65)$$

Из опыта следует, что количество теплоты, а значит, и теплоёмкость зависит от вида термодинамического процесса, изменяющего состояние системы. Теплота (как и работа) не является функцией состояния. Математически это выражается в том, что элементарное количество теплоты не является полным диф-

ференциалом, и обозначается δQ , т.е. δQ является бесконечно малой величиной, но не приращением функции Q .

С физической точки зрения различают два типа теплоёмкости: при постоянном объёме и при постоянном давлении.

Определение 77

Теплоёмкостью при постоянном объёме V называется теплоёмкость (удельная и молярная), которая определяется при нагревании тела при постоянном объёме: $V = const$. Обозначаются теплоёмкости при постоянном объёме следующим образом: c_V и C_V .

Определение 78

Теплоёмкостью при постоянном давлении p называется теплоёмкость (удельная и молярная), которая определяется при нагревании тела при постоянном давлении: $P = const$. Обозначаются теплоёмкости при постоянном объёме следующим образом: c_P и C_P .

Общее количество теплоты Q , необходимое для повышения температуры тела от T_1 до T_2 , определяется соотношением:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C dT. \quad (254)$$

Зная Q , можно найти среднюю теплоёмкость

$$\bar{C} = Q/\Delta T, \quad (255)$$

где $\Delta T = T_2 - T_1$ - изменение температуры.

Теплоёмкости твёрдых тел, жидкостей и газов зависят от их температуры. В диапазонах температур от -40°C до $+100^\circ\text{C}$ для ряда твёрдых тел и от 0°C до $+40^\circ\text{C}$ для жидкостей. Однако, удельные теплоёмкости остаются практически постоянными, равными своим средним значениям. Удельная теплоёмкость любого вещества увеличивается с повышением температуры. В диапазоне температур от T_1 до T_2 , где она слабо изменяется, количество теплоты Q , необходимое для нагревания тела от T_1 до T_2 , определяется соотношением:

$$Q = C m \Delta T, \quad (256)$$

где c - удельная теплоёмкость, m - масса тела, $\Delta T = T_2 - T_1$. Количества теплоты Q_V и Q_P , необходимые для нагрева газа в диапазоне температур от T_1 до T_2 при постоянных объёме V и давлении P , где удельные теплоёмкости c_V и c_P остаются практически постоянными, определяются соотношениями:

$$Q_V = c_V m \Delta T, \quad Q_P = c_P m \Delta T, \quad (257)$$

где $\Delta T = T_2 - T_1$, c_V и c_P - удельные теплоёмкости газа при постоянном объёме V и постоянном давлении P , m - масса газа. При нагреве газа при постоянном давлении P его объём увеличивается. Количества теплоты Q_V и Q_P связаны между собой соотношением:

$$Q_P = Q_V + A, \quad A = P \Delta V, \quad (258)$$

где A - работа, совершаемая газом при увеличении его объёма на ΔV при нагре-

вании при постоянном объёме P . Из (258) следует, что всегда $c_P > c_V$.

Пример 25

В сосуде под поршнем находится 1 г азота. Какое количество теплоты необходимо затратить, чтобы нагреть азот на $10^\circ K$?

Решение

Для определения количества теплоты воспользуемся соотношением (66): $Q = C m \Delta T$. Теплоёмкость азота при нормальных условиях равна $C = 1,039 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot K)$. Подстановка заданных по условию параметров в соотношение (66) позволяет получить: $Q = 1,039 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot K) \cdot 1 \text{ г} \cdot 10^\circ K = 10,39 \text{ Дж}$.

Определение 79

Элементарная работа δA , совершаемая системой при бесконечно малом квазистатическом расширении, сопровождающимся увеличением её объёма на dV , выражается следующим образом:

$$\delta A = F dx = P S dx = P dV, \quad (259)$$

где $dV = S dx$, S - площадь поверхности, перпендикулярно которой действует сила \vec{F} , P - давление.

Определение 80

Квазистатическим (квазиравновесным) называется такой идеализированный процесс, при котором система непрерывно переходит из одного равновесного состояния в другое близлежащее состояние равновесия.

В случае квазистатических процессов внутреннее давление газа P всегда равно внешнему давлению P' ($P = P'$), и $\delta A = -\delta A'$, где $\delta A' = -P' dV$ - работа внешних сил. Полная работа конечного процесса между состояниями 1 и 2 определяется соотношением:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} P dV. \quad (260)$$

Так как в общем случае давление P является функцией не только объёма V , но и температуры T , т.е. $P = P(V, T)$, то работа A_{12} не определяется заданием начального и конечного состояний системы и зависит от способа (пути) перехода системы из одного состояния в другое. Работа A_{12} не является функцией состояния. Поэтому для обозначения элементарной работы используется символ δA (а не dA), подчёркивая тем самым тот факт, что она не является полным дифференциалом функции A . Используя уравнение состояния вещества, работу A_{12} можно найти в явном виде.

Уравнение Майера

Первое начало термодинамики (248) позволяет дать более строгое определение теплоёмкости системы, связав его с внутренней энергией U , давлением P , объёмом V и температурой T :

$$C = (dT + \delta A) / dT = (dT + P dA) / dT, \quad (261)$$

или в явном виде

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] \frac{dV}{dT}, \quad (262)$$

где использовано представление для полного дифференциала вида

$$dU = (\partial U / \partial T)_V dT + (\partial U / \partial V)_T dV. \quad (263)$$

Величина

$$C = (\partial U / \partial T)_T \quad (264)$$

называется теплоёмкостью системы при постоянном объёме ($V = const$), а величина

$$C_p = C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] \frac{\partial V}{\partial T}, \quad (265)$$

называется теплоёмкостью системы при постоянном давлении ($P = const$). В случае идеального газа элементарное изменение внутренней энергии dU одного моля газа определяется соотношением

$$dU = C_V dT = \delta Q, \quad V = const, \quad (266)$$

а между молярными теплоёмкостями C_p и C_V существует следующая связь

$$C_p - C_V = R, \quad (267)$$

где $R = 8,3143 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ - универсальная газовая постоянная. Соотношение (267) называется уравнением Майера (1937). Для любого вещества можно определить характерную для него величину

$$\gamma = C_p / C_V = c_p / c_V, \quad (268)$$

называемую показателем адиабаты. Здесь C_p и C_V - молярные, а c_p и c_V - удельные теплоёмкости при $P = const$ и $V = const$ соответственно. Из уравнения Майера следуют соотношения:

$$C_V = R / (\gamma - 1), \quad c_V = R / (\gamma - 1) M, \quad c_p = \gamma R / (\gamma - 1), \quad c_p = \gamma R / (\gamma - 1) M, \quad (269)$$

где M - молярная масса. Показатель адиабаты γ однозначно связан с числом степеней свободы молекулы вещества i следующим соотношением:

$$\gamma = (i + 2) / i. \quad (270)$$

Адиабатический процесс

Определение 81

Адиабатическим называется такой термодинамический процесс, при котором система не поглощает и не отдаёт теплоту: $\delta Q = 0$. Первое начало термодинамики при $\delta Q = 0$ представимо в следующем виде:

$$C_V dT + R P dV = 0 \quad (271)$$

с учётом выражения

$$dT = (P dV + V dP) / R, \quad (272)$$

приводит к дифференциальному уравнению процесса

$$dP/P = -\gamma dV/V, \quad (273)$$

где γ - показатель адиабаты, P - давление, V - объём. Решение последнего уравнения имеет вид:

$$PV^\gamma = \text{const}. \quad (274)$$

Данное соотношение называется уравнением Пуассона. В соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона соотношение (274) может быть преобразовано к другим формам:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{const}. \quad (274a)$$

Уравнения (274) и (274a) применимы только для описания квазистатических адиабатических процессов. Т.к. $\gamma > 1$, то при адиабатическом сжатии газ нагревается, а при адиабатическом расширении - охлаждается. Уравнения Пуассона справедливы лишь в интервале давлений, где γ постоянна. В общем случае необходимо учитывать, что γ - функция давления, объёма и температуры, т.е. $\gamma = \gamma(P, V, T)$. Работа A_{12} , совершаемая газом при адиабатическом изменении объёма от V_1 до V_2 , определяется следующим соотношением

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_{(1)}^{(2)} P dV = \int_{(1)}^{(2)} \frac{PV_1^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{PV_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{PV_1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = \\ &= \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = c_V m (T_2 - T_1), \end{aligned} \quad (275)$$

где P_1, V_1 - давление и температура в начальном состоянии 1, P_2, V_2 - давление и температура в начальном состоянии 2, c_V - удельная теплоёмкость при постоянном объёме, m - масса газа, M - молярная масса, R - универсальная газовая постоянная.

При адиабатическом процессе с увеличением объёма давление газа уменьшается быстрее, чем при изотермическом (рис. 47), а совершаемая работа при одном и том же изменении объёма A_{12} меньше. Работа при адиабатическом процессе существенно зависит от показателя адиабаты γ . При $\gamma \rightarrow 1$ адиабата ($Q = \text{const}$) переходит в изотерму ($T = \text{const}$) (рис. 47).

Политропический процесс

Определение 82

Политропическим процессом называется термодинамический процесс, при котором теплоёмкость остаётся постоянной.

Первое начало термодинамики в этом случае имеет вид:

$$(C - C_V) dT = P dV \quad (276)$$

и с учётом $dT = (P dV + V dP) / R$ приводит к следующему уравнению процесса

$$n dV/V = -dP/P, \quad n = (C - C_V) / (C - C_P), \quad (277)$$

где n - показатель политропы. Решение последнего дифференциального уравнения имеет вид:

$$PV^n = \text{const.} \quad (278)$$

где P - давление газа, V - объём газа. При политропическом процессе происходит частичный обмен системы со средой. Он занимает промежуточное состояние между изотермическим ($T = \text{const}$) и адиабатическим ($Q = \text{const}$) процессами. Кривая, описываемая уравнением (278), называется политропой. На P - V диаграмме она располагается между изотермой и адиабатой (рис. 47).

В соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона уравнение политропы можно представить в другой, эквивалентной (278) форме:

$$TV^{n-1} = \text{const}, T^n P^{1-n} = \text{const.} \quad (279)$$

Работа A_{12} , совершаемая газом при политропическом процессе, определяется следующим соотношением:

$$A_{12} = mR(T_1 - T_2)/M(n-1), \quad (280)$$

где m - масса тела, M - молярная масса, R - универсальная газовая постоянная, n - показатель политропы, T_1 и T_2 - начальная и конечная температуры. Если $T_2 > T_1$, то $A_{12} < 0$ - работа совершается над газом и он сжимается. Числовое значение показателя политропы n определяется опытным путём. Зависимость теплоёмкости C от n для идеального газа показана на рис. 48. Предельные случаи политропического процесса:

- 1) адиабатический процесс: $C = 0$, $n = \gamma = C_p/C_v$ и $PV^\gamma = \text{const}$, $dU = C_v dT = -\delta A$;
- 2) изотермический процесс: $C = \infty$, $n = 1$ и $PV = \text{const}$, $T = \text{const}$, $\delta A = PdV$, $dU = 0$, $\delta Q = \delta A$;
- 3) изобарический процесс: $C = C_p$, $n = 0$ и $V/T = \text{const}$, $P = \text{const}$, $\delta A = PdV$, $dU = C_v dT$, $\delta Q = C_p dT$;
- 4) изохорический процесс: $C = C_p$, $n = \infty$ и $P/T = \text{const}$, $V = \text{const}$, $\delta A = 0$, $dU = C_v dT = \delta Q$.

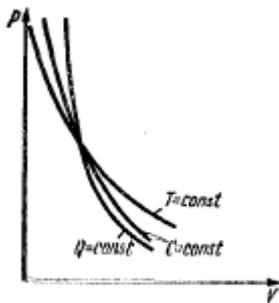


Рис. 47.

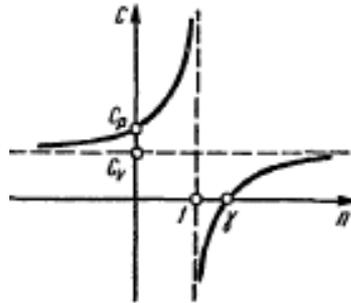


Рис. 48.

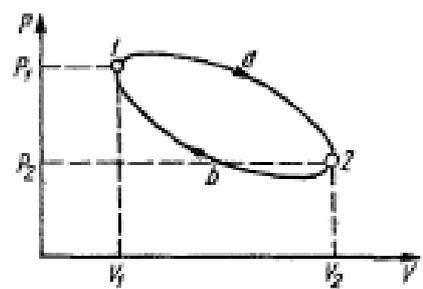


Рис. 49.

Обратимые и необратимые процессы

Определение 83

Обратимым термодинамическим процессом называется такое изменение состояния системы, при котором она может возвращаться в начальное состояние без остаточных изменений в системе и во внешней среде. При этом предполагается прохождение системой в обратном порядке тех же промежуточных состояний, что и в прямом процессе.

Определение 84

Процесс, в результате которого система не может возвратиться в начальное состояние без возникновения остаточных изменений в системе или окружающей среде, называется необратимым процессом.

Переход теплоты от более нагретого тела к менее нагретому телу при их контакте является примером необратимого процесса.

Определение 85

Бесконечно медленный процесс, состоящий из непрерывной последовательности состояний равновесий или состояний, бесконечно мало отличающихся от равновесных, называется квазистатическим или равновесным процессом. Равновесные процессы являются обратимыми.

Реальные процессы могут приближаться сколь угодно близко к равновесному, если они протекают достаточно медленно. Необратимость процессов в природе не вытекает из первого начала термодинамики.

Определение 86

Самопроизвольный (без внешнего воздействия) процесс перехода системы из неравновесного состояния в равновесное называется процессом релаксации (релаксацией). Время такого перехода называется временем релаксации. Каждый параметр системы имеет своё время релаксации.

10. Циклические процессы. Тепловой двигатель.

Второе начало термодинамики

Определение 87

Циклическим или круговым процессом называется такая последовательность круговых процессов, в результате которых система возвращается в начальное состояние. На диаграмме этот процесс изображается замкнутой кривой. На рис. 11 показана P - V диаграмма кругового процесса. В процессе, происходящем по направлению часовой стрелки ($1a2b1$), теплота превращается в механическую энергию. В процессе, происходящем против часовой стрелки ($1b2a1$), механическая энергия превращается в теплоту. Точки 1 и 2 соответствуют начальным и конечным значениям давлений (P_1 и P_2) и объёмов (V_1 и V_2) системы. Кривая $1a2$ описывает переход системы из начального состояния 1 в конечное состояние 2, а кривая $2b1$ - обратный процесс. Система после получения в начальном состоянии 1 определённого количества теплоты Q_1 от нагревателя совершает положительную работу $A_{12} > 0$ и переходит в конечное состояние 2. Затем после теплового контакта с холодильником она отдаёт ему часть количества теплоты Q_2 и за счёт совершения над системой работы A'_{12} возвращается в начальное состояние.

Определение 88

Система, которая совершает круговой процесс, энергией (теплотой) с внешней средой (другими системами), называется рабочим телом или веществом.

Определение 89

Устройство, которое совершает механическую работу за счёт подводимой к нему теплоты, называется тепловым двигателем или машиной.

Рабочим телом в тепловых двигателях является вещество, к которому подводится теплота. Часто таким веществом является газ.

Определение 90

Под холодильником понимается тело, температура которого ниже температуры рабочего тела в конечном состоянии при совершении циклического процесса. Таким образом, холодильник - тело, которому рабочее вещество передаёт теплоту. Тело, от которого рабочее вещество получает теплоту, называется нагревателем.

При прямом и обратном процессах (рис. 49) выполняется закон сохранения энергии, который согласно первому началу термодинамики приводит к соотношениям:

$$Q_1 = U_2 - U_1 + A_{12}, \quad -Q_2 = U_1 - U_2 - A'_{12}, \quad Q_1 - Q_2 = A_{12} - A'_{12}, \quad (281)$$

где Q_1 - количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя; Q_2 - количество теплоты, отданное рабочим телом холодильнику; U_1 и U_2 - внутренняя энергия рабочего тела в начальном и конечном состояниях; A_{12} - работа, совершаемая тепловой машиной; A'_{12} - работа внешних сил над ней. Таким образом, при совершении тепловым двигателем кругового процесса, нагреватель отдал теплоту Q_1 , а холодильник получил теплоту Q_2 . Их разность $Q_1 - Q_2$ затрачена на совершение работы $A = A_{12} - A'_{12}$.

Определение 91

Отношение

$$\eta = A/Q_1 = (Q_1 - Q_2)/Q_1 \quad (282)$$

называется коэффициентом полезного действия (КПД) теплового двигателя или термическим КПД. Тепловой двигатель также характеризуется коэффициентом

$$\zeta = Q_2/A, \quad (283)$$

который равен количеству теплоты Q_2 (в джоулях), полученному холодильником, при выполнении рабочим телом работы в один джоуль. Коэффициент полезного действия η определяет работу, совершённую тепловым двигателем за один цикл и приходящуюся на единицу затраченного на этот цикл количества теплоты Q_1 , подводимого от нагревателя. При этом всегда $\eta < 1$, а $\zeta < -1$.

Пример 26

В котле паровой машины температура 160°C , а температура холодильника 10°C . Какую максимальную работу может теоретически совершить машина, если в топке, коэффициент полезного действия которой 60% , сожжён уголь массой 200 кг с удельной теплотой сгорания $2,9 \cdot 10^7\text{ Дж/кг}$?

Решение

Максимальную работу может совершить идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, КПД которой $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$, где T_1 и T_2 - абсолютные температуры нагревателя и холодильника. Для любой тепловой машины КПД определяется по формуле $\eta = A/Q$, где A - работа, совершаемая тепловой машиной, Q - количество теплоты, полученной машиной от нагревателя. Из усло-

вия задачи ясно, что Q - это часть количества теплоты, выделившейся при сгорании топлива: $Q = \eta mg$. Тогда $(T_1 - T_2)/T_1 = A/\eta mg$. Из данного соотношения получаем: $A = \eta mg(T_1 - T_2)/T_1 = 1,2 \cdot 10^9$ Дж.

Пример 27

Паровая машина мощностью $N = 14,7$ кВт потребляет за 1 ч работы топливо массой $m = 8,1$ кг, с удельной теплотой сгорания $q = 3,3 \cdot 10^7$ Дж/кг. Температура котла 200°C , холодильника 58°C . Определите КПД этой машины и сравните его с КПД идеальной тепловой машины.

Решение

КПД тепловой машины равен отношению совершённой механической работы A к затраченному количеству теплоты Q выделяющейся при сгорании топлива. Количество теплоты $Q = mq$. Совершённая за это же время работа $A = Nt$. Таким образом, $\eta = A/Q = Nt/qm = 0,198$, или $\eta \approx 20\%$.

Принцип Томпсона

Невозможен циклический процесс, единственным результатом которого было бы превращение теплоты, получаемой системой от внешней среды, в работу без изменений в окружающей среде.

Эквивалентные формулировки принципа Томпсона

- 1) невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы производство работы за счёт охлаждения рабочего тела;
- 2) невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы производство работы за счёт уменьшения внутренней энергии рабочего тела.

Принцип Томпсона является обобщением большого числа опытных данных. Его называют также постулатом второго начала термодинамики или просто вторым началом термодинамики.

Справедливость этого постулата подтверждают многочисленные следствия, также согласующиеся с опытом. Этот принцип является фундаментальным. Он накладывает дополнительные ограничения на возможности тепловых двигателей. Так, создание тепловой машины с $Q_2 = 0$, т.е. $\eta = 1$, не противоречит первому началу термодинамики, но запрещено принципом Томпсона, согласно которому нельзя совершать работу только за счёт внутренней энергии рабочего тела. Тепловой двигатель с $\eta = 1$ называется вечным двигателем второго рода.

Эквивалентные формулировки второго закона термодинамики:

- 1) невозможен процесс, единственным результатом которого было бы превращение в работу всего количества теплоты, полученного системой;
- 2) нельзя построить вечный двигатель второго рода.

Цикл Карно

Определение 92

Циклом Карно (1824) называется такой круговой процесс, при котором работа, совершаемая тепловым двигателем за счёт подводимой к нему теплоты, максимальна. P - V и T - V диаграммы цикла показаны на рис. 50 и 51. Они состоят из двух изотерм 1-2, 3-4 и двух адиабат 2-3, 4-1. Для осуществления процесса необходимо иметь нагреватель (тело с температурой T_1 , отдающее теплоту), холо-

дильник (тело с более низкой температурой T_2 , $T_1 > T_2$, которому теплота передаётся) и рабочее тело (вещество, посредством которого осуществляется передача теплоты и совершается сама работа).

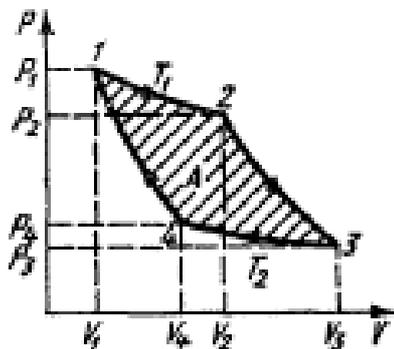


Рис. 50.

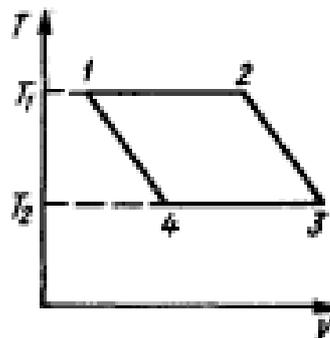


Рис. 51.

Цикл Карно - квазистатический процесс. В начальном состоянии 1 рабочее тело с массой m , молярной массой M , и температурой T приводят в тепловой контакт с нагревателем, имеющим постоянную температуру, равную T_1 . Переход из состояния 1 в состояние 2 по изотерме ($T_1 = const$) (рис. 50, 51) соответствует бесконечно медленному уменьшению давления от P_1 до P_2 ($P_1 > P_2$) за счёт квазистатического увеличения объёма тела от V_1 до V_2 ($V_1 < V_2$). При этом оно получает от нагревателя количество теплоты $Q_{12} = (m/M)RT_1 \ln(V_2/V_1)$ и производит работу $A_{12} = Q_{12}$ против сил внешнего давления. В состоянии 2 рабочее вещество адиабатически изолируют ($Q_{23} = 0$), и далее увеличение его объёма от V_2 до V_3 ($V_2 < V_3$) происходит по адиабате 2-3 до температуры холодильника T_2 ($T_2 < T_1$) и давления P_3 ($P_3 < P_2$). На участке 2-3 рабочее тело также совершает работу против сил внешнего давления, равную $A_{23} = (m/M)[R/(\gamma-1)](T_1 - T_2)$. В состоянии 3 рабочее вещество приводят в тепловой контакт с холодильником и, непрерывно увеличивая давление от P_3 до P_4 ($P_3 < P_4$), изотермически ($T_2 = const$) сжимают его до состояния 4 с объёмом рабочего тела V_4 ($V_4 < V_3$). На участке 3-4 рабочее тело отдаёт холодильнику количество теплоты $Q_{34} = (m/M)RT_2 \ln(V_4/V_3)$. Над рабочим телом производится работа $A_{34} = Q_{34} < 0$. Состояние 4 выбирается так, чтобы из него можно было вернуть рабочее тело в состояние 1 с помощью квазистатического сжатия по адиабате 4-1 ($V_1 < V_4$, $P_1 > P_4$, $T_1 > T_2$). При таком переходе над рабочим телом также совершается работа $A_{41} = -A_{23}$, а теплота не подводится, т.е. $Q_{41} = 0$. В результате цикла Карно полная работа $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_{12} + Q_{34}$. Графически работа A представляется площадью, ограниченной кривой 12341 (заштрихованная область на рис. 50). Превращение теплоты в механическую энергию происходит не полностью, а частично. При этом должно выполняться условие $|Q_{12}| > |Q_{34}|$. КПД по определению равен $\eta = A/Q_1$.

Пример 28

Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 2,94$ кДж и отдаёт за один цикл холодильнику количество теплоты $Q = 13,4$ кДж. Найти к.п.д. цикла.

Решение

К.п.д. цикла Карно $\eta = A/Q_1$, где Q_1 - количество теплоты, подведённое к рабочему телу. По условию задачи тепловая машина является идеальной. Тогда $(T_1 - T_2)/T_1 = (Q_1 - Q_2)/Q_1$. Сравнивая последнее соотношение с соотношением для η , получаем: $A = Q_1 - Q_2$. Тогда: $Q_1 = A + Q_2$. В окончательной форме соотношение для η имеет вид: $\eta = A/(A + Q_2) = 18\%$.

11. Реальные газы. Отклонение свойств газов от идеальности

В реальных газах между молекулами действуют межмолекулярные силы, которые на расстоянии порядка 10^{-9} м и больше являются силами притяжения, а на расстоянии порядка 10^{-10} м и меньше - силами отталкивания. Молекулы такого газа обладают потенциальной энергией $U(r)$, где r - расстояние между двумя молекулами, которая во многих задачах может быть аппроксимирована следующей функцией

$$U(r) = (a_1/r^{12}) - (a_2/r^6), \quad (284)$$

где a_1 и a_2 - постоянные. Функция (284) называется потенциалом Ленарда-Джонса. Первое слагаемое соответствует силам отталкивания, а второе - силам притяжения Ван-дер-Ваальса.

Молекулы реального газа имеют размер порядка 10^{-10} м. Таким образом, не весь объём сосуда V , в котором находится газ, доступен для движения молекул. При давлении $\sim 10^6$ Па среднее расстояние между молекулами в 10 раз больше их собственных размеров, а отношение объёма сосуда V к объёму, занимаемому молекулами V' , равно ~ 2000 . При таких условиях свойства реального газа близки к свойствам идеального газа. При давлении ~ 100 Па молекулы в среднем находятся на расстоянии одна от другой только в 2 раза большем их размеров, а отношение объёмом $V/V' \propto 20$. В этом случае свойства реального и идеального газов различаются как количественно, так и качественно.

Уравнения состояния

Уравнение Ван-дер-Ваальса

Свойства реальных газов хорошо описываются уравнением (210) только при малых плотностях ρ , т.е. согласно уравнению (211) при малых давлениях P и высоких температурах T . С увеличением P и уменьшением T наблюдается отклонение от этого уравнения. Для описания реальных газов в широком интервале изменения плотности ρ имеется ряд различных уравнений, вид которых зависит от используемых в теории этих уравнений, т.е. при их получении, моделей межмолекулярного взаимодействия. Наиболее известным является уравнение Ван-дер-Ваальса (1873). В теории этого уравнения используется аппроксимация межмолекулярного движения моделью твёрдых шаров, между которыми существуют силы притяжения. Силы отталкивания учитываются только тем, что размеры шаров считаются конечными. Потенциальная энергия двух таких шаров показана точечной кривой на рис. 52. Уравнением Ван-дер-Ваальса называется следующее соотношение

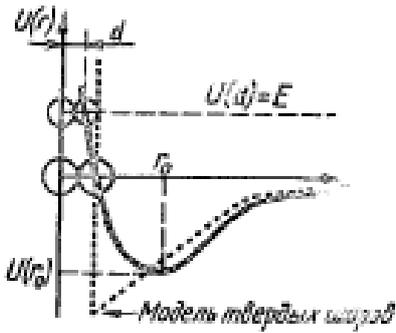


Рис. 52.

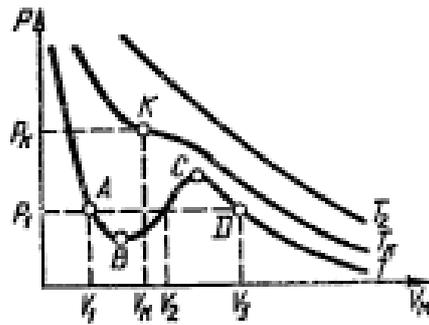


Рис. 53.

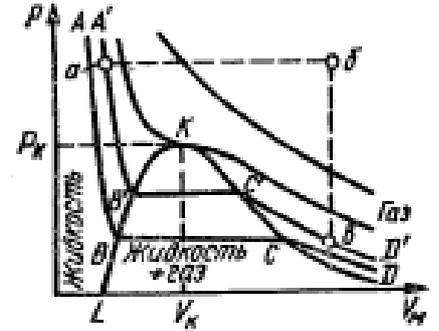


Рис. 54.

$$\left(P + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT, \quad \left(P + \frac{m^2 a}{M^2 V^2}\right)\left(V - b \frac{m}{M}\right) = RT \frac{m}{M}, \quad (285)$$

где P - давление, $V_M = V/\nu$ - молярный объём, V - полный объём газа, ν - число молей, R - универсальная газовая постоянная, T - температура, m - масса газа, M - молярная масса, a и b - постоянные Ван-дер-Ваальса, характерные для каждого газа. Единицами измерения постоянных a и b являются

$$[a] = \text{Па} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^3, \quad [b] = \text{м}^3 / \text{моль}. \quad (286)$$

Теоретический вывод уравнения в модели твёрдых упругих шаров предполагает, что выполняются условия:

$$P \gg a/V_M^2, \quad V_M \gg b, \quad (287)$$

где a/V_M^2 - поправка к уравнению состояния идеального газа (210), обусловленная силами притяжения между молекулами, учитывающая внутреннее давление, обусловленное силами притяжения между молекулами; b - поправка на собственный объём молекул, обусловленный силами отталкивания. Постоянные a и b определяются с помощью соотношений:

$$a = -2\pi N_A^2 \int_d^\infty r^2 U(r) dr, \quad b = 2\pi d^3 N_A, \quad (288)$$

где N_A - число Авагадро, d - диаметр молекул. Они связаны с параметрами критического состояния газа P_k , V_k и T_k следующим образом:

$$a = 9RT_k V_k, \quad b = V_k/3, \quad P_k = a/27b d^2, \quad T_k = 8a/27Rb. \quad (289)$$

Реальные газы описываются уравнением (285) лишь приближённо. Опыт показывает, что величины a и b зависят от температуры T . Уравнение Ван-дер-Ваальса только качественно правильно описывает свойства плотных газов. Тем не менее это уравнение применяют для объяснения свойств газов в широком диапазоне давлений и температур, рассматривая его уже как приближённое полужемпирическое, а константы a и b определяют не теоретическим, а опытным путём.

Газ, который подчиняется уравнению (285), называется газом Ван-дер-Ваальса. Внутренняя энергия одного моля газа определяется соотношением:

$$U_M = C_V T - a/U_M, \quad (290)$$

где C_V - молярная теплоёмкость.

Уравнение Дитеричи

Уравнение (285) не учитывает влияния пристеночного молекулярного слоя на состояние газа. В этом случае на молекулы действует результирующая сила, направленная внутрь газа. Кроме того эти молекулы испытывают дополнительное притяжение со стороны стенок сосуда, что приводит к уплотнению пристеночного слоя и увеличению давления газа на стенку. Из опыта следует, что давление не зависит от материала стенки. Уравнение состояния газа, учитывающее данные эффекты, имеет вид

$$P(V_M - b) = RT \cdot \exp\left(-\frac{a}{RTV_M}\right) \quad (291)$$

и называется уравнением Дитеричи. В пределе $b \ll V_M$ и $a \ll RTV_M$ оно переходит в уравнение Ван-дер-Ваальса. Уравнение (291) является полуэмпирическим. Теоретически оно доказано лишь для условий (187).

Уравнение Дитеричи непригодно для описания газа при высоких давлениях. Но оно лучше, чем уравнение (185) описывает его свойства при умеренных давлениях.

Уравнения Бертло и Клаузиуса

Эти уравнения чисто эмпирически учитывают зависимость внутреннего давления газа от температуры и имеют вид:

уравнение Бартли

$$\left(P + \frac{a}{TV_M^2}\right)(V_M - b) = RT, \quad (292)$$

уравнение Клаузиуса

$$\left[P + \frac{a}{T(V_M + c)^2}\right](V_M - b) = RT. \quad (293)$$

Здесь a , b и c определяются опытным путём. Уравнение Бертло точнее уравнения Ван-дер-Ваальса при умеренных давлениях, а уравнение Клаузиуса - при любых значениях давления за счёт наличия подгоночной константы c .

Критические параметра газа

Изотермы Ван-дер-Ваальса

В отличие от изотермы идеального газа, представляющей собой гиперболу, изотерма Ван-дер-Ваальса описывается уравнением (185), которое является уравнением третьей степени относительно молярного объёма V_M . Эта изотерма имеет вид, представленный на рис. 15. Три значения объёма V_1 , V_2 и V_3 соответствует трём корням уравнения (185). Им отвечают точки пересечения $P_1 = const$ с изотермой. Изотерма Ван-дер-Ваальса при некоторой температуре T имеет минимум и максимум. При повышении температуры эта изотерма становится более полой и переходит в гиперболу при некоторой температуре $T_2 > T$. Температура $T = T_k$, при которой $V_1 = V_2 = V_3$ (точка К на рис. 15) называется критиче-

ской. Соответствующую этой температуре изотерму также называют критической, а точку перегиба кривой K - критической точкой. Параметры газа в критической точке - давление P_k , молярный объём V_k и температура T_k - называется параметрами критического состояния газа. Они связаны с постоянными a и b уравнения (185) соотношениями (189). Отношение

$$K_k = R T_k / P_k V_k = 8/3 = 2,67. \quad (294)$$

Называется критическим коэффициентом. Для реальных газов $K_k > 8/3$.

Изотермы реальных газов

Опытным путём было установлено, что изотермы реальных газов отличаются от изотерм Ван-дер-Ваальса. При некоторых температурах они имеют горизонтальные участки (рис. 16) там, где изотермы Ван-дер-Ваальса имеют минимум и максимум (рис. 15). Ветви AB и $A'B'$ изотерм рис. 16 соответствуют жидкому состоянию вещества (малый объём, большая плотность), а ветви CD и CD' - газообразному состоянию вещества (большой объём, малая плотность). Горизонтальные участки BC и $B'C'$ соответствуют переходной области между этими состояниями. По мере удаления вправо от точек B, B' увеличивается количество вещества в газообразной фазе и уменьшается его количество в жидкой фазе. В точках C, C' всё вещество переходит в газообразное состояние. Кривая $LBB'KC'C$, соединяющая концы горизонтальных участков изотерм, делит плоскость изотерм PV_M на две области: область двухфазного состояния вещества - между кривыми $LBB'KC'C$ и изобарой $P=0$, и область однофазного состояния - область над кривой $LBB'KC'C$ и ниже изобары $P=0$. В двухфазной области вещество не является физически однородным и состоит из жидкости и её насыщенного пара.

В однофазной области вещество однородно. Точка K , в которую в пределе переходят горизонтальные участки изотерм при повышении температуры до критической: $T = T_k$, называется критической. Давление P_k , объём V_k и температура в этой точке T_k определяет критическое состояние вещества. Газ можно превратить в жидкость сжатием только тогда, когда его температура T ниже критической: $T < T_k$, например, двигаясь вдоль изотерм по кривой $bB'C'a$ (рис. 16). Газ можно превратить в жидкость, минуя двухфазную область, например, двигаясь в точку a из точки b по кривой bba , где $V_M = const$ на участке bb и $P = const$ на участке ba . При таком переходе из газообразной фазы в жидкую вещество будет всё время оставаться физически однородным, его свойства будут изменяться непрерывно вне зависимости от пути перехода из начальной точки (b) в конечную точку (a), не проходящего через двухфазную область.

Пример 29

В баллоне объёмом $V = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ находится кислород массой $m = 0,3 \text{ кг}$ при температуре $T = 300 \text{ К}$. Какую часть объёма сосуда составляет собственный объём молекул газа. Определить отношение внутреннего давления P' к давлению P газа на стенки сосуда.

Решение

Для определения отношения V'/V необходимо найти собственный объем V' молекул. Воспользуемся уравнением Ван-дер-Ваальса в следующей форме:

$$\left[P + \frac{\mu^2 a}{V^2} \right] (V - \mu b) = \mu RT. \quad (293a)$$

где поправка μb ($\mu = m/M$) означает учетверенный объем молекул газа, т.е. $\mu b = 4V'$. Тогда $V' = \mu b/4$, где $b = 3,17 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ - постоянная Ван-дер-Ваальса. Отношение объёмов V'/V с учётом последнего соотношения принимает вид: $V'/V = \mu b/4MV$. Подстановка заданных по условию параметров в последнее соотношение позволяет получить: $V'/V = 0,3 \cdot 3,17 \cdot 10^{-5} / (4 \cdot 32 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3}) = 0,0093$. Таким образом, собственный объем молекул составляет 0,93 % от объема сосуда.

Далее определим отношение давлений P'/P . Как следует из уравнения Ван-дер-Ваальса (293a), $P' = \mu^2 a/V'^2 = m^2 a/M^2 V'^2$, где $a = 0,136 \text{ Н} \cdot \text{м}^4/\text{моль}^2$ - постоянная Ван-дер-Ваальса.

Подстановка заданных по условию задачи в последнее соотношение позволяет получить следующий результат: $P' = 179 \text{ кПа}$. Давление P найдём из уравнения Ван-дер-Ваальса: $P = \mu RT/(V - \mu b) - \mu^2 a/V^2$. Подстановка заданных по условию задачи в последнее соотношение позволяет получить следующий результат: $P'/P = 1,79 \cdot 10^5 / 2,84 \cdot 10^6 = 0,063$.

Таким образом, давление газа, обусловленное силами притяжения молекул, составляет 6,3 % давления газа на стенки сосуда.

Пример 30

Углекислый газ, содержащий количество вещества $\mu = 1$ моль, находится в критическом состоянии. При изобарном нагревании газа его объем V увеличивается в 2 раза. Определить изменение ΔT температуры газа, если его критическая температура $T_{кр} = 304 \text{ К}$.

Решение

Для решения задачи воспользуемся уравнением Ван-дер-Ваальса в приведенной форме, т.е. в такой форме, когда давление P , молярный объем V_m и температура T реального газа с соответствующими критическими параметрами представлены в виде следующих соотношений: $\chi = P/P_{кр}$, $\zeta = V_m/V_{m,кр}$, $\tau = T/T_{кр}$. Выразив в последние выражения $P_{кр}$, $V_{m,кр}$ и $T_{кр}$ через постоянные Ван-дер-Ваальса a и b , получаем: $P = a\chi/27b^2$, $V_m = 3b\zeta$, $T = 8a\tau/27Rb$. Полученные соотношения подставим в обычное уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля:

$$\left(\frac{a\chi}{27b^2} + \frac{a}{9b^2\zeta^2} \right) (3b\zeta - b) = \frac{8Ra\tau}{27Rb}.$$

После преобразования получим: $(\chi + 3/\zeta^2)(3\zeta - 1) = 8\tau$. Данное уравнение является уравнением Ван-дер-Ваальса в приведенной форме. Оно не содержит никаких параметров, характеризующих индивидуальные свойства газа, и поэтому является универсальным.

Согласно условию задачи давление остается постоянным ($P = P_{кр}$) и из соотношения $\chi = P/P_{кр}$ получаем $\chi = 1$; молярный объем газа увеличился в 2 раза, т.е. $V_m = 2V_{m_{кр}}$. Тогда $\zeta = 2$. Из уравнения Ван-дер-Ваальса в приведенной форме выражаем приведенную температуру τ : $\tau = (\chi + 3/\zeta^2)(3\zeta - 1)$. После подстановки значений χ и ζ в последнее соотношение получаем: $\tau = 35/32$.

Таким образом, $T = \tau T_{кр} = 35 \cdot 304 / 32 = 332,5^\circ K$, $\Delta T = T - T_{кр} = 28,5 K$. Таким образом, температура увеличилась на 28,5 K.

Электричество и магнетизм

12. Электростатика

Определение 93

Электростатикой называется раздел физики, в котором изучают свойства и взаимодействие неподвижных электрических зарядов и создаваемых ими электрических полей.

Определение 94

Электродинамикой называется раздел физики, в котором изучают свойства переменного электромагнитного поля и электромагнитные процессы в различных средах.

Опыт показывает, что в природе существует особый вид сил, называемый электромагнитными. Электромагнитные силы действуют на расстоянии между покоящимися и движущимися частицами или телами, обладающими электрическим зарядом. К понятию электрического заряда можно прийти, изучая элементарные законы взаимодействия наэлектризованных тел. Для того, чтобы наэлектризовать тело, т.е. зарядить его определённым количеством электричества, необходимо сообщить ему или отобрать у него определённое количество электрического заряда. Наэлектризовать тело можно трением его о щёлк, мех или шерсть.

Из опыта следует, что если на покоящееся наэлектризованное тело 1, находящееся в данной точке M силового поля действует сила F_1 , то отношение этих сил F_1/F_2 не зависит от выбора точки M и характеристик силового поля. Оно определяется только свойствами самих тел. По определению отношение F_1/F_2 полагают равным отношению q_1/q_2 :

$$F_1/F_2 = q_1/q_2, \quad (294)$$

где величины q_1 и q_2 называются электрическими зарядами тел 1 и 2, соответственно. Электрический заряд не зависит от выбора инерциальной системы отсчёта, в которой он измеряется, т.е. заряд инвариантен относительно перехода из одной инерциальной системы отсчёта к другой.

Существует два вида электрических зарядов: положительные и отрицательные. Силы взаимодействия электрических зарядов таковы, что одноимённые заряды отталкиваются, а разноимённые - притягиваются. Во всех телах содержаться как положительные, так и отрицательные заряды. В обычных условиях в каждой макроскопической части объёма тела содержится одинаковое количество положительных и отрицательных зарядов. О таком теле говорят, что оно

заряжено электрически нейтрально.

Установлено опытным путём, что электрические заряды существуют в природе в виде собственных заряженных частиц. Наименьший отрицательный заряд имеет частица, получившая название электрон, а наименьший положительный заряд имеет частица, называемая протоном. Заряды электрона и протона имеют одинаковую по модулю, но разную по знаку величину. Если размеры электрически заряженных тел значительно меньше расстояний между этими телами, то с высокой степенью точности эти тела и заряды можно рассматривать как точечные. Наиболее простой вид законы взаимодействия наэлектризованных тел имеют в случае точечных зарядов.

Закон сохранения заряда

Фундаментальным свойством взаимодействия заряженных частиц и тел является закон сохранения заряда: в изолированной системе полный заряд остаётся постоянным. Под изолированной системой в данном случае понимается система, в которую из внешней среды через её границы не проникают электрически активные частицы (тела). Полный электрический заряд q системы равен алгебраической сумме её положительных и отрицательных зарядов q_1, q_2, \dots

$$q = q_1 + q_2 + \dots = \sum_i q_i . \quad (295)$$

Из закона сохранения заряда следует, что положительные и отрицательные заряды могут рождаться и уничтожаться (аннигилировать) в системе только парами, состоящими из одного положительного и одного отрицательного заряда (например, электрона e^- и позитрона e^+). Рождение таких пар возможно только при взаимодействии частиц больших энергий, превышающих массу покоя пары. При низких энергиях такие процессы невозможны и выполняется закон сохранения отдельно положительных и отрицательных зарядов.

Квантование электрического заряда

Опыт показывает, что все встречающиеся в природе электрические заряды состоят из дискретных зарядов постоянной величины, равной заряду электрона $e = 1,6022 \cdot 10^{-19}$ Кл. Это свойство называется законом сохранения электрического заряда. В соответствии с ним заряд неизолированной системы может увеличиваться уменьшаться только на целое число, кратное заряду электрона. Все элементарные частицы имеют одинаковые по величине заряды. Современная теория электромагнитных явлений не может исходя из начальных принципов объяснить факт квантования заряда и принимает его как постулат.

Напряжённость электрического поля

Взаимодействие неподвижных электрических частиц и тел осуществляется через материального посредника, называемого электрическим полем.

Определение 95

Независящее от времени поле называется электростатическим.

Количественно электрическое поле характеризуется напряжённостью.

Определение 96

Напряжённостью электрического поля \vec{E} называется сила \vec{F} , действующая

на единичный неподвижный электрический заряд:

$$F = q \vec{E}, \quad (296)$$

где q - заряд, на который в точке поля с напряжённостью \vec{E} действует сила \vec{F} .

Величина \vec{E} отражает свойства материальной среды, передающей взаимодействие покоящихся электрических зарядов на расстояние. Она не зависит от величины этих зарядов. Напряжённость электрического поля \vec{E} является вектором. Он определяет направление и величину действия поля на помещённый в нём электрический заряд q . Электрическое поле создаётся электрическими зарядами. Вокруг электрического поля всегда существует электрическое поле. На всякий заряд, помещённый в это поле, всегда действует сила. Это свойство лежит в основе количественного определения зарядов и напряжённости электрического поля.

Понятие электрического поля связано с неподвижными электрическими зарядами. В случае движения зарядов между ними возникают новые силы магнитного взаимодействия. С этими силами связано понятие магнитного поля. Электрическое и магнитное поля могут превращаться одно в другое. Они являются частями одного поля являющегося электромагнитным. Электромагнитное поле может существовать независимо от породивших его зарядов. Оно имеет импульс и массу, может переносить энергию. Эти свойства электромагнитного поля и позволяют рассматривать его как особую форму материи, обладающую вполне определёнными свойствами.

Проводники и диэлектрики

Определение 97

Тела, в которых электрические заряды могут свободно перемещаться на значительные расстояния, называются проводниками.

Примеры проводников: металлы в твёрдом и жидком состоянии, водные растворы солей и кислот, ионизированные газы и электролиты.

Определение 98

Тела, в которых заряды не могут перемещаться от одной части тела к другой (связанные заряды), называются диэлектриками.

Примеры диэлектриков: кварц, янтарь, эбонит, газы в нормальных условиях. Связанными зарядами являются заряды, входящие в состав атомов и молекул диэлектриков, заряды ионов в кристаллах с ионной решёткой. Свободными зарядами, существующими в проводниках, являются электроны проводимости в металлах, ионы в газах и кристаллитах. Деление на проводники и диэлектрики условно. Во всех веществах возможно в большей или меньшей степени перемещение зарядов на расстояние, превышающее их отклонение от равновесных положений. Является тело диэлектриком или проводником, зависит от постановки задачи или проводимого опыта. Если заряд, прошедший через некоторое тело, мал по сравнению с зарядами, прошедшие через другие тела при тех же условиях, то такое тело с хорошей степенью точности можно рассматривать как диэлектрик.

Диэлектрическая проницаемость вещества

Опыт, показывает, что взаимодействие зарядов зависит от среды, в которой они находятся, и определяется напряжённостью электрического поля согласно (296). Если напряжённость поля, создаваемого в вакууме системой зарядов, равна E_0 , то эти же заряды в однородной и изотропной среде (диэлектрик) создадут электрическое поле с напряжённостью

$$E = E_0 / \varepsilon, \quad (297)$$

где величина ε называется *относительной диэлектрической проницаемостью* вещества или просто диэлектрической проницаемостью диэлектрика. Относительная диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз уменьшается напряжённость электрического поля в однородном изотропном диэлектрике при заданном распределении заряда по сравнению с вакуумом. Физическая природа этого явления состоит в том, что в диэлектрике возникают поляризационные заряды, уменьшающие электрическое поле. Диэлектрическая проницаемость ε определяется свойствами диэлектрика и, в частности его поляризуемостью.

Закон Кулона

Основным количественным законом электростатики является закон Кулона: сила \vec{F} взаимодействия двух точечных электрических зарядов 1 и 2 прямо пропорциональна их величинам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними r_{12} :

для вакуума

$$F = k q_1 q_2 / r_{12}^2, \quad (298)$$

для диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε

$$F = k q_1 q_2 / \varepsilon r_{12}^2, \quad (298a)$$

или в векторной форме

$$\vec{F} = k q_1 q_2 \vec{r}_{12} / r_{12}^3, \quad \vec{F} = k q_1 q_2 \vec{r}_{12} / \varepsilon r_{12}^3, \quad (299)$$

где k - числовой коэффициент, который зависит от выбора единиц заряда, расстояния и силы; $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ - радиус-вектор, направленный от заряда 1 к заряду 2. Сила \vec{F} (299) - сила, действующая на заряд 2 со стороны заряда 1 (рис. 55).



Рис. 55а.

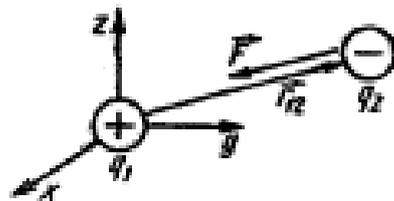


Рис. 55б.

В системе СГСЭ единицей измерения является сантиметр ($см$), $[L] = см$, единицей силы - дина $[F] = см = г \cdot см / с^2$, а единица заряда неопределена и является произвольной. В этой системе полагают $k=1$. Тогда единица заряда однозначно

определяется законом Кулона:

$$1 \text{ СГСЭ}_q = 1 \text{ см} \cdot \text{дин}^{1/2} = 1 \text{ см}^{3/2} \cdot \text{с}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (300)$$

Эта единица называется электростатической единицей заряда или СГСЭ-единицей заряда и обозначается СГСЭ_q . Она равна величине такого точечного заряда, который действует на такой же точечный заряд в вакууме с силой в 1 дин при относительном расстоянии между зарядами в 1 см.

В международной системе единиц СИ единицей длины является метр (m), $[L] = m$; единицей силы - ньютон (H), $[F] = H = \text{кг} \cdot m / \text{с}^2$, а единицей заряда - кулон ($Kл$), $[q] = Kл$.

Кулоном называется заряд, проходящий за одну секунду (c) через сечение проводника, в котором течёт постоянный ток силой в 1 ампер (A):

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}. \quad (301)$$

Определение ампера основано на законах магнитного взаимодействия упорядоченного движения зарядов (токов). По определению

$$1 \text{ Кл} = 2,99792458 \cdot 10^{10} \text{ СГСЭ}_q = 3 \cdot 10^{10} \text{ СГСЭ}_q, \quad (302)$$

Кулон - большая единица: два точечных заряда $q_1 = q_2 = 1 \text{ Кл}$, удалённых на расстояние $r = 1 \text{ м}$, взаимодействуют в вакууме с силой $F = 9 \cdot 10^{14} \text{ дин} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н}$.

При таком выборе единицы заряда коэффициент пропорциональности k в соотношениях (297) и (298) равен

$$k = 1/4\pi \cdot \varepsilon_0, \quad (303)$$

где 4π выделен из соображений удобства записи уравнений Максвелла, а величину ε_0 называется электрической постоянной. Её числовое значение

$$\varepsilon_0 = 10^7/4\pi \cdot \text{с}^2, \quad \varepsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/(\text{м}^2 \cdot \text{Н}).$$

Электрическая постоянная ε_0 не имеет физического смысла. Её введение обусловлено только выбором системы единиц (СИ). В СИ единицей электрической постоянной является фарад на метр (Ф/м):

$$[\varepsilon_0] = \text{Ф/м} = \text{Кл}/\text{м} \cdot \text{Н}. \quad (304)$$

Для её определения используется понятие электрической ёмкости. Единица электрической постоянной ε_0 в системе СГСЭ обозначается $\text{СГСЭ}_{\varepsilon_0}$. Она безразмерна и связана с фарад на метр соотношением:

$$1 \text{ СГСЭ}_{\varepsilon_0} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}. \quad (305)$$

С учётом выбора системы единиц закон Кулона в СИ записывается в следующем виде:

$$\vec{F} = \frac{k q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r_{12}^3}, \quad (306)$$

где для вакуума $\varepsilon = 0$. Согласно последнему соотношению силы электростатического взаимодействия центральны, т.е. они зависят только от расстояния между зарядами и направлены вдоль прямой, соединяющей эти заряды (рис. 1). Для

одноимённых зарядов ($q_1 > 0, q_2 > 0$ или $q_1 < 0, q_2 < 0$) сила $F > 0$ - взаимное отталкивание зарядов. Для разноимённых зарядов ($q_1 < 0, q_2 > 0$ или $q_1 > 0, q_2 < 0$) сила $F < 0$ - взаимное притяжение зарядов.

Пример 31

Два точечных одноименных заряда, величиной $q = 5$ нКл каждый, находятся на расстоянии 3 см друг от друга. С какой силой и по какому направлению будут действовать эти заряды на такой же по величине положительный заряд, находящийся от каждого из них на расстоянии 3 см? Каковы будут величина и направление этой силы, если первые два заряда разноименные?

Решение

Одноименные заряды будут действовать с силой:

$$F_1 = \frac{k q^2}{4 r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{H \cdot m^2}{Kл^2} \cdot \frac{25 \cdot 10^{-18} Kл^2}{9 \cdot 10^{-4} m^2} = 250 \text{ мкН} .$$

Разноименные заряды будут действовать с силой:

$$F_1 = -\frac{k q^2}{4 r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{H \cdot m^2}{Kл^2} \cdot \frac{25 \cdot 10^{-18} Kл^2}{9 \cdot 10^{-4} m^2} = -250 \text{ мкН} .$$

Если имеется несколько фиксированных в пространстве зарядов q_1, q_2, \dots, q_n , то результирующая сила \vec{F} , действующая на некоторый (пробный) заряд q_0 , помещённый в электрическое поле этих зарядов, равна векторной сумме сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, приложенных к нему со стороны каждого из полей зарядов q_1, q_2, \dots, q_n :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \frac{k q_1 q_2 \vec{r}_{i0}}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r_{i0}^3}, \quad (307)$$

где \vec{r}_{i0} - радиус-вектор, проведённый от заряда q_i к заряду q_0 . На рис. 56 показан случай для $n=2$.

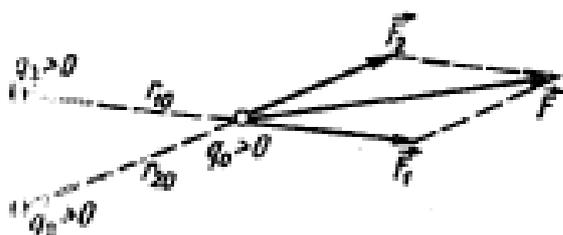


Рис. 56а.

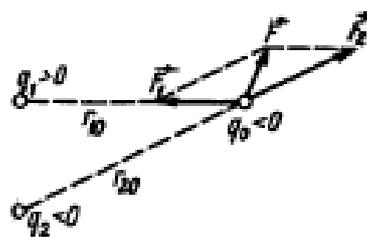


Рис. 56б.

Электростатическое поле Вектор напряжённости

Количественной характеристикой электрического поля является его напряжённость. Напряжённость электрического поля точечного заряда q в данной точке пространства с координатами x, y, z определяется соотношением:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q \vec{r}}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^3}, \quad (308)$$

где \vec{r} - радиус-вектор, проведённый от заряда q в рассматриваемую точку с координатами x, y, z среды с относительной диэлектрической проницаемостью ε (для вакуума $\varepsilon=1$).

Принцип суперпозиции электростатических полей

Напряжённость электрического поля \vec{E} , создаваемого точечными зарядами q_1, q_2, \dots, q_n в точке (x,y,z) равна векторной сумме напряжённостей $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$, которые создали бы эти заряды по отдельности в той же точке:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}, \quad (309)$$

где \vec{r}_i - радиус-вектор, проведённый из i -го заряда q_i в точку пространства с координатами (x,y,z) , в которой измеряется напряжённость поля. Поле в точке (x,y,z) является векторной суммой полей каждого из зарядов системы. Если заряды распределены неравномерно на поверхности или в объёме тела, то напряжённость поля в заданной точке пространства определяется интегралом:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}, \quad (310)$$

где $d\vec{E}$ - напряжённость поля, создаваемого зарядами элемента поверхности или объёма, а интегрирование производится по области распределения зарядов. Заряды, распределённые непрерывно вдоль некоторой линии, характеризуются некоторой плотностью χ :

$$\chi = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}, \quad dq = \chi dl, \quad (311)$$

где заряд dq - заряд элемента dl . Заряды, распределённые по поверхности, характеризуются поверхностной плотностью σ .

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}, \quad dS = \sigma dS, \quad (312)$$

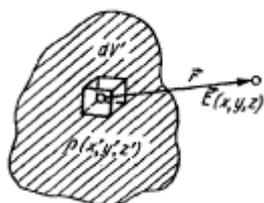


Рис. 57.

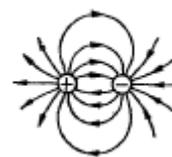


Рис. 58а.

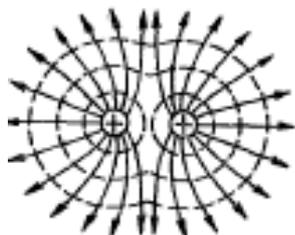


Рис. 58б.



Рис. 58в.

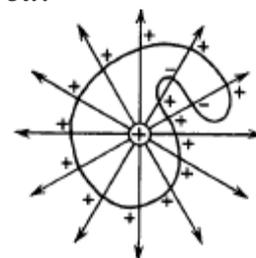


Рис. 59.

где заряд dq - заряд элемента dS . Заряды, распределённые по поверхности, характеризуются объёмной плотностью ρ :

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}, \quad dV = \rho dV. \quad (313)$$

где заряд dq - заряд элемента dV .

Если источник электрического поля характеризуется непрерывным объёмным распределением заряда, то напряжённость электрического поля в точке (x, y, z) определяется соотношением

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z) = \iiint \frac{\rho(x', y', z')}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2} dx' dy' dz', \quad (314)$$

где $\rho(x', y', z') dx' dy' dz'$ - заряд, содержащийся в объёме $dV' = dx' dy' dz'$, расположенном в точке (x', y', z') ; $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$ - единичный вектор, направленный от точки (x', y', z') к точке (x, y, z) (рис. 57), а интегрирование производится по всему пространству, содержащему заряд $r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$. Компонента вектора E_x вектора \vec{E} согласно последнему соотношению может быть определена следующим образом

$$E_x(x, y, z) = \iiint \frac{(x-x')\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{4\pi \epsilon_0 \epsilon [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}.$$

Аналогично записываются соотношения для компонент E_y и E_z .

Напряжённость электростатического поля - векторная величина. Она не зависит от времени и является функцией координат. Электростатическое поле называется однородным, если его напряжённость \vec{E} во всех точках пространства одинакова. У неоднородного поля напряжённость $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$ изменяется от точки к точке. Для графического изображения электрических полей используется понятие силовых линий поля.

Определение 99

Силовыми линиями поля называются кривые, касательные к которым в любой точке поля совпадают с направлением его вектора напряжённости \vec{E} в этой точке. За положительное направление силовой линии считается направление самого вектора \vec{E} . В данном случае силовые линии электрического поля начинаются у положительных зарядов и заканчиваются на отрицательных. По густоте силовых линий можно судить о величине напряжённости электрического поля (рис. 58). Единицей напряжённости электрического поля в СИ является:

$$[E] = \text{Н/Кл} = \text{кг} \cdot \text{м/А} \cdot \text{с}^2 = \text{В/м}. \quad (315)$$

За единицу напряжённости электрического поля принимается напряжённость такого поля в вакууме, которое действует на единичный точечный заряд в один ньютон (в СИ) или одну дину (в СГСЭ).

Теорема Гаусса

Рассмотрим поле точечного заряда q и определим поток вектора \vec{E} через

замкнутую поверхность S , заключающую в себя заряд (рис. 59). Количество линий вектора \vec{E} , начинающихся на точечном заряде $+q$ или заканчивающихся на заряде $-q$, численно равно q/ε_0 . Поток вектора \vec{E} через любую замкнутую поверхность равен числу линий выходящих наружу, т.е. начинающихся на заряде, если он положителен, и числу линий входящих внутрь, т.е. оканчивающихся на заряде, если он отрицателен. Учтя, что количество оканчивающихся или начинающихся на точечном заряде линий численно равно q/ε_0 , можно записать, что поток Φ_E вектора \vec{E} равен q/ε_0 :

$$\Phi_E = q/\varepsilon_0. \quad (316)$$

Знак потока совпадает со знаком заряда q .

Теперь допустим, что внутри замкнутой поверхности находится n точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n . В силу принципа суперпозиции напряжённость поля \vec{E} , создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряжённостей \vec{E}_i , создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$. Поэтой причине

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i d\vec{S}. \quad (317)$$

Каждый из интегралов под знаком суммы, равен q_i/ε_0 . По этой причине

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i. \quad (318)$$

Определение 100

Соотношение (318) называется теоремой Гаусса.

Согласно данной теореме поток вектора напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключённых внутри этой поверхности зарядов, делённых на ε_0 .

При рассмотрении полей, создаваемых макроскопическими зарядами (т.е. зарядами, образованными огромным числом элементарных зарядов), отвлекаются от дискретной (прерывистой) структуры этих зарядов и считают их распределёнными в пространстве непрерывным образом с конечной всюду плотностью. Объёмная плотность заряда ρ определяется как отношение заряда dq к физически бесконечно малому объёму dV , в котором заключён этот заряд:

$$\rho = dq/dV. \quad (319)$$

В данном случае под физически бесконечно малым объёмом понимается объём, который, с одной стороны, достаточно мал для того, чтобы плотность в пределах его считать одинаковой, а с другой стороны достаточно велик для того, чтобы не могла проявиться дискретность заряда.

Зная плотность заряда в каждой точке пространства, можно найти суммарный заряд, заключённый внутри замкнутой поверхности S . Для этого необходимо вычислить интеграл от ρ по объёму, ограниченному замкнутой поверхностью:

$$\sum_{i=1}^n q_i = \int_V \rho dV. \quad (320)$$

Таким образом, соотношение (318) можно представить в следующей форме:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (321)$$

Заменяя в соответствии с теоремой Остроградского-Гаусса поверхностный интеграл объёмным, получим:

$$\int_V \nabla^2 \vec{E} dV = \int_V \Delta \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (322)$$

Соотношение (322) должно выполняться для любого произвольно выбранного объёма V . Это возможно только в том случае, когда значения подынтегральных функций в каждой точке пространства одинаковы. По этой причине дивергенция вектора \vec{E} связана с плотностью заряда следующим соотношением:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \varepsilon_0. \quad (323)$$

Данное соотношение является теоремой Гаусса в дифференциальной форме.

Электростатические поля простых систем

1. Поле точечного заряда. Напряжённости электростатического поля точечного заряда q и системы точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n определяется соотношениями (308) и (309).
2. Поле шара. Шар радиуса a , равномерно заряженный по поверхности или объёму, создаёт во внешнем пространстве поле, равное полю, создаваемому точечным зарядом, равным заряду шара и помещённым в его центр. Используя соотношение (321), получаем напряжённость поля:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^3} \vec{r}, \quad r > a, \quad (324)$$

где q - полный заряд шара; \vec{r} - радиус-вектор, проведённый из центра шара в точку M (рис. 60), где измеряется поле, ε - диэлектрическая проницаемость среды, в которую помещён шар. В случае объёмного распределения заряда (рис. 60а) с плотностью ρ полный заряд определяется интегрированием его плотности по объёму шара, т.е. $q = 4\pi a^3 \rho / 3$, а в случае поверхностного распределения (рис. 60б) с плотностью σ получаем $q = 4\pi a^2 \sigma$. Электрическое поле внутри сферической полости, равномерно заряженной по поверхности, равно нулю $E_1 = 0$. Поле внутри шара, равномерно заряженного по объёму, отлично от нуля. Его напряжённость определяется плотностью ρ :

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho \vec{r}}{3 \varepsilon_0 \varepsilon_1}, \quad r < a, \quad (325)$$

где учтено, что $q = 4\pi r^3 \rho$, r - расстояние от центра шара до точки наблюдения M (рис. 60), находящейся внутри шара, ε_1 - диэлектрическая проницаемость веще-

ства шара.

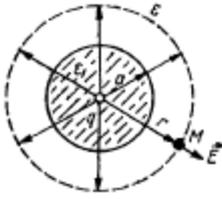


Рис. 60.

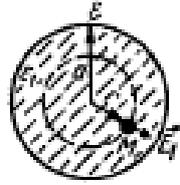


Рис. 60а.

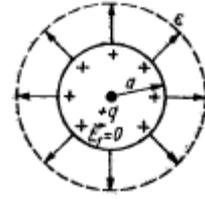


Рис. 60б.

При отсутствии свободных зарядов на поверхности шара при $r=a$ должно выполняться граничное условие:

$$\varepsilon E = \varepsilon_1 E_1, \quad (326)$$

обеспечивающее непрерывность вектора напряжённости поля при его переходе через границу раздела двух диэлектриков.

3. Поле плоскости. Напряжённость поля бесконечной равномерно заряженной пластинки

$$E = \sigma / 2\varepsilon_0 \varepsilon, \quad (327)$$

где σ - поверхностная плотность зарядов. Векторы \vec{E} по обе стороны пластинки равны по величине и противоположны по знаку (рис. 61). Напряжённость поля бесконечной заряженной плоскости не зависит от расстояния до неё. При переходе через пластинку она изменяется на величину $2\sigma/\varepsilon_0\varepsilon$. Если пластинка имеет конечные размеры, то соотношение (327) описывает напряжённость поля только вблизи её поверхности на расстояниях, значительно меньших размеров пластинки. Если данные расстояния сравнимы с размерами пластинки, то соотношение (327) неприменимо. Если размеры пластинки значительно меньше расстояния до точки, где измеряется поле, то пластина действует как точечный заряд и поле убывает обратно пропорционально квадрату расстояния согласно (308).

4. Поле плоскопараллельной пластинки. Если толщина бесконечной пластинки равна $2a$, а объёмная плотность электрического заряда внутри пластинки равна ρ , то напряжённость поля при равномерном распределении заряда определяется соотношением:

внутри пластины

$$E_1 = \rho x / \varepsilon_0 \varepsilon_1, \quad (328a)$$

Вне пластины

$$E_1 = \rho a / \varepsilon_0 \varepsilon_1, \quad (328б)$$

где ε и ε_1 - диэлектрические проницаемости вещества пластинки и внешней среды, x - расстояние от средней плоскости пластины до плоскости, где измеряется напряжённость поля (рис. 62). На границе двух сред при $x=a$, если там нет свободных зарядов, должно выполняться условие непрерывности напряжённости поля:

$$\varepsilon E_n = \varepsilon_1 E_{1n}, \quad E_t = E_{1t}, \quad (329)$$

где E_n, E_{1n}, E_t, E_{1t} - нормальные и тангенциальные составляющие напряжённостей

\vec{E}_t и \vec{E} .

Если на поверхности имеются заряды с плотностью σ , то граничное условие имеет вид:

$$\varepsilon E_n - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma / \varepsilon_0, \quad E_t = E_{1t}. \quad (330)$$

5. Поле между разноимённо заряженными параллельными пластинами. Две равномерно и с одинаковой плотностью σ , но разноимённо заряженные бесконечные параллельные плоскости создают в пространстве между плоскостями однородное электростатическое поле с напряжённостью

$$E = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon. \quad (331)$$

В остальном пространстве поле $E=0$ (рис. 63). Соотношение (331) описывает напряжённость плоского конденсатора в средней её части. Она не учитывает искажение поля, вносимые краями его пластин.

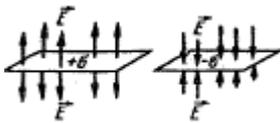


Рис. 61.

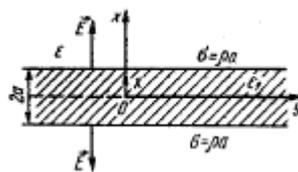


Рис. 62.

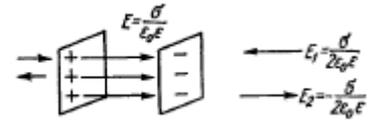


Рис. 63.

6. Поле вблизи поверхности заряженного проводника. Напряжённость поля вблизи поверхности произвольного металлического проводника (см. рис. 64) в случае, когда заряды на нём находятся в равновесии (т.е. отсутствует электрический ток, а значит и поле внутри него равно нулю), не зависит явно от формы проводника, распределения зарядов в нём и расположения соседних проводников. В данном случае она определяется соотношением (331).

7. Поле цилиндра и длинной прямой линии. Поле вне бесконечно длинного кругового цилиндра, равномерно заряженного по объёму или по поверхности, так же, как и поле бесконечной равномерно заряженной прямой линии, направлено радиально к цилиндру (линии) или от него (неё) в зависимости от знака заряда, а его величина на расстоянии r от цилиндра (линии) определяется соотношением:

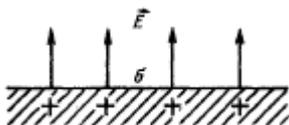


Рис. 64.



Рис. 65.

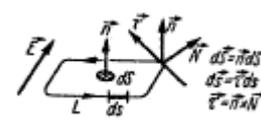


Рис. 66.

$$E = \chi / 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon r, \quad (332)$$

где λ - линейная плотность заряда, т.е. заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра (линии). Если цилиндр полый и равномерно заряжен по поверхности, то поле внутри него равно нулю. Если цилиндр равномерно заряжен по объёму с постоянной плотностью заряда ρ , то на расстоянии r от его оси

$$E = \rho / 2\varepsilon_0 \varepsilon_1 r, \quad (333)$$

где ε_1 - диэлектрическая проницаемость вещества цилиндра.

8. Поле цилиндрического конденсатора.

Определение 101

Система из двух коаксиальных металлических цилиндров называется цилиндрическим конденсатором (рис. 65).

Пусть внутреннему цилиндру A сообщён заряд q , линейная плотность которого равна $\lambda = q/l$, где l - длина цилиндра. Тогда на внешнем заземлённом цилиндре B со стороны, обращённой к цилиндру A , появится заряд с той же плотностью λ , но противоположного знака. Если длина цилиндров много больше их радиусов, то напряжённость поля между ними в точке M , отстоящей на расстоянии r от оси цилиндра, определяется соотношением (332). Данное соотношение справедливо для участков конденсатора, расположенных на расстояниях от края, больших диаметра внешнего цилиндра. Напряжённость поля конденсатора (332) не зависит от диаметра внешнего цилиндра. Если диаметр внешнего цилиндра (электрода) значительно больше диаметра внутреннего цилиндра, то напряжённость поля вблизи него не зависит от формы внешнего электрода.

Работа перемещения заряда в электрическом поле

На заряд q , помещаемый в электрическое поле напряжённостью \vec{E} , действует сила \vec{F} . По этой причине при перемещении заряда будет производиться работа против силы \vec{F} . Элементарная работа dA в данном случае определяется соотношением:

$$dA = \vec{F} d\vec{s} = F \cdot \cos(\theta) ds = q \cdot E \cdot \cos(\theta) ds = q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (334)$$

где θ - угол между направлениями вектора \vec{F} и элементарного перемещения $d\vec{s}$. Соотношение для полной работы при конечном перемещении заряда q из положения 1 в положение 2 имеет вид:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} dA = \int_{(1)}^{(2)} q \vec{E} d\vec{s} = q \int_{(1)}^{(2)} E \cos(\theta) ds. \quad (335)$$

Если положительный заряд q перемещается в однородном поле \vec{E} против направления вектора \vec{E} , то работа равна

$$A_{12} = -qE(s_2 - s_1), \quad (336)$$

где $(s_2 - s_1)$ - пройденный зарядом q путь.

Если поле \vec{E} создаётся неподвижным точечным зарядом Q , тогда

$$\vec{E} = Q\vec{r}/4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3 \quad (337)$$

и работа A_{12} может быть вычислена с помощью соотношения

$$A_{12} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_{(1)}^{(2)} \frac{r dr}{r^3} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (338)$$

где r_1 и r_2 - расстояния точек 1 и 2 от заряда Q .

Следствия из соотношения (338)

1. Если заряды q и Q имеют один знак, то работа электрических сил отталкива-

ния $A_{12} > 0$ при удалении зарядов одного от другого, и $A_{12} < 0$ при их сближении.

2. Если заряды q и Q имеют разные знаки, то работа электрических сил притяжения $A_{12} > 0$ при сближении зарядов и $A_{12} < 0$ при их относительном удалении.
3. Работа A_{12} не зависит от выбора (формы) пути и определяется только положением начальной 1 и конечной 2 точек. В данной ситуации электростатическое поле точечного заряда является полем консервативных сил и может быть охарактеризовано потенциалом.
4. Любую систему зарядов (свободных, поляризационных или индукционных в проводниках или диэлектриках) можно рассматривать как совокупность большого числа точечных зарядов. Из принципа суперпозиции электростатических полей следует, что всякое электростатическое поле является потенциальным.

Пример 32

В течение 10 мин по некоторому участку протекает электрический ток, значение которого - 250 мА. Напряжение на этом участке - 4 В. Необходимо определить мощность электрического тока, который выделяется на этом участке, и работу электрического тока, произведенную за это время.

Решение

Мощность электрического тока определим с помощью следующего соотношения: $P = U \cdot I$. Подстановка в данное соотношение указанных в условии параметров позволяет получить: $P = 4 \text{ В} \cdot 250 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 1 \text{ Вт}$. Работа электрического тока определим с помощью следующего соотношения: $A = U \cdot I \cdot t$. Подстановка в данное соотношение указанных в условии параметров позволяет получить: $A = 4 \text{ В} \cdot 250 \cdot 10^{-3} \text{ А} \cdot 600 \text{ с} = 600 \text{ Дж}$.

Пример 33

Две лампы мощностью 25 Вт и 100 Вт включаем в электрическую цепь под напряжением 220 В. Насколько отличается сила тока в этих лампах?

Решение

Мощность электрического тока определим с помощью следующего соотношения: $P = U \cdot I$. Подстановка в данное соотношение указанных в условии параметров позволяет получить: $I_1 = P_1 / U = 100 \text{ Вт} / 220 \text{ В} \approx 0,45 \text{ А}$, $I_2 = P_2 / U = 25 \text{ Вт} / 220 \text{ В} \approx 0,11 \text{ А}$. Сила тока в этих лампах отличается на $\Delta I = 0,45 \text{ А} - 0,11 \text{ А} = 0,34 \text{ А}$.

Циркуляция вектора напряжённости. Потенциал

Определение 102

Циркуляцией напряжённости электрического поля \vec{E} называется криволинейный интеграл по замкнутому контуру L

$$\Gamma = \oint_L \vec{E} d\vec{s}, \quad (339)$$

где $d\vec{s}$ - элементарное перемещение вдоль контура L , т.е. бесконечно малый вектор, касательный к кривой L в любой её точке.

Определение 103

Поле, для которого циркуляция его напряжённости равна нулю, называется потенциальным.

Электростатическое поле потенциально, т.к. из независимости работы A_{12} от формы пути следует, что $A_{12} = -A_{21}$ и

$$\oint_L \vec{E} d\vec{s} = 0. \quad (340)$$

Из данного уравнения следует, что силовые линии электростатического поля не могут быть замкнуты. Уравнение (340) в дифференциальной форме имеет вид:

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad (340)$$

где операция ротора определяется пределом

$$\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{E} = \text{rot}_{\vec{n}} \vec{E} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L \vec{E} d\vec{s}. \quad (341)$$

В данном соотношении $\text{rot}_{\vec{n}} \vec{E}$ - проекция ротора \vec{E} на направление единичного вектора \vec{n} , перпендикулярного плоскости, охваченной бесконечно малым контуром L . Соотношение (341) является следствием теоремы Стокса, согласно которой

$$\oint_L \vec{E} d\vec{s} = \int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S}, \quad (342)$$

где интеграл слева берётся по произвольному замкнутому контуру L , а справа - по произвольной поверхности S , охваченной этим контуром. Теорема Стокса позволяет интеграл по замкнутому контуру свести к интегралу по поверхности (рис. 66).

Ротор \vec{E} - векторная функция координат x , y и z . Его направление в любой точке (x, y, z) перпендикулярно плоскости, проходящей через эту точку, для которой циркуляция Γ максимальна. Величина ротора является предельным значением циркуляции, приходящейся в этой плоскости на единицу площади, вокруг рассматриваемой точки (x, y, z) .

Векторное уравнение (340) эквивалентно трём уравнениям для компонент ротора напряжённости \vec{E} по координатным осям

$$(\text{rot } \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad (\text{rot } \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (\text{rot } \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad (343)$$

Т.к. $\text{rot grad } \vec{f} = 0$ любой функции \vec{f} , то напряжённость поля \vec{E} может быть представлена в виде градиента некоторой скалярной функции $f = f(x, y, z)$, называемой потенциалом

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \text{ или } E_x = -\partial \varphi / \partial x, E_y = -\partial \varphi / \partial y, E_z = -\partial \varphi / \partial z. \quad (344)$$

градиент функции $\varphi = \varphi(x, y, z)$ по определению является вектором, направленным вдоль вектора \vec{n} в сторону возрастания потенциала $\varphi = \varphi(x, y, z)$, а его модуль равен производной этой функции в том же направлении \vec{n} :

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \text{grad } \varphi. \quad (345)$$

Вектор \vec{n} является нормалью к эквипотенциальной поверхности. По этой причине напряжённость \vec{E} всегда перпендикулярна поверхности равных потенциалов φ , называемой эквипотенциальной поверхностью.

Работу против сил поля A_{12} при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2 можно определить как разность потенциалов φ_1 и φ_2 в этих точках:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \varphi_1 - \varphi_2 = - \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{s}. \quad (346)$$

Потенциал поля φ определён лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Электрические поля описываются разностью потенциалов, взятых в различных точках, и поэтому не зависят от этой постоянной. В теоретической физике за нулевое значение φ принимают потенциал бесконечно удалённой точки пространства: $\varphi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

При решении задач теории электричества использование потенциал φ обладает рядом преимуществ по сравнению с напряжённостью \vec{E} . Для задания φ необходима одна величина, а не три, как в случае вектора \vec{E} . Значение разности потенциалов может быть измерено непосредственно в эксперименте.

В системе Си за единицу потенциала принимается вольт (B):

$$[\varphi] = B = \text{Дж/Кл}. \quad (347)$$

Вольт называется потенциал в точке, при перемещении в которую заряда в 1 Кл из бесконечности совершается работа в 1 Дж.

Соотношение (346) позволяет выражать работу (и энергию) в электрических единицах - электронвольтах. Электронвольт - энергия, которую приобретает частица с зарядом, равным заряду электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, преодолев разность потенциалов 1 В:

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}. \quad (348)$$

Если известен потенциал $\varphi(x, y, z)$, то напряжённость электрического поля \vec{E} определяется путём дифференцирования φ по координатам x , y и z , согласно (343). Обратная задача нахождения φ по заданному \vec{E} решается интегрированием соотношения (345).

Потенциалы электростатических полей простых систем

1. Потенциал поля точечного заряда q в однородном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε :

$$\varphi(r) = q / 4 \pi \varepsilon \varepsilon_0 r, \quad (349)$$

где положено $\varphi(r = \infty) = 0$, r - расстояние от заряда q до точки измерения потенциала.

2. Потенциал поля системы точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n в однородном диэлектрике:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}, \quad (350)$$

где $\varphi(r=\infty)=0$, r_i - расстояние от заряда q_i до точки измерения потенциала.

3. Потенциал непрерывно распределённых электрических зарядов в однородном диэлектрике определяется следующим соотношением

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(r') dV'}{|r-r'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(r') dS'}{|r-r'|}, \quad (351)$$

где dV' - элемент объёма с центром в точке r' , по которому заряд распределён с плотностью $\rho(r')$, dS' - элемент поверхности с центром в точке r' и плотностью распределения заряда $\sigma(r')$, r - радиус-вектор точки, где измеряется потенциал. Интегрирование ведётся по всей области распределения свободных зарядов.

4. Соотношение для потенциала непрерывно распределённых электрических зарядов в неоднородном диэлектрике может быть представлено в следующей форме:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(r') + \rho_{пол}(r')}{|r-r'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(r') + \sigma_{пол}(r')}{|r-r'|} dS', \quad (352)$$

где $\rho_{пол}(r')$ и $\sigma_{пол}(r')$ - объёмная и поверхностная плотность поляризационных зарядов.

5. Потенциал поля шара с радиусом R и зарядом q , равномерно распределённым по его поверхности, в однородном диэлектрике. Вне шара:

$$\varphi(r) = q/4\pi\epsilon\epsilon_0 r, \quad (353)$$

где r - расстояние от центра шара до точки наблюдения, $r > R$, ϵ - диэлектрическая проницаемость диэлектрика, в котором находится шар. Внутри шара:

$$\varphi(r) = q/4\pi\epsilon\epsilon_0 R = const. \quad (354)$$

6. Потенциал поля шара радиуса R , равномерно заряженного по объёму с плотностью ρ . Внутри шара:

$$\varphi(r) = \rho(3R^2 - r^2)/6\pi\epsilon\epsilon_0, \quad (355)$$

где $r < R$, ϵ - диэлектрическая проницаемость вещества шара. Вне шара потенциал $\varphi(r)$ определяется соотношением (353), где $q = 4\pi R^3 \rho/3$.

7. Потенциал поля шарового конденсатора. Шаровым конденсатором называется система из двух электродов, имеющих форму концентрических сфер. Пусть a - радиус внутренней сферы, b - радиус внешней сферы. Тогда разность потенциалов между внутренней сферой и любой точкой внутри конденсатора, отстоящей на расстоянии r от центра сфер, определяется соотношением:

$$\varphi(a) - \varphi(r) = [\varphi(a) - \varphi(b)] \frac{(r-a)b}{(b-a)r}, \quad a < r < b; \quad \varphi(a) - \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right), \quad r < a. \quad (366)$$

Измеряя разность потенциалов $\varphi(a) - \varphi(b)$ между электродами a и b , можно определить потенциал поля в любой точке внутри конденсатора.

8. Потенциал поля равномерно заряженной бесконечной плоскопараллельной пластины толщиной $2a$ (рис. 68). Внутри пластины:

$$\varphi(x) = -\rho \frac{x^2 + a^2}{2 \varepsilon_1 \varepsilon_0} + C, \quad (367a)$$

вне пластины:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\rho \frac{ax}{\varepsilon \varepsilon_0} + C, & x > a \\ \rho \frac{ax}{\varepsilon \varepsilon_0} + C, & x < a \end{cases}, \quad (367б)$$

где x - расстояние от средней плоскости пластины до плоскости, где измеряется потенциал φ ; C - произвольная постоянная; ρ - объёмная плотность заряда внутри пластины; $\varepsilon, \varepsilon_1$ - диэлектрические проницаемости веществ.

9. Потенциал поля бесконечно длинного цилиндра радиуса R равномерно (с плотностью ρ) заряженного по объёму:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \rho \frac{R^2 - r^2}{4 \varepsilon_0 \varepsilon_1} + C, & r \leq R \\ -\frac{\rho R^2}{4 \varepsilon_0 \varepsilon} + C, & r \geq R, \end{cases} \quad (368)$$

$\varepsilon, \varepsilon_1$ - диэлектрические проницаемости веществ цилиндра и окружающей среды, C - произвольная постоянная.

10. Потенциал поля бесконечно длинного цилиндра радиусом R , равномерно (с плотностью σ) заряженного по поверхности:

$$\varphi(r) = \begin{cases} C, & r \leq R \\ -\frac{\sigma R}{2 \varepsilon_0 \varepsilon} \ln\left(\frac{r}{R}\right) + C, & r \geq R. \end{cases} \quad (369)$$

11. Потенциал поля бесконечно длинного и бесконечно тонкого прямолинейного проводника, равномерно заряженного с линейной плотностью χ :

$$\varphi(r) = -\chi r^2 / 2 \pi \varepsilon \varepsilon_0. \quad (370)$$

12. Потенциал цилиндрического конденсатора (рис. 65)

$$\varphi(a) - \varphi(r) = [\varphi(a) - \varphi(b)] \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}, \quad (371a)$$

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \chi \cdot \ln(b/a) / 2 \pi \varepsilon \varepsilon_0, \quad (371б)$$

где r - расстояние от рассматриваемой точки до оси цилиндра, a и b - радиусы внутреннего и внешнего цилиндров, χ - линейная плотность заряда.

13. Потенциал плоского конденсатора (рис. 63). Внутри конденсатора для разности потенциалов можно получить

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \sigma x / \varepsilon \varepsilon_0, \quad (372a)$$

где x - расстояние от положительно заряженной пластины с потенциалом $\varphi(0)$ до рассматриваемой точки или

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x[\varphi(d) - \varphi(0)]/d, \quad (372б)$$

где d - расстояние между пластинами. Зная разность потенциалов между пластинами конденсатора $\varphi(d) - \varphi(0)$, можно найти потенциал в любой точке. Соотношение (372) не учитывает влияния краёв пластин конденсатора и справедлива только в его внутренней области.

Проводники в электрическом поле

Равновесие зарядов на проводнике

Носители заряда в проводнике способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы. По этой причине для равновесия зарядов на проводнике необходимо выполнение следующих условий:

1. Напряжённость поля всюду внутри проводника должна быть равна нулю, т.е.

$$\vec{E} = 0. \quad (373)$$

В данной ситуации потенциал φ должен быть постоянным ($\varphi = const$).

2. Напряжённость поля на поверхности проводника должна быть в каждой точке направлена по нормали к поверхности:

$$\vec{E} = \vec{E}_n. \quad (374)$$

Тогда в случае равновесия зарядов поверхность проводника будет эквипотенциальной.

Если проводящему телу сообщить некоторый заряд q , то он распределится так, чтобы соблюдались условия равновесия. Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность, полностью заключённую в пределах тела. При равновесии зарядов поле в каждой точке внутри проводника отсутствует. По этой причине поток вектора электрического смещения через поверхность равен нулю. Согласно теореме Гаусса сумма зарядов внутри поверхности также будет равна нулю. Это выполняется для поверхности любых размеров, проведённой внутри проводника произвольным образом. По этой причине при равновесии ни в каком месте внутри проводника не может быть избыточных зарядов - все они распределятся по поверхности проводника с некоторой плотностью σ .

Поскольку в состоянии равновесия внутри проводника избыточных зарядов нет, удаление вещества из некоторого объёма, взятого внутри проводника, никак не отразится на равновесном расположении зарядов. Таким образом, избыточный заряд распределяется на полем проводнике так же, как и на сплошном, т.е. по его наружной поверхности.

Рассмотрим небольшую цилиндрическую поверхность, образованную нормальными к поверхности проводника и основаниями величины dS , одно из которых расположено внутри, а другое - вне проводника (рис. 67). Поток вектора \vec{E} через внутреннюю часть поверхности равен нулю, т.к. внутри проводника вектор \vec{E} . Может быть показано, что напряжённость поля вблизи поверхности

проводника равна:

$$E = \sigma / \varepsilon \varepsilon_0, \quad (375)$$

где ε - диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник.

Рассмотрим поле, создаваемое изображённым на рис. 68 заряженным проводником. На больших расстояниях от проводника эквипотенциальные поверхности имеют характерную для точечного заряда форму сферы. По мере приближения к проводнику эквипотенциальные поверхности становятся всё более сходными с поверхностью проводника, которая является эквипотенциальной. Вблизи выступов эквипотенциальные поверхности становятся всё гуще. Таким образом, и напряжённость поля здесь больше. Особенно велика плотность зарядов на выступах (рис. 69). К такому выводу можно прийти, учтя, что из-за взаимного отталкивания заряды стремятся расположиться как можно дальше друг от друга.

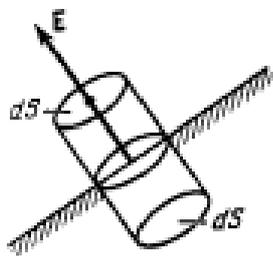


Рис. 67.

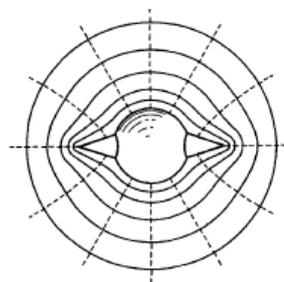


Рис. 68.

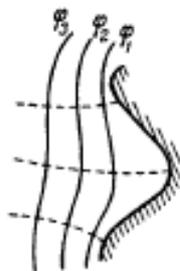


Рис. 69.

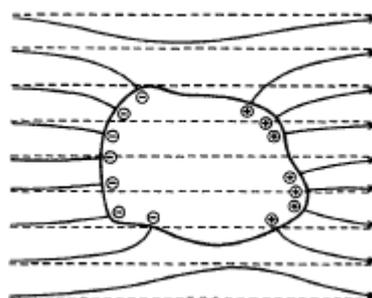


Рис. 70.

Вблизи углублений в проводнике эквипотенциальные поверхности расположены всё реже (рис. 69). Соответственно напряжённость поля и плотность зарядов в этих местах будут меньше. Плотность зарядов при данном потенциале проводника определяется кривизной поверхности - она растёт с увеличением положительной кривизны (выпуклости) и убывает с увеличением отрицательной кривизны (вогнутости). Особенно велика бывает плотность зарядов на остриях. По этой причине напряжённость поля вблизи остриёв может быть настолько большой, что возникает ионизация молекул газа, окружающего проводник. Ионы иного знака, чем q , притягиваются к проводнику и нейтрализуют его заряд. Ионы того же знака, что и q , начинают двигаться от проводника, увлекая за собой нейтральные молекулы газа. В результате возникает ошутимое движение газа, называемое электрическим ветром. Заряд проводника уменьшается. Он как бы стекает с острия и уносится ветром. По этой причине такое яв-

ление называется “истечением заряда с проводника”.

Проводник во внешнем электрическом поле

При внесении заряженного проводника в электрическое поле носители заряда приходят в движение: положительные - в направлении вектора \vec{E} , отрицательные – в противоположную сторону. В результате у концов проводника возникают заряды противоположного знака, называемые индуцированными зарядами (рис. 70; пунктиром показаны линии напряжённости внешнего поля). Поле этих зарядов направлено противоположно внешнему полю. По этой причине накапливание зарядов у концов проводника приводит к ослаблению в нём поля. Перераспределение носителей заряда происходит до тех пор, пока не будут выполнены условия (373) и (374), т.е. пока напряжённость поля внутри проводника не станет равной нулю, а линии напряжённости вне проводника - перпендикулярны к её поверхности (рис. 16). Таким образом, нейтральный проводник, внесённый в электрическое поле, разрывает часть линий напряжённости - они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и снова начинаются на положительных.

Индуцированные заряды распределяются по внешней поверхности проводника. Если проводник имеет полость, то при равновесном распределении индуцированных зарядов поле внутри неё равно нулю. На этом основывается электростатическая защита. Когда какой-то прибор необходимо защитить от воздействия внешних полей, его окружают проводящим экраном. Внешнее поле компенсируется внутри экрана возникающими на его поверхности индуцированными зарядами. Подобный экран действует хорошо и в том случае, если его сделать не сплошным, а в виде густой сетки.

Электрическая ёмкость

Сообщённый проводнику заряд q распределяется по его поверхности таким образом, чтобы напряжённость поля внутри проводника была бы равна нулю. Такое распределение является единственным. По этой причине, если проводнику, уже несущему заряд q , сообщить ещё заряд такой же величины, то второй заряд должен распределиться по проводнику таким же образом, что и первый, в противном случае он создаёт в проводнике поле, отличное от нуля. Следует оговорить, что это справедливо лишь для удалённого от других тел (уединённого) проводника. Если вблизи данного проводника находятся другие тела, сообщение проводнику новой порции заряда вызовет изменение поляризации этих тел либо изменение индуцированных зарядов в этих телах. В результате подобие в распределении различных порций заряда будет нарушено.

Таким образом, различные по величине заряды распределяются на уединённом проводнике подобным образом (отношение плотностей заряда в двух произвольных точках поверхности проводника при любой величине заряда будет одним и тем же). Отсюда следует, что потенциал уединённого проводника пропорционален находящемуся на нём заряду. Действительно, увеличение в несколько раз заряда приводит к увеличению в то же число раз напряжённости поля в каждой точке окружающего проводник пространства. Соответственно в

такое же число раз возрастает работа переноса единичного заряда из бесконечности на поверхность проводника, т.е. потенциал проводника. Таким образом, для уединённого проводника:

$$q = C\varphi. \quad (376)$$

Коэффициент пропорциональности C между потенциалом и зарядом называется электрической ёмкостью. Из (376) следует:

$$C = q/\varphi. \quad (377)$$

В соответствии с (377) ёмкость численно равна заряду, сообщению которого проводнику повышает его потенциал на единицу.

Определим потенциал заряженного шара радиуса R . Между разностью потенциалов и напряжённостью поля существует соотношение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (378)$$

По этой причине потенциал шара φ можно найти, проинтегрировав соотношение (326) по r в пределах от R до ∞ (потенциал на бесконечности полагаем равным нулю):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{q}{\epsilon r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}. \quad (379)$$

Сопоставив (379) и (378), получаем, что ёмкость уединённого шара радиуса R , погружённого в однородный безграничный диэлектрик с проницаемостью ϵ , равна:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (380)$$

За единицу ёмкости принимается ёмкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 Кл. Данная единица называется фарадм (Φ). Ёмкостью в 1 Φ обладал бы уединённый шар радиуса $9 \cdot 10^9$ м, т.е. радиуса, в 1500 раз большего радиуса Земли. По этой причине обычно используются величины, равные долям фарада.

Конденсаторы

Уединённые проводники обладают небольшой ёмкостью. Даже шар таких размеров, как Земля обладает ёмкостью 700 мкФ. С другой стороны бывает необходимость в устройствах, которые при небольшом относительно других тел потенциале накапливали бы на себе заметные по величине заряды. В основе таких устройств, называемых конденсаторами, используется увеличение ёмкости проводника при приближении к нему других тел. Это вызвано тем, что под действием поля, создаваемого заряженным проводником, на поднесённом к нему теле возникают индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды. Заряды, противоположные по знаку проводника q , располагаются ближе к проводнику, чем одноимённые с q , и, следовательно, оказывают большее влияние на потенциал. По этой причине при поднесении к заряженному проводнику какого-либо тела потенциал проводника уменьшается по абсолют-

ной величине. Согласно соотношению (378) это означат увеличение ёмкости проводника.

Конденсаторы делают в виде двух проводников, помещённых близко друг к другу. Образующие конденсатор проводники называют его обкладками. Чтобы внешние тела не оказывали влияния на ёмкость конденсатора, обкладкам придают такую форму и так располагают их друг относительно друга, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми на них зарядами, было сосредоточено внутри конденсатора. Этому удовлетворяют расположенные близко друг к другу две пластины, два коаксиальных цилиндра и две концентрические сферы. Соответственно бывают плоские, цилиндрические и сферические конденсаторы. Поскольку поле заключено внутри конденсатора, линии напряжённости электрического поля начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой. По этой причине сторонние заряды, возникающие на обкладках, имеют одинаковую величину и различны по знаку.

Основной характеристикой конденсатора является его ёмкость, под которой понимают величину, пропорциональную заряду q и обратно пропорциональную разности потенциалов между обкладками:

$$C = q / (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (381)$$

Разность потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2$ называется напряжением между соответствующими точками. Ёмкость конденсаторов измеряется в тех же единицах, что и ёмкость уединённых проводников. Величина ёмкости определяется геометрией конденсатора (формой и размерами обкладок, величиной зазора между ними), а также диэлектрическими свойствами среды, заполняющей пространство между обкладками. Определим соотношение для ёмкости плоского конденсатора. Если площадь обкладки S , а заряд на ней q , то напряжённость поля между обкладками равна:

$$E = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon = q / \varepsilon_0 \varepsilon S. \quad (382)$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = qd / \varepsilon_0 \varepsilon S. \quad (383)$$

Отсюда для ёмкости плоского конденсатора получается следующее соотношение:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon S / d, \quad (384)$$

где S - площадь обкладки, d - величина зазора между обкладками, ε - диэлектрическая проницаемость заполняющего зазор вещества. Ёмкость реального конденсатора определяется соотношением (384) тем точнее, чем меньше зазор d по сравнению с линейными размерами обкладок. Если пренебречь рассеянием поля вблизи краёв обкладок, можно получить соотношение для ёмкости цилиндрического конденсатора

$$C = 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon l / \ln(R_2 / R_1), \quad (385)$$

где l - длина конденсатора, R_1 и R_2 - радиусы внутренней и внешней обкладок.

Это соотношение определяет ёмкость реального конденсатора с тем большей точностью, чем меньше зазор между обкладками $d=R_2-R_1$ по сравнению с l и R_1 .

Ёмкость сферического конденсатора равна:

$$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1R_2/(R_2-R_1), \quad (386)$$

где R_1 и R_2 - радиусы внутренней и внешней обкладок.

Помимо ёмкости каждый конденсатор характеризуется предельным напряжением U_{max} , которое можно прикладывать к обкладкам конденсатора, не опасаясь пробоя. При превышении этого напряжения между обкладками проскакивает искра, в результате чего разрушается диэлектрик и конденсатор выходит из строя.

Пример 34

Электрическом поле, образованном двумя вертикально расположенными пластинами, разгоняется электрон. Начальная скорость электрона равна нулю. Ускоряющее напряжение $U_0=1$ кВ. Вылетев через отверстие за пределы вертикальных пластин, электрон попадает в пространство между горизонтально расположенными пластинами. Длина этих пластин $L=10$ см, расстояние между ними $x=2$ см. Какое напряжение U надо приложить к горизонтально расположенным пластинам, чтобы электрон не смог вылететь за их пределы?

Решение

Если бы не было напряжения между горизонтальными пластинами, то электрон, продолжал бы двигаться прямолинейно и беспрепятственно покинул их пределы. Но если на пластины подается какое-то напряжение, траектория движения электрона искривляется. Пусть нижняя пластина заряжена положительно, а верхняя отрицательно. Создается электрическое поле, вектор напряженности которого направлен снизу вверх. Электрон начинает приближаться к нижней пластине. Чем больше напряжение между пластинами, тем сильнее искривляется траектория электрона. При каком-то напряжении электрон попадет на край нижней пластины. Ясно, что при большем напряжении электрон будет падать на саму пластину. Если найти напряжение, при котором электрон ударяется о край пластины, то при любом напряжении, большем найденного, электрон не покинет их пределы. Данную задачу можно разбить на две, относительно независимые задачи: о движение электрона в поле вертикально расположенного конденсатора и на движение в поле горизонтально расположенного конденсатора.

На первом этапе рассмотрим поле вертикально расположенных пластин. Применим к описанию движения электрона энергетический подход. В электрическом поле электрон разгоняется и к моменту вылета из отверстия в пластине приобретает некоторую скорость и кинетическую энергию E_k . Эта энергия приобретает за счет совершения работы электрическим полем. Работа равна изменению кинетической энергии электрона. Начальная кинетическая энергия электрона равна нулю, значит работа равна кинетической энергии, которую электрон приобрел к моменту вылета из конденсатора: $A=E_k$. Работа поля по перемещению заряженной частицы из одной точки в другую равна произведе-

нию заряда электрона на напряжение: $A = e \cdot U_0$, $E_{кин} = m \cdot v^2 / 2$. Приравняем правые части уравнений: $e \cdot U_0 = m \cdot v^2 / 2$. Полученное равенство позволяет найти скорость электрона к моменту его вылета за пределы вертикально расположенных пластин: $v = \sqrt{2eU_0/m}$.

На втором этапе рассмотрим поле вертикально расположенных пластин. Электрон, летящий горизонтально со скоростью v , влетает в электрическое поле, вектор напряженности которого направлен вертикально. Двигаясь в этом поле, электрон проходит путь L и попадет в край пластины. При этом он снижается на расстояние $x/2$. Движение электрона в электрическом поле конденсатора аналогично движению тела в поле тяжести, если тело брошено горизонтально. Тело, брошенное горизонтально, в поле тяжести движется по ветке параболы. Вероятно, электрон тоже движется по ветке параболы. Если на тело действует сила, то она сообщает телу ускорение. В данном случае - это какое-то ускорение. Сложное движение по параболе можно рассматривать как сумму двух независимых движений по горизонтали и по вертикали. По горизонтали тело движется с постоянной, а по вертикали с переменной по величине скоростью. Выбираем инерциальную систему отсчета. Точку отсчета совмещаем с положением электрона, когда он попадает в электрическое поле. В этот же момент начинаем отсчитывать время. Совмещаем с данной точкой систему координат. Одну ось направляем горизонтально, другую вертикально. Учитывая, что время движения электрона по горизонтали равно времени падения его на нижнюю пластину, записываем: $t_в = t_2$. Время движения по вертикали может быть найдено из кинематического уравнения, связывающего ускорение и перемещение электрона в вертикальном направлении: $x/2 = a \cdot t_в^2 / 2$. Время движения по горизонтали: $t_2 = L / v$, где L - пройденный путь, v - скорость электрона (она найдена при рассмотрении горизонтального движения электрона). Ускорение сообщается силой: $a = F / m$. Сила выражается через заряд электрона и напряженность электрического поля: $F = e \cdot E$. Напряженность электрического поля между пластинами связано с напряжением, приложенным к ним: $E = U / x$, где x - расстояние между пластинами. Производя последовательные подстановки, найдем неизвестное напряжение U : $U = m \cdot x^2 \cdot v^2 / eL^2$, $U = 2x^2 U_0 / L^2$.

Пример 35

Плоский воздушный конденсатор имеет ёмкость C и заряжен до напряжения U . Какую работу надо совершить, чтобы увеличить расстояние между его обкладками вдвое?

Решение

При увеличении расстояния между обкладками в два раза, в два раза уменьшается электроемкость конденсатора. Так как при этом заряд на пластинах не изменяется, в два раза увеличивается напряжение между ними. Тогда: $A = \Delta W = [(C/2) \cdot (2U)^2 / 2] - C \cdot U^2 / 2$.

Пример 36

Конденсатор ёмкостью 3 мкФ заряжен до напряжения 300 В , а конденсатор ёмкостью 2 мкФ - до 200 В . После зарядки конденсаторы соединили одноимен-

ными полюсами. Какое напряжение установится между обкладками конденсаторов после соединения?

Решение

Так как конденсаторы соединены параллельно, их общая ёмкость равна: $C = C_1 + C_2$. Так как соединялись одноименные обкладки, то искомое напряжение равно: $U = q/C = (q_1 + q_2)/(C_1 + C_2)$. С учётом соотношений $q_1 = C_1/U_1$, $q_2 = C_2/U_2$ получаем: $U = (C_1/U_1 + C_2/U_2)/(C_1 + C_2) = 260 \text{ В}$.

Пример 37

Конденсаторы соединены в батарею по схеме изображенной на рис. 71. Определить какой заряд необходимо сообщить батарее, чтобы зарядить ее до напряжения 500 В. Ёмкость конденсаторов: $C_1 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$; $C_2 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$; $C_3 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$; $C_4 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$.

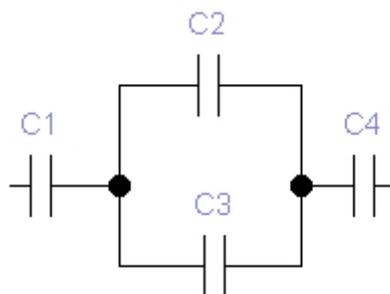


Рис. 71.

Решение

Ёмкость батареи конденсаторов определим из соотношения: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_2 + C_3}$. Тогда: $C = \frac{C_1 C_4 (C_2 + C_3)}{(C_1 + C_4)(C_2 + C_3) + C_1 C_4}$.

Заряд батареи конденсаторов определяется с помощью следующего соотношения: $q = C \cdot U$. Тогда: $q = \frac{C_1 C_4 (C_2 + C_3) U}{(C_1 + C_4)(C_2 + C_3) + C_1 C_4}$. Подстановка в данное соотношение указанных в условии параметров позволяет получить:

$$q = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 500 (6 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6})}{(4 \cdot 10^{-6} + 12 \cdot 10^{-6})(6 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6}) + 4 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^{-6}} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}.$$

*Электрическое поле в диэлектриках
Полярные и неполярные молекулы*

Определение 104

Диэлектрики (изоляторы) - вещества, не способные проводить электрический ток.

Идеальных изоляторов в природе не существует. Все вещества проводят электрический ток. Однако диэлектрики проводят ток в 10^{15} - 10^{20} раз хуже, чем проводники. Если диэлектрик внести в электрическое поле, то это поле и сам диэлектрик претерпевают существенные изменения.

Любая молекула представляет собой систему с нулевым суммарным зарядом.

Линейные размеры данной системы составляют несколько ангстрем. Поле, создаваемое такой системой определяется величиной и ориентацией дипольного электрического момента

$$\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i \quad (387)$$

(суммирование производится как по электронам, так и по ядрам). Электроны в молекуле движатся так, что этот момент всё время изменяются. Однако скорости электронов настолько велики, что практически обнаруживаются среднее по времени значение момента. По этой причине в дальнейшем под дипольным моментом молекулы будем понимать величину

$$\vec{p} = \sum q_i \langle \vec{r}_i \rangle \quad (388)$$

Для ядер в этой сумме в качестве $\langle \vec{r}_i \rangle$ берётся \vec{r}_i . Т.е. будем считать, что электроны находятся относительно ядер в покое в некоторых точках, полученных усреднением положением электронов по времени.

Поведение молекулы во внешнем электрическом поле также определяется её дипольным моментом. В этом можно убедиться, определив потенциальную энергию молекулы во внешнем электрическом поле. Выбрав начало координат внутри молекулы и воспользовавшись малостью $\langle \vec{r}_i \rangle$, подставим потенциал в этой точке, где находится i -й заряд в виде

$$\varphi_i = \varphi + \text{grad}(\varphi) \langle \vec{r}_i \rangle, \quad (389)$$

где φ - потенциал в начале координат. Тогда

$$W_p = \sum q_i \varphi_i = \sum q_i [\varphi + \text{grad}(\varphi) \langle \vec{r}_i \rangle] = \varphi \sum q_i + \text{grad}(\varphi) \sum q_i \langle \vec{r}_i \rangle. \quad (390)$$

Учитывая, что $\sum q_i \langle \vec{r}_i \rangle = 0$, и $\text{grad}(\varphi) = -\vec{E}$, получаем

$$W_p = -\vec{E} \sum q_i \langle \vec{r}_i \rangle = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p E \cos(\alpha). \quad (391)$$

Таким образом, молекула как в отношении создаваемого ею поля, так и в отношении испытываемых ею во внешнем поле сил эквивалентна диполю. Положительный заряд этого диполя равен суммарному заряду ядер и помещается в “центре тяжести” положительных зарядов; отрицательный заряд равен суммарному заряду электронов и помещается в “центре тяжести” отрицательных зарядов. У симметричных молекул (H_2 , O_2 , N_2) в отсутствии внешнего электрического поля центры тяжести положительных зарядов совпадают. Такие молекулы не обладают собственным дипольным моментом и называются неполярными. У несимметричных молекул (CO , NH , HCl) центры тяжести зарядов разных знаков сдвинуты друг относительно друга. В этом случае молекулы обладают собственным дипольным моментом и называются полярными.

Под действием внешнего электрического поля заряды в неполярной молекуле смещаются друг относительно друга: положительные по направлению поля, отрицательные против поля. Можно записать:

$$\vec{p} = \beta \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (392)$$

где β - поляризуемость молекулы, имеющая размерность $[L^3]$.

Процесс поляризации молекулы протекает так, как если бы положительные и отрицательные заряды молекулы были связаны друг с другом упругими силами. По этой причине считается, что неполярная молекула ведёт себя во внешнем поле как упругий диполь.

Действие внешнего поля на полярную молекулу сводится в первую очередь к стремлению повернуть молекулу так, чтобы её дипольный момент установился по направлению поля. На величину дипольного момента внешнее поле практически не влияет. По этой причине полярная молекула ведёт себя во внешнем поле как жёсткий диполь.

Поляризация диэлектриков

Обычно в отсутствии внешнего электрического поля дипольные моменты молекул диэлектрика равны нулю (неполярные молекулы) или распространены по направлениям в пространстве хаотическим образом (полярные молекулы). В обоих случаях суммарный дипольный момент диэлектрика равен нулю. Под действием внешнего поля диэлектрик поляризуется, т.е. результирующий дипольный момент диэлектрика становится отличным от нуля. В качестве величины, характеризующей степень поляризации диэлектрика, берётся дипольный момент единицы объёма. Если поле или диэлектрик (или оба вместе) неоднородны, степень поляризации в разных точках диэлектрика будет различна. Чтобы охарактеризовать поляризацию в данной точке, необходимо выделить заключающий в себе эту точку физически бесконечно малый объём ΔV , найти сумму $\sum_{\Delta V} \vec{p}$ моментов заключённых в этом объёме молекул и взять отношение

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}. \quad (393)$$

Данный вектор называется поляризованностью диэлектрика. У изотропных диэлектриков поляризованность связана с напряжённостью поля в той же точке следующим соотношением:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (394)$$

где χ - независимая от \vec{E} безразмерная величина, называемая диэлектрической восприимчивостью диэлектрика.

Пример 38

К обкладкам плоского конденсатора, расстояние между которыми $d = 1$ см, приложена разность потенциалов $\Delta\varphi = 2$ кВ. Конденсатор заполняется диэлектриком с восприимчивостью $\chi = 0,08$. Определить поляризованность диэлектрика.

Решение

Поляризованность изотропных диэлектриков связана с напряженностью поля соотношением $P = \chi \varepsilon_0 E$. Напряженность поля внутри конденсатора определяется следующим соотношением $E = \Delta\varphi/d$. Тогда $P = \chi \varepsilon_0 \Delta\varphi/d$. Подстановка в данное соотношение указанных в условии параметров позволяет получить: $P \approx 0,14$ мкКл/м².

Пример 39

Поляризованность протяженной диэлектрической пластины из материала с диэлектрической проницаемостью ε изменяется в соответствии с функцией $\vec{P}(x) = \vec{P}_0(1 - x^2/d^2)$, где \vec{P}_0 - вектор, перпендикулярный к пластине, x - расстояние от середины пластины, а d - её полутолщина. Определить напряженность электрического поля $\vec{E}(x)$ внутри пластины.

Решение

Поляризованность связана с напряженностью электрического поля с помощью следующего соотношения: $\vec{P}(x) = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}(x)$. Тогда: $\vec{E}(x) = \vec{P}_0 \frac{1 - x^2/d^2}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}$.

Поле внутри диэлектрика

Определение 105

Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются связанными.

Под действием поля связанные заряды могут лишь незначительно смещаться из своих положений равновесия; покинуть пределы молекулы, в состав которой они входят, связанные заряды не могут.

Определение 106

Заряды, находящиеся в пределах диэлектрика, но не входящие в состав молекул, а также заряды, расположенные за пределами диэлектрика, называются сторонними.

Поле в диэлектрике является суперпозицией поля, создаваемых сторонними зарядами $\vec{E}_{стор}$, и поля, создаваемого связанными зарядами $\vec{E}_{связ}$. Результирующее поле называется микроскопическим или истинным. Микроскопическое поле сильно изменяется в пределах межмолекулярных расстояний. По этой причине движения связанных зарядов микроскопическое поле изменяется также и со временем. При макроскопическом рассмотрении данные изменения не обнаруживаются. По этой причине в качестве характеристики поля используется усреднение по физически бесконечно малому объёму значения поля. В дальнейшем усреднённое поле сторонних зарядов будем обозначать через \vec{E}_0 , а усреднённое поле связанных зарядов - через \vec{E}' . Соответственно макроскопическим полем будем называть величину: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$. Поляризованность \vec{P} представляет собой макроскопическую величину. На рисунке 72 схематически изображён поляризованный диэлектрик с неполярными (а) и полярными (б) молекулами. Поляризация сопровождается возникновением в тонком поверхностном слое диэлектрика избытка связанных зарядов одного знака. Между поверхностной плотностью связанных зарядов σ' и нормальной составляющей напряжённости поля имеется следующая связь:

$$\sigma' = \chi \varepsilon_0 E_n, \quad (395)$$

Вектор электрического смещения

Источниками поля могут служить не только сторонние, но и связанные заряды. В соответствии с этим:

$$\operatorname{div} \vec{E} = (\rho + \rho') / \epsilon_0 . \quad (396)$$

Данное соотношение малоприспособно для нахождения вектора \vec{E} , т.к. она выражает свойства неизвестной величины \vec{E} через связанные заряды, которые в свою очередь определяются неизвестной \vec{E} .

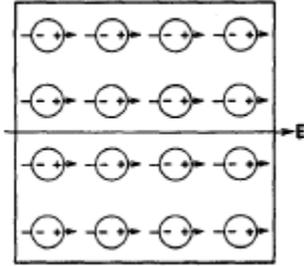


Рис. 72а.

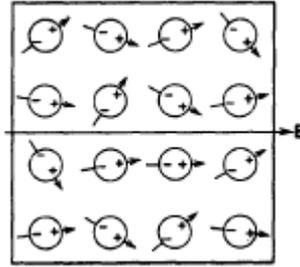


Рис. 72б.

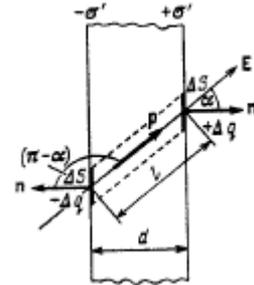


Рис. 73.

Вычисление полей во многих случаях упрощается, если ввести вспомогательную величину, источниками которой являются только сторонние заряды ρ . Может быть показано, что последнее соотношение представимо в виде:

$$\operatorname{div} \vec{E} = (\rho - \operatorname{div} \vec{P}) / \epsilon_0 . \quad (397)$$

Тогда:

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho . \quad (398)$$

Выражение в скобках представляет собой искомую величину. Обычно она обозначается \vec{D} и называется электрическим смещением (или электрической индукцией).

Определение 107

Электрическим смещением (электрической индукцией) называется величина, определяемая соотношением:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} . \quad (399)$$

Единицей электрического смещения является кулон на квадратный метр ($\text{Кл}/\text{м}^2$). С учётом соотношения (394) для \vec{P} получаем:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} . \quad (400)$$

Определение 108

Безразмерная величина $\epsilon = 1 + \chi$ называется относительной диэлектрической проницаемостью или просто диэлектрической проницаемостью среды.

Соотношение (400) представимо в виде:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} . \quad (400a)$$

Согласно данному соотношению вектор \vec{D} пропорционален вектору \vec{E} , а его дивергенция равна объёмной плотности заряда:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho . \quad (401)$$

Проинтегрируем данное соотношение по произвольному объёму V :

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV . \quad (402)$$

Преобразуем его левую часть по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{D} dV = \int_V \rho dV . \quad (402a)$$

Слева стоит Φ_D - поток вектора \vec{D} через замкнутую поверхность S , справа - сумма сторонних зарядов $\sum q_i$, заключённых внутри данной поверхности. По этой причине соотношение (402a) представимо в следующей форме:

$$\oint_S \vec{D} dV = \sum q_i . \quad (402б)$$

Формулировка теоремы Гаусса

Соотношения (402a) и (402б) выражают теорему Гаусса для вектора \vec{D} : *поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключённых внутри данной поверхности сторонних зарядов.*

В вакууме $\vec{P} = 0$. По этой причине величина \vec{D} , определяемая соотношением (400) переходит в $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$.

Единицей потока вектора электрической индукции является кулон. Согласно (402б) заряд в 1 Кл создаёт через охватывающую его поверхность поток вектора электрической индукции в 1 Кл. Поток вектора \vec{D} можно изобразить с помощью линий электрической индукции, направление и густота которых определяется также как и для вектора \vec{E} . Линии вектора \vec{E} могут начинаться и заканчиваться как на сторонних, так и на связанных зарядах. Источниками поля вектора \vec{D} служат только сторонние заряды. По этой причине линии электрической индукции могут начинаться или заканчиваться только на сторонних зарядах. Через точки, в которых помещаются связанные заряды, линии электрической индукции проходят, не прерываясь.

Электростатическая энергия

Определение 109

Электростатической энергией называется энергия, запасённая электростатическим телом.

Потенциальная энергия

К понятию энергии поля можно прийти, как и в механике, рассматривая работу, которую необходимо совершить против сил при перенесении электрического заряда из одной точки поля в другую. Так как электростатическое поле является полем консервативных сил, работа A_{12} , совершаемая против этих сил при перемещении точечного заряда q из точки поля 1 с потенциалом φ_1 в точку поля 2 с потенциалом φ_2 равна убыли его потенциальной энергии U :

$$A_{12} = U_1 - U_2, \quad (403)$$

где

$$U_1 = q\varphi_1, \quad U_2 = q\varphi_2, \quad (404)$$

потенциальная энергия заряда q в точках поля 1 и 2 соответственно, которые приобретают заряд при перенесении его из бесконечности (где потенциал поля принят равным нулю) в данную точку поля. Если в пространстве, заполненном диэлектриком, при перемещении заряда не происходит изменения его диэлектрических свойств, не выделяется и не поглощается теплота, то потенциальная энергия U заряда в данной точке поля определяется работой, которую необходимо затратить для перемещения этого заряда на бесконечности в рассматриваемую точку.

Потенциальная энергия системы неподвижных зарядов, создающих электростатическое поле, равна энергии взаимодействия этих зарядов. В случае двух зарядов имеем

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r_{12}}, \quad (405)$$

где r_{12} - расстояние между зарядами. Последнее соотношение можно трактовать как потенциальную энергию заряда q_1 в поле заряда q_2 с потенциалом в точке расположения заряда q_1 , равным $\varphi_2(r_{12}) = q_2/4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_{12}$, или как потенциальную энергию заряда q_2 в поле заряда q_1 . С другой стороны соотношение (405) описывает энергию взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии r_{12} один от другого.

Потенциальная энергия системы неподвижных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n может быть представлена в виде суммы

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i, \quad (406)$$

где

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{q_j}{r_{ij}}, \quad (407)$$

- потенциал в точке нахождения заряда q_i , созданный всеми другими зарядами, r_{ij} - расстояние между зарядами q_i и q_j .

В случае непрерывного распределения свободных зарядов по элементу объёма dV с плотностью ρ и по элементу поверхности dS с плотностью σ потенциальная энергия электрически заряженных тел определяется соотношением:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV + \frac{1}{2} \int_V \varphi \sigma dS, \quad (408)$$

где интегрирование проводится по всем свободным зарядам, а φ - электрический потенциал всей системы в точке, где сосредоточены элементарные заряды ρdV и σdS . Соотношение (408) справедливо при любом распределении проводников и диэлектриков в пространстве. Если каждый элемент объёма dV' содержит в себе элементарный заряд $\rho dV'$, а каждый элемент поверхности dS' содержит в себе элементарный заряд $\sigma dS'$, то потенциал φ определяется соотношениями (351) и (352) в зависимости от вида диэлектрика, где \vec{r} - радиус-

вектор точки, где находятся заряды ρdV или $\sigma dS'$ из соотношения (408). Рассмотрим примеры потенциальных энергий нескольких объектов.

1. Потенциальная энергия однородно заряженного шара радиуса R :

$$U = \frac{3}{5} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}, \quad (409)$$

где $Q=4\pi\rho R^3$ - полный заряд, ρ - объёмная плотность распределения заряда.

2. Потенциальная энергия тонкого сферического слоя с полным зарядом Q и радиусом R :

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}, \quad (410)$$

где $Q=4\pi\sigma R^2$ - полный заряд, σ - поверхностная плотность распределения заряда.

3. Энергия конденсатора определяется следующим соотношением:

$$U = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{2d} (Ed)^2, \quad (410)$$

где S - площадь пластин конденсатора, d - величина зазора между пластинами, E - напряжённость поля.

Собственная энергия заряда

Величина (408) может быть проинтерпретирована как полная электрическая энергия системы заряженных тел. Кроме потенциальной энергии взаимодействия совокупности элементарных зарядов (406) она содержит также собственные энергии данных зарядов, равные потенциальным энергиям взаимного отталкивания бесконечно малых частей одного и того же элементарного заряда $dq=\rho dV$ и $dq=\sigma dS'$. Если элементарный заряд представляет собой сферическую поверхность радиуса R , то его собственная энергия определяется соотношением (410). Данная энергия неограниченно возрастает при неограниченном уменьшении радиуса. Однако можно считать, что все существующие в природе заряды представляют собой распределения зарядов конечного радиуса.

Объёмная плотность энергии

Соотношение (406) определяет электростатическую энергию через заряды и потенциалы. Из опыта следует, что электромагнитное поле может существовать самостоятельно, независимо от создавших его электрических зарядов, а энергия заключена в том пространстве, где имеются электростатическое и магнитное поля, не содержащее явной зависимости от заряда. Может быть показано, что электростатическая энергия (408) в случае однородного диэлектрика представима в следующем виде

$$U = \frac{\epsilon_0\epsilon}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV, \quad (412)$$

где \vec{E} - напряжённость электрического поля, а \vec{D} - индукция электрического поля в центре элемента объёма dV . Согласно (412) энергия электрического поля

подобно веществу распределена в пространстве с объёмной плотностью u_E , т.е. энергией, приходящейся на единицу объёма, в которой сосредоточено поле:

$$u_E = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}}{2} = \frac{\vec{D} \cdot \vec{D}}{2 \varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (413)$$

Если диэлектрик неоднороден, то электрическая индукция \vec{D} изменяется от точки к точке и объёмная плотность энергии u_E в этом случае определяется соотношением

$$u_E = \int \vec{E} d\vec{D}. \quad (414)$$

Полная энергия электрического поля U равна сумме всех элементарных энергий $u_E dV$ в объёме пространства, заполненного полем:

$$U = \int u_E dV. \quad (415)$$

Пример 40 (Электрическая энергия системы двух бесконечно малых шаров неизменных размеров в вакууме.)

Если шары изолированы один от другого, то их собственные энергии

$$U_1 = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E_1^2 dV, \quad U_2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E_2^2 dV. \quad (416)$$

Если шары не изолированы, то энергия системы определяется следующим соотношением

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (E_1 + E_2)^2 dV = U_1 + U_2 + U_{12}, \quad (417)$$

где

$$U_{12} = \varepsilon_0 \int E_1 E_2 dV \quad (418)$$

- потенциальная энергия взаимодействия шаров.

Различие между потенциальной энергией и потенциалом

Между потенциальной энергией неподвижной системы зарядов U и электрическим потенциалом φ имеется существенное различие. Потенциальная энергия U характеризует систему в целом. Она равна работе, необходимой для создания данной системы из отдельных заряженных частей, т.е. равна энергии, запасённой в созданной системе. Электрический потенциал φ данного распределения зарядов является функцией положения в пространстве. Разность потенциалов в двух точках пространства $\varphi_1 - \varphi_2$ равна работе, требуемой для перенесения единичного заряда из одной точки в другую. Между U и φ существует связь

$$U = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \int \varphi \Delta \varphi dV, \quad (419)$$

где $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$.

Пример 41 (Потенциальная энергия двух диполей)

Напряжённость \vec{E} электрического поля точечного диполя определяется сле-

дующим соотношением:

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^5} - \frac{\vec{p}}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^3}, \quad (420)$$

где \vec{p} - дипольный момент; \vec{r} - радиус-вектор, проведённый из любой точки диполя в точку наблюдения. Потенциал поля диполя:

$$\varphi = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^3} = \frac{p \cdot \cos(\theta)}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^3}, \quad (421)$$

где $\vec{p} = q\vec{l}$ - дипольный момент; \vec{l} - вектор, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному; q - величина заряда; \vec{r} - радиус-вектор, проведённый от центра диполя до исследуемой точки; θ - угол между осью диполя и вектором \vec{r} (рис. 73). Потенциальная энергия двух произвольно ориентированных диполей определяется соотношением:

$$U = \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^3} - \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{p}_1)(\vec{r} \cdot \vec{p}_2)}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^4}, \quad (422)$$

где p_1 и p_2 - дипольные моменты диполей, \vec{r} - радиус-вектор, проведённый от центра одного диполя к центру другого.

Пример 42

Три точечных заряда $q_1 = q_2 = 30 \text{ нКл}$, $q_3 = 6,0 \text{ нКл}$ находятся в вакууме и расположены вдоль одной прямой. При этом заряд q_3 находится справа. Расстояние между крайними и средним зарядами равно $a = 27 \text{ см}$. Найти потенциальную энергию W электростатического взаимодействия системы этих зарядов.

Решение

Потенциальная энергия электростатического взаимодействия системы зарядов равна сумме потенциальных энергий взаимодействия зарядов: $W = W_1 + W_2 + W_3$, где $W_1 = kq_1q_2/a$, $W_2 = kq_1q_3/(2a)$, $W_3 = kq_2q_3/a$. Тогда: $W = (k/a)(q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3)$. Подстановка заданных по условию параметров в последнее соотношение позволяет получить: $W = (9 \cdot 10^9/0,27)(30 \cdot 30 + 30 \cdot 6,0/2 + 30 \cdot 6,0) \times (10^{-9})^2 = 3,9 \cdot 10^{-5} \text{ (Дж)} = 39 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = 39 \text{ мкДж}$.

Пример 43

Электрон переместился в ускоряющем электрическом поле из точки с потенциалом 200 В в точку с потенциалом 300 В . Найти кинетическую энергию электрона, изменение его потенциальной энергии и приобретенную скорость. Начальную скорость электрона считать равной нулю.

Решение

Работу, которую совершило поле при перемещении электрона, находим следующим образом: $A_{12} = q(\varphi_2 - \varphi_1) = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (300 - 200) = 1,6 \cdot 10^{-17} \text{ Дж}$. Тогда изменение потенциальной энергии электрона в поле равно: $\Delta W = -A = -1,6 \cdot 10^{-17} \text{ Дж}$. Это уменьшение компенсируется увеличением его кинетической энергии на такое же значение, что следует из закона сохранения энергии: $E = 1,6 \cdot 10^{-17}$

Дж. Поскольку $E = mv^2/2$, то $v = \sqrt{2E/m} = \sqrt{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-17} / 9,1 \cdot 10^{-31}} = 6 \text{ Мм/с}$.

Пример 44

Какую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы его скорость увеличилась от 10 до 30 Мм/с?

Решение

Изменение кинетической энергии электрона при прохождении такой разности потенциалов можно найти из соотношения: $\Delta E = mv_2^2/2 - mv_1^2/2 = 8/18 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (30 \cdot 10^6)^2 = 3,6 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}$. Это же изменение по закону сохранения энергии равняется работе, которую совершило при этом электрическое поле: $E = -A = -3,6 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}$. Используя соотношение, записанное в самом начале, получаем: $\varphi_2 - \varphi_1 = A/q = -3,6 \cdot 10^{-16} / 1,6 \cdot 10^{-19} = -2250 \text{ В}$.

13. Постоянный электрический ток

Определение 110

Электрическим током называется упорядоченное движение электрических зарядов.

Носителями тока (зарядами, движение которых в данном веществе образует ток) в металлах и полупроводниках являются электроны, в диэлектриках - положительные и отрицательные ионы, в ионизированных газах - ионы и электроны.

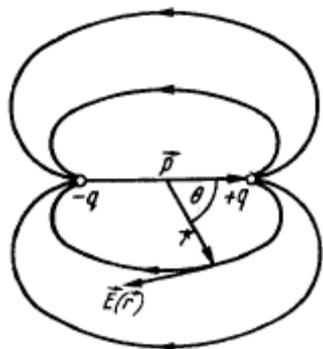


Рис. 74.

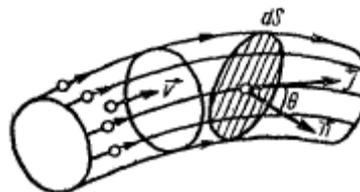


Рис. 75.

Определение 111

Направлением электрического тока считается то направление, в котором движутся положительные заряды.

В металлах ток направлен против движения электронов. Движение зарядов в веществе обозначается непрерывными кривыми, называемыми линиями тока (рис. 75). За направление линий тока принято направление движения положительных зарядов. Линии тока образуют замкнутые цилиндрические поверхности - трубки тока (рис. 75). Заряженные частицы при своём движении не пересекают боковые поверхности трубок тока. При таком рассмотрении имеется аналогия с движением частиц в жидкости.

Определение 112

Тело, проводящее электрический ток, называется проводником.

Для количественной характеристики силы тока вводится понятие о силе и плотности тока.

Определение 113

Силой тока называется заряд, проходящий через полное поперечное сечение проводника за единицу времени. Если за время Δt через проводник проходит заряд Δq , то сила тока по определению равна:

$$I = \Delta q / \Delta t. \quad (423)$$

Определение 114

Если за равные конечные промежутки времени Δt через проводник проходят равные заряды Δq и направление тока при этом не изменяется со временем, то такой ток называется постоянным.

Если величина и направление тока изменяются со временем, то сила тока определяется как предел

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{d q}{d t}. \quad (424)$$

Бесконечно малый заряд dQ , переносимый заряженными частицами за время dt через элементарную площадку dS , перпендикулярную направлению средней скорости v этих частиц определяется следующим соотношением:

$$dQ = envdSdt, \quad (425)$$

где e - заряд отдельной частицы, n - концентрация носителей (их число в единице объёма). Сила тока dI определяется следующим соотношением:

$$dI = envdS, \quad (426)$$

согласно которому за единицу времени через единицу площади протекает электрический ток

$$\vec{j} = en\vec{v}. \quad (427)$$

Определение 115

Вектор \vec{j} в соотношении (427) называется плотностью электрического тока.

Уравнение непрерывности

Пусть в объёме V , ограниченном замкнутой поверхностью S , содержится заряд q с объёмной плотностью ρ :

$$q = \int_V \rho dV. \quad (428)$$

Для количества электричества, вытекающего из этого объёма, выполняется следующее соотношение:

$$-\frac{d q}{d t} = \oint_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (429)$$

Левая часть данного равенства описывает изменение положительного заряда в единицу времени (сила тока (424)), а правая - поток положительного заряда через замкнутую поверхность S (426). Соотношение (429) с помощью теоремы Остроградского-Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} d\vec{S} \quad (430)$$

преобразуется к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (130)$$

Соотношения (429) и (430) называются уравнениями непрерывности в интегральной и дифференциальной формах. Данные уравнения выражают закон сохранения заряда в макроскопической электродинамике.

Если вектор плотности тока \vec{j} везде остётся стационарным с течением времени, полученная система называется системой для постоянных (стационарных) токов. В данном случае уравнение непрерывности имеет вид:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (432)$$

т.е. поток вектора \vec{j} через любую замкнутую поверхность равен нулю. Это означает, что для стационарных токов линии тока непрерывны.

Закон Ома

Закон Ома для плотности постоянного тока

Для возникновения и поддержания постоянного тока на заряды должны действовать внешние силы. Заряды могут быть приведены в движение их механическим перемещением и с помощью внешнего электрического поля. Если на электрический заряд e со стороны внешнего силового поля действует регулярная сила \vec{F} , то из уравнения движения для носителей тока

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - m \frac{\vec{v}}{\tau}, \quad (433)$$

(m - масса носителя, \vec{v} - его средняя скорость движения вдоль проводника) следует уравнение для плотности тока \vec{j} :

$$\vec{j} + \tau \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{\lambda}{e} \vec{F}, \quad \sigma = \frac{ne^2 \tau}{m}. \quad (434)$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (434) описывает среднюю силу, действующую на носитель тока при его столкновении с ионами кристаллической решётки проводника. Так как при $\vec{v} = 0$ данная сила отсутствует, то в первом приближении её можно считать зависящей от \vec{v} . Величина τ называется инерциальным временем. Оно характеризует уменьшение средней скорости \vec{v} с течением времени за счёт столкновений с ионами решёток. По порядку величины τ равно половине времени свободного пробега носителя тока между двумя последовательными столкновениями с ионами решётки.

Решение уравнения (434) при $\vec{F} = \text{const}$ и $\sigma = \text{const}$ имеет вид:

$$\vec{j} = \frac{\sigma}{e} \vec{F} + \vec{j}_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (435)$$

где \vec{j}_0 - плотность тока в начальный момент времени $t = const$. Если за время $t = \tau$ электрический ток изменяется мало $t = \tau$, то при $t \gg \tau$

$$\vec{j} = \sigma \vec{F} / e. \quad (435a)$$

Определение 116

Величина σ называется удельной проводимостью, а величина ρ , обратная к σ ($\rho = 1/\sigma$), называется удельным сопротивлением материала.

Данные величины являются характерными для данного вещества. Они зависят от температуры проводника и других его физических характеристик. Связь σ с концентрацией носителей n , массой m и зарядом e определяется (434).

Определение 117

Величина $\mu = e\tau/m$ называется подвижностью носителей тока (заряда).

Если носитель заряда под действием постоянного электрического поля с напряжённостью \vec{E} приобрёл скорость \vec{v} , тогда

$$\vec{v} = \mu \vec{E}. \quad (436)$$

Электропроводность σ связана с подвижностью следующим соотношением:

$$\sigma = \mu |e| n, \quad (437)$$

где n - концентрация носителей заряда данного сорта.

Уравнение (433) не зависит от природы силы \vec{F} . Если ток возбуждается электрическим полем с напряжённостью \vec{E} , то $\vec{F} = e\vec{E}$ и

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (438)$$

- плотность электрического тока \vec{j} пропорциональна напряжённости электрического поля \vec{E} . Соотношение (438) называется законом Ома в дифференциальной форме. Оно содержит величины \vec{j} и \vec{E} , характеризующие электрической состояние среды в одной и той же точке.

Закон Ома для силы тока. ЭДС источника тока

Из закона Ома в дифференциальной форме можно получить следующее соотношение для силы тока:

$$IR = V + \varepsilon, \quad IR = U, \quad U = V + \varepsilon, \quad (439)$$

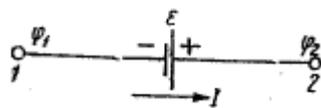


Рис. 76.

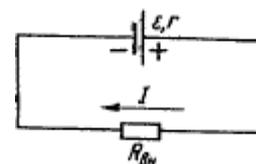


Рис. 77.

называемое законом Ома для участка цепи 1-2 (рис. 76). Величина V является разностью потенциалов φ_1 и φ_2 между точками 1 и 2, называемая напряжением на концах 1 и 2 проводника:

$$V = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} E dl, \quad (440)$$

где E - напряжённость поля стационарного тока, dl - элемент длины участка 1-2. Соотношение (440) показывает, что электрической поле \vec{E} стационарных токов потенциально.

Определение 118

Величина

$$\varepsilon = \int_{(1)}^{(2)} E_{\text{стор}} dl, \quad (441)$$

где $E_{\text{стор}}$ - напряжённость поля сторонних сил, dl - элемент длины участка 1-2, называется электродвижущей силой (ЭДС) источника тока, действующей на участке цепи 1-2. ЭДС характеризует ε свойства источника тока. Она численно равна работе, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 проводника в точку 2.

Определение 119

Величина R в соотношении (439) называется электрическим сопротивлением.

Электрическое сопротивление равно сумме сопротивлений проводника $R_{\text{вн}}$ и внутреннего сопротивления источника тока r :

$$R = R_{\text{вн}} + r, \quad (442)$$

Определение 120

Величина U в (439) называется падением напряжения на участке цепи 1-2. Оно равно работе, совершаемой кулоновскими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2.

Если участок 1-2 не содержит ЭДС, то закон Ома принимает наиболее простой вид:

$$IR = V, \quad (439a)$$

Сопротивление R связано с удельным с помощью следующего соотношения:

$$R = \int_{(1)}^{(2)} \frac{\rho}{S} dl, \quad (443)$$

где ρ - удельное сопротивление, S - площадь поперечного сечения проводника, dl - элемент его длины. Если проводник изготовлен из однородного вещества, то

$$R = \rho l / S, \quad (444)$$

где l - длина участка проводника 1-2.

Если электрическая цепь замкнута (рис. 23), $V = \varphi_2 - \varphi_1 = 0$, и закон Ома для замкнутого участка цепи имеет вид:

$$\varepsilon = IR, \quad I = \varepsilon / (R_{\text{вн}} + r), \quad (144)$$

где R - полное сопротивление цепи, I - сила тока в цепи, ε - ЭДС источника.

Закон Джоуля-Ленца

При прохождении тока по сопротивлению происходит рассеяние энергии. Источник электрического тока при перемещении заряда со скоростью \vec{v} совершает работу и отдаёт мощность

$$P = n \bar{v} \vec{F} = \vec{j} \vec{F} / e, \quad (446)$$

где \vec{F} - сила, действующая на носитель с зарядом e , n - концентрация носителей, \vec{j} - плотность электрического тока. В металле данная мощность идёт на увеличение его внутренней энергии, т.к. прохождение электрического тока через металлы не сопровождается изменением их внутренней структуры. Расходуемая источником тока энергия проявляется в конечном итоге в виде теплоты. Действительно, при своём движении носители заряда испытывают действие силы трения, на преодоление которой расходуется энергия источника тока. Сила трения вызывается столкновениями носителей заряда между собой и с любыми другими частицами среды. В металлах носителями заряда являются электроны проводимости, а в качестве частиц среды выступают ионы кристаллической решётки. При столкновении электронов между собой и с узлами решётки всё время происходит переход энергии упорядоченного движения электронов в энергию хаотического движения ионов и электронов. Энергия, приобретаемая электроном под действием силы \vec{F} , не сразу рассеивается, а сначала накапливается до некоторой средней величины, при которой средняя потеря энергии электроном при столкновении с ионом будет равна энергии, полученной им между столкновениями. В результате работа источника тока передаётся электронам и кристаллической решётке в виде кинетической энергии хаотического движения или (согласно молекулярно-кинетической теории вещества) в виде теплоты.

Количество теплоты, выделяющееся в проводнике при протекании постоянного тока, определяется законом Джоуля-Ленца:

Формулировка Количество теплоты Q , в единице объёма, выделяющееся в единицу времени (мощность теплоты), прямо пропорционально квадрату плотности электрического тока \vec{j} и обратно пропорционально электропроводности среды σ :

$$Q = \frac{\vec{j}^2}{\sigma} = \frac{\vec{j} \vec{F}}{e} = \frac{\sigma}{e^2} \vec{F}^2 \quad (447)$$

(закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме); или количество теплоты Q , выделяющееся за единицу времени в данном участке проводника, пропорционален квадрату силы тока I и сопротивлению данного участка:

$$Q = \int \frac{\vec{j}^2}{\sigma} dV = \int \frac{\vec{j}^2}{\sigma} S dl = \int \frac{dl}{\sigma S} = I^2 R \quad (448)$$

(закон Джоуля-Ленца в интегральной форме). Полное количество теплоты $Q_{пол}$, выделяющееся за время t согласно закону Джоуля-Ленца, описывается следующим соотношением:

$$Q_{пол} = I^2 R t = IVt \quad (449)$$

и равно работе A , произведённой электрическим током. В форме (449) закон Джоуля-Ленца является наиболее общим и не зависит от природы силы \vec{F} , вы-

зывающей электрический ток.

Электрическая цепь

Определение 121

Под электрической цепью понимается система из сопротивлений, конденсаторов, катушек индуктивности и источников ЭДС, соединённых проводниками. В электрической цепи электроны движутся вне источника от отрицательного полюса к положительному, а внутри источника - в обратном направлении. Во всех точках неразветвлённой электрической цепи сила тока остаётся постоянной. В разветвлённой цепи сумма токов по отдельным ветвям равна полному току.

Правила Кирхгофа

Для расчёта сложных цепей, содержащих несколько разветвлений, используются правила Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа

Алгебраическая сумма токов I_1, I_2, \dots, I_n , сходящихся в узле A , равна нулю (рис. 78):

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n = \sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (450)$$

Токи, подходящие к узлу (I_1, I_2, I_5), считаются положительными. Токи, выходящие из узла (I_3, I_4), считаются отрицательными.

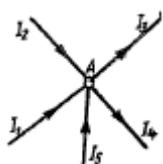


Рис. 78.

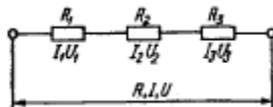


Рис. 79.

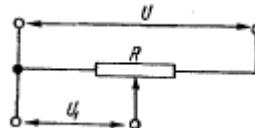


Рис. 80.

Второе правило Кирхгофа

В неразветвлённой цепи или в каждом произвольно выбранном замкнутом контуре разветвлённой цепи алгебраическая сумма ЭДС всех источников равна алгебраической сумме всех падений напряжения в данном контуре:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \varepsilon_k, \quad (451)$$

где I_i - сила тока, протекающего через сопротивление R_i , ε_k - ЭДС k -го источника тока. Суммирование производится по всем i сопротивлениям контура и k источникам тока.

Токи I_i считаются положительными, их направления совпадают с направлением обхода выбранного замкнутого контура и отрицательным в противном случае. ЭДС ε_k считаются положительными, если они создают токи, направленные в сторону обхода контура.

Правила Кирхгофа (450) и (451) приводят к системе алгебраических уравнений первого порядка. Её решение позволяет определить любую неизвестную величину (силу тока, сопротивление или ЭДС источника на любом участке цепи).

Первое правило Киргофа является условием стационарности тока, а второе вытекает из условия равенства нулю электрического напряжения по замкнутому контуру.

Соединение сопротивлений

При последовательном соединении сопротивлений (рис. 79) сопротивление всей цепи R равно сумме всех отдельных сопротивлений R_1, R_2, \dots :

$$R = R_1 + R_2 + \dots \quad (452)$$

Ток, проходящий по всей цепи, равен токам I_1, I_2, \dots , проходящим через каждое отдельное сопротивление R_1, R_2, \dots :

$$I = I_1 = I_2 = \dots \quad (453)$$

Падение напряжения U во всей цепи при последовательном соединении сопротивлений равно сумме падений напряжений U_1, U_2, \dots на каждом отдельном сопротивлении R_1, R_2, \dots :

$$U = U_1 + U_2 + \dots, \quad (454)$$

а падения напряжений на отдельных сопротивлениях пропорциональны величинам этих сопротивлений:

$$U_1/U_2 = R_1/R_2, \quad U_1/U_3 = R_1/R_3, \quad U_2/U_3 = R_2/R_3, \dots \quad (455)$$

Из (455) следует, что если на сопротивлении R падает напряжение U , то с части R_1 можно снять часть U_1 полного напряжения (рис. 80): $U_1 = U R_1/R$. Устройство, показанное на рис. 80, называется делителем напряжений. При параллельном соединении сопротивлений (рис. 81) величина, обратная полному сопротивлению R , равна сумме величин, обратных сопротивлениям ветвей R_1, R_2, \dots , т.е.:

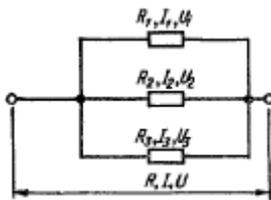


Рис. 81.

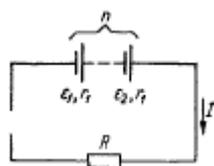


Рис. 82.

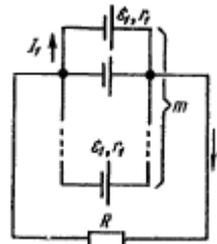


Рис. 83.

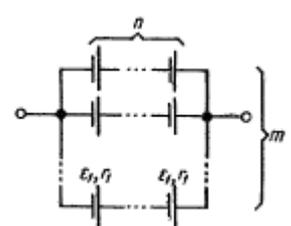


Рис. 84.

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots \quad (456)$$

Данное соотношение является следствием того, что сила тока в цепи I равна силе токов на каждом отдельном участке I_1, I_2, \dots :

$$I = I_1 + I_2 + \dots, \quad (457)$$

а падение напряжения U во всей цепи равно падениям напряжений на каждом отдельном сопротивлении:

$$U = U_1 = U_2 = \dots \quad (458)$$

Токи I_1, I_2, \dots , проходящие через сопротивления R_1, R_2, \dots (рис. 81), обратно-

пропорциональны данным сопротивлениям, т.е.:

$$I_1/I_2=R_2/R_1, I_1/I_3=R_3/R_1, I_2/I_3=R_3/R_2, \dots \quad (459)$$

Соединение источников тока

При последовательном соединении n одинаковых источников ЭДС ε_i (рис. 83) ЭДС батареи ε и её внутреннее сопротивление r в n раз больше, чем у одного источника:

$$\varepsilon=n\varepsilon_i, r=nr_i, \dots \quad (460)$$

При параллельном соединении m одинаковых источников (рис. 84) ЭДС ε_i с внутренним сопротивлением r_i ЭДС батареи равна ЭДС одного источника, а внутреннее сопротивление в m раз меньше, чем у одного источника:

$$\varepsilon=\varepsilon_i, r=r_i/m. \quad (461)$$

При смешанном соединении одинаковых источников тока в батарею, состоящую из m параллельных звеньев, в каждом из которых n источников соединены последовательно (рис. 84), ЭДС и её внутреннее сопротивление r определяются соотношениями:

$$\varepsilon=n\varepsilon_i, r=r_i n/m, \quad (462)$$

где ε_i и r_i - ЭДС и внутреннее сопротивление отдельного источника.

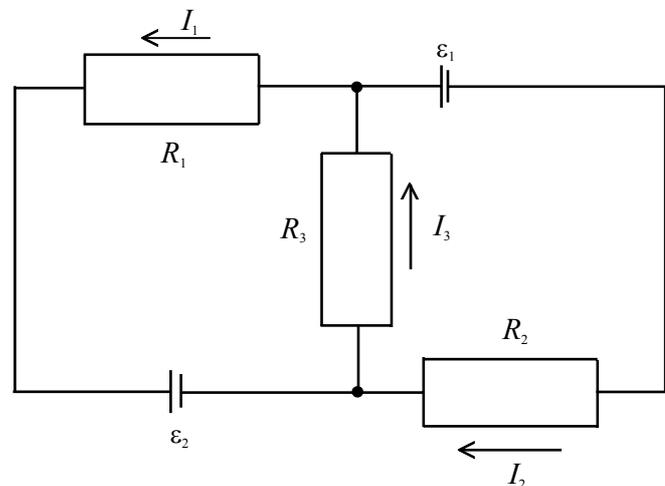
Различные сопротивления источников тока позволяют получать в данной цепи источник с требуемыми ЭДС и внутренним сопротивлением.

Пример 45

Дана схема, и известны сопротивления резисторов ($R_1=100 \text{ Ом}$, $R_2=R_3=150 \text{ Ом}$) и ЭДС источников ($\varepsilon_1=75 \text{ В}$, $\varepsilon_2=100 \text{ В}$). Найти токи в ветвях цепи.

Решение

Используя первый закон Кирхгофа, можно записать $n-1$ уравнение для цепи. В нашем случае количество узлов $n=2$, а значит нужно составить только одно уравнение. В соот-



ответствии с данным законом, сумма токов сходящихся в узле равна нулю. При этом, условно принято считать входящие токи в узел положительными, а выходящими отрицательными. Тогда получаем: $I_3-I_1-I_2=0$. Далее используя второй закон Кирхгофа составим уравнения для первого и второго контуров цепи. Направления обхода выбраны произвольными, при этом если направление тока через резистор совпадает с направлением обхода, берем со знаком плюс, и наоборот если не совпадает, то со знаком минус. Аналогично с источниками ЭДС. На примере первого контура - ток I_1 и I_3 совпадают с направлением обхода контура (против часовой стрелки), ε_1 также совпадает, поэтому берем их со знаком

плюс. Уравнения для первого и второго контуров в соответствии со вторым законом Кирхгофа имеют вид:

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = \varepsilon_1, \quad R_2 I_2 + R_3 I_3 = \varepsilon_2.$$

Совместное решение полученных уравнений позволяет получить:

$$I_1 = [\varepsilon_1(R_2 + R_3) - \varepsilon_2 R_3] / (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3), \quad I_2 = [\varepsilon_1 R_1 + R_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] / (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3),$$

$$I_3 = (\varepsilon_2 R_1 + \varepsilon_1 R_2) / (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3).$$

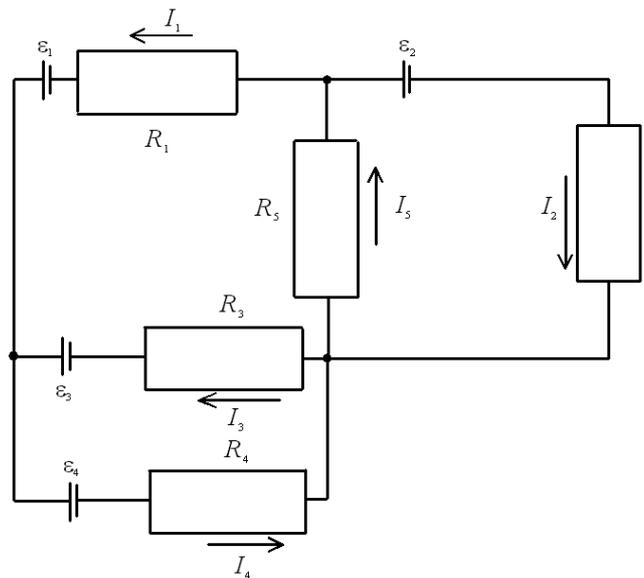
Подстановка указанных в условии задачи значений сопротивлений и ЭДС позволяет получить: $I_1 \approx 0,143 \text{ A}$, $I_2 \approx 0,643 \text{ A}$, $I_3 \approx 0,405 \text{ A}$.

Пример 46

Найти ЭДС четвертого источника и токи в ветвях I_1, I_2, I_3, I_4 при условии: $R_1 = 130 \text{ Ом}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$, $R_3 = 150 \text{ Ом}$, $R_4 = 200 \text{ Ом}$, $R_5 = 80 \text{ Ом}$, $\varepsilon_1 = 30 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 60 \text{ В}$, $\varepsilon_3 = 80 \text{ В}$, $I_5 = 0,206 \text{ A}$. Найти токи в ветвях цепи и ЭДС четвертого источника ε_4 .

Решение

Как и в предыдущей задаче начнем решение с составления уравнений на основании первого закона Кирхгофа. Количество уравнений $n-1=2$: $I_3 - I_1 - I_4 = 0$, $I_5 + I_1 - I_2 = 0$. Далее составим уравнения по второму закону Кирхгофа для трёх



контуров. Учитываем направления обхода, как и в предыдущей задаче:

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_5 I_5 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \quad R_2 I_2 + R_5 I_5 = \varepsilon_2, \quad R_3 I_3 + R_4 I_4 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4.$$

Таким образом, получаем из пяти уравнений с пятью неизвестными. Решение данных уравнений позволяет получить следующий результат:

$$I_1 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(R_3 R_5 + R_4 R_5 - R_2 R_3 - R_2 R_4) - \varepsilon_2 R_5 (R_3 + R_4) - (\varepsilon_3 + \varepsilon_4) R_3 (R_2 + R_5)}{R_2 R_3 R_5 + R_2 R_4 R_5 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3},$$

$$I_2 = \frac{R_4 R_5 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + R_3 R_5 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4) - \varepsilon_2 R_1 (R_3 + R_4) - \varepsilon_2 R_3 R_4}{R_2 R_3 R_5 + R_2 R_4 R_5 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3},$$

$$I_3 = \frac{R_4 R_5 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3) - R_2 R_4 (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - (R_1 R_2 + R_1 R_5 + R_2 R_5) (\varepsilon_3 + \varepsilon_4)}{R_2 R_3 R_5 + R_2 R_4 R_5 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3},$$

$$I_4 = \frac{R_3 R_5 \varepsilon_2 - (R_3 R_5 + R_2 R_3) (\varepsilon_4 - \varepsilon_1) - (\varepsilon_3 + \varepsilon_4) (R_1 R_2 - R_2 R_5 + R_1 R_5 - R_5^2)}{R_2 R_3 R_5 + R_2 R_4 R_5 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3},$$

$$I_5 = \frac{(R_2 \varepsilon_1 + R_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 R_1) (R_3 + R_4) - \varepsilon_2 R_3 R_4 - R_2 R_3 (\varepsilon_3 + \varepsilon_4)}{R_2 R_3 R_5 + R_2 R_4 R_5 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3}.$$

Из последнего соотношения выражаем неизвестную ЭДС ε_4 :

$$\varepsilon_4 = (R_3 + R_4) \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{R_3} - \frac{\varepsilon_2 R_1}{R_2 R_3} \right) - \varepsilon_2 \frac{R_4}{R_2} - I_5 \left(R_1 + R_4 + R_5 + R_4 \frac{R_1 + R_5}{R_3} \right) - \varepsilon_3.$$

Подстановка указанных в условии задачи значений сопротивлений, значений ЭДС первых трёх источников и силы тока I_5 позволяет получить: $\varepsilon_4 \approx 267,5 \text{ В}$. Подстановка указанных в условии задачи значений сопротивлений и значений ЭДС первых трёх в соотношения для сил тока I_1 , I_2 , I_3 и I_4 позволяет получить: $I_1 \approx 0,93 \text{ А}$, $I_2 \approx 0,45 \text{ А}$, $I_3 \approx 0,39 \text{ А}$, $I_4 \approx 0,985 \text{ А}$.

14. Магнитное поле. Основные понятия

Магнитные свойства веществ

Опыт показывает, что некоторые железные руды обладают способностью притягивать к себе находящиеся вблизи них небольшие железные предметы (металлические опилки, гвозди и т.д.). Куски такой руды называются *естественными магнитами*. Железные бруски сами приобретают способность притягивать к себе железные предметы, если они подвергаются воздействию со стороны естественного магнита. В данном случае считается, что железо намагничивается. Если намагничивание прекращается при удалении магнита от магнита, то намагничивание называется временным. Если магнитные свойства остаются, то намагничивание называется остаточным, а само железо называется постоянным искусственным магнитом. Временное и остаточное намагничивания зависит от свойств намагниченного вещества (от сорта железа или стали). Например, остаточное намагничивание содержащей кобальт стали значительно больше, чем остаточное намагничивание мягкого железа. Постоянные искусственные магниты изготавливаются из специальных сортов стали.

Разные части искусственного и естественного магнитов притягивают железные предметы по-разному. На концах магнита притяжение практически максимальное, а в средней его части оно практически отсутствует. Концы магнита называются полюсами, а среднюю часть - нейтральным доменом. Если магниту придать форму стрелки и дать ей возможность свободно вращаться вокруг оси, проходящей через нейтральную зону, то она всегда установится так, что один из полюсов магнита будет обращён на север, а другой - на юг. Повернувшийся на север полюс магнита называется северным (N), а на юг - южным (S). Северный и южный полюсы нельзя разделить, т.е. не удаётся получить магнит с одним полюсом.

Индукция магнитного поля

В пространстве, окружающем проводник с током, действуют силы, подобные тем, которые действуют вблизи естественных и искусственных магнитов. В 1820 г. Эрстедом проводились следующие опыты: в направлении север-юг располагали магнитную стрелку и проводник (вдоль меридиана). При пропускании тока через проводник магнитная стрелка поворачивалась и устанавливалась перпендикулярно проводнику. При отключении тока стрелка возвращалась в исходное положение. Взаимодействие электрического тока, т.е. движущихся зарядов, с

магнитной стрелкой осуществляется через материального посредника, называемого *магнитным полем*. Из опытов Эрстеда следует, что магнитное поле создается движущимися электрическими зарядами. Количественно магнитное поле характеризуется магнитной индукцией \vec{B} . Магнитная индукция - векторная величина. Её абсолютное значение равно силе $F_{m\perp}$, действующей на единичный электрический заряд q , движущийся с единичной скоростью \vec{v} в направлении, перпендикулярном направлению магнитной индукции \vec{B} :

$$F_{m\perp} = qvB. \quad (463)$$

В общем случае на заряд q , движущийся со скоростью \vec{v} в магнитном поле с индукцией \vec{B} , действует сила \vec{F}_m , направленная перпендикулярна векторам \vec{v} и \vec{B} и определяемая следующим соотношением:

$$\vec{F}_m = q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (464)$$

Модуль данной силы определяется стандартно:

$$F_m = q \cdot v \cdot B \cdot \sin(\varphi), \quad (465)$$

где φ - угол между векторами \vec{v} и \vec{B} .

Последнее соотношение определяет абсолютное значение магнитной индукции \vec{B} и её направление по известным векторам: силе \vec{F}_m и скорости \vec{v} .

Для магнитного поля, как и для электрического справедлив принцип суперпозиции:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n = \sum_{i=1}^n \vec{B}_n. \quad (466)$$

Магнитное поле в среде. Магнетики

Для описания магнитного поля в какой-либо точке среды наряду с магнитной индукцией \vec{B} используется напряжённость магнитного поля \vec{H} :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (467)$$

где

$$\mu = 1 + \chi. \quad (468)$$

Величина χ называется магнитной восприимчивостью среды, а μ - её магнитной проницаемостью, μ_0 - магнитная постоянная. Среда, для которых $\chi > 0$ и $\mu > 1$, называются парамагнитными или парамагнетиками. К парамагнетикам относятся O_2 , Al , Pt , $FeCl_3$ и т.д. Среда, для которых $\chi < 0$ и $\mu < 1$, называются диамагнитными или диамагнетиками. К диамагнетикам относятся N_2 , CO_2 , H_2O , Ag , Bi и т.д. Парамагнетики намагничиваются вдоль магнитного поля, а диамагнетики - противоположно ему. В вакууме $\chi = 0$ и $\mu = 1$.

Среда, способные намагничиваться в магнитном поле, т.е. создавать собственное магнитное поле, называются магнетиками. К магнетикам относятся парамагнетики, диамагнетики и ферромагнетики. Ферромагнитными называются среды, в которых собственное магнитное поле значительно превосходит (в $100 \div 1000$ раз) вызвавшее его магнитное поле.

Определение 122

Собственным (внутренним) магнитным полем среды называется магнитное поле, создаваемое его молекулами, атомами или ионами.

Магнитное взаимодействие движущихся зарядов

Рассмотрим заряд q движется равномерно в вакууме со скоростью \vec{v} , то в точке пространства с радиус-вектором \vec{r} он создаёт магнитное поле с индукцией

$$\vec{B} = \mu_0 q [\vec{v}, \vec{r}] / r^3. \quad (469)$$

Для зарядов q , движущихся со скоростью $v \ll c$, c - скорость света в вакууме, существует связь между создаваемыми ими электрическим и магнитным полем с напряжённостью \vec{E} и индукцией \vec{B} :

$$\vec{B} = 4\pi [\vec{v}, \vec{E}] / c^2, \quad (470)$$

где \vec{E} определяется соотношением (309).

Рассмотрим два точечных заряда q_1 и q_2 , движущихся со скоростями $v_1 \ll c$ и $v_2 \ll c$, взаимодействуют между собой с силами:

$$\vec{F}_{12} = \mu_0 \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} [\vec{v}_2, [\vec{v}_1, \vec{r}_{12}]], \quad \vec{F}_{21} = \mu_0 \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} [\vec{v}_1, [\vec{v}_2, \vec{r}_{21}]], \quad (471)$$

где \vec{F}_{12} - сила, действующая на заряд q_2 со стороны поля \vec{B}_1 , созданного зарядом q_1 в точке нахождения заряда q_2 , \vec{r}_{12} - радиус-вектор, проведённый от заряда q_1 к заряду q_2 ; \vec{F}_{21} - сила, действующая на заряд q_1 со стороны поля \vec{B}_2 , созданного зарядом q_2 в точке нахождения заряда q_1 , \vec{r}_{21} - радиус-вектор, проведённый от заряда q_2 к заряду q_1 . Если векторы \vec{v}_1 и \vec{v}_2 параллельны между собой и одинаково направлены, но перпендикулярны к вектору \vec{r}_{12} , тогда

$$F_{12} = F_{21} = \mu_0 q_1 q_2 v_1 v_2 / r_{12}^2, \quad (472)$$

а направление зависит от знаков зарядов q_1 и q_2 - притяжение для одноимённых зарядов и отталкивание - для разноимённых. Так как взаимодействие зарядов осуществляется через поле, то силы \vec{F}_{12} и \vec{F}_{21} не удовлетворяют третьему закону Ньютона о равенстве действия и противодействия.

Закон Ампера

Определение 123

Сила, действующая со стороны магнитного поля на проводник с током, называется силой Ампера.

Если ток создаётся движущимися со скоростью \vec{v} одинаковыми частицами с зарядом e и концентрацией n , то сила Ампера $d\vec{F}$, действующая на элемент объёма проводника dV , определяется следующим соотношением:

$$d\vec{F} = e [\vec{v}, \vec{B}] dN = n e [\vec{v}, \vec{B}] dV = [\vec{j}, \vec{B}] dV, \quad (473)$$

где $dN = n dV$ - число частиц в объёме dV , $\vec{j} = n e \vec{v}$ - плотность тока.

Сила Ампера $d\vec{F}$ обычно выражается через линейный элемент тока $I d\vec{l}$, проходящего через сечение S проводника:

$$I d\vec{l} = j S d\vec{l} = \vec{j} dV. \quad (374)$$

В данном соотношении введены следующие обозначения: I - сила тока; $d\vec{l}$ - вектор, модуль которого равен элементу длины dl проводника, а направление совпадает с направлением электрического тока \vec{j} . Тогда:

$$d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (477)$$

Сила Ампера \vec{F} , действующая на проводник конечной длины, определяется интегрированием соотношения (174) по всей длине проводника:

$$\vec{F} = \int I [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (475a)$$

Для прямолинейного проводника длиной l сила Ампера определяется соотношением:

$$\vec{F} = I [\vec{l}, \vec{B}], F = IlB \sin(\varphi), \quad (476)$$

где φ - угол между направлением тока и вектором \vec{B} (рис. 31). Соотношения (475) для линейного элемента тока и для проводника конечной длины. В отличие от кулоновских сил, которые являются центральными, сила Ампера направлена перпендикулярно линиям индукции магнитного поля.

Пример 47

С какой силой действует магнитное поле с индукцией 10 мТл на проводник, в котором сила тока 50 А , если длина активной части проводника $0,1 \text{ м}$? Линии индукции поля и ток взаимно перпендикулярны.

Решение

Для определения искомой силы воспользуемся соотношением (476). Подстановка в данное соотношение указанных в условии параметров позволяет получить: $F = 50 \text{ А} \cdot 0,01 \text{ Тл} \cdot 0,1 \text{ м} \cdot \sin(90^\circ) = 0,05 \text{ Н}$.

Пример 48

Какова величины индукции магнитного поля, в которой на проводник с длиной активной части 5 см действует сила 50 мН ? Сила тока в проводнике 25 А . Проводник расположен перпендикулярно индукции магнитного поля.

Решение

Для определения искомой величины индукции воспользуемся соотношением (476). Из данного соотношения следует, что $B = F / Il \sin(\varphi)$. Подстановка в данное соотношение указанных в условии параметров позволяет получить: $B = 0,05 \text{ Н} / 25 \text{ А} \cdot 0,05 \text{ м} = 0,04 \text{ Тл}$.

Закон Био-Савара-Лапласа

Согласно закону Био-Савара-Лапласа магнитная индукция $d\vec{B}$ элемента тока определяется следующим соотношением:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} [d\vec{l}, \vec{r}], d B = \sin(\varphi) \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}, \quad (477)$$

где $I dl$ - линейный элемент тока; I - сила тока, \vec{r} - радиус-вектор, проведённый из элемента тока в рассматриваемую точку поля (рис. 31); φ - угол между век-

торами $d\vec{l}$ и \vec{r} . Полное поле постоянных токов находится путём интегрирования (477) по всем токам:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I}{r^3} [d\vec{l}, \vec{r}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I}{r^3} [\vec{j}, \vec{r}] dV, \quad (478)$$

где \vec{j} - плотность тока в элементе объёма dV . Интегрирование по замкнутому контуру означает, что постоянные токи всегда замкнуты. Соотношение (478) допускает экспериментальную проверку, в то время как соотношение (477) не может быть проверено экспериментально, т.е. нельзя выделить один элемент тока $I dl$ так, чтобы он был независим от других элементов.

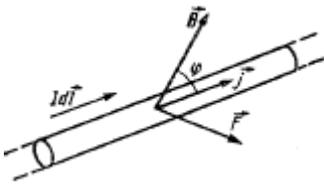


Рис. 85.

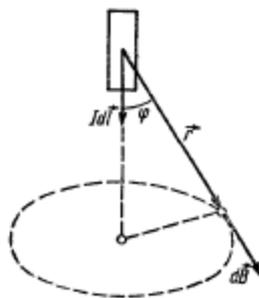


Рис. 86.

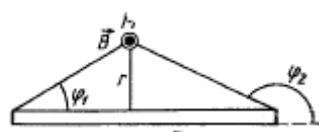


Рис. 87.

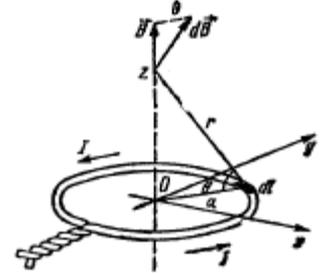


Рис. 88.

Магнитные поля простых систем

Закон Био-Савара-Лапласа (477) позволяет вычислить индукцию магнитного поля любой системы.

1. Бесконечно длинный проводник с током I , находящийся в среде с магнитной проницаемостью μ , создаёт на расстоянии r от себя магнитное поле с индукцией

$$B = 2\mu\mu_0 I / 4\pi r. \quad (479)$$

2. Проводник конечной длины с током I создаёт на расстоянии r от себя в произвольной точке M (рис. 86) поле с индукцией

$$B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{I}{r} [\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2)]. \quad (480)$$

3. Круговой ток (рис. 87) силой I на оси, проходящей через центр O круга перпендикулярно плоскости, в которой он расположен, создаёт поле с индукцией

$$dB_z = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \cos(\theta), \quad B = B_z = \frac{\mu_0\mu}{2} \frac{a^2}{r^2} I, \quad B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{2p_m}{r^2}, \quad (481)$$

где $r^2 = a^2 + z^2$; a - радиус контура кругового тока; θ - угол между осью витка и вектором $d\vec{B}$; z - проекция на ось радиус-вектора \vec{r} , проведённого из элемента $d\vec{l}$ в точку на оси; dB_z - осевая составляющая поля $d\vec{B}$; p_m - магнитный момент кругового тока. Радиальная составляющая dB_r не даёт вклада в поле \vec{B} .

4. Цилиндрическая катушка (соленоид) длиной L , состоящей из N витков проволоки (круговых витков), образующих винтовую линию в произвольной

точке M (рис. 88), лежащей на её оси, создаёт поле с индукцией

$$B = \mu_0 \mu n I [\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)] / 2, \quad (482)$$

где $n = N/L$ - число витков на единицу длины катушки, θ_1 и θ_2 - углы, под которыми из точки M видны концы катушки ($\theta_2 > \theta_1$).

Из последнего соотношения следует, что поле на оси соленоида бесконечной длины ($\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$) определяется следующим соотношением:

$$B = \mu_0 \mu n I. \quad (482a)$$

Поле соленоида показано на рис. 89. В точке, равноудалённой от краёв соленоида, поле максимально:

$$B = \frac{\mu_0 \mu n I L}{\sqrt{4a^2 + L^2}}, \quad (482б)$$

где a - радиус витка с током. Поле на концах длинного соленоида ($\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = \pi$)

$$B = \mu_0 \mu N I / 2. \quad (482в)$$

5. Кольцевая катушка из проволоки (тороид), намотанная на сердечник в форме тора (рис. 89), создаёт поле, локализованное внутри её объёма, с индукцией

$$B = \mu_0 \mu N I / 2 \pi r, \quad (483)$$

где N - общее число витков тороида, r - расстояние от центра O до точки M внутри тора.

Поле максимально при $r = R_2$ и минимально при $r = R_1$, где R_1 и R_2 - внешний и внутренний радиусы тора. Поле на осевой линии тороида имеет вид:

$$B = N I / 2 \pi R, \quad (484)$$

где $R = (R_1 + R_2) / 2$.

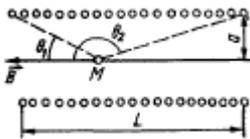


Рис. 88.

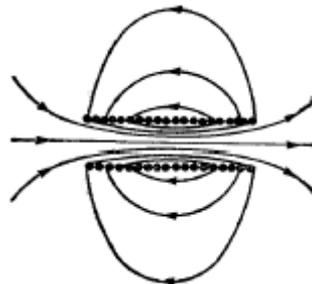


Рис. 89.

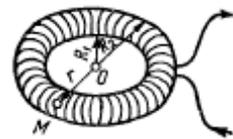


Рис. 90.

6. Прямоугольный виток с током I сторонами a и b (рис. 89) создаёт в центре поле с индукцией

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4 \pi} \frac{8I}{ab} \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (485)$$

7. Контур с током I и магнитным моментом p_m на расстояниях r , значительно превышающим его размеры, создаёт поле с индукцией

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{3(\vec{p}_m \vec{r})\vec{r} - \vec{p}_m \vec{r}^2}{r^5}. \quad (486)$$

Действие магнитного поля на проводники с током

Законы Ампера и Био-Савара-Лаласа определяют особенности взаимодействия проводников, по которым течёт постоянный ток.

1. Силы взаимодействия двух элементов тока $I_1 dl_1$ и $I_2 dl_2$, произвольно ориентированных один относительно другого, определяются следующими соотношениями:

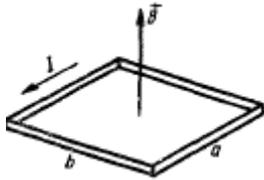


Рис. 91.

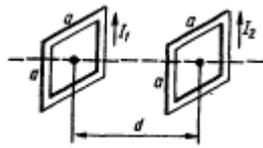


Рис. 92.

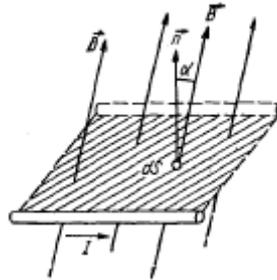


Рис. 93.

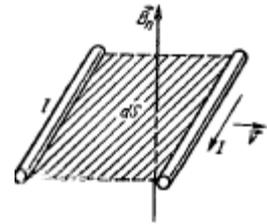


Рис. 94.

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^3} [d\vec{l}_2, [\vec{l}_1, \vec{r}_{12}]], \quad d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{21}^3} [d\vec{l}_1, [\vec{l}_2, \vec{r}_{21}]], \quad (487)$$

где \vec{F}_{12} - сила, действующая на элемент dl_2 со стороны элемента dl_1 ; \vec{r}_{12} - радиус-вектор, проведённый из dl_1 в dl_2 ; \vec{F}_{21} - сила, действующая на элемент dl_1 со стороны элемента dl_2 ; $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$.

Взаимодействие двух бесконечно длинных параллельных проводников с токами I_1 и I_2 , находящиеся на расстоянии r друг от друга, определяются следующим соотношением:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{r} l, \quad (488)$$

где l - участок проводника, на который действует сила \vec{F} со стороны магнитного поля, создаваемого другим проводником.

2. Сила взаимодействия двух одинаковых квадратных контуров с токами I_1 и I_2 , плоскости которых параллельны, а центры лежат на одной прямой (рис. 39), может быть представлена в следующей форме:

$$\vec{F} = \mu_0 \mu \frac{I_1 I_2}{\pi} \left[\frac{a^2 + 2d^2}{d\sqrt{a^2 + d^2}} - \frac{d\sqrt{2a^2 + d^2}}{a^2 + d^2} - 1 \right], \quad (489)$$

где a - сторона квадрата, d - расстояние между контурами. Контур притягиваются при одинаковых направлениях тока (как на рис. 93) и отталкиваются в случае разных направлений токов.

Сила Лоренца

На элементарный заряд q , движущийся в электромагнитном поле со скоростью \vec{v} , действует сила

$$\vec{F} = q \vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (490)$$

где \vec{E} напряжённость электрического поля, \vec{B} - индукция магнитного поля. Сила (490) называется силой Лоренца. Первое слагаемое силы Лоренца является силой, действующей на заряд в электрическом поле, а второе - в сила, действующая на заряд в магнитном поле. Скорость \vec{v} является скоростью заряда относительно магнитного поля \vec{B} . Магнитная составляющая силы Лоренца перпендикулярна вектору скорости \vec{v} заряда. По этой причине работа не совершается.

Пример 39

Какая сила действует на протон, движущийся со скоростью 10 Мм/с в магнитном поле с индукцией $0,2 \text{ Тл}$ перпендикулярно линиям магнитной индукции?

Решение

Для определения искомой силы воспользуемся соотношением (490). Подстановка в данное соотношение указанных в условии параметров позволяет получить: $F = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 10 \cdot 10^6 \text{ м/с} \cdot 0,2 \text{ Тл} \cdot \sin(90^\circ) = 16 \cdot 10^{-19+6} \cdot 0,2 \cdot 1 \cdot \text{ Кл} \cdot \text{ м} \cdot \text{ Тл/с} = 3,2 \cdot 10^{-13} \text{ Н}$.

Пример 40

В направлении, перпендикулярном линиям магнитной индукции, влетает в магнитное поле электрон со скоростью 10 Мм/с . Найти индукцию поля, если электрон описал в поле окружность радиусом 1 см .

Решение

Для определения искомой индукции воспользуемся соотношением (490). Преобразуем данное соотношение к следующей форме: $B = F/q \cdot v \cdot \sin(\varphi)$. Подстановка в данное соотношение указанных в условии параметров позволяет получить: $B = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot 10 \cdot 10^6 \text{ м/с} / (0,01 \text{ м} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}) = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$.

Механическая работа в магнитном поле. Магнитный поток

Так как на проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера, то при его перемещении совершается работа. В случае произвольного (поступательного или вращательного) движения проводника с током I в магнитном поле с индукцией \vec{B} элементарная работа δA , совершаемая силами поля, определяется следующим соотношением:

$$\delta A = I B_n dS = I d\Phi_m, \quad (491)$$

где B_n - составляющая вектора \vec{B} , перпендикулярная элементарной площадке dS , заштрихованной проводником с током при его движении (рис. 39). Величина

$$d\Phi_m = B_n dS = B \cos(\alpha) dS = (\vec{B} d\vec{S}) \quad (492)$$

называется потоком вектора магнитной индукции \vec{B} сквозь площадку dS , α - угол между площадкой dS и направлением вектора магнитной индукции \vec{B} (рис. 93). Полный магнитный поток Φ_m через всю поверхность S равен интегралу по данной поверхности:

$$\Phi_m = \int_S B_n dS = \int_S (\vec{B} d\vec{S}). \quad (493)$$

В случае плоской поверхности с площадью S получаем:

$$\Phi_m = B_n S = B_n S \cos(\alpha). \quad (493a)$$

Магнитный поток Φ_m , характеризуется величиной и знаком, зависящим от выбора отсчёта угла α , т.е. направления нормали \vec{n} к площадке S . За положительное направление нормали выбрано направление, показанное на рис. 93. Единицей измерения потока в СИ является *вебер* (Вб): $[\Phi_m] = \text{Вб}$. Вебер представляет собой магнитный поток поля с индукцией в 1 Тл (тесла), проходящего через площадку S в 1 м^2 , перпендикулярную полю.

Работа, совершаемая силой Ампера при перемещении проводника конечной длины с постоянным током $I = \text{const}$, согласно (495) определяется соотношением

$$A = I \Phi_m, \quad (494)$$

где Φ_m - магнитный поток через поверхность, которую заметает проводник при своём движении.

Работа замкнутого контура с $I = \text{const}$, совершаемая им при конечном перемещении в магнитном поле, имеет следующий вид:

$$A = I \Delta \Phi_m = I(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (494)$$

где Φ_1 и Φ_2 - магнитные потоки сквозь контур в начале и в конце перемещения.

Работа перемещения проводника с постоянным током в магнитном поле совершается за счёт энергии, затрачиваемой источником тока. Соотношение (491) справедливо и для случая неоднородного магнитного поля, когда его неоднородностью в пределах элементарной площадки dS можно пренебречь. Если магнитный поток Φ_m выражен в веберах, а сила тока I в амперах, то работа будет измеряться в джоулях.

Закон электромагнитной индукции

Электрические токи создают вокруг себя магнитное поле. Существует и обратный эффект: магнитное поле вызывает появление электрических токов. Данное явление называется электромагнитной индукцией. Оно было открыто Фарадеем.

Электрический ток возникает в проводнике при его движении в магнитном поле. Возбуждение тока является следствием действия силы Лоренца на электрические заряды. Поле сторонних сил создаёт ЭДС, называемую в данном случае ЭДС индукции $\varepsilon_{\text{инд}}$. Согласно Максвеллу:

$$\varepsilon_{\text{инд}} = - \frac{d \Phi_m}{d t}, \quad (496)$$

где Φ_m - магнитный поток через поверхность, ограниченную проводящим контуром. Соотношение (496) выражает основной закон электромагнитной индукции: ЭДС электромагнитной индукции $\varepsilon_{\text{инд}}$, возбуждаемая в движущемся в движущемся замкнутом проводнике пропорциональна скорости приращения магнитного потока Φ_m , пронизывающего поверхность, ограниченную данным проводником. Знак минус в (496) соответствует закону (правилу) Ленца: ин-

дукционный ток всегда имеет такое направление, при котором его действие (через создаваемый им магнитный поток) противоположно действию причины, вызывающей этот ток.

Сила тока I в движущемся в магнитном поле проводящем контуре, к которому присоединён гальванический элемент с ЭДС ε , определяется соотношением

$$I = (\varepsilon + \varepsilon_{\text{инд}}) / R, \quad (497)$$

где R - сопротивление контура. В результате проведённых экспериментов было получено, что $\varepsilon_{\text{инд}}$ не зависит от ε . Соотношение (497) является законом сохранения энергии: работа гальванического элемента $\varepsilon I dt$ равна сумме джоулевой теплоты $I^2 R dt$ и работы силы Ампера $I d\Phi_m$.

Индукционные токи возникают и в неподвижных проводниках, помещённых в переменное магнитное поле. Для возбуждения индукционного тока существенным является изменение магнитного потока через контур проводника, но не способ, каким это изменение достигнуто - движением контура в постоянном магнитном поле или изменением магнитного поля внутри неподвижного контура.

Согласно теории Максвелла причиной возникновения индукционного тока в проводнике является то, что всякое переменное магнитное поле \vec{B} возбуждает в электрической среде поле \vec{E} . Индукция вектора напряжённости \vec{E} электрического поля по любому неподвижному замкнутому контуру L определяется следующим соотношением:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{s} = - \frac{\partial \Phi_m}{\partial t}, \quad (498)$$

где Φ_m - магнитный поток через контур L , или в дифференциальной форме

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (499)$$

где \vec{B} - индукция магнитного поля. Следует заметить, что контур L может быть проведён не только в проводнике, но и в диэлектрике. Электромагнитная индукция может проявляться не только в виде появления тока в замкнутом проводнике, но и в поляризации диэлектрика, в ускорении или замедлении движения заряженных частиц, в появлении электрического тока в незамкнутом проводнике и т.д. Индукционные токи, возникающие в массивных проводниках (например, в медной пластине), называются вихревыми токами или токами Фуко. Вихревые токи образуют замкнутые цепи в толще проводника. Они приводят к потерям энергии в виде теплоты.

ЭДС электромагнитной индукции в простых системах

1. Отрезок проводника длиной l движется со скоростью \vec{v} в магнитном поле с индукцией \vec{B} (рис. 94). Возникающая ЭДС индукции определяется следующим соотношением:

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -v B_n l, \quad (500)$$

где B_n - составляющая магнитной индукции, перпендикулярная площадке dS , заемаемой проводником. При этом площадка dS и поток $d\Phi_m$ за время dt определяется следующими соотношениями:

$$dS = lv dt, \quad d\Phi_m = B_n lv dt. \quad (501)$$

2. Плоский виток вращается в однородном магнитном поле \vec{B} с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис. 95). Ось вращения лежит в плоскости витка и перпендикулярна вектору магнитной индукции \vec{B} . ЭДС индукции витка определяется следующим соотношением:

$$\varepsilon_{\text{инд}} = BS\omega \cdot \sin(\omega t) - \frac{\partial \Phi_c}{\partial t}, \quad (502)$$

где S - площадь, ограниченная витком; Φ_c - поток самоиндукции витка.

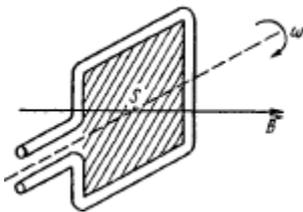


Рис. 95.

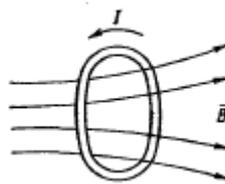


Рис. 96.

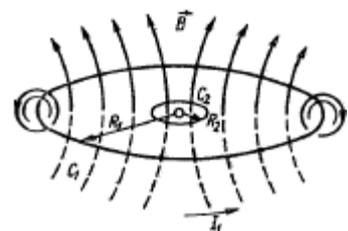


Рис. 97.

Явления самоиндукции и взаимной индукции

Самоиндукция

Во всех случаях, когда изменяется магнитный поток Φ_m через замкнутый контур, наблюдается явление электромагнитной индукции. Всякое изменение силы тока I в таком контуре приводит к возникновению в нём ЭДС индукции, которая в свою очередь вызывает дополнительный ток в контуре. Данное явление называется *самоиндукцией*.

Так как магнитный поток Φ_m пропорционален индукции магнитного поля \vec{B} , а \vec{B} пропорционален току I , тогда

$$\Phi_m = IL, \quad (503)$$

где коэффициент L , не зависящий от силы тока I , называется индуктивностью контура, ограничивающего поверхность, через который проходит поток Φ_m или коэффициентом самоиндукции данного контура (рис. 43). Величина L зависит от размеров и конфигурации контура с током. Единицей индуктивности L в СИ является *генри* (Гн): $[L] = \text{Гн}$.

Основной закон электромагнитной индукции

Соотношение (496) с учётом (503) принимает следующий вид:

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -L dI/dt \quad (504)$$

- ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока в контуре. Соотношение (504) справедливо, если контур является жёстким (недеформируемым) и находится в вакууме или среде, магнитные свойства которой не зависят от магнитного поля. В случае контура, находящегося в ферромагнитной среде,

ЭДС самоиндукции $\varepsilon_{\text{инд}}$ определяется следующим соотношением:

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -d(LI)/dt. \quad (505)$$

Согласно (503) индуктивность контура L равна потоку самоиндукции контура Φ_m при силе тока $I = 1$ А. Индуктивность контура является мерой его инертности по отношению к изменению тока. По правилу Ленца индукционный ток противодействует изменению тока в цепи, он замедляет его увеличение или уменьшение.

Индуктивность простых систем

1. Индуктивность соленоида длиной l , площадью поперечного сечения S и с общим числом витков N определяется соотношением:

$$L = k\mu_0\mu N^2 S/l, \quad (506)$$

где $k \approx 1$ при $l \geq 10d$ (d - диаметр витков соленоида). При $l \approx d$ или $l < d$ коэффициент $k < 1$ и определяется опытным путём. Например, при $l = 0,1d$ и $l = d$ параметр k соответственно равен 0,2 и 0,6.

2. Индуктивность длинного коаксиального кабеля

$$L = \mu_0\mu l \cdot \ln(b/a)/2\pi, \quad (507)$$

где l - длина кабеля, b и a - радиусы внешнего и внутреннего цилиндров.

3. Индуктивность длинной двухпроводной линии:

$$L = \mu_0\mu l \cdot \ln(d/a)/\pi, \quad (508)$$

где l - длина линии, d - расстояние между осями проводов, a - радиус сечения проводов ($a \ll d$).

Взаимная индукция

Определение 124

Явлением взаимной индукции называется наведение ЭДС индукции под действием магнитного поля другого проводника, в котором течёт переменный ток.

Если I_2 - ток во втором проводнике, то наведённая ЭДС индукции ε_{12} в первом проводнике определяется следующим соотношением:

$$\varepsilon_{12} = -d\Phi_{12}/dt = -d(L_{12}I_2)/dt, \quad (509)$$

где L_{12} - коэффициент взаимной индукции, Φ_{12} - магнитный поток поля тока I_2 через поверхность, ограниченную контуром первого проводника:

$$\Phi_{21} = L_{21}I_2. \quad (510)$$

Аналогично $\Phi_{21} = L_{21}I_1$, где I_1 - ток в первом контуре, Φ_{21} - поток через второй контур, L_{21} - взаимная индукция. Для неферромагнитных контуров $L_{12} = L_{21}$. Соотношение между L_{12} и L_{21} для ферромагнитных сред зависит от характера изменения токов I_1 и I_2 .

Если два витка (две катушки), по которым текут токи I_1 и I_2 , находятся вблизи один от другого, то магнитные потоки через данные витки Φ_1 и Φ_2 могут быть представлены в следующем виде:

$$\Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2, \quad \Phi_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2, \quad (511)$$

где L_{11} и L_{22} - индуктивности первого и второго контуров.

Пример 41

Взаимная индукция двух concentрических колец C_1 и C_2 с радиусами R_1 и R_2 при условии $R_1 > R_2$ (рис. 44) описывается следующим соотношением:

$$L_{21} = 2\pi \cdot 10^{-9} R_2^2 / R_1, \quad (512)$$

где L_{21} - в генри, R_1 и R_2 - в метрах.

Соотношения для потока Φ_{21} сквозь малое кольцо C_1 и ЭДС ε_{21} , индуцированной в C_2 , имеют вид:

$$\Phi_{21} = 2\pi^2 \cdot 10^{-9} I_1 R_2^2 / R_1, \quad \varepsilon_{21} = -(2\pi^2 \cdot 10^{-9} I_1 R_2^2 / R_1) \cdot (dI_1 / dt), \quad (513)$$

где I_1 - ток в кольце C_1 , выраженный в амперах; ε_{21} выражена в вольтах. Если контур C_1 состоит из N_1 витков, а C_2 - из N_2 витков, тогда

$$L_{21} = 2\pi^2 \cdot 10^{-9} N_1 N_2 R_2^2 / R_1. \quad (514)$$

Явление взаимной индукции используется в трансформаторах для повышения или понижения напряжения переменного тока. Если N_1 и N_2 - число витков в первичной и вторичной обмотках трансформатора, а R_m магнитное сопротивление сердечника, то взаимная индукция определяется соотношением:

$$L_{21} = N_1 N_2 / R_m. \quad (515)$$

Если S - площадь поперечного сечения сердечника длиной l с магнитной проницаемостью μ , тогда

$$R_m = \int_0^l \frac{dl}{\mu_0 \mu S}. \quad (516)$$

Определение 125

Коэффициентом трансформации k называется отношение абсолютных значений напряжений U_1 и U_2 на концах первичной и вторичной обмоток.

Энергия магнитного поля

Магнитная энергия

Определение 126

Магнитной энергией U_m называется энергия, которой обладает электрический ток.

Она зависит от величины токов, их распределения и магнитных свойств среды, в которой эта энергия запасена. Если среда является пара- или диамагнитной, то элементарная работа δA , совершаемая внешними силами (например, источником тока против ЭДС индукции) и определяемая соотношением (491), идёт на увеличение магнитной энергии U_m , так что приращение

$$dU_m = I d\Phi_m, \quad (517)$$

а магнитная энергия U_m имеет вид

$$U_m = \int_0^l I d\Phi_m. \quad (518)$$

Пример 42

Неподвижный проводник с индукцией L , по которому течёт ток I , обладает магнитной энергией

$$U_m = LI^2/2 = I\Phi_m/2 = \Phi_m^2/2L. \quad (519)$$

Энергия, запасённая в магнитном поле индуктивности, так же, как и энергия заряженного конденсатора, запасена в его электрическом поле.

Соотношения (517)-(519) определяют магнитную энергию через токи и магнитные потоки. Это соответствует представлению о магнитной энергии как о потенциальной энергии токов, взаимодействующих по закону ампера на расстоянии.

Объёмная плотность магнитной энергии

Подобно представлению об энергии электростатического поля как энергии, заключённой в пространстве с объёмной плотностью u_e , магнитную энергию можно рассматривать как энергию, локализованную в пространстве с объёмной плотностью u_m :

$$u_m = \int \vec{H} d\vec{B}. \quad (520)$$

Полная магнитная энергия U_m равна сумме всех элементарных энергий $u_m dV$ в объёме V пространства, заполненного магнитным полем:

$$U_m = \int u_m dV. \quad (521)$$

В случае пара- и диамагнитных сред $\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$ плотность энергии определяется следующими соотношениями:

$$u_m = \mu_0\mu\vec{H}\vec{H}/2 = \vec{H}\vec{B}/2 = \vec{B}\vec{B}/2\mu_0\mu, \quad (522)$$

где \vec{B} и \vec{H} - индукция и напряжённость магнитного поля в данной точке пространства.

Согласно (413) и (522) объёмная плотность энергии электромагнитного поля u в рассматриваемой точке пространства описывается следующим соотношением:

$$u = u_e + u_m = (\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}\vec{E} + \mu_0\mu\vec{H}\vec{H})/2 \quad (523)$$

и определяется только характеристиками среды.

Пример 43

Расстояние между пластинами заряженного плоского конденсатора уменьшили в 2 раза. Во сколько раз изменилась энергия и плотность энергии поля? Рассмотреть два случая:

а) конденсатор отключили от источника напряжения;

б) конденсатор остался присоединённым к источнику постоянного напряжения

Решение

Электрическая ёмкость плоского конденсатора определяется следующим соотношением: $C = \varepsilon_0\varepsilon S/d$, где d - расстояние между пластинами, S - площадь пластины. В первом случае заряд конденсатора остаётся неизменным. По этой причине энергия поля определяется следующим соотношением: $W = q/2C = q^2 d/2\varepsilon_0\varepsilon$.

При изменении расстояния d между пластинами остальные величины в данном соотношении остаются неизменными. Таким образом, энергия поля уменьшится в 2 раза. Объём, занимаемый полем, равен $V=Sc$. Он также увеличится в 2 раза. Таким образом, плотность энергии поля $w=W/Sc$ остаётся неизменной. Во втором случае напряжение на конденсаторе остаётся неизменным. Таким образом, энергия поля равна: $U=CU^2/2=\epsilon_0\epsilon ScU^2/2d$ увеличится в 2 раза, а плотность энергии поля увеличится в 4 раза.

Колебания и волны

15. Механические колебания

Определение 127

Колебанием (колебательным движением) называется любой периодический, т.е. повторяемый с течением времени, или почти периодический процесс, в котором какая-либо физическая величина принимает одинаковые значения через равные или почти равные промежутки времени.

Теория колебаний изучает колебательные движения различной физической природы с единой точки зрения. Она устанавливает закономерности, характеризующие колебательный процесс в целом, вне зависимости от природы величин, совершающих колебания. Основными разновидностями колебаний являются механические и электромагнитные колебания.

Колебания возникают в тех случаях, когда системе, способной совершать колебания (по этой причине называемой осциллятором), сообщается энергия. Наиболее важными величинами, характеризующими колебания, являются:

1) мгновенное перемещение относительно положения равновесия, называемое *отклонением* или *смещением* x :

$$x=f(t), f(t)=f(t+T), \quad (524)$$

где $f(t)$ - заданная периодическая функция времени t ;

2) максимальное отклонение от положения равновесия A , называемое *амплитудой* колебания;

3) длительность одного полного колебания T , называемая *периодом* колебания;

4) число колебаний в единицу времени ν , называемое *частотой* колебания:

$$\nu=1/T. \quad (525)$$

Величина

$$\omega=2\pi\nu=2\pi/T \quad (526)$$

называется *угловой* или *циклической частотой*;

5) время t , отсчитываемое от момента начала колебаний;

б) величина

$$\varphi=\omega t+\varphi_0, \quad (527)$$

называемая *фазой* колебания, где φ_0 - начальная (при $t=0$) фаза. Фаза характеризует мгновенное состояние колебательной системы и определяется отклонением и временем.

Частота ν измеряется в *герцах* ($Гц$), период T - в *секундах* ($с$), угловая частота

имеет размерность *радиан в секунду (рад/с)*:

$$[v] = \Gamma u = c^{-1}, [T] = c, [\omega] = \text{рад/с}. \quad (528)$$

Амплитуда A - положительная величина, имеющая размерность отклонения x , т.е. $[A] = [x]$.

Определение 128

Колебание, предоставленной самой себе системы, вызванной первоначальным кратковременным внешним возбуждением, называется *свободным* или *собственным колебанием*.

Определение 129

Колебания, которые происходят с постоянной во времени амплитудой A , называются *незатухающими колебаниями*.

Для получения незатухающих колебаний в реальных физических системах необходимо постоянно подводить к ним энергию, восполняющую энергетические затраты на преодоление сил трения, излучение и другие процессы.

Определение 130

Затухающими колебаниями называются колебания с амплитудой A , которая с течением времени уменьшается. Без пополнения энергии любые колебания в физических системах затухают.

Определение 131

Колебания, которые происходят под действием внешней периодически изменяющейся силы, называются *вынужденными колебаниями*.

Определение 132

Если система сама управляет воздействием внешних сил, то возникающее в ней колебательное движение называется автоколебанием.

Незатухающие гармонические колебания

Уравнение движения и его решение

Рассмотрим незатухающее гармоническое колебание, при котором смещение x описывается следующими соотношениями:

$$x = x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \text{ или } x = x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (529)$$

где A - амплитуда, а $\omega t + \varphi_0$ - фаза колебания. Оба представления равносильны. Выбором начальной фазы φ_0 можно свести их одно к другому, а также к синусу и к косинусу аргумента ωt :

$$x = x(t) = A \cos(\omega t) \text{ или } x = x(t) = A \sin(\omega t) \text{ при } \varphi_0 = 0. \quad (530)$$

Первая и вторая производная $x(t)$ - по времени t (скорость v и ускорение a) также изменяются по гармоническому закону:

$$x(t) = v(t) = -A \omega \sin(\omega t + \varphi_0), \quad x(t) = v(t) = a(t) = -A \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (531)$$

Из второго соотношения следует уравнение, описывающее гармонические колебания (уравнение гармонического осциллятора):

$$x + \omega^2 x = 0. \quad (532)$$

Его решениями являются соотношения (529). Колебания, описываемые соот-

ношениями (529), являются результатом таких свойств физической системы, как возвращающая сила и инерция. Возвращающая сила стремится вернуть систему в положение равновесия и сообщает ей скорость $\dot{x} = v$ (531). Чем больше x , тем больше возвращающая сила. Сравнение уравнения (532) со вторым законом Ньютона показывает, что:

$$\omega^2 = -F/mx, \quad (533)$$

где F - возвращающая сила, m - масса колебательной системы, x - смещение. Физический смысл ω^2 : величина ω^2 является возвращающей силой, приходящейся на единицу смещения и единицу массы. Если колебание начинается при смещении $x > 0$ и скорости $v = 0$, то возвращающая сила F создаёт ускорение, которое вызывает появление скорости, обратной по знаку смещению.

При гармонических колебаниях возвращающая сила F в (533) пропорциональна смещению x :

$$F = -kx, \quad (534)$$

где величина k называется *коэффициентом квазиупругой силы* или *жесткостью*. Жесткость определяет циклическую частоту ω , частоту ν и период T колебаний:

$$\omega = \sqrt{m/k}, \quad \nu = \sqrt{m/k}/2\pi, \quad T = \sqrt{k/m}/2\pi. \quad (535)$$

Жесткость k задается конкретными свойствами колебательной системы. Соотношения (535) справедливы для любых незатухающих гармонических колебаний.

Кинетическая и потенциальная энергии колебаний

Кинетическая E_k и потенциальная U энергия гармонического колебания являются периодическими функциями времени:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{m}{4} A^2 \omega^2 \{1 - \cos[2(\omega t + \varphi_0)]\}, \quad (536a)$$

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{k}{2} A^2 \{1 + \cos[2(\omega t + \varphi_0)]\}. \quad (536b)$$

В данных соотношениях энергии E_k и U изменяются с частотой 2ω , в два раза превышающей частоту гармонического колебания. Так как квазиупругая сила F (534) является консервативной, то полная энергия $E = E_k + U$ гармонического колебания сохраняется:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}, \quad E = \frac{m A^2 \omega^2}{2} = \frac{k A^2}{2}. \quad (537)$$

В процессе колебания происходит превращение кинетической энергии в потенциальную. Процесс перехода энергии из одного вида в другой является периодическим (рис. 1). В момент наибольшего смещения кинетическая энергия E_k обращается в нуль и полная энергия E равна наибольшему значению потенциальной энергии $E = U_{\max} = kA^2/2$. При прохождении системой положения рав-

новесия, $x=0$, полная энергия E состоит только из кинетической энергии, принимающей в данный момент наибольшее значение: $E=E_{kmax}=mA^2\omega^2/2$. Согласно (537) наибольшее значение потенциальной и кинетической энергий равны между собой.

Средние значения кинетической $\langle E_k \rangle$ и потенциальной $\langle U \rangle$ энергий равна половине полной энергии E :

$$\langle E_k \rangle = \langle U \rangle = E/2 = kA^2/4. \quad (538)$$

Простые колебательные системы

1. Математический маятник.

Определение 133

Математическим маятником называется идеальная система, состоящая из нерастяжимой и невесомой нити и тела, рассматриваемого как материальная точка.

Отклонение маятника от положения равновесия характеризуется углом φ . При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент, стремящийся вернуть его в положение равновесия, а уравнение движения имеет вид (рис. 2):

$$ml\ddot{\varphi} = -mgl \sin(\varphi), \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0, \quad (539)$$

где $ml^2=I$ - момент инерции маятника длиной l и массой m , g - ускорение свободного падения, $\ddot{\varphi}$ - угловое ускорение. В случае малых колебаний $\sin(\varphi) \approx \varphi$ и

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (540)$$

где $\omega^2 = g/l$. Его решение имеет следующий вид:

$$\varphi = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (541)$$

при малых колебаниях угловое отклонение φ изменяется по гармоническому закону с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}. \quad (542)$$

2. Физический маятник. Если колеблющееся тело нельзя рассматривать как материальную точку, то уравнение движения в данном случае принимает следующий вид:

$$I \ddot{\varphi} = -mgl \sin(\varphi), \quad (543)$$

где I - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса O (рис. 3), m - масса маятника, l - расстояние между точкой подвеса O и центром масс C маятника. Если колебания малы, то $\sin(\varphi) \approx \varphi$. Тогда уравнение (543) переходит в (540), где

$$\omega^2 = mgl/I. \quad (544)$$

Период колебания физического маятника определяется следующим соотношением:

$$T = 2\pi \sqrt{I/mgl} = 2\pi \sqrt{l_{np}/g}, \quad (545)$$

где величина $l_{np}=I/ml$ называется приведённой длиной физического маятника. Период колебания физического маятника равен периоду математического маятника длиной l_{np} .

Соотношения (543) и (545) позволяют определить ускорение свободного падения g по известным периоду T , длине l и моменту инерции I по известным массе m , ускорению свободного падения g и длине l .

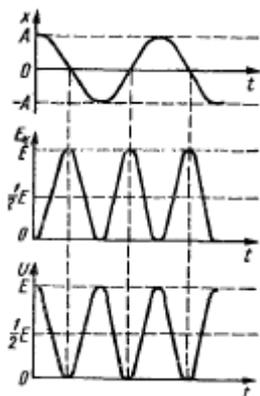


Рис. 98.

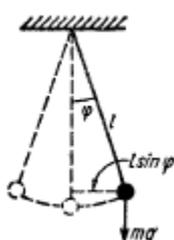


Рис. 99.



Рис. 100.

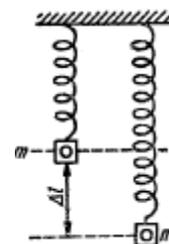


Рис. 101.

3. Линейные колебания пружины. При колебаниях пружины восстанавливающая сила F обусловлена её упругостью. При небольших деформациях согласно закону Гука сила F_g , вызывающая деформацию Δl , пропорциональна данной деформации:

$$F_g = F = k\Delta l, \quad (546)$$

где k – коэффициент жёсткости пружины. Согласно (534) упругие колебания пружины в данном случае будут гармоническими с циклической частотой ω , частотой ν и периодом T , определяемыми соотношениями (535), где m – масса груза, подвешенного на пружине (рис. 4).

4. Крутильный маятник. Крутильным маятником называется твёрдое тело, подвешенное на вертикальном невесомом упругом стержне, которое может колебаться при кручении его вокруг оси, проходящей через стержень. Крутильные колебания обусловлены упругими силами, возникающими в стержне при малых поворотах тела. Если I – момент инерции маятника относительно оси, проходящей вдоль стержня, а c – жёсткость стержня по отношению к кручению, то при малых углах поворота φ потенциальная U и кинетическая E_k энергии могут быть представлены в следующем виде:

$$U = c\varphi^2/2, \quad E_k = I\dot{\varphi}^2/2. \quad (547)$$

Период колебаний в данном случае равен

$$T = 2\pi \sqrt{I/c}. \quad (548)$$

В случае однородного стержня можно получить:

$$c = \pi d^2 G / 32l, \quad (549)$$

где d и l - диаметр и длина стержня, G - модуль сдвига.

Затухающие свободные колебания

Слабое затухание

В реальных физических системах, участвующих в колебательном движении, всегда существуют силы сопротивления (внутреннее трение, сопротивление среды и т.д.), действие которых уменьшает энергию E системы. Уменьшение энергии проявляется в том, что колебания будут затухать. Это следует из соотношения (537), согласно которой $E \sim A^2$ - при уменьшении энергии E до нуля амплитуда колебаний A также уменьшается до нуля. Часто встречающийся в механике случай соответствует силе сопротивления F_c , пропорциональной скорости движения тела $v = \dot{x}$:

$$F_c = -r \dot{x}, \quad (550)$$

где величина r называется *коэффициентом сопротивления* или *вязкого трения*. Знак минус означает, что сила F_c направлена против направления скорости v . Если возвращающая сила F при колебаниях системы пропорциональна смещению x (534), то из второго закона Ньютона

$$m \ddot{x} = -kx - r \dot{x}, \quad (551)$$

следует дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (552)$$

где $\beta = r/2m$, $\omega_0^2 = k/m$. Его решение $\beta < \omega_0$ (слабое затухание) имеет вид (рис. 5, кривая 1)

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (553)$$

где ω - собственная частота затухающего колебания, A_0 и φ_0 - произвольные постоянные. Они определяются смещением $x = x_0$ и производной в начальный момент времени $t = 0$:

$$A_0 = -\frac{\beta x_0 + \dot{x}_0}{\omega \sin(\varphi_0)}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_0) = -\frac{\beta x_0 + \dot{x}_0}{x_0 \omega}, \quad (554)$$

Согласно (554) движение системы можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой A , изменяющейся по закону

$$A = A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (555)$$

Величина β характеризует степень затухания колебаний. Она называется *коэффициентом затухания*. Период T затухающего колебания определяется соотношением:

$$T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (556)$$

В любой колебательной системе затухание приводит к уменьшению частоты и увеличению периода колебаний. При незначительном сопротивлении среды $\beta^2 \ll \omega^2$ практически равен периоду гармонических колебаний с частотой ω .

Затухающие колебания обычно характеризуются декрементом затухания:

$$A(t)/A(t+T)=e^{\beta t} \quad (560)$$

или логарифмическим декрементом затухания

$$\lambda = \ln[A(t)/A(t+T)] = \beta t = N_e^{-1}. \quad (561)$$

и добротностью колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta}, \quad (562)$$

где $N_e = \tau/T$ - число колебаний за время $\tau = 1/\beta$, за которое амплитуда $A(t)$ уменьшается в e раз.

Полная энергия системы и её производная по времени при затухающем колебании определяется следующим соотношением (рис. 6):

$$E = \frac{k}{2} A_0^2 e^{-2\beta t} \left\{ 1 + \frac{\beta}{\omega_0} \sin \left[2\omega t + 2\varphi_0 + \arctg \left(\frac{\beta}{\omega} \right) \right] \right\}, \quad \frac{dE}{dt} = -r \dot{x}^2. \quad (563)$$

Убывание энергии обусловлено работой силы сопротивления среды (553). При малом сопротивлении $\beta \ll \omega$ имеем:

$$E = E_0 e^{-2\beta t}, \quad E_0 = kA_0^2/2, \quad (564)$$

где E_0 - значение энергии в начальный момент времени. Из (563) следует, что убыль энергии ΔE определяется добротностью системы Q (560):

$$-\Delta E = 2\beta T E = 2\pi E/Q. \quad (565)$$

Большим значениям Q соответствует слабое затухание колебаний. Типичные значения добротности приведены в следующей таблице.

Система	Q
Возбуждённое ядро (^{57}F)	$3 \cdot 10^{12}$
Возбуждённый атом	10^2
Микрорадиоволны в полном медном резонаторе	10^4
Сейсмические волны (Земля)	25-1400
Струна (скрипка, рояль)	10^5

Сильное затухание

Если затухание значительное, то $\beta > \omega_0$ и решение уравнения (557) имеет вид суммы двух экспонент:

$$x = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad (566a)$$

$$\lambda_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad (566b)$$

где C_1 и C_2 - вещественные постоянные, определяемые начальными условиями x_0 и $\dot{x} = v$. В данном случае движение является неперiodическим (аперiodическим). Система возвращается в положение равновесия ($x=0$) не совершая колебаний. Характер данного движения задаётся начальными условиями. Соотношения между параметрами системы и типом её колебаний имеют вид:

$$\beta=0, r=0, \omega=\omega_0 - \text{незатухающие колебания}, \quad (567a)$$

$\beta < \omega_0, r < 2\sqrt{mk}, \omega < \omega_0$ – затухающие колебания (рис. 5, кривая 1), (567б)

$\beta = \omega_0, r = 2\sqrt{mk}, \omega = 0$ – предельный случай аperiodического движения (рис. 5, кривая 2), (567в)

$\beta > \omega_0, r > 2\sqrt{mk}, \omega = i\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ – аperiodическое движение (рис. 5, кривая 3), (567г)

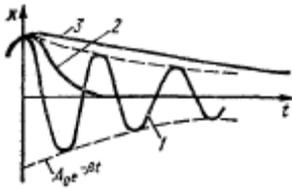


Рис. 102.



Рис. 103.

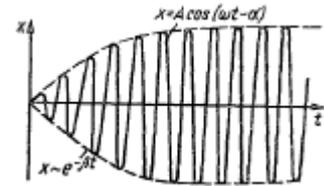


Рис. 104.

Вынужденные колебания

Уравнение движения и его решение

Если колебательная система подвергается действию внешней силы F_e , изменяющейся со временем по гармоническому закону с частотой ω :

$$F_e = F_0 \cos(\omega t), \quad (568)$$

то из второго закона Ньютона

$$m \ddot{x} = F + F_c + F_e, \quad (569)$$

(где F – возвращающая сила, F_c – сила сопротивления среды) следует дифференциальное уравнение, описывающее малые вынужденные колебания:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t), \quad (570)$$

где $2\beta = r/m, \omega_0^2 = k/m, f_0 = F_0/m$. Решение данного уравнения, соответствующее установившимся колебаниям системы, имеет вид:

$$x = A \cos(\omega t - \alpha), \quad (571)$$

где

$$A = f_0 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}, \quad \alpha = \arctg 2\beta \omega / (\omega_0^2 - \omega^2). \quad (572)$$

Из (571) и (572) следует, что вынужденные малые колебания представляют собой гармонические колебания с частотой ω возмущающей силы F_e (570). Амплитуда колебаний A пропорциональна амплитуде F_0 данной силы и зависит от её частоты ω , т.е. $A = A(\omega)$. Вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей силы на величину α , которая также является функцией ω , т.е. $\alpha = \alpha(\omega)$.

Функция (571) является частным решением неоднородного уравнения (570). Общее решение неоднородного уравнения является суммой любого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Для получения общего решения уравнения (570) к частному решению (571) необходимо добавить общее решение однородного уравнения, которое совпадает с

уравнением (555), описывающим затухающие свободные колебания. Его общее решение описывается функцией (556). По этой причине полное решение уравнения (570) имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0) + A \cos(\omega t - \alpha), \quad (573)$$

где A и α определяются соотношениями (572); A_0 и φ_0 - постоянные, определяемые начальными условиями. График функции $x(t)$ показан на рисунках 8. Из-за наличия множителя $e^{-\beta t}$ второе слагаемое играет заметную роль только при малых временах, т.е. в начале процесса, до установления устойчивых вынужденных колебаний, описываемых первым слагаемым.

Явление резонанса

При заданных значениях амплитуда f_0 возмущающей силы (568), входящей на единицу массы системы, и коэффициенте затухания β и амплитуда A (572) вынужденных колебаний является функцией только угловой частоты ω возмущающей силы: $A = A(\omega)$. При некоторой характерной для данной системы частоте $\omega = \omega_{рез}$ амплитуда $A(\omega)$ достигает максимального значения: $A_{рез} = A(\omega_{рез})$. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний A при частоте возмущающей силы ω , юлизких к $\omega_{рез}$, называется резонансом. Величина $\omega_{рез}$ называется *резонансной циклической частотой*. Из условия максимума функции (572) следует, что

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (574)$$

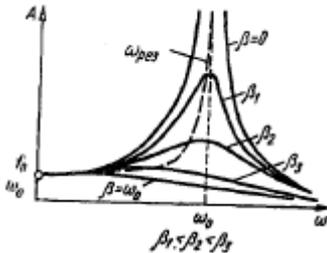


Рис. 105а.

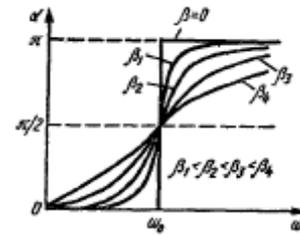


Рис. 105б.

Максимум амплитуды ωA скорости \dot{x} и амплитуды $\omega^2 A$ ускорения \ddot{x} достигают соответственно при $\omega = \omega_0$ и $\omega = \omega_0^2 / \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. При $\omega = \omega_{рез}$ амплитуда A смещения x (571) определяется следующим соотношением:

$$A_{рез} = f_0 / 2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (575)$$

Резонансная частота $\omega_{рез}$ меньше частоты ω собственных колебаний с затуханием. При $\beta = 0$ амплитуда (575) обращается в бесконечность. При $\beta \geq \omega_0 / \sqrt{2}$ явление резонанса исчезнет (рис. 8а). При $\omega = 0$ получаем $A = f_0 / \omega_0^2$. Независимо от величины затухания разность фаз $\alpha(\omega)$ (572) при $\omega = \omega_0$ равна $\pi/2$. Величина α изменяется от 0 до π (рис. 8б). При малом затухании $\beta \ll \omega_0$ добротность системы Q (539) определяется следующим соотношением:

$$Q \approx \omega_0 / 2\beta \approx A_{рез} / x_0, \quad (576)$$

где $x_0 = F_0/k = f_0/\omega_0^2$ - смещение от положения равновесия под действием постоянной силы F_0 . Из (576) следует физический смысл Q : добротность при $\beta \ll \omega_0$ характеризует превышение амплитуды вынужденных колебаний в момент резонанса над величиной смещения x_0 , вызванного постоянной силой F_0 , равной амплитуде возмущающей силы.

Примеры решения задач на колебания

1. Колебания груза на пружине.

Рассмотрим колебание тела массы m на пружине жёсткости k . Потери энергии учитывать не будем. Зависимость координаты тела от времени описывается вторым законом Ньютона:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k x(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} x(t) = 0.$$

Общее решение данного уравнения описывается следующим соотношением:

$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right).$$

Такие колебания тела называются собственными. Далее рассмотрим вынужденные колебания тела, т.е. при воздействии внешней силы. Тогда второй закон Ньютона записывается в следующей форме:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} x(t) = f(t).$$

Для нахождения зависимости координаты колеблющегося тела от времени проварьируем произвольные постоянные. Тогда:

$$\begin{cases} \frac{d C_1(t)}{dt} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + \frac{d C_2(t)}{dt} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) = 0 \\ -\sqrt{\frac{k}{m}} \frac{d C_1(t)}{dt} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{d C_2(t)}{dt} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) = f(t) \end{cases}.$$

Преобразуем данную систему к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{d C_1(t)}{dt} = -\sqrt{\frac{m}{k}} f(t) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \\ \frac{d C_2(t)}{dt} = \sqrt{\frac{m}{k}} f(t) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \end{cases}$$

Интегрирование данной системы позволяет получить следующий результат:

$$\begin{cases} C_1(t) = -\sqrt{m/k} \int f(t) \sin\left(\sqrt{k/m} t\right) dt + \tilde{C}_1 \\ C_2(t) = \sqrt{m/k} \int f(t) \cos\left(\sqrt{k/m} t\right) dt + \tilde{C}_2 \end{cases}$$

Закон изменения координаты колеблющегося тела под действием внешней силы в окончательном виде определяется следующим соотношением:

$$x(t) = \left[-\sqrt{\frac{m}{k}} \int f(t) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) dt + \tilde{C}_1 \right] \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + \left[\sqrt{\frac{m}{k}} \int f(t) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) dt + \tilde{C}_2 \right] \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right),$$

где \tilde{C}_1 и \tilde{C}_2 - постоянные интегрирования. В качестве частного случая внешней силы рассмотрим гармоническое воздействие $f(t) = A \cos(\omega t)$. Тогда:

$$x(t) = \left[\tilde{C}_1 - A \sqrt{\frac{m}{k}} \int \cos(\omega t) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) dt \right] \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \left[\tilde{C}_2 - A \sqrt{\frac{m}{k}} \int \cos(\omega t) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) dt \right] = \left\{ \tilde{C}_1 + \frac{A \sqrt{m/k}}{2(\sqrt{k/m} - \omega)} \cos\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}} - \omega\right) t\right] + \frac{A \sqrt{m/k}}{2(\sqrt{k/m} + \omega)} \cos\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}} + \omega\right) t\right] \right\} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \left\{ \tilde{C}_1 + \frac{A \sqrt{m/k}}{2(\sqrt{k/m} - \omega)} \sin\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}} - \omega\right) t\right] + \frac{A \sqrt{m/k}}{2(\sqrt{k/m} + \omega)} \sin\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}} + \omega\right) t\right] \right\}.$$

Из данного соотношения следует, что с уменьшением разницы между частотой внешнего воздействия ω и собственной частоты колебаний неограниченно увеличивается амплитуда колебаний тела.

Пример 44

Масса груза пружинного маятника 0,5 кг, жесткость пружины 800 Н/м. Чему равен период и частота его колебаний?

Решение

Частота и период колебаний определяются следующими соотношениями: $\omega = 2\pi\sqrt{k/m}$, $\nu = \sqrt{k/m}$, $T = \sqrt{m/k}$. Подстановка указанных в условии параметров позволяет получить следующий результат: $\omega = 2\pi\sqrt{800/0,5} = 2\pi \cdot 40 \approx 251,33 \text{ рад/с}$, $\nu = \sqrt{k/m} = \sqrt{800/0,5} = 40 \text{ Гц}$, $T = 1/40 \text{ с}$.

Пример 45

Пружинный маятник совершил 15 колебаний за одну минуту. Каковы период и частота колебаний?

Решение

Частота колебаний - это их количество в единицу времени. Единица времени в системе СИ - секунда. Значит, надо просто найти количество колебаний в секунду. Для этого количество колебаний в минуту необходимо разделить на 60,

т.к. в минуте 60 секунд: $\nu = n/60$. Период - величина, обратная частоте: $T = 1/\nu$. Подстановка указанных в условии параметров позволяет получить следующий результат: $\nu = 15/60 = 0,25 \text{ Гц}$, $T = 1/0,25 = 4 \text{ с}$.

Пример 46

Координаты пружинного маятника изменяются по закону: $x = 0,5 \cdot \cos(\pi t/2)$. Чему равны амплитуда, период и частота колебаний?

Решение

Сравним заданное уравнение движения маятника $x = 0,5 \cdot \cos(\pi t/2)$ с общим уравнением колебаний $x = A \cdot \cos(\omega t/2)$. Из сравнения получаем: $A = 0,5 \text{ м}$; $\omega = \pi/2 \text{ рад/с}$. Тогда частота и период колебаний определяются следующими соотношениями: $\omega = 2\pi\nu$, $\nu = 2\pi/\omega$, $T = \omega/2\pi$. Подстановка указанных в условии параметров позволяет получить следующий результат: $\nu = 2\pi/2 \cdot 2\pi = 0,25 \text{ с}^{-1}$, $T = 1/\nu = 4 \text{ с}$.

2. Колебания заряда в LC-контуре.

Рассмотрим вынужденные колебания в колебательном контуре без затухания. Второй закон Кирхгофа в данном случае может быть представлен в следующей форме:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = \varepsilon(t).$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид $q(t) = C_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$. Далее методом вариации произвольных постоянных учитываем э.д.с. источника. В этом случае записываем систему уравнений для определения варьируемых постоянных:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1(t)}{dt} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \frac{dC_2(t)}{dt} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) &= 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{dC_1(t)}{dt} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{dC_2(t)}{dt} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) &= \varepsilon(t). \end{aligned}$$

Решением данной системы являются следующие функции:

$$C_1(t) = \tilde{C}_1 - \sqrt{LC} \int_0^t \varepsilon(\tau) \sin\left(\frac{\tau}{\sqrt{LC}}\right) d\tau; \quad C_2(t) = \tilde{C}_2 + \sqrt{LC} \int_0^t \varepsilon(\tau) \cos\left(\frac{\tau}{\sqrt{LC}}\right) d\tau.$$

В окончательном виде зависимость заряда от времени представима в следующей форме:

$$q(t) = \left[\tilde{C}_1 - \sqrt{LC} \int_0^t \varepsilon(\tau) \sin\left(\frac{\tau}{\sqrt{LC}}\right) d\tau \right] \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) +$$

$$+ \left[\tilde{C}_2 + \sqrt{LC} \int_0^t \varepsilon(\tau) \cos\left(\frac{\tau}{\sqrt{LC}}\right) d\tau \right] \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

Рассмотрим периодическую зависимость э.д.с.: $\varepsilon(t) = A \cdot \cos(\omega t)$. Подстановка данной зависимости в предыдущее соотношение и вычисление интегралов позволяет получить:

$$q(t) = \left\{ \tilde{C}_1 + \frac{LC}{2} \left[\frac{1}{\omega\sqrt{LC} + 1} \cos\left(\omega t + \frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \frac{1}{\omega\sqrt{LC} - 1} \cos\left(\omega t - \frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \right] \right\} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \left\{ \tilde{C}_1 + \frac{LC}{2} \left[\frac{1}{\omega\sqrt{LC} + 1} \sin\left(\omega t + \frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \frac{1}{\omega\sqrt{LC} - 1} \sin\left(\omega t - \frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \right] \right\} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

Пример 47

Амплитуда силы тока при свободных колебаниях в колебательном контуре 100 мА . Какова амплитуда напряжения на конденсаторе колебательного контура, если емкость этого конденсатора 1 мкФ , а индуктивность катушки 1 Гн ? Активным сопротивлением пренебречь.

Решение

В соответствии с законом сохранения энергии получаем: $W_{Cm} = W_{Lm}$, где W_{Cm} и W_{Lm} - электрическая и магнитная энергии в конденсаторе и катушке, соответственно. С учётом равенств $W_{Cm} = C U_m^2 / 2$ и $W_{Lm} = L I_m^2 / 2$. Тогда: $C U_m^2 / 2 = L I_m^2 / 2$. Из данного соотношения получаем амплитуда напряжения на конденсаторе колебательного контура: $U_m = I_m \sqrt{L/C}$. Подстановка указанных в условии параметров позволяет получить следующий результат: $U_m = 100 \cdot 10^{-3} \sqrt{1/1 \cdot 10^{-6}} = 100 \text{ В}$.

Пример 48

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C и катушки индуктивности индуктивностью L . Как изменится период свободных электромагнитных колебаний в этом контуре, если электроемкость конденсатора и индуктивность катушки увеличить в 3 раза.

Решение

Рассмотрим отношение периодов колебаний: $\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi \sqrt{3L_1 \cdot 3C_1}}{2\pi \sqrt{L_1 \cdot C_1}} = 3$. Таким образом,

при увеличении электроемкости конденсатора и индуктивности катушки увеличить в 3 раза период колебаний заряда также увеличивается в 3 раза.

Пример 49

Заряд на обкладках конденсатора колебательного контура изменяется по закону $q = 3 \cdot 10^{-7} \cos(800 \pi t)$. Индуктивность контура 2 Гн . Пренебрегая активным сопротивлением, найдите электроемкость конденсатора и максимальное значение энергии электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки индуктивности.

Решение

Общее уравнение гармонических колебаний электрического заряда имеет вид:

$q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi_0)$, где $q_m = 3 \cdot 10^{-7}$ Кл - амплитуда колебаний заряда, $\omega = 800 \pi$ рад/с - циклическая частота колебаний, $\varphi_0 = 0$ - начальная фаза колебаний. Найдём зависимость силы тока от времени: $q'(t) = i(t) = q_m \omega \sin(\omega t + \varphi_0)$. С учётом заданного закона изменения заряда во времени получаем: $i(t) = 800 \pi \cdot 3 \cdot 10^{-7} \cos(800 \pi t)$. Амплитуда колебаний силы тока в данном случае равна: $I_m = 800 \pi \cdot 3 \cdot 10^{-7} \text{ А} \approx 0,75 \text{ мА}$. Максимальное значение энергии магнитного поля катушки индуктивности равно: $W_{Lmax} = LI_{max}^2$. Подстановка указанных в условии параметров позволяет получить следующий результат: $W_{Lmax} = 57,6 \text{ мкДж}$. Максимальное значение энергии электрического поля конденсатора равно максимальной энергии магнитного поля катушки индуктивности, т.е. $W_{Cmax} = 57,6 \text{ мкДж}$. С учётом соотношения $W_{Cmax} = q_{max}^2 / 2C$ определяем электрическую ёмкость конденсатора: $C = 2W_{Cmax} / q_{max}^2$. Подстановка указанных в условии параметров позволяет получить следующий результат: $C = 12,8 \text{ мкФ}$.

Сложение гармонических колебаний

Любая колебательная система в общем случае может одновременно совершать несколько колебаний. Одним из основных принципов гармонических колебаний является принцип суперпозиции: если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются смещениями под действиями сил $F_1(t)$ и $F_2(t)$, то $x_1(t) + x_2(t)$ будет представлять смещение под действием силы $F_1(t) + F_2(t)$. Если система совершает несколько колебаний, то данные колебания складываются независимо друг от друга. Если два колебания происходят в одном направлении и с одной частотой ω :

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (577)$$

то отклонение x результирующего колебания имеет вид:

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (578)$$

где

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (579)$$

- амплитуда,

$$\varphi_0 = \arctg \left[\frac{A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)}{A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)} \right], \quad (580)$$

- начальная фаза результирующего колебания. В случае равных амплитуд ($A_1 = A_2$) получаем:

$$A = 2A_1 \cos[(\varphi_1 - \varphi_2)/2], \quad \varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2. \quad (581)$$

Из (579)-(581) следует, что если разность начальных фаз $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ равна нулю, то при $A_1 = A_2$ отклонение x удваивается, а при $A_1 \neq A_2$ - суммируется. Если $\Delta\varphi = \pi$ и $A_1 = A_2$, то оба колебания взаимно уничтожаются, а при $A_1 \neq A_2$ - отклонения вычитаются. Принцип суперпозиции является следствием линейности уравнений движения, описывающих гармонические колебания.

Колебания (578) можно представить графически с помощью вращающихся векторов (рис. 106). Такие рисунки называются *векторными диаграммами*. Они

позволяют определять амплитуды A и отклонения x без вычислений. При сложении двух гармонических колебаний, происходящих в одном направлении с разными частотами ω_1 и ω_2 , возникают негармонические колебания (рис. 10). Результирующее отклонение x в каждый момент времени равно алгебраической сумме отклонений составляющих колебания. В простейшем случае, когда начальные фазы нулевые ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$) и амплитуды этих колебаний равны друг другу ($A = A_1 = A_2$), получаем

$$x = x_1 + x_2 = A [\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)] = 2A \cos[(\omega_1 - \omega_2)t/2] \sin[(\omega_1 + \omega_2)t/2], \quad (582a)$$

$$x = A_{\text{mod}}(t) \sin(\omega_{\text{cp}} t), \quad \omega_{\text{cp}} = (\omega_1 + \omega_2)/2, \quad (582б)$$

$$A_{\text{mod}}(t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t), \quad \omega_{\text{mod}} = (\omega_1 - \omega_2)/2. \quad (582в)$$

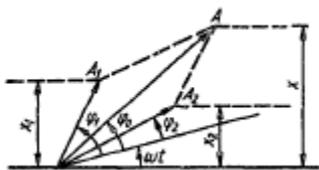


Рис. 106.

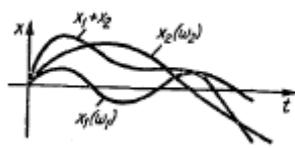


Рис. 107.

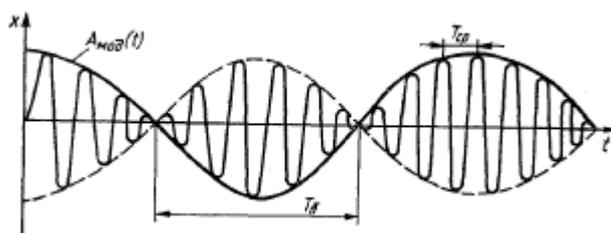


Рис. 108.

Частота ω_{cp} называется *средней частотой*, а ω_{mod} - *частотой модуляции* результирующих колебаний. Последние можно рассматривать как колебания, происходящие с угловой частотой ω_{cp} и амплитудой $A_{\text{mod}}(t)$, которая зависит от времени по гармоническому закону. При $\omega_1 \approx \omega_2$ получаем $\omega_{\text{mod}} \ll \omega_{\text{cp}}$ и амплитуда $A_{\text{mod}}(t)$ медленно изменяется в течении нескольких колебаний с частотой ω_{cp} . Если ω_1 мало отличается от ω_2 , то суперпозиция двух гармонических колебаний ω_1 и ω_2 называется почти гармоническим или почти монохроматическим колебанием с частотой ω_{cp} и медленно изменяющейся амплитудой. При сложении двух колебаний с близкими частотами возникает биение (рис. 108), т.е. колебание с частотой ω_{cp} и амплитудой A_{mod} , изменяющейся от максимального значения $2A$ до нуля. При каждом обращении амплитуды A_{mod} в нуль фаза скачком изменяется на π . Периодом биения $T_{\text{б}}$ называется промежуток времени между двумя последовательными моментами времени, при которых амплитуда A_{mod} обращается в нуль:

$$T_{\text{б}} = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1) = T_1 T_2 / (T_1 + T_2), \quad (583)$$

где T_1 и T_2 - периоды колебаний с частотами ω_1 и ω_2 . Частотой биений называется разность частот ω_1 и ω_2 :

$$\omega_{\text{б}} = 2\omega_{\text{mod}} = (\omega_2 - \omega_1)/2. \quad (584)$$

Период результирующих колебаний:

$$T_{\text{cp}} = 2T_1 T_2 / (T_1 + T_2). \quad (585)$$

Пример 50

Два одинаково направленных колебания с равными частотами имеют ампли-

туды 20 и 50 см. Второе колебание опережает первое по фазе на 30° . Определить амплитуду и начальную фазу суммарного колебания, полученного в результате сложения этих колебаний, если начальная фаза первого колебания равна нулю.

Решение

При сложении и двух колебаний с одинаковыми частотами, происходящих в одном направлении, амплитуда результирующего колебания:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}.$$

Переведём в систему СИ значения амплитуд: $A_1 = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$, $A_2 = 50 \text{ см} = 0,5 \text{ м}$. Подстановка указанных в условии параметров позволяет получить следующий результат: $A = \sqrt{0,2^2 + 0,5^2 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,5 \cdot \cos(\pi/6)} = 0,68 \text{ м}$. Начальная фаза суммарного колебания определяется следующим соотношением:

$$\varphi_0 = \text{arctg}\{[A_1 \sin(\varphi_{01}) + A_2 \sin(\varphi_{02})] / [A_1 \cos(\varphi_{01}) + A_2 \cos(\varphi_{02})]\}.$$

Подстановка указанных в условии параметров позволяет получить следующий результат: $\varphi_0 = \text{arctg}[(0,5 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0,5)(0,2 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,87)] = \text{arctg}0,304 \approx 0,22^\circ$.

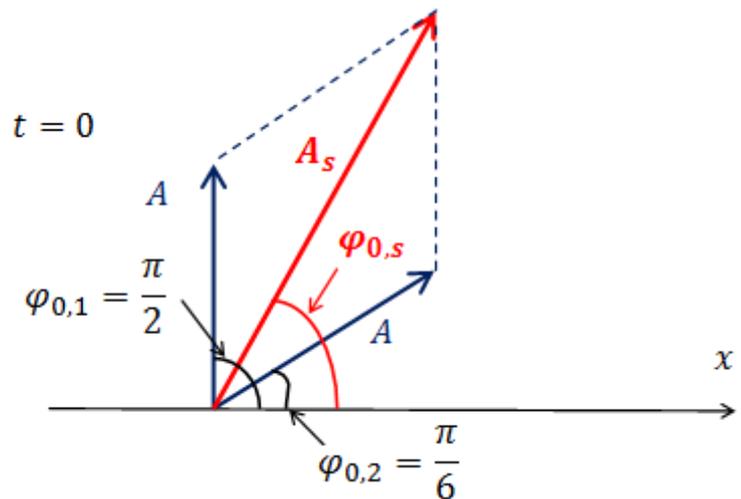
Пример 51

Складываются два одинаково направленных колебания $x_1 = A \sin(\omega t)$ и $x_2 = A \cos(\omega t + \varphi_{02})$. Начальная фаза второго колебания $\varphi_{02} = \pi/6$. Определить с помощью векторной диаграммы амплитуду A и начальную фазу φ_0 результирующего колебания. Записать уравнение результирующих колебаний.

Решение

Воспользуемся тригонометрической формулой приведения: $\sin(\alpha) = \cos(\alpha + \pi/2)$ и перепишем уравнение первого колебания в следующем виде: $x_1 = A \cos(\omega t + \pi/2)$. Построим векторную диаграмму для момента времени $t=0$.

Амплитуда суммарного колебания определяется соотношением:



$$A_s = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}.$$

В данном случае: $A_1 = A_2 = A$. Начальная фаза суммарного колебания: $\varphi_{0s} = \varphi_{02} - \varphi_{01} = (\pi/2) - (\pi/6) = \pi/3$. Тогда: $A_s = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2 \cos(\pi/3)} = \sqrt{2A^2 + 2A^2/2} = \sqrt{3}A$.

Уравнение результирующих колебаний: $x_s = x_1 + x_2 = \sqrt{3}A \cos(\omega t + \pi/3)$.

Определение 134

Показанная на рис. 108 модуляция называется амплитудной.

Если $A_{mod}(t) = const$, а начальная фаза результирующего колебания $\varphi_0(t)$ изменяется во времени: $\varphi_0(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1$, то модуляция называется частотной.

Фигуры Лиссажу

Фигуры Лиссажу наблюдаются при наложении двух взаимноперпендикулярных гармонических колебаний материальной точки:

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (586)$$

описывающей в полярных координатах

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg(y/x), \quad (587)$$

непрерывную линию в случае рационального отношения частот ω_1 и ω_2 (рис. 109). Вид фигур Лиссажу зависит от отношений A_2/A_1 , ω_2/ω_1 и разности фаз $\Delta\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$. Отношение ω_2/ω_1 равно отношению числа касаний фигуры Лиссажу с горизонтальной и вертикальной сторонами прямоугольника, в который она вписана. Если $\omega_1 = \omega_2$, то уравнение фигуры Лиссажу имеет вид

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\Delta\varphi) = \sin^2(\Delta\varphi) \quad (588)$$

и описывает эллиптически поляризованные колебания. При $\Delta\varphi_0 = n\pi$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, эллипс вырождается в отрезок прямой и колебания называются линейно поляризованными. Если $A_1 = A_2$, то колебания будут поляризованы по кругу.



Рис. 109а.



Рис. 109б.



Рис. 109в.



Рис. 109г.

На рис. 109 показаны некоторые примеры фигур Лиссажу с $\Delta\varphi$, изменяющимся от 0 до π . При разности фаз $\pi < \Delta\varphi < 2\pi$ возникают аналогичные фигуры, являющиеся зеркальным отражением фигур при $\Delta\varphi = \pi$. Если отношение ω_2/ω_1 не является рациональным числом, то траектории не повторяются и фигура Лиссажу непрерывно изменяется.

16. Волны в упругой среде

В упругой среде, представляющей собой большое количество связанных между собой частиц, под действием внешних сил могут возникать колебательные процессы или *механические волны*. Кинематическим признаков волнового движения является распространение фазы колебаний, а динамическим - процесс переноса.

Волновой процесс характеризуется фазовой скоростью (скоростью перемещения фазы волны) или скоростью распространения волны c , длиной волны λ ,

частотой ν или периодом колебаний $T=1/\nu$, равным продолжительности полного колебания частицы среды. Между данными величинами существует следующая связь:

$$c = \lambda \nu = \lambda / T. \quad (589)$$

Определение 135

Расстояние λ , на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды, называется длиной волны (рис. 13).

Фазовая скорость c зависит от механических свойств среды. Для упругой поперечной волны в твёрдых телах:

$$c = \sqrt{F/\rho S}, \quad (590)$$

где F - сила натяжения твёрдого тела (струны, проволоки и т.д.); ρ - плотность материала, из которого изготовлено колеблющееся тело; S - поперечное сечение. Для упругой продольной волны в твёрдом теле фазовая скорость

$$c = \sqrt{E/\rho}, \quad (591)$$

где E - модуль Юнга. В жидкости для продольной волны можно записать

$$c = \sqrt{K/\rho}, \quad (592)$$

где K - модуль всестороннего сжатия, ρ - плотность жидкости. В газе с плотностью ρ и давлением P продольные волны распространяются со скоростью

$$c = \sqrt{\gamma P/\rho} = \sqrt{\gamma RT}, \quad (593)$$

где γ - показатель адиабаты, T - температура, R - универсальная газовая постоянная.

Определение 136

Поперечными волнами называются волны, у которых направление скорости движения перпендикулярно направлению фазовой скорости. Данные волны представляют собой чередование горбов и впадин (рис. 111).

Определение 137

Продольными волнами называются волны, у которых направление скорости колебаний и фазовой скорости совпадают (рис. 112).

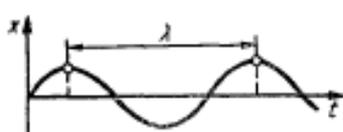


Рис. 110.

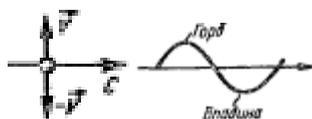


Рис. 111.

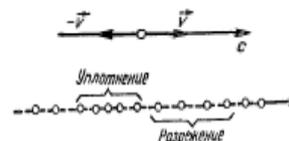


Рис. 112.

По характеру распространения различаются линейные (в одном направлении), поверхностные (в двух измерениях) и пространственные (в трёх измерениях) волны.

Определение 138

Направление распространения волны называется лучом.

Определение 139

Поверхность, окружающая источник колебаний, все точки которой имеют одинаковые фазы колебаний, называется фронтом волны (волновым фронтом) (рис. 113).

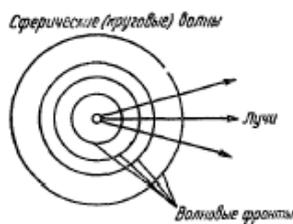


Рис. 113а.

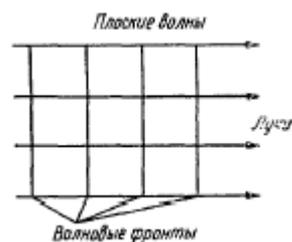


Рис. 113б.

Волновой фронт перпендикулярен к лучу. Расстояние между соседними волновыми фронтами равно длине волны λ . Примерами волн являются сферические и плоские волны. Сферические волны возникают из точечного источника в пространстве. Их лучи направлены радиально, а волновые фронты представляют собой сферы. На плоскости такие волны будут круговыми, а их волновые фронты - окружностями. Плоские волны возникают от плоского или удалённого источника. Их лучи параллельны, а волновые фронты представляют собой плоскости.

Определение 140

Изменение в пространстве и во времени проекции светового вектора на направление, вдоль которого он колеблется, описывается соотношением: $E = E_0 \cos(\omega t - kr + \varphi_0)$, где ω - частота волны, $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число, λ - длина волны (пространственный период), r - расстояние, отсчитываемое вдоль распространения световой волны. Для плоской волны $E_0 = const$, для сферической волны E_0 убывает как $1/r$ и т.д.

Плотность и поток энергии

При колебательном движении частиц среды имеет место перенос среды за счёт передачи её от одной частицы к другой.

Определение 141

Плотностью энергии u называется количество энергии, приходящейся на единицу объёма среды. Если среда характеризуется плотностью ρ , тогда плотность энергии определяется соотношением:

$$u = \frac{dE}{dV} = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2} \quad \text{или} \quad dE = \frac{\rho}{2} A^2 \omega^2 dV, \quad (594)$$

где dE - энергия в объёме dV , A - амплитуда колебаний частицы, ω - их циклическая частота, $\rho = dm/dV$, dm - масса в объёме dV .

Определение 142

Под потоком энергии W понимается энергия, проходящая через поверхность площадью S за время t . Если c - фазовая скорость волны, u - плотность энергии, тогда поток определяется следующим соотношением

$$W = uSc t = \rho A \omega S c t / 2. \quad (595)$$

Для мощности $P=W/t$ получаем

$$P=uSc=\rho A \omega Sct/2. \quad (596)$$

Определение 143

Величина $I=P/S$ называется интенсивностью. Она определяется соотношением:

$$I=uc=\rho A \omega ct/2. \quad (597)$$

Величины u , W , P и I , определяемые соотношениями (594)-(597), постоянны во всех точках среды, участвующей в волновом движении, только в случае плоских волн с одним, двумя и тремя измерениями. В случае круговых волн $u \sim 1/r$, а для сферических волн $u \sim 1/r^2$, где r - расстояние от источника волн до точки наблюдения.

Пример 52

Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 0,5 \text{ кГц}$ и амплитуду $a = 0,25 \text{ мм}$, распространяются в упругой среде. Длина волны $\lambda = 70 \text{ см}$. Найти:

- скорость распространения волн;
- максимальную скорость частиц среды.

Решение

а) Скорость распространения волны связана с длиной волны соотношением (589): $\lambda = cT$, где T - период колебаний частиц среды. Период колебаний связан с частотой колебаний ν соотношением: $T = 1/\nu$. Из последних соотношений получаем значение скорости распространения волны: $c = \lambda \nu$. Для определения максимальной скорости частиц среды воспользуемся уравнением плоской волны: $u = a \cdot \cos[2\pi\nu(t-x/c)]$.

б) Для того, чтобы найти максимальную скорость частиц среды, нужно найти производную от смещения по времени: $v_1 = -2\pi\nu a \cdot \cos[2\pi\nu(t-x/c)]$. Из данного соотношения следует, что $v_{1max} = 2\pi\nu a$. Подстановка указанных в условии параметров в данное соотношение позволяет получить: $v_{1max} = 0,79 \text{ м/с}$.

Пример 53

В упругой однородной среде распространяются две плоские волны - одна вдоль оси X , другая вдоль оси Y : $u_1 = a \cdot \cos(\omega t - kx)$, $u_2 = a \cdot \cos(\omega t - ky)$. Найти характер движения частиц среды в плоскости XY , если обе волны поперечные и направление колебаний одинаково.

Решение

Для определения характера движения частиц среды в плоскости XY воспользуемся принципом суперпозиции волн. Тогда результирующий волновой процесс будет описываться уравнением: $u = u_1 + u_2 = 2a \cdot \cos[\omega t - k(y-x)/2]$. Из данного уравнения следует, что в точках, для которых выполняется условие $\cos[k(y-x)/2] = 0$, колебания отсутствуют. Координаты данных точек

удовлетворяют условию: $k(y-x)/2 = \pi n + \pi/2$, где $n = 0, 1, 2, \dots$

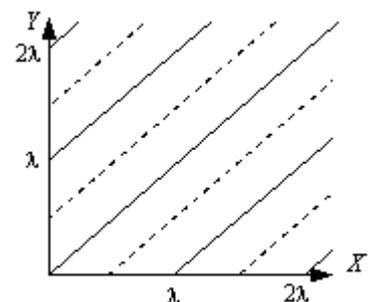


Рис. 114.

Учитывая, что волновое число определяется следующим соотношением $k=2\pi/\lambda$, получаем, что частицы среды не совершают колебания вдоль прямых, уравнения которых имеют вид: $y=x+\lambda(0,5\pm n)$. На рис. 17 эти прямые проведены пунктиром.

Если $\cos[k(y-x)/2]=\pm 1$, частицы среды колеблются с максимальным отклонением. Этому условию удовлетворяют точки, координаты которых можно получить из условия $k(y-x)/2=\pm n\lambda$, где $n=0, 1, 2, \dots$. После подстановки значения волнового числа $k=2\pi/\lambda$ получаем уравнение прямых $y=x\pm n\lambda$. На рис. 17 эти прямые проведены сплошными линиями.

17. Электромагнитные колебания и волны

Определение 144

Электромагнитные колебания - это взаимосвязанные колебания электрического (E) и магнитного (H) полей, составляющих единое электромагнитное поле. Распространение электромагнитных колебаний происходит в виде электромагнитных волн, скорость которых в вакууме равна скорости света c , а длина волны λ связана с периодом T и частотой ω соотношением: $\lambda=cT=2\pi c/\omega$. По своей природе электромагнитные колебания представляют собой совокупность фотонов, и только при большом числе фотонов их можно рассматривать как непрерывный процесс. Различают вынужденные электромагнитные колебания, поддерживаемые внешними источниками, и собственные электромагнитные колебания, существующие без них.

Электрические колебания. Колебательный контур

Частным случаем электромагнитных колебаний являются электрические колебания. Рассмотрим колебательный контур, состоящий из конденсатора ёмкости C и катушки индуктивности L (рис. 18). Запишем второй закон Кирхгофа для данной цепи: $L(dI/dt)+q/C=0$, где I - сила тока в цепи, q - электрический заряд. Учитывая, что $I=dq/dt$, получаем:

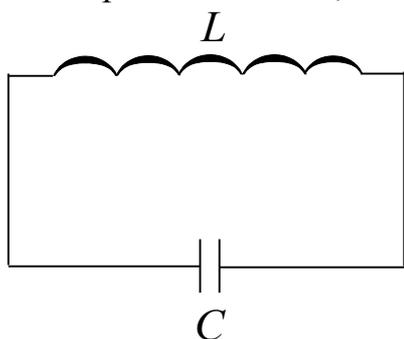


Рис. 115.

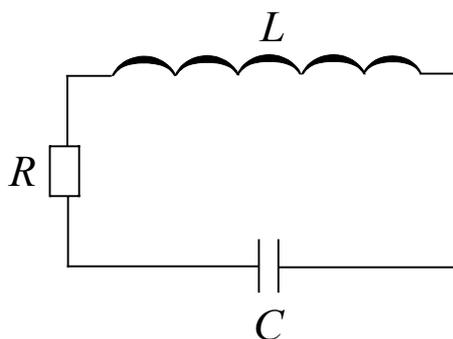


Рис. 116.

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0.$$

Данное уравнение может быть решено методом Эйлера. В рамках данного метода уравнение решается с помощью замены $q=e^{\lambda t}$, где λ - неопределённый пока параметр. Подстановка данной замены в уравнение позволяет получить

уравнение для параметра λ (характеристическое уравнение) $\lambda^2 + 1/LC = 0$. Решением данного уравнения является следующая функция: $q(t) = C_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$, где C_1 и C_2 . Эту функцию можно преобразовать к виду: $q(t) = A \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \varphi\right)$. Данная функция описывает собственные незатухающие колебания электрического заряда с собственной частотой контура $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Рассмотрим собственные затухающие колебания электрического заряда. Данный тип колебаний происходит в колебательном контуре, приведённом на рис. 2. Запишем второй закон Кирхгофа для данной цепи: $L(dI/dt) + RI + q/C = 0$, где R - сопротивление резистора. Учитывая, что $I = dq/dt$, получаем:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Решением данного уравнения является следующая функция: $q(t) = A e^{-\frac{R}{2L}t} \times \cos\left(t \sqrt{(LC)^{-1} - R^2 L^{-2}/4} + \varphi\right)$. Данная функция описывает собственные затухающие колебания электрического заряда с частотой $\omega_0 = \sqrt{(LC)^{-1} - R^2 L^{-2}/4}$ и постоянной времени затухания $\theta = R/2L$. Графики зависимостей заряда от времени для контуров 115 и 116 приведены соответственно на рис. 117 и 118. Затухание колебаний обычно характеризуется логарифмическим декрементом затухания (декремент затухания обратен числу колебаний, совершаемых за время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз):

$$d = \ln[q(t)/q(t+T)] = \theta T.$$

Рассмотрим вынужденные колебания в колебательном контуре без затухания. Соответствующий колебательный контур приведён на рис. 119. Второй закон Кирхгофа в данном случае может быть представлен в следующей форме:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = \varepsilon(t).$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид: $q(t) = C_1 \cos(t/\sqrt{LC}) + C_2 \sin(t/\sqrt{LC})$. Далее методом вариации произвольных постоянных учитываем э.д.с. источника. В этом случае записываем систему уравнений для определения варьируемых постоянных:

$$\frac{dC_1(t)}{dt} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \frac{dC_2(t)}{dt} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) = 0$$

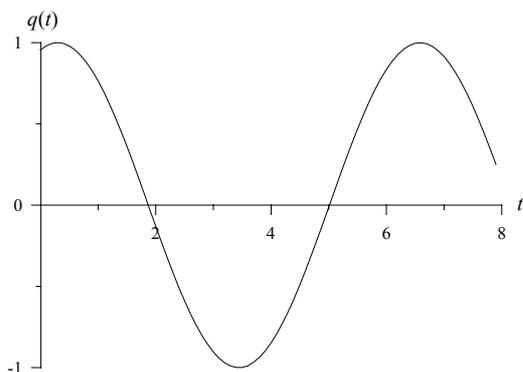


Рис. 117.

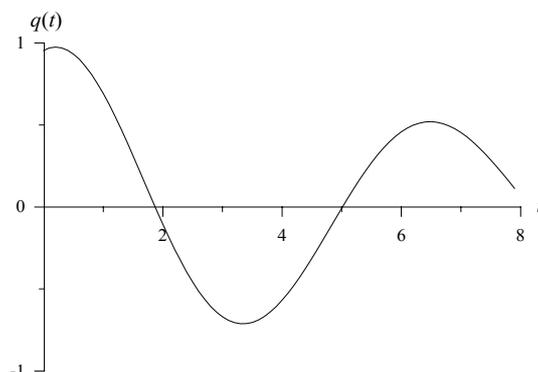


Рис. 118.

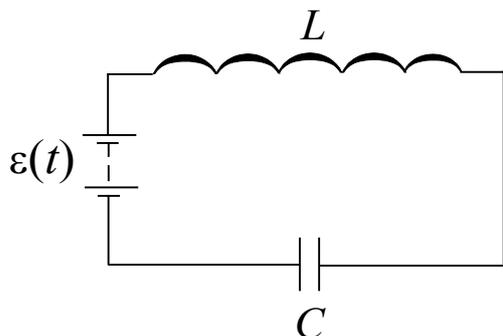


Рис. 119.

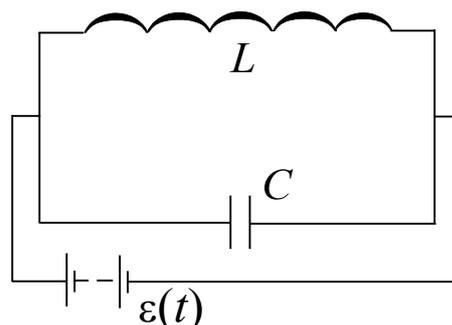


Рис. 120.

$$-\frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{dC_1(t)}{dt} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{dC_2(t)}{dt} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) = \varepsilon(t).$$

Решением этой системы являются следующие функции:

$$C_1(t) = \tilde{C}_1 - \sqrt{LC} \int_0^t \varepsilon(\tau) \sin\left(\frac{\tau}{\sqrt{LC}}\right) d\tau; \quad C_2(t) = \tilde{C}_2 + \sqrt{LC} \int_0^t \varepsilon(\tau) \cos\left(\frac{\tau}{\sqrt{LC}}\right) d\tau.$$

В окончательном виде зависимость заряда от времени представима в следующей форме:

$$q(t) = \left[\tilde{C}_1 - \sqrt{LC} \int_0^t \varepsilon(\tau) \sin\left(\frac{\tau}{\sqrt{LC}}\right) d\tau \right] \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \left[\tilde{C}_2 + \sqrt{LC} \int_0^t \varepsilon(\tau) \cos\left(\frac{\tau}{\sqrt{LC}}\right) d\tau \right] \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

Рассмотрим периодическую зависимость э.д.с.: $\varepsilon(t) = A \cdot \cos(\omega t)$. Подстановка данной зависимости в предыдущее соотношение и вычисление интегралов позволяет получить:

$$q(t) = \left\{ \tilde{C}_1 + \frac{LC}{2} \left[\frac{1}{\omega\sqrt{LC} + 1} \cos\left(\omega t + \frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \frac{1}{\omega\sqrt{LC} - 1} \cos\left(\omega t - \frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \right] \right\} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \left\{ \tilde{C}_2 + \frac{LC}{2} \left[\frac{1}{\omega\sqrt{LC} + 1} \sin\left(\omega t + \frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \frac{1}{\omega\sqrt{LC} - 1} \sin\left(\omega t - \frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \right] \right\} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

Определение 145

Из последнего соотношения следует, что при приближении частоты внешней ЭДС к собственной частоте контура амплитуда колебаний неограниченно возрастает. Такое явление называется резонансом напряжений. В случае воздействия гармонической эдс на цепь, состоящую из параллельно включенных ёмкости и индуктивности (рис. 120), имеет место другая разновидность резонанса (антирезонанс, резонанс токов). При приближении частоты внешней эдс к собственной частоте контура LC происходит не возрастание амплитуды вынужденных колебаний в контуре, а уменьшение амплитуды силы тока во внешней цепи, питающей контур. В электротехнике это явление называется резонансом токов или параллельным резонанс. Это явление объясняется тем, что при частоте внешнего воздействия, близкой к собственной частоте контура, реактивные сопротивления обеих параллельных ветвей (ёмкостной и индуктивной) оказываются одинаковыми по величине и поэтому в обеих ветвях контура текут токи примерно одинаковой амплитуды, но почти противоположные по фазе. Вследствие этого амплитуда тока во внешней цепи (равного алгебраической сумме токов в отдельных ветвях) оказывается гораздо меньшей, чем амплитуды тока в отдельных ветвях, которые при параллельном резонансе достигают наибольшей величины. Параллельный резонанс, так же как и последовательный резонанс, выражается тем резче, чем меньше активное сопротивление ветвей контура.

При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися со временем. Закон Ома и являющиеся его следствием законы Кирхгофа были установлены для постоянного тока. Они также выполняются и для мгновенных значений тока и напряжения. Описанные ранее установившиеся вынужденные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, обладающей индуктивностью, ёмкостью и активным сопротивлением, переменного тока, обусловленного переменным напряжением $U(t)=A_U \cdot \cos(\omega t)$. Ток в этом случае определяется соотношением $I(t)=A_I \cos(\omega t - \varphi)$. Амплитуда тока определяется амплитудой напряжения A_U , параметрами цепи C, L, R и частотой ω :

$$A_I = A_U / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} .$$

Ток отстаёт по фазе от напряжения на величину φ , зависящий от параметров цепи и частоты: $\operatorname{tg}(\varphi) = (\omega L - 1/\omega C)/R$. Стоящее в знаменателе соотношения, связывающего амплитуды тока и напряжения, выражение: $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ называется полным электрическим сопротивлением (импедансом).

Если за время $\tau = l/c$ (l - длина цепи; c - скорость распространения электромагнитных возмущений, совпадающая со скоростью света), необходимое для распространения возмущения по цепи, сила тока изменится незначительно, то мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи остаются одинаковыми. Токи, удовлетворяющие этому условию, называются квазистационарными. Для периодически изменяющихся токов условие квазистационарности имеет вид: $\tau \ll T$.

Пример 54

Колебательный контур состоит из конденсатора емкости C , катушки индуктивности L с пренебрежимо малым сопротивлением и ключа. При разомкнутом ключе конденсатор зарядили до напряжения U_m и затем в момент $t=0$ замкнули ключ. Найти:

- а) ток в контуре как функцию времени $I(t)$;
б) ЭДС самоиндукции в катушке в моменты времени, когда электрическая энергия конденсатора оказывается равной энергии тока в катушке.

Решение

а) Колебания в рассматриваемом контуре описываются следующим уравнением:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Решив данное уравнение с учётом соотношения между силой тока и зарядом: $I=dq/dt$, получаем $I(t)=I_m \sin(\omega t)$.

- б) С учётом соотношения $\varepsilon = -LdI/dt$ (закон изменения тока во времени получен в предыдущей части задачи) получаем: $\varepsilon = U_m \cos(t/\sqrt{LC})$. Из равенства энергий в конденсаторе и катушке следует равенство: $LI_m^2/2 = 2LI^2/2$. Из данного соотношения выражаем силу тока: $I_m/\sqrt{2} = I_m \sin(t/\sqrt{LC})$. Тогда искомый момент времени равен: $t = \pi\sqrt{LC}/4$. Подстановка данного результата в закон изменения ЭДС самоиндукции от времени $\varepsilon(t)$ получаем: $\varepsilon = U_m/\sqrt{2}$.

Пример 55

Колебательный контур состоит из соленоида с числом витков $N=1000$ (длина $l=10$ см, площадь поперечного сечения $S_1=2$ см²) и плоского конденсатора с площадью сечения пластин $S_2=100$ см². Расстояние d между пластинами конденсатора 2 мм (диэлектрик - воздух). Определить собственную частоту ω_0 колебаний контура.

Решение

Собственная частота ω_0 колебаний электрического LC -контура определяется соотношением: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Известно, что $L = \mu\mu_0 N^2 S_1 / l$ - индуктивность соленоида, $C = \varepsilon\varepsilon_0 S_2 / d$ - ёмкость конденсатора. Тогда, учитывая, что $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ - скорость электромагнитных волн в вакууме получим. Скорость электромагнитных волн в воздухе имеет близкое к данному значение из-за того, что диэлектрическая и магнитная проницаемости имеют близкие значения к значениям данных проницаемостей в вакууме. Тогда:

$$\omega_0 = \sqrt{l/\mu_0\mu N^2 S_1} \sqrt{d/\varepsilon_0\varepsilon S_2}.$$

Подстановка заданных по условию задачи в данное соотношение позволяет получить: $\omega_0 = 3 \cdot 10^6$ рад/с.

Ток смещения

Рассмотрим закон сохранения заряда (уравнение непрерывности) в диффе-

ренциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0,$$

где ρ - плотность заряда, \vec{j} - плотность тока проводимости. Если электромагнитное поле стационарно, последнее уравнение принимает вид: $\operatorname{div}(\vec{j}) = 0$. Теорема о циркуляции

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I.$$

может быть преобразована к дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Данная теорема не может входить в число основных уравнений электродинамики, т.к. дивергенция любого ротора равна нулю. Поэтому, вычислив дивергенцию от обеих частей теоремы о циркуляции в дифференциальной форме, получим $\operatorname{div}(\vec{j}) = 0$. Но это справедливо только для стационарных токов. В общем случае это соотношение противоречит уравнению непрерывности заряда. По этой причине теорема о циркуляции должна быть обобщена как в дифференциальной, так и в интегральной форме. Для обобщения теоремы о циркуляции добавим в её правую часть вектор, дивергенция которого равна нулю, а в случае стационарных электромагнитных полей этот вектор должен переходить в $\vec{0}$. Рассмотрим соотношение: $\operatorname{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho$. Дифференцирование данного соотношения позволяет получить:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \operatorname{div}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0.$$

Учитывая в данном соотношении уравнение непрерывности заряда, получаем

$$\operatorname{div}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0.$$

Величина $\vec{j}_{см} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ названа током смещения. Ток смещения в диэлек-

трике состоит из двух слагаемых. По определению вектор электрической индукции можно представить в виде суммы: $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$, где $\vec{P} = \sum_i e_i \vec{r}_i$ - вектор поляризации (суммирование производится по всем связанным зарядам). В данном случае

$$\vec{j}_{см} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла в интегральной форме

1. Теорема о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left(j_n + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) d s,$$

где j_n - проекция плотности тока проводимости j на нормаль к бесконечно малой площадке $d s$, являющейся частью поверхности S . $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial D_n}{\partial t}$ - проекция тока смещения на ту же нормаль.

2. Закон электромагнитной индукции Фарадея

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} d s,$$

где B_n - проекция на нормаль к бесконечно малой площадке $d s$ вектора магнитной индукции; знак минус соответствует правилу Ленца для направления индукционного тока.

3. Выражает опытные данные об отсутствии магнитных зарядов

$$\oint_S B_n d s = 0.$$

4. Теорема Гаусса (обобщает закон взаимодействия неподвижных электрических зарядов)

$$\oint_S D_n d s = 4\pi \int \rho d V.$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

1. Теорема о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля

$$\text{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

2. Закон электромагнитной индукции Фарадея

$$\text{rot}(\vec{E}) = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

3. Выражает опытные данные об отсутствии магнитных зарядов

$$\text{div}(\vec{B}) = 0.$$

4. Теорема Гаусса (обобщает закон взаимодействия неподвижных электрических зарядов)

$$\text{div}(\vec{D}) = 4\pi \rho.$$

Пример 56

Из системы уравнений Максвелла получить уравнения непрерывности токов и закон сохранения заряда.

Решение

Используем уравнение:

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Проведем для него операцию дивергенции. Тогда получаем:

$$\operatorname{div}[\operatorname{rot}(\vec{H})] = 0, \quad \operatorname{div}\left(\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c} \left[4\pi \operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \right].$$

Из системы уравнений Максвелла известно, что $\operatorname{div}(\vec{D}) = 4\pi \rho$. Подстановка последнего соотношения в предыдущее позволяет получить:

$$0 = \frac{1}{c} \left[4\pi \operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\rho) \right].$$

Тогда: $4\pi \operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\rho) = 0$. Или в интегральной форме:

$$\oint_S \vec{j} dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0.$$

Соответственно для замкнутых изолированных областей получаем:

$$\oint_S \vec{j} dS = 0, \quad \int_V \rho dV = \text{const}.$$

Это уравнение непрерывности для тока, содержащее в себе закон сохранения заряда - один из фундаментальных принципов, который подтверждается экспериментом.

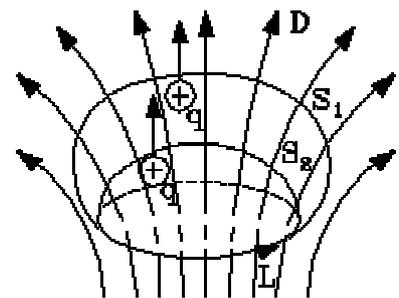
Пример 57

Доказать, что сумма токов проводимости и тока смещения, сцепленных с контуром, действительно непрерывна и, следовательно, полный ток, сцепленный с любым контуром, не зависит от выбора поверхности, натянутой на этот контур.

Решение

Допустим, что в произвольном магнитном поле на некоторый контур натянуты две произвольные поверхности S_1 и S_2 (рис. 121).

Знак вектора потока \vec{D} , сцепленного с контуром, связывается правилом правого винта с направлением обхода контура L . В частности, при том направлении силовых линий, которое изображено на поле \vec{D} сцепленный с контуром для поверхностей



ток D сцепленный, с контуром для поверхностей,

S_1 и S_2 нужно считать положительным. Рассмотрим

Рис. 121.

замкнутую полость, ограниченную поверхностью S_1+S_2 . В соответствии с теоремой Гаусса для нее можно записать уравнение:

$$\int_{S_1+S_2} \vec{D} d\vec{S} = q,$$

где q - сумма зарядов, попадающих в рассматриваемую полость, ограниченную поверхностью S_1+S_2 . Продифференцируем обе части этого уравнения по времени:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{S_1+S_2} \vec{D} d\vec{S} \right) = \frac{dq}{dt}.$$

Преобразуем отдельно левую и правую части этого уравнения. Поток вектора D сквозь замкнутую поверхность можно представить следующим образом:

$$\int_{S_1+S_2} \vec{D} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D} d\vec{S}.$$

Линии векторного поля \vec{D} входят в замкнутую полость через поверхность S_2 . По определению они создают отрицательный поток. Если рассматривать поток, сцепленный с контуром, то, используя правило знаков, его необходимо считать положительным. Тогда предыдущее выражение применительно к контуру, можно записать так:

$$\int_{S_1+S_2} \vec{D} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D} d\vec{S} - \int_{S_2} \vec{D} d\vec{S}.$$

Следует заметить, что производная от полного заряда, заключенного в полости, стоящая в правой части соотношения $\frac{d}{dt} \left(\int_{S_1+S_2} \vec{D} d\vec{S} \right) = \frac{dq}{dt}$ показывает, на

какую величину изменяется заряд в полости в секунду. В силу закона сохранения заряда он может изменяться только за счёт неравных токов входящих и выходящих из неё. При равенстве этих токов полный заряд в полости остаётся постоянным. Токи, входящие в полость, являются положительными (они увеличивают заряд в полости), а токи, выходящие из неё, - отрицательными. Таким образом, последнее уравнение можно представить следующим образом: $\int_{S_1} \vec{D} d\vec{S} -$

$\int_{S_2} \vec{D} d\vec{S} = -I_{S_1} + I_{S_2}$ или $(I+N_D)_{S_1} = (I+N_D)_{S_2}$. Что и требовалось доказать.

Скорость электромагнитных волн в среде

Используя теорему о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля, закон электромагнитной индукции Фарадея и материальные уравнения $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ и $\vec{B} = \mu \vec{H}$ можно получить скорость электромагнитных волн в среде в следую-

щей форме $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$. В векторной форме можно записать: $\vec{E} = -\frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{B}]$, $\vec{H} = \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{D}]$.

Данные соотношения показывают направление скорости распространения электромагнитного излучения.

Электромагнитная теория света

Свет в одних случаях проявляет себя как поток особых частиц (фотонов), в других случаях (при большом количестве фотонов) - как электромагнитная волна. В данном разделе излагается волновая оптика, т.е. явления, в основе которых лежит волновая природа света. В электромагнитной волне колеблются векторы \vec{E} и \vec{H} . Их колебания протекают во взаимноперпендикулярных плоскостях и описываются волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.$$

Как показывает опыт, фотохимические, фотоэлектрические и другие действия света вызываются колебаниями электрического вектора. По этой причине под световым вектором будем подразумевать вектор напряжённости электрического поля. Изменение в пространстве и во времени проекции светового вектора на направление, вдоль которого он колеблется, описывается соотношением: $E = E_0 \cos(\omega t - kr + \varphi_0)$, где ω - частота волны, $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число, λ - длина волны (пространственный период), r - расстояние, отсчитываемое вдоль распространения световой волны. Для плоской волны $E_0 = const$, для сферической волны E_0 убывает как $1/r$ и т.д.

Определение 146

Величина $\varphi(r, t) = \omega t - kr + \varphi_0$ называется фазой волны.

Определение 147

Поверхность, окружающая источник колебаний, все точки которой имеют одинаковые фазы колебаний, называется фронтом волны (волновым фронтом).

Фронт волны может быть сферой (сферическая волна) или иметь более сложную форму. Направление распространения волны - нормаль к фронту волны.

Отношение скорости световой волны в вакууме к фазовой скорости $v_\varphi = \lambda/T$ в некоторой среде называется (абсолютным) показателем преломления этой среды n , т.е. $n = c/v_\varphi$. Значения показателя преломления характеризуют оптическую плотность среды. Среда с большим n называется оптически более плотной, чем среда с меньшим n . Соответственно среда с меньшим n называется оптически менее плотной, чем среда с большим n . Длины волн видимого диапазона в вакууме находятся в пределах $\lambda = 0,40 \div 0,76$ мкм. В среде длины волн данного интервала изменятся. Частоты видимых световых волн лежат в пределах $\nu = (0,39 \div 0,75) \cdot 10^{15}$ Гц. Частота изменений вектора плотности потока энергии, переносимой волной, в два раза превышает частоту волны. Пока ни какой приёмник световой энергии не может отслеживать за изменением потока энергии. По этой причине регистрируется усреднённый световой поток. Модуль среднего по

времени значения плотности потока энергии, переносимой световой волной, называется интенсивностью света I в данной точке пространства. Плотность потока электромагнитной энергии определяется вектором Пойнтинга. Тогда $I = \langle S \rangle = \langle [\vec{E}\vec{H}] \rangle$. Усреднение проводилось за время срабатывания прибора, которое много больше периода колебаний. Измеряется интенсивность в энергетических единицах (например, $Вт/м^2$) или в световых единицах (например, $лм/м^2$). Модули амплитуд векторов \vec{E} и \vec{H} в электромагнитной волне связаны соотношением: $E_0\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon} = H_0\sqrt{\mu_0\mu}$.

Спектр электромагнитных колебаний. Спектральный анализ

Рассмотрим проекцию U плоской монохроматической волны на координатную ось (например, на ось x) поля \vec{E} или \vec{H} : $U = U_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$, являющуюся решением волнового уравнения. В комплексной форме плоская монохроматическая волна может быть представлена в следующей форме: $U = U_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)}$. Плоская волна является идеализацией. Реальные источники создают переменные электромагнитные поля, которые описываются немонахроматическими волнами. При исследовании таких полей предполагается, что поле в данной точке может быть представлено суперпозицией бесконечного числа монохроматических волн. Рассмотрим преобразование Фурье (пары взаимнообратных преобразований):

$$U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad u(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-i\omega t} dt;$$

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-i\omega t} dt;$$

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-i\omega t} dt;$$

преобразования с комплексно-сопряжёнными экспонентами.

В данных соотношениях учитывается, что источник волны является не монохроматической волной, а имеет разброс частот, описываемый функцией $u(\omega)$. Разложение в интеграл Фурье позволяет определить спектральный состав энергии немонахроматического электромагнитного поля. Полная энергия плоской электромагнитной волны, прошедшей через единичную площадку в направлении, перпендикулярном этой площадке, определяется соотношением:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |u(\omega)|^2 d\omega, \quad |u(\omega)|^2 = u(\omega) u^*(\omega).$$

Величина $dW/d\omega = |u(\omega)|^2$ называется спектральной плотностью потока электромагнитной энергии.

Волновой пакет

Пусть электромагнитная волна распространяется вдоль оси z . Реальная волна

не является монохроматической, что позволяет любую из её компонент (пусть $E_x(z,t)$), можно представить в виде интеграла

$$E_x(z,t) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} E_0(k) e^{ikz-i\omega t} dk,$$

является волновым пакетом, состоящим из плоских волн, волновые векторы которых направлены вдоль оси z , волновые векторы которых находятся в интервале $k_0-\Delta k \leq k \leq k_0+\Delta k$, где k_0 - среднее значение волнового числа. При малом разбросе значений k , частоту ω можно представить в виде ряда по степеням $(k-k_0)$ и ограничиться первыми членами разложения

$$\omega(k) = \omega_0 + v_g(k-k_0) + \dots, \quad v_g = (d\omega/dk)_{k=k_0}.$$

С течением времени средняя точка пакета перемещается со скоростью v_g , называемой групповой.

Взаимодействие света с веществом. Дисперсия света

Если фазовые скорости $v_\phi = \omega/k$ отдельных монохроматических волн пакета отличаются друг от друга, форма группы волн изменяется и волновой пакет расплывается. Зависимость фазовой скорости v_ϕ электромагнитной волны от частоты ω (т.е. $v_\phi = v_\phi(\omega)$) называется дисперсией. Среда, в которых фазовая скорость зависит от частоты, называются диспергирующими. Если $dv_\phi/d\omega < 0$, $v_g < v_\phi$, дисперсия называется нормальной. Если $dv_\phi/d\omega > 0$, $v_g > v_\phi$, дисперсия называется аномальной.

Дисперсия электромагнитной волны в линейных однородных средах характеризуется зависимостью частоты от волнового числа $\omega = \omega(k)$. Такая зависимость называется законом дисперсии. В анизотропных средах закон дисперсии определяется соотношением $\omega = \omega(\vec{k})$, где \vec{k} - волновой вектор. Если в некотором диапазоне частот $dv_\phi/d\omega = 0$, $v_g = v_\phi$, то в этом диапазоне дисперсия отсутствует. Примером такой волны является электромагнитная волна в вакууме.

Пример 58

Какие частоты колебаний соответствуют крайним красным ($\lambda_1 = 0,76$ мкм) и крайним фиолетовым ($\lambda_2 = 0,40$ мкм) лучам видимой части спектра?

Решение

Частота излучения связана с длиной волны с помощью следующего соотношения: $\nu = c/\lambda$, где c - скорость света. Подстановка заданных в условии задачи параметров позволяет получить: $\nu_1 = 3 \cdot 10^8$ м/с / $7,6 \cdot 10^{-7}$ м = $0,39 \cdot 10^{14}$ Гц = 390 ТГц; $\nu_2 = 3 \cdot 10^8$ м/с / $4 \cdot 10^{-7}$ м = $7,5 \cdot 10^{15}$ Гц = 750 ТГц.

Пример 59

Вода освещена красным светом, для которого длина волны в воздухе равна $\lambda = 0,7$ мкм. Какой будет длина волны в воде? Какой цвет видит человек, открывший глаза в воде?

Решение

Длина волны λ в воде уменьшается в n раз, где n - показатель преломления

среды: $\lambda_1 = \lambda/n = 0,7 \text{ мкм} / 1,33 = 0,53 \text{ мкм}$. При переходе света в другую среду его частота не изменится. Таким образом, человек, открывший глаза в воде, увидит красный цвет.

Интерференция света. Условие максимума и минимума

Пусть две волны одинаковой частоты, накладываясь друг на друга, возбуждают в некоторой точке пространства колебания одного направления: $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ и $A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. После усреднения по времени интенсивность результирующего колебания в данной точке определяется соотношением:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\varphi),$$

где $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Определение 148

Если разность фаз возбуждаемых волнами колебаний остаётся постоянной во времени, то волны называются когерентными.

В случае некогерентных волн $\Delta\varphi$ непрерывно изменяется, принимая с равной вероятностью любые значения. По этой причине среднее по времени значение $\cos(\Delta\varphi)$ равно нулю. Тогда: $A^2 = A_1^2 + A_2^2$. В этом случае можно считать, что интенсивность, наблюдаемая при наложении некогерентных волн, равна сумме интенсивностей, создаваемой каждой из волн в отдельности: $I = I_1 + I_2$. В случае когерентных волн $\cos(\Delta\varphi)$ имеет постоянное во времени значение (но своё для каждой точки пространства). В этой ситуации:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi).$$

В тех точках пространства, для которых $\cos(\Delta\varphi) > 0$, I превышает сумму $I_1 + I_2$. В точках, для которых $\cos(\Delta\varphi) < 0$, сумма $I_1 + I_2$ превышает интенсивность суммарного колебания I . Таким образом, при наложении когерентных световых волн происходит перераспределение светового потока в пространстве. В результате этого перераспределения в одних местах возникают максимумы, а в других - минимумы интенсивности. Это явление называется интерференцией волн. Наиболее сильно этот эффект проявляется при равенстве интенсивностей интерферирующих волн $I_1 = I_2$. В этом случае в максимумах $I = 4I_1$ для когерентных волн и $I = 2I_1$ для некогерентных волн, в минимумах $I = 0$.

Пусть в точке О произошло разделение источника света на две когерентные волны (рис. 122). В точке Р происходит интерференция этих волн. До точки Р первая волна проходит в среде с показателем преломления n_1 путь s_1 , вторая волна проходит в среде с показателем преломления n_2 путь s_2 . Пусть в точке О фаза колебаний равна ωt . Тогда первая волна возбудит в точке Р колебание $A_1 \cos[\omega(t - s_1/v_1)]$, а вторая волна $A_2 \cos[\omega(t - s_2/v_2)]$ ($v_1 = c/n_1$ и $v_2 = c/n_2$ - фазовые скорости волн). Разность фаз колебаний в точке Р равна $\Delta\varphi = \omega[(s_2/v_2) - (s_1/v_1)] = \omega(n_2 s_2 - n_1 s_1)/c$. Учитывая, что $\omega/c = 2\pi\nu/c = 2\pi/\lambda_0$ (λ_0 - длина волны в вакууме), разность фаз $\Delta\varphi$ может быть представлена в следующей форме: $\Delta\varphi = 2\pi\Delta L/\lambda_0$, где $\Delta L = n_2 s_2 - n_1 s_1 = L_2 - L_1$ - разность оптических длин проходимых волнами путей, на-

зываемая оптической разностью хода. Если оптическая разность хода равна целому количеству длин волн в вакууме ($\Delta L = \pm m \lambda_0$, $m = 0, 1, 2, \dots$), разность фаз $\Delta \varphi$ кратна 2π и колебания, возбуждаемые в точке P обеими волнами, имеют одинаковую фазу. Таким образом, условие $\Delta L = \pm m \lambda_0$, $m = 0, 1, 2, \dots$ является условием интерференционного максимума. Если оптическая разность хода равна полуцелому количеству длин волн в вакууме ($\Delta L = \pm (m + 1/2) \lambda_0$, $m = 0, 1, 2, \dots$), то $\Delta \varphi = \pm (2m + 1)\pi$, тогда колебания в точке P находятся в противофазе. Таким образом, условие $\Delta L = \pm (m + 1/2) \lambda_0$, $m = 0, 1, 2, \dots$ является условием интерференционного минимума.

Примером интерференции являются кольца Ньютона. Эти кольца наблюдаются между плоской поверхностью стеклянной пластины и плоско-выпуклой линзой, приложенной к пластине выпуклой стороной (см. рис. 123). Картину, имеющую вид концентрических колец из чередующихся светлых и тёмных колец, можно наблюдать как в отражённом, так и в проходящем свете. Радиусы колец $x = OA$ (рис. 26) можно определить с помощью соотношений:

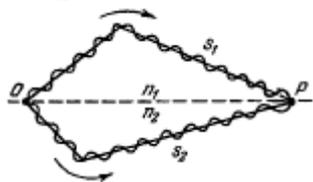


Рис. 122.

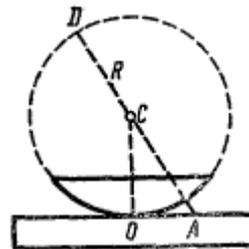


Рис. 123.

$$x_{Cm} = \sqrt{(m - 0,5) \lambda R}, \quad x_{Tm} = \sqrt{m \lambda R},$$

где x_{Cm} - радиус m -го светлого кольца, x_{Tm} - радиус m -го тёмного кольца, m - целое число, R - радиус кривизны сферы, определяющий кривизну линзы. Центр колец в отражённом свете тёмный, а в проходящем свете - светлый.

Рассмотрим второй пример интерференции. Рассмотрим две цилиндрические когерентные световые волны, исходящие из источников S_1 и S_2 , имеющих вид двух параллельных узких щелей (см. рис. 124). Область, в которой волны перекрываются, называется областью интерференции. В этой области наблюдается чередование мест с максимальной и минимальной интенсивностью света. Если в поле интерференции внести экран, то на нём будет видна интерференционная картина, имеющая вид чередующихся светлых и тёмных полос. Будем считать, что экран параллелен плоскости, проходящей через источники S_1 и S_2 . Анализируя оптическую разность хода, определим ширину интерференционных полос. Координаты максимума и минимума определяются соотношениями:

$$x_{max} = \pm m \lambda l / d, \quad x_{min} = \pm (m + 0,5) \lambda l / d, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\lambda = \lambda_0 / n$ - длина волны в среде, заполняющей пространство между источником и экраном. Расстояние между двумя соседними максимумами интенсивности называется расстоянием между интерференционными полосами, а расстояние между соседними минимумами - шириной интерференционной полосы. Расстоя-

ние между полосами и ширина полосы имеют одинаковое значение, равное $\Delta x = l\lambda/d$.

Интерференция электромагнитных волн применяется для измерения скорости волн, размеров объектов (угловых размеров звёзд).

Пример 60

Оптическая разность хода Δ двух интерферирующих волн монохроматического света равна $0,3\lambda$. Определить разность фаз $\Delta\varphi$.

Решение

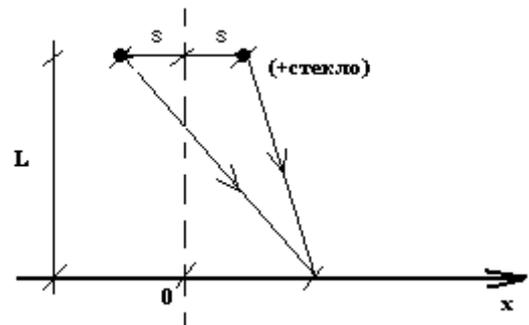
Разность фаз пропорциональна разности хода и обратнопропорциональна длине волны, т.е. $\Delta\varphi = 2\pi\Delta/\lambda$. Подстановка указанных в условии задачи параметров в данное соотношение позволяет получить: $\Delta\varphi = 2\pi \cdot 0,3\lambda/\lambda = 0,6\pi$.

Пример 61

Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, отстоящими друг от друга на расстояние $d = 2,5$ мм. На экране, расположенном за диафрагмой на $l = 100$ см, образуется система интерференционных полос. На какое расстояние и в какую сторону сместятся эти полосы, если одну из щелей перекрыть стеклянной пластинкой толщины $h = 10$ мкм?

Решение

Проходящий через стекло свет приобретает дополнительную разность хода по отношению к "свободному" лучу. Разность хода набирается за счёт того, что скорость распространения света в стекле отличается от скорости света на альтернативном участке пути. Разность хода, набираемая у самой щели, для двух опытов соответственно: $\Delta'_1 = (h \cdot n_0 - h \cdot n_0) = 0$, $\Delta'_2 = h \cdot n_{\text{стекл}} -$



$-h \cdot n_0 = (n_{\text{стекл}} - 1) \cdot h$, $n_{\text{стекл}} = 1$. Интерференционную картину можно рассматривать как картину от двух разнесённых точечных источников:

Геометрическая разность хода лучей определяется следующим соотношением:

$$\Delta'' = \sqrt{L^2 + (x+s)^2} - \sqrt{L^2 + (x-s)^2} = L\sqrt{1 + (x+s)^2/L^2} - L\sqrt{1 + (x-s)^2/L^2}.$$

Для опыта $(s/D) \ll 1$ получаем:

$$\Delta'' = L \left[1 + (x+s)^2/2L^2 \right] - L \left[1 + (x-s)^2/2L^2 \right] = [(x+s)^2 - (x-s)^2] / 2L.$$

В отсутствии стекла полная разность хода лучей равна $\Delta = \Delta'' - \Delta'_1$ и центр дифракционной картины ($\Delta = 0$) находится в точке ($x = 0$). Со стеклом полная разность хода лучей равна $\Delta = \Delta'' - \Delta'_2$ и центр дифракционной картины смещается в точку $\Delta - \Delta'_2 = 0$, т.е. $x \cdot (2s/L) - h \cdot (n_{\text{стекл}} - 1) = 0$. Тогда: $x = h \cdot L \cdot (n_{\text{стекл}} - 1) / 2s$. Подстановка указанных в условии задачи параметров в данное соотношение позволяет получить: $x = 2 \cdot 10^{-3}$ м. Таким образом, смещение составит 2 мм в сторону щели со стеклянной пластиной.

Определение 149

Дифракцией света называется явление огибания световыми волнами препятствий, встречающихся на пути их распространения.

Это явление можно наблюдать на опыте, в котором на пути распространения света находится препятствие в виде непрозрачного тела, называемого экраном, произвольной формы или отверстие в непрозрачном теле (см. рис. 125). Дифракция приводит к тому, что вместо резкой границы между светом и тенью, как следует из законов геометрической оптики, получается более сложная картина распределения интенсивности света. Чем меньше размеры экрана или отверстия, тем сильнее дифракция света. В дифракции проявляется волновая природа света, требующая для своего описания решения уравнений Максвелла.

Принцип Гюйгенса-Френеля

Проникновение световых волн в область геометрической тени может быть объяснено с помощью принципа Гюйгенса. Но этот принцип не даёт сведений об амплитуде и, как следствие, об интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях. Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением об интерференции вторичных волн. Учёт амплитуд и фаз вторичных волн позволяет найти амплитуду результирующей волны в любой точке пространства. Сформированный таким образом принцип называется принципом Гюйгенса-Френеля.

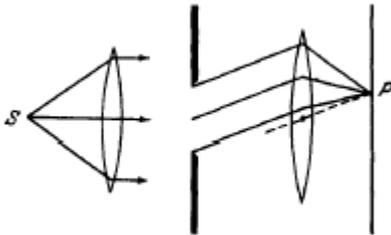


Рис. 124.

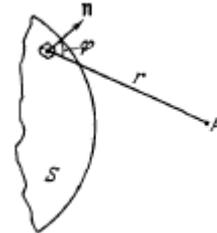


Рис. 125.

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля каждый элемент волновой поверхности S (см. рис. 125) служит источником вторичной сферической волны, амплитуда которой пропорциональна величине элемента dS . Амплитуда сферической волны убывает с расстоянием r пропорционально $1/r$. В этой ситуации от каждого участка dS волновой поверхности в точку P , лежащую перед этой поверхностью, приходит колебание:

$$d E = K(\varphi) \frac{A_0 d S}{r} \cos(\omega t - k r + \varphi_0).$$

В этом выражении $\omega t + \varphi_0$ - фаза колебания в месте расположения волновой поверхности S , k - волновое число, r - расстояние от элемента dS до точки P . Множитель A_0 определяется амплитудой светового колебания в том месте, где находится dS . Коэффициент K зависит от угла φ_0 между нормалью n к площадке dS к точке P . При $\varphi_0=0$ коэффициент K максимален, при $\varphi_0=\pi/2$ коэффициент $K=0$.

Результирующее колебание в точке P представляет собой суперпозицию ко-

лебаний, определяемых предыдущем соотношением, взятых для всей волновой поверхности:

$$E = \int_S K(\varphi) \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - k r + \varphi_0) d S.$$

Данная формула является аналитическим выражением принципа Гюйгенса-Френеля. В обоснование этого принципа можно привести следующие рассуждения. Пусть на пути световой волны (будем считать её плоской) поставлен непрозрачный тонкий экран Э (см. рис. 126). За экраном интенсивность света равна нулю. Это вызвано тем, что упавшая на экран световая волна возбуждает колебания электронов, имеющих в материале экрана. Колеблющиеся электроны возбуждают электромагнитные волны. Поле за экраном представляет собой суперпозицию первичной (падающей на экран) волны и всех вторичных волн. Амплитуды и фазы вторичных волн оказываются такими, что при их суперпозиции с первичной волной в любой точке P за экраном получается нулевая амплитуда. По этой причине, если первичная волна создаёт в точке P колебание $A_{\text{перв}} \cos(\omega t + \varphi_0)$, то результирующее колебание, возбуждаемое в той же точке вторичными волнами, имеет вид: $A_{\text{втор}} \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$. При этом $A_{\text{перв}} = A_{\text{втор}}$. Таким образом, основной идеей метода Гюйгенса-Френеля при вычислении амплитуды колебания, порождаемого в точке P световой волной, распространяющейся от реального источника, можно заменить этот источник совокупностью вторичных источников, расположенных вдоль волновой поверхности.

Зоны Френеля

В ряде случаев (например, при наличии осевой симметрии) решение дифракционной задачи может быть выполнено с помощью геометрического метода, основанного на разбиении фронта волны на кольцевые участки, называемые зонами Френеля. Пусть имеется сферическая поверхность F , окружающая все источники света. Опишем из точки наблюдения P концентрические сферы с радиусами $r, r + \lambda/2, r + 2(\lambda/2), r + 3(\lambda/2), \dots$ (рис. 29). Кольцевые области, на которые эти сферы разбивают волновой фронт, являются зонами Френеля. Участок 101 волновой поверхности является первой зоной Френеля, участок 21 - второй зоной Френеля, участок 32 - третьей зоной Френеля и т.д. Т.к. $CO = R_0 \gg \lambda$ и $r \gg \lambda$ (по условию), то при не слишком больших значениях i (i - номер зоны) их площади одинаковы:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_i = \pi R_0 r \lambda / (R_0 + r).$$

В соответствии с построением разность хода от границ соседних зон равна $\lambda/2$. Вторичные волны, пришедшие из этих зон в точку P , противоположны по фазе и при наложении ослабляют друг друга (интерферируют между собой).

Амплитуду волны от каждой зоны Френеля в точке наблюдения P можно рассчитать с помощью графического метода, в котором амплитуды колебаний от разных участков (подзон), зоны Френеля складываются как векторы. Колебания, возбуждаемые в точке наблюдения данной зоны Френеля, изображаются

суммой векторов $\vec{A_0A_1}, \vec{A_1A_2}, \dots, \vec{A_5A_6}, \dots$. На рис. 127 показан случай шести подзон Френеля. Вектор $\vec{A_0A_{12}}$ описывает суммарное действие первой и второй зон Френеля.

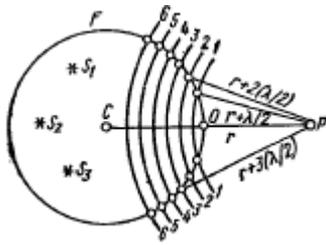


Рис. 126.

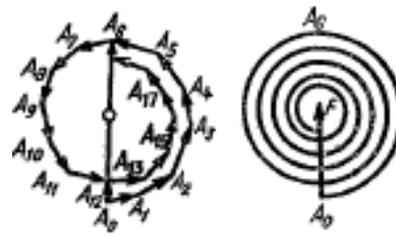


Рис. 127.

Если число подзон стремится к бесконечности, то ломаная кривая в пределе переходит в непрерывную спираль с фокусом в точке F. В этой спирали действие первой зоны Френеля описывается вектором $\vec{A_0A_6}$, а всего волнового фронта - вектором $\vec{A_0F}$, который примерно в два раза короче вектора $\vec{A_0A_6}$, т.е. $u = u_1/2$ - при свободном распространении волны волновое возмущение u от всего волнового фронта равно половине возмущения u_1 , даваемого первой зоной Френеля.

Дифракция на круглом отверстии

Поставим между точечным источником S и точкой наблюдения P непрозрачный экран с круглым отверстием, плоскость которого перпендикулярна оси SP, а центр O расположен на той же оси (рис. 128). Согласно Френелю, действие такого препятствия сводится к тому, что экран как бы устрояет ту часть волнового фронта, которую он прикрывает. На открытой части волнового фронта поле не изменяется. Такое предположение соответствует приближению геометрической оптики, являющееся применимым, когда радиус отверстия r_0 очень велик по сравнению с длиной волны. Далее будем считать, что данное приближение выполняется. Будем также считать, что размеры отверстия можно менять, что позволяет открывать любое количество зон Френеля. Общий световой поток, поступающий через отверстие, пропорционален его площади.

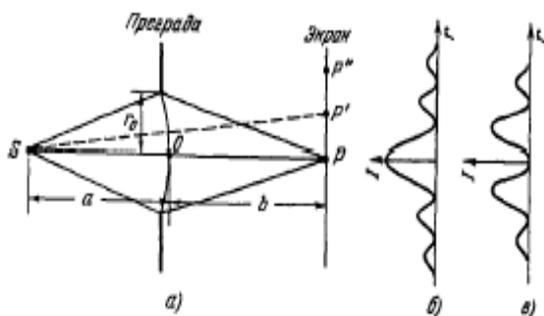


Рис. 128.

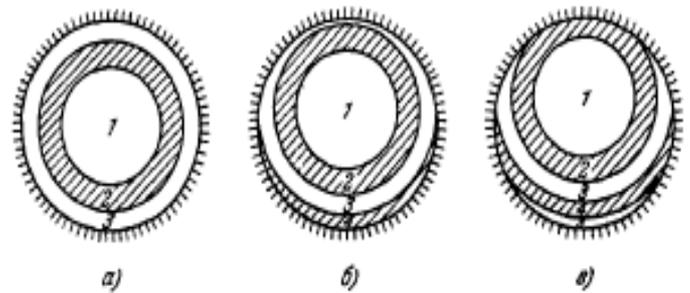


Рис. 129.

Пусть A и I - амплитуда и интенсивность света в точке P при свободном рас-

пространении волны (при отсутствии экрана). При $r_0 \ll a, b$ длину a можно считать приближенно равной расстоянию от источника до экрана, длину b - расстоянию от источника до точки наблюдения P . Если расстояния a и b удовлетворяют соотношению:

$$r_m = \sqrt{m \lambda \frac{ab}{a+b}},$$

где m - целое число, отверстие оставит открытым m первых зон Френеля, построенных для точки P . Тогда число открытых зон Френеля определяется соотношением: $m = r_0^2 \lambda^{-1} (a^{-1} + b^{-1})$. Амплитуда в точке P будет равна $A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m$. Знак зависит от чётности номера зон Френеля. Для малых m амплитуда A_m мало отличается от A_1 . По этой причине при нечётных m амплитуда в точке P приближённо равна A_1 , при чётных m - нулю. Таким образом, наличие экрана позволяет увеличить амплитуду (и, соответственно, интенсивность) излучения.

Определим вид дифракционной картины, наблюдаемой на экране, помещённом за преградой (рис. 128). Из-за симметричного расположения отверстия относительно прямой SP освещённость в разных точках экрана будет зависеть только от расстояния r от точки P . В точке P интенсивность будет достигать максимума или минимума в зависимости от чётности или нечётности числа открытых зон Френеля. Пусть $m = 3$. Тогда в центре дифракционной картины получится максимум интенсивности (см. рис. 129). Если точку P сместить, часть уже открытых зон закроется, часть новых откроется (см. рис. 129). Таким образом, дифракционная картина от круглого отверстия имеет вид чередующихся светлых и тёмных концентрических колец. В центре картины будет светлое (m нечётное) или тёмное (m чётное) пятно (рис. 130). При изменении b чётность m будет меняться. Если отверстие открывает часть центральной зоны Френеля, на экране получается размытое светлое пятно, а чередования светлых и тёмных колец не возникает. Если отверстие открывает большое число зон, чередование светлых и тёмных колец наблюдается только в узкой области на границе геометрической тени. Внутри данной области освещённость оказывается практически постоянной.

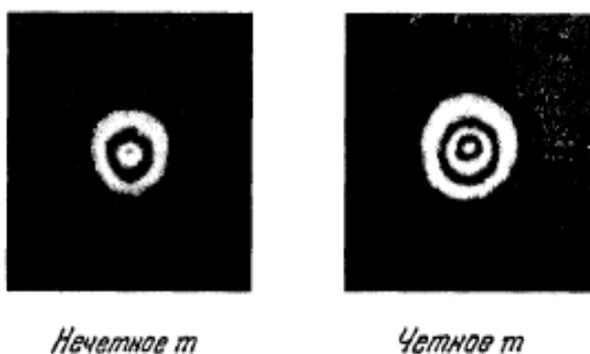


Рис. 130.

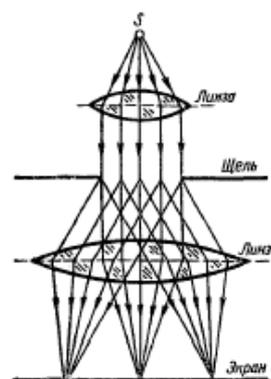


Рис. 131.

Дифракция Фраунгофера

Определение 150

Дифракцией Фраунгофера называется дифракция, наблюдающаяся на бесконечно удаленном расстоянии от препятствия, на которое падает свет бесконечно удаленного источника.

Если длина волны λ мала по сравнению со всеми расстояниями (в том числе с размерами препятствия), то падающую волну можно считать плоской, т.е. лучи света, падающие на разные точки поверхности препятствия, можно считать плоской. По этой причине дифракция Фраунгофера также называется дифракцией в параллельных лучах или дифракцией плоских волн. Дифракцию Фраунгофера можно получить, поместив источник света в фокусе одной собирающей линзы, а другую собирающую линзу - за препятствием. Дифракционная картина при этом образуется в фокальной плоскости второй линзы. На рис. 131 препятствием является щель. Дифракционная картина является дифракционным изображением источника света.

Для расчёта дифракции Фраунгофера (интенсивности света) будем считать, что поле на препятствии равно неискажённому полю на источнике. В качестве препятствия выберем длинную прямоугольную щель (рис. 132). Обозначим через \vec{a} вектор, указывающий направление распространения волны, через \vec{b} - вектор дифрагированной волны. В рассматриваемом случае малого отверстия площадью S получаем следующее выражение для дифрагированной волны:

$$\vec{u}_P = -\frac{ik\vec{A}}{2\pi} \frac{e^{ik(a+b)}}{ab} \int_S e^{-i\vec{q}\vec{r}'} dS'.$$

Интенсивность dI дифрагированной волны в телесном угле $d\Omega$ определяется соотношением:

$$dI = |\vec{u}_P|^2 b^2 d\Omega = \frac{k^2 A^2}{4\pi^2 a^2} \left| \int_S e^{-i\vec{q}\vec{r}'} dS' \right|^2 d\Omega, \quad I_0 = |\vec{u}_P|^2 = \frac{A^2}{a^2}.$$

Дифракция Фраунгофера на щели

Если щель имеет ширину l и является бесконечно длинной, то интегрирование предыдущего выражения по площади S позволяет получить соотношение:

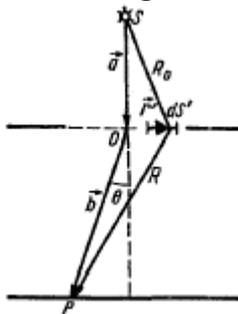


Рис. 132.

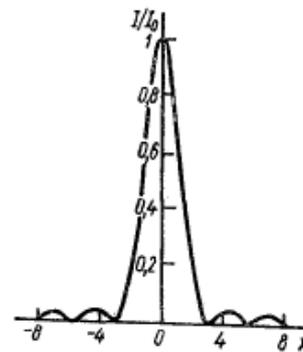


Рис. 133.

$$dI/d\Omega = I_0 \cdot \sin^2(x)/x^2, \quad x = k \cdot l \cdot \sin(\theta)/2 = \pi \cdot l \cdot \sin(\theta)/2\lambda,$$

описывающей распределение света по направлениям, θ - угол дифракции, который считается малым (рис. 133), I_0 - интенсивность в направлении падающей волны. Минимумы интенсивности I находятся в точках $x = m\pi$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) или при выполнении условия $l \cdot \sin(\theta) = m\lambda$. Положения максимумов определяются решением уравнения $x \cdot \cos(x) = \sin(x)$. Приблизительно можно считать, что максимумы находятся посередине между соседними минимумами.

Дифракционная решетка. Разрешающая способность решетки

Определение 151

Дифракционной решёткой называется совокупность большего числа равноотстоящих штрихов, нарезанных на стеклянной или металлической поверхности, на которых происходит дифракция света.

На стеклянных решётках дифракцию можно наблюдать как в проходящем, так и в отражённом свете, а на металлических - только в отражённом. Дифракционная решётка используется для разложения света в спектр и измерения длин волн. Простейшая дифракционная решётка является системой из N одинаковых равноотстоящих параллельных щелей в плоском непрозрачном экране. Пусть ширина щели равна b , а ширина непрозрачной части экрана между двумя соседними щелями равна a . Тогда условие главных максимумов при дифракции на решётке, наблюдаемых под углом θ , имеет вид (рис. 134): $d \cdot \sin(\theta) = m\lambda$, где $d = a + b$ - период решётки, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ - порядок главного максимума (порядок спектра), λ - длина волны падающего света. Условие главных максимумов определяет направления, в которых излучения из всех щелей решётки (по принципу Гюйгенса-Френеля) приходят в точку наблюдения в одинаковых фазах и, как следствие, усиливают друг друга. Если $a = b$, то все главные максимумы чётных порядков не появляются. Условие дифракционных минимумов, в которых интенсивность света равна нулю, имеет вид: $d \cdot \sin(\theta) = (m + p/N)\lambda$, $p = 1, 2, \dots, N-1$, где N - общее число щелей. Между двумя соседними минимумами получаются максимумы, которые называются второстепенными или добавочными. Между соседними главными максимумами располагаются $N-1$ минимум и $N-2$ добавочных максимумов (рис. 135).

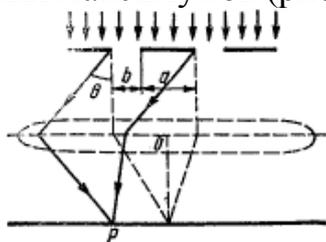


Рис. 134.

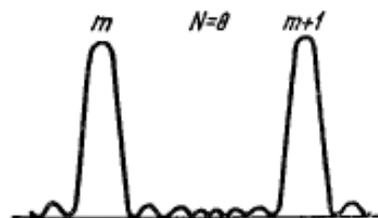


Рис. 135.

Положение главных максимумов зависит от длины волны λ (кроме случая $m = 0$). По этой причине решётка в каждом порядке $m \neq 0$ разлагает падающий белый свет в спектр, в котором отдельные монохроматические составляющие света получают пространственно разделёнными, т.е. главные максимумы оказы-

ваются окрашенными. Дифракционные максимумы, соответствующие $m=1$, образуют спектр первого порядка, $m=2$ - спектр второго порядка, $m=3$ - спектр третьего порядка и т.д. Если падающий свет белый, то спектры каждого порядка имеют все цвета радуги. Наибольшее отклонение имеют красные лучи, наименьшее - фиолетовые. Дифракционные решётки характеризуют угловой дисперсией, дисперсионной областью и разрешающей способностью.

Определение 152

Угловой дисперсией называется производная $d\theta/d\lambda$. Для условия главных максимумов получается следующее соотношение: $d\theta/d\lambda = \sin(\theta)/\lambda \cdot \cos(\theta)$. Угловая дисперсия от параметров решётке не зависит.

Определение 153

Дисперсионной областью называется максимальная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda$, при которой ещё нет перекрытия спектров соседних порядков, т.е. спектры можно различить $\Delta\lambda = \lambda/m$, где m - порядок спектра.

Определение 154

Разрешающей способностью дифракционной решётки называется величина $R = \lambda/\delta\lambda$, где $\delta\lambda$ - наименьшая разность длин волн двух спектральных линий, при которой они видны как отдельные. По Рэлею $R = N/m$, где N - общее число щелей решётки, m - порядок спектра.

Пример 62

Между точечным источником света и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием, радиус которого r можно менять в процессе опыта. Расстояния от диафрагмы до источника и экрана равны $a = 100$ см и $b = 125$ см. Определить длину волны света, если максимум освещенности в центре дифракционной картины на экране наблюдается при $r_1 = 1$ мм и следующий максимум при $r_2 = 1,29$ мм.

Решение

Найдём разность хода центрального и самого крайнего лучей:

$$\Delta = \sqrt{a^2 + r^2} + \sqrt{b^2 + r^2} - a - b.$$

Из-за малости радиуса экрана получаем:

$$\Delta = a + (r^2/2a) + b + (r^2/2b) - a - b = r^2(a+b)/2ab.$$

Зная разность хода, найдём радиус экрана соответствующий k -ой зоне Френеля:

$$\Delta = k \frac{\lambda}{2} = \frac{r^2(a+b)}{2ab}, \quad r_k = \sqrt{k \lambda \frac{ab}{a+b}}.$$

Максимумы наблюдаются только при нечётных k , т.е. при $k=2n+1$, где $n=0, 1, 2, \dots$ Для первых двух радиусов получаем:

$$r_1 = \sqrt{(2n+1)\lambda \frac{ab}{a+b}}, \quad r_2 = \sqrt{[(2n+1)+1]\lambda \frac{ab}{a+b}}.$$

Тогда:

$$n = (3r_1^2 - r_2^2) / 2(r_2^2 - r_1^2).$$

При $n=1$ получаем следующее соотношение для длины волны:

$$\lambda = (r_2^2 - r_1^2)(a+b) / 2ab.$$

Подстановка в данное соотношение указанных в условии параметров позволяет получить: $\lambda = 5,977 \cdot 10^{-7}$ м.

Пример 63

Монохроматическая плоская световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный диск, закрывающий для точки наблюдения P первую зону Френеля. Какова стала интенсивность света I в точке P после того, как у диска удалили:

а) половину (по диаметру);

б) половину внешней половины первой зоны Френеля (по диаметру)?

Решение

Известно, что амплитуда колебаний возрастает в 2 раза (а интенсивность - в 4 раза пропорционально квадрату амплитуды), если открыта только первая зона Френеля (принцип распространения света в узком канале площадью сечения в половину центральной зоны Френеля). Т.е. если открыта первая зона Френеля, то амплитуда колебаний в точке P увеличивается в два раза: $A_1 = 2A_0$.

Если убрать экран, то в точке P наблюдается амплитуда колебаний, равная A_0 . Тогда, если экран закрывает первую зону Френеля, то все остальные открытые зоны создают в точке наблюдения колебания амплитуды: $A_{откр} = A_0 - A_1 = -A_0$.

а) Если убрать половину диска по диаметру, то суммарная амплитуда в точке P равна: $A = A_{откр} + A_1 / 2 = 0$. Тогда интенсивность равна нулю.

б) На данном этапе разделим первую зону Френеля на две concentric halves. Complex amplitudes, created by each of the halves are equal: $A_k = (A_1/2) - i(A_1/2)$, $A_l = (A_1/2) + i(A_1/2)$. If only a quarter of the first zone of Fresnel is open, then the complex amplitude of oscillations in point P is equal: $A = A_{откр} + [(A_1/2) + i(A_1/2)]/2 = -A_0 + [(2A_0/2) + 2i(A_0/2)]/2 = -(A_0/2) + i(A_0/2)$. In this case, the intensity of radiation is equal: $I_p = I_0 \overline{AA} / A_0^2 = I_0 0,5 A_0^2 / A_0^2 = I_0 / 2$.

задачи на дифракцию света

Поляризация света

Определение 155

Поляризацией света называется совокупность явлений, в которых проявляется свойство поперечности электромагнитных волн видимой (оптической) части спектра. Волна называется поляризованной, если в ней существует выделенное направление колебаний.

Различают несколько видов поляризации: (i) линейная (плоская) поляризация; (ii) круговая (циркулярная) поляризация; (iii) эллиптическая поляризация. Поляризация возможна только у поперечных волн. Плоская световая волна называется линейно поляризованной, если вектор \vec{E} всё время лежит в одной плоскости, в которой расположена нормаль \vec{N} к фронту волны (рис. 37). Плос-

кость, проходящая через вектора \vec{E} и \vec{N} , называется плоскостью поляризации. За направление поляризации световой волны обычно принимается направление вектора напряжённости магнитного поля \vec{H} , а за направление колебаний - направление колебаний вектора напряжённости электрического поля \vec{E} . Естественный свет неполяризованный, так как он излучается атомами, ориентированными в пространстве произвольным образом. В нём векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{N} в каждый момент времени взаимно перпендикулярны, но направление векторов \vec{E} и \vec{H} изменяется со временем произвольно. Естественный свет обладает в среднем осевой симметрией относительно направления его распространения.

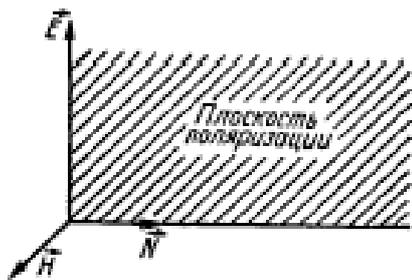


Рис. 136.

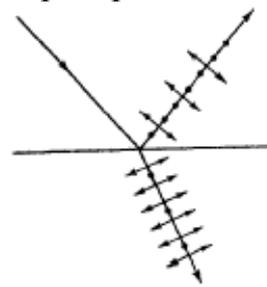


Рис. 137.

Устройства, с помощью которых естественный свет можно преобразовать в поляризованный, называются поляризаторами. Простейшим поляризатором является пластинка турмалина, вырезанная параллельно своей оптической оси. Турмалин сильно поглощает световые лучи, в которых вектор электрической напряжённости \vec{E} перпендикулярен оптической оси. Если вектор \vec{E} параллелен оптической оси, то лучи проходят через турмалин практически без поглощения. По этой причине прошедший через данную пластинку свет становится линейно поляризованным с вектором \vec{E} , параллельным оптической оси турмалина.

Поляризаторы, используемые для анализа поляризации света, называются анализаторами. Для линейно поляризованной световой волны, прошедшей через анализатор, выполняется закон Малюса: $I = kI_0 \cos(\alpha)$, где I_0 – интенсивность света на входе анализатора, I – интенсивность света на выходе анализатора, α – угол между плоскостями поляризации входящего и выходящего света, k – коэффициент прозрачности поляризатора ($0 < k \leq 1$).

Если пропустить частично поляризованный свет через поляризатор, то при вращении прибора вокруг направления луча интенсивность прошедшего света будет изменяться в пределах от I_{max} до I_{min} , причём переход от одного из этих значений к другому будет совершаться при повороте на угол, равный $\pi/2$ (таким образом, за один полный поворот два раза будет достигаться максимальное и два раза минимальное значения интенсивности). Величина $P = (I_{max} - I_{min}) / (I_{max} + I_{min})$ называется степенью поляризации. Для плоскополяризованного света $I_{min} = 0$ и $P = 1$. Для естественного света $I_{max} = I_{min}$ и $P = 0$. К эллиптически поляризованному свету понятие степени поляризации не применимо, т.к. у такого света колебания полностью упорядочены.

Поляризация света при отражении и преломлении света. Закон Брюстера

Если угол падения света на границу раздела двух диэлектриков (например, на поверхность стеклянной пластины), отличен от нуля, отражённый и преломлённый лучи оказываются частично поляризованными (при отражении от проводящей поверхности - например, от поверхности металла - получается эллиптически поляризованный свет). В отражённом луче преобладают колебания, перпендикулярные к плоскости падения (на рис. 136 данные колебания обозначены точками), в преломлённом луче преобладают колебания, параллельные плоскости падения (на рис. 136 данные колебания обозначены двусторонними точками). Степень поляризации зависит от угла падения. Обозначим через $\theta_{\text{Бр}}$ - угол, удовлетворяющий условию $\text{tg}(\theta_{\text{Бр}}) = n_{12}$, где n_{12} - показатель преломления второй среды относительно первой. При угле падения $\theta = \theta_{\text{Бр}}$, отражённый луч полностью поляризован (он содержит только колебания, перпендикулярные к плоскости падения). Степень поляризации преломлённого луча при угле падения, равном $\theta_{\text{Бр}}$, достигает наибольшего значения, однако этот луч остаётся поляризованным только частично. Соотношение $\text{tg}(\theta_{\text{Бр}}) = n_{12}$ называется законом Брюстера, а угол $\theta_{\text{Бр}}$ называется углом Брюстера. Можно показать, что при падении света под углом Брюстера отражённый и преломлённый лучи взаимно перпендикулярны.

Пример 64

Параллельный пучок естественного света падает на сферическую каплю воды. Найти угол φ между отраженным и падающим пучками в точке A .

Решение

Отражённый от поверхности капли пучок света является полностью поляризованным. Тогда в соответствии с законом Брюстера: $\text{tg}(\theta_{\text{Бр}}) = n_{12}$, где $\theta_{\text{Бр}}$ - угол падения пучка света на каплю, n_{12} - относительный показатель преломления светового пучка во второй среде (в воде) относительно первой (воздуха).

Относительный показатель преломления равен отношению абсолютных показателей преломления этих сред, т.е. $n_{12} = n_2/n_1$. Тогда $\text{tg}(\theta_{\text{Бр}}) = n_2/n_1$. Из данного соотношения можно получить значение угла Брюстера: $\theta_{\text{Бр}} = \text{arctg}(n_2/n_1)$.

В соответствии с законом отражения света угол отражения равен углу падения. Тогда угол между отражённым и падающим пучком равен: $\alpha = 2\theta_{\text{Бр}} = 2\text{arctg}(n_2/n_1)$. Абсолютные показатели преломления воздуха и воды соответственно равны $n_1 \approx 1$, $n_2 \approx 1,33$. Тогда $\alpha = 2\text{arctg}(1,33/1) \approx 106,12$.

Пример 65

Во сколько раз ослабляется интенсивность света, проходящего через два николя, плоскости пропускания которых образуют угол $\alpha = 30^\circ$, если в каждом из николей в отдельности теряется 10 % интенсивности падающего на него света?

Решение

Интенсивность света, прошедшего через первый николю, с учётом ослабления равна: $J_1 = J_0(1-k)$. Интенсивность света, прошедшего через второй николю, в соответствии с законом Малюса равна: $J = J_1 \cos^2 \alpha$. С учётом ослабления: $J = J_0(1-k)$

$\cos^2 \alpha = J_0(1-k)^2 \cos^2 \alpha$. Тогда ослабление интенсивности света определяется следующим соотношением: $J_0/J = 1/(1-k)^2 \cos^2 \alpha \approx 1,646$.

Введение в квантовую физику

18. Тепловое излучение

Излучение телами электромагнитных волн (свечение тел) может осуществляться за счёт различных видов энергии.

Определение 156

Самым распространённым является тепловое излучение, т.е. испускание электромагнитных волн за счёт внутренней энергии тел.

Тепловое излучение имеет место при любой температуре. При низких температурах излучаются в основном инфракрасные (длинные) электромагнитные волны. Тепловое излучение является единственным, находящимся в равновесии с излучающими телами. Все остальные виды являются неравновесными. Все остальные (неравновесные) виды свечения, возбуждаемые за счёт любого вида энергии, кроме внутренней (тепловой), называются люминисценцией. Окисляющийся на воздухе фосфор светится за счёт энергии, выделяемой при химическом превращении.

Определение 157

Такой вид свечения называется хемилюминисценцией.

Определение 158

Свечение, возникающее в газах и твёрдых телах под воздействием электрического поля, называется электролюминисценцией.

Определение 159

Свечение твёрдых тел, вызванное бомбардировкой их электронами, называется катодолюминисценцией.

Определение 160

Свечение, возбуждаемое поглощаемым телом электромагнитным излучением, называется фотолюминисценцией.

Введём некоторые величины, характеризующие состояние излучения в пространстве. Эти величины имеют смысл для любого излучения, а не только для равновесного. Обозначим через u плотность энергии излучения, т.е. количества данной энергии в единице объёма. Её можно разложить по частотам или длинам волн, т.е.

$$u = \int_0^{\infty} u_{\omega} d\omega = \int_0^{\infty} u_{\lambda} d\lambda .$$

Величины $u_{\omega} d\omega$ и $u_{\lambda} d\lambda$ имеют смысл объёмной плотности лучистой энергии, приходящиеся на интервал частот ω , $\omega+d\omega$ или длин волн λ , $\lambda+d\lambda$. Коэффициенты u_{ω} и u_{λ} называются спектральными плотностями лучистой энергии. Можно показать, что в одном спектральном интервале $u_{\omega} = \omega u_{\lambda} / \lambda$. Функция u зависит от температуры T , а u_{ω} ещё и от частоты. Поток лучистой энергии, проходящей за время dt через малую площадку ds в пределах телесного угла $d\Omega$, ось которого перпендикулярна к площадке ds , может быть представлен в следующей

форме: $d\Phi = I ds d\Omega dt$. Величина I называется удельной интенсивностью излучения. Если его разложить в спектр, т.е. представить в виде интеграла $I = \int_0^{\infty} I_{\omega} d\omega$, величина I_{ω} называется удельной интенсивностью излучения частоты ω .

Определение 161

Поток энергии, испускаемый единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям (в пределах угла 2π), называется энергетической светимостью тела. Данную величину обозначим R . Энергетическая светимость является функцией температуры.

Излучение состоит из волн различных частот ω (или длин волн λ). Обозначим поток энергии, испускаемый единицей поверхности в интервале частот $d\omega$, через dR_{ω} . При малом интервале $d\omega$ поток dR_{ω} будет пропорционален $d\omega$: $dR_{\omega} = r_{\omega} d\omega$. Величина r_{ω} называется испускательной способностью тела. Как и энергетическая светимость, испускательная способность зависит от температуры тела. Таким образом, r_{ω} является функцией частоты и температуры. Энергетическая светимость связана с испускательной способностью следующим соотношением:

$$R = \int dR_{\omega} = \int_0^{\infty} r_{\omega} d\omega.$$

Пусть на элементарную площадку поверхности тела падает поток лучистой энергии $d\Phi_{\omega}$. Часть этого потока $d\Phi_{\omega 1}$ будет поглощена телом. Величина $a_{\omega} = d\Phi_{\omega 1} / d\Phi_{\omega}$ называется поглощательной способностью тела. Данная величина зависит от частоты и температуры. По определению a_{ω} не превышает единицу.

Определение 162

Если тело поглощает всё упавшее на него излучение (т.е. $a_{\omega} = 1$), то оно называется абсолютно чёрным. Если $a_{\omega} < 1$, тело называется серым.

Может быть показано, что отношение испускательной и поглощательной способностей не зависит от природы тела. Оно является одной и той же для всех тел функцией частоты (длины волны) и температуры:

$$r_{\omega} / a_{\omega} = f(\omega, T).$$

Законы Стефана-Больцмана и Вина

Стефан в 1879 г., анализируя экспериментальные данные, сделал вывод, что энергетическая светимость R пропорциональна четвёртой степени температуры. Больцман в 1884 г. уточнил данный результат: $R = \sigma T^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ - постоянная Стефана-Больцмана, T - температура. Данный закон выполняется для абсолютно чёрного тела.

Вин, используя не только термодинамику (как Стефан и Больцман), но и электромагнитной теорией, показал, что спектральное распределение должно иметь следующий вид:

$$f(\omega, T) = \omega^3 F(\omega/T),$$

где $F(\omega/T)$ - произвольная функция отношения частоты и температуры. От час-

точной зависимости можно перейти к зависимости функции $f(\omega, T)$ от длины волны λ . Можно показать, что данная зависимость имеет максимум при длине волны, удовлетворяющей условию $T\lambda_m = b$, где $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К. Полученный закон называется законом смещения Вина.

Пример 66

Имеется два абсолютно черных источника теплового излучения. Температура одного из них $T_1 = 2500$ К. Найти температуру другого источника, если длина волны, отвечающая максимуму его испускательной способности, на $\Delta\lambda = 0,50$ мкм больше длины волны, соответствующей максимуму испускательной способности первого источника.

Решение

Для решения данной задачи используем закон смещения Вина: $\lambda_m = b/T$, где λ_m - длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения, b - постоянная Вина, T - термодинамическая температура абсолютно чёрного тела. Запишем закон смещения Вина для каждого источника: $\lambda_1 = b/T_1$, $\lambda_2 = b/T_2$. По условию задачи: $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$. Подстановка в последнее соотношение предыдущих выражений позволяет получить: $b/T_2 = \Delta\lambda + b/T_1$. Тогда: $b/T_2 = (T_1\Delta\lambda + b)/T_1$. Из данного соотношения выражаем температуру T_2 : $T_2 = b \cdot T_1 / (b + T_1\Delta\lambda)$. Подстановка в данное соотношение заданных по условию параметров позволяет получить: $T_2 = 2,9 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 10^3 \text{ м} \cdot \text{К} \cdot \text{К} / (2,9 \cdot 10^{-3} + 2,5 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-7}) \approx 1,75 \cdot 10^3 \text{ К}$.

Пример 67

Принимая коэффициент теплового излучения ε угля при температуре $T = 600$ К равным 0,8, определить:

- 1) энергетическую светимость M_e угля;
- 2) энергию W , излучаемую с поверхности угля с площадью $S = 5 \text{ см}^2$ за время $t = 10 \text{ мин}$.

Решение

В соответствии с законом Стефана-Больцмана энергетическая светимость серого цвета определяется соотношением: $R_e = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4$, где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$ - постоянная Стефана-Больцмана. Подстановка в данное соотношение заданных по условию параметров позволяет получить: $R_e = 0,8 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 1296 \cdot 10^8 \approx 5878 \text{ Вт/м}^2$. Энергетическая светимость R_e - это мощность излучения с единицы площади. Тогда энергия излучения определяется соотношением: $W = R_e S t$. Подстановка в данное соотношение заданных по условию параметров позволяет получить: $W = 5878 \text{ Вт/м}^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 600 \text{ К} = 1763,4 \text{ Дж}$.

19. Основы квантовой теории

Рэлей и Джинс сделали попытку определить равновесную плотность излучения $u(\omega, T)$, исходя из классической теории о распределении энергии по степеням свободы. Они предположили, что на каждое электромагнитное колебание приходится в среднем энергия, равная двум половинам kT (одна половина на электрическую составляющую волны, вторая - на магнитную). По классическим представлениям на каждую колебательную степени свобода приходится энер-

гия, равная двум половинам kT . Искомая плотность излучения получена в следующей форме:

$$u(\omega, T) = kT \omega^2 / \pi^2 c^3.$$

В данном случае выражение для испускательной способности абсолютно чёрного тела определяется соотношением:

$$f(\omega, T) = kT \omega^2 / 4\pi^2 c^2.$$

Данные соотношения называются формулами Рэлея-Джинса. Они удовлетворительно согласуются с экспериментом при больших длинах волн, но заметно расходятся при больших длинах волн (см. рис. 138). Интегрирование по всем частотам ω от 0 до ∞ даёт бесконечное значение для равновесной плотности энергии $u(T)$. Этот результат называется ультрафиолетовой катастрофой.

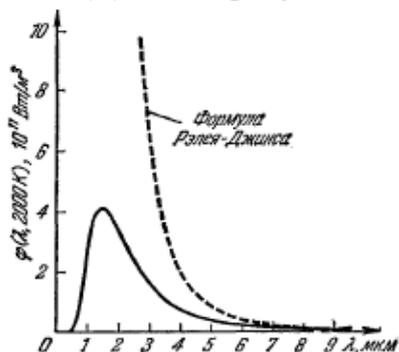


Рис. 138.

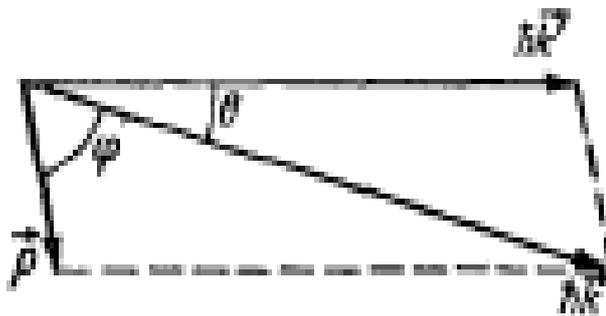


Рис. 139.

Формула Планка

В 1900 году Планку удалось найти вид функции $u(\omega, T)$, соответствующий экспериментальным данным. Было сделано допущение, что электромагнитное излучение испускается в виде отдельных порций энергии, величина которых пропорциональна частоте излучения ω : $\varepsilon = \hbar \omega$. Коэффициент пропорциональности называется постоянной Планка. Её числовое значение равно $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. В механике величина с аналогичной размерностью называется действием. По этой причине постоянная Планка называется квантом действия. Размерность \hbar совпадает с размерностью момента импульса. Если излучение испускается порциями $\hbar \omega$, то энергия ε_n , то его энергия должна быть кратной данной величине: $\varepsilon_n = n \hbar \omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Чтобы объяснить распределение энергии в спектре равновесного теплового излучения достаточно предположить, что свет испускается порциями $\hbar \omega$. Такие порции названы световыми квантами или фотонами.

Пример 68

Найти с помощью формулы Планка мощность излучения единицы поверхности абсолютно черного тела, приходящегося на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda = 1,0$ нм вблизи максимума спектральной плотности излучения, при температуре тела $T = 3000$ К.

Решение

Формула Планка для лучеспускательной способности чёрного тела имеет следующий вид:

$$u(\lambda, T) = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5} \frac{h}{\exp(hc/k\lambda T) - 1}.$$

Максимум спектральной плотности излучения приходится на длину волны $\lambda_m = b/T$. Удельная мощность излучения определяется следующим соотношением:

$$P = \int_{\lambda_m - \Delta\lambda/2}^{\lambda_m + \Delta\lambda/2} u(\lambda, T) d\lambda.$$

Подстановка в данное соотношение заданных по условию параметров позволяет получить: $P = 3,12 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$.

Фотоэффект

Фотоэлектрическим эффектом называется испускание электронов веществом под действием света. Это явление открыто Г. Герцем в 1887 г. Он заметил, что проскакивание искры между шариками разрядника значительно облегчается, если один из шариков облучить ультрафиолетовыми лучами.

В 1888-1889 г. А.Г. Столетов в результате своих опытов получил следующие результаты (законы фотоэффекта):

- 1) наибольшее воздействие оказывают ультрафиолетовые лучи;
- 2) сила тока возрастает с увеличением освещённости пластины;
- 3) испускаемые под действием света заряды имеют отрицательный знак. Позже (в 1898 г.) Ленардом и Томсоном было показано, что эти частицы являются электронами.

В 1905 Эйнштейн показал, что закономерности фотоэффекта можно объяснить, если предположить, что свет поглощается такими же порциями $\hbar\omega$, какими и испускается. Число высвобождаемых вследствие фотоэффекта электронов должно быть пропорционально числу падающих на поверхность квантов света. Предполагается, что квант $\hbar\omega$ поглощается полностью. Часть энергии, равная работе выхода A (существенно зависит от состояния поверхности металла), затрачивается на то, чтобы электрон покинул тело. Если электрон освобождается светом не у самой поверхности, а на некоторой глубине, то часть полученной энергии теряется электроном на случайные столкновения в веществе. Оставшаяся энергия образует кинетическую энергию электрона $m v^2/2$, покинувшего вещество. В этом случае должно выполняться соотношение Эйнштейна:

$$\hbar\omega = A + m v^2/2.$$

Из данного соотношения следует, что в случае, когда работа выхода электрона превысит энергию кванта, электроны не могут покинуть металл. По этой причине для выхода электрона из металла энергия кванта должна превышать работу выхода. Таким образом, существует максимальная длина волны (минимальная частота) кванта, при которой осуществляется фотоэффект $\omega \geq \omega_0 = A/\hbar$,

$\lambda \leq \lambda_0 = 2\pi \hbar c / A$. Частота ω_0 и длина волны λ_0 называются красной границей фотоэффекта.

Если электрон получает энергию только от одного фотона, процесс называется однофотонным. Если электрон получает энергию от N фотонов, процесс называется многофотонным. В случае многофотонного процесса соотношение Эйнштейна принимает вид:

$$N \hbar \omega = A + m v^2 / 2.$$

Кроме рассмотренного выше внешнего фотоэффекта существует также внутренний фотоэффект. Он заключается в обусловленном действием светом перераспределении электронов по энергетическим уровням. Если энергия кванта превышает ширину запрещённой зоны, электрон переходит из валентной зоны в зону проводимости. Если в материале имеются примеси, электрон может перейти из валентной зоны на уровни примеси.

В области p - n -перехода или на границе металла с полупроводником может наблюдаться вентильный полупроводник. Он заключается в возникновении под действием света э.д.с. (фото-ЭДС). Неосновные для данной области носители заряда (электроны в p -области и дырки в n -области), возникшие под действием света, беспрепятственно проходят через переход. В результате в p -области накапливается избыточный положительный заряд, в n -области - избыточный отрицательный. Это приводит к возникновению приложенного к переходу напряжения, которое представляет собой фотоэлектродвижущую силу.

Масса и импульс фотона

Пусть фотон имеет энергию $E = \hbar \omega$. По аналогии с импульсом классической частицы введём импульс фотона: $p = E/c = \hbar \omega/c = \hbar k$. Аналогично вводится масса фотона: $m = E/c^2 = \hbar \omega/c^2$.

Пример 69

Определить красную границу фотоэффекта для металла с работой выхода 2 эВ.

Решение

Из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта имеем: $h \nu_{min} = A$. Частота света ν связана с его скоростью c и длиной волны λ следующим соотношением: $\nu = c/\lambda$. Из данных соотношений получаем: $h \cdot c / \lambda_{max} = A$. Тогда $\lambda_{max} = h \cdot c / A$. Подстановка в данное соотношение заданных по условию параметров позволяет получить: $\lambda_{max} = 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ м} = 6,2 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

Пример 70

Найдите максимальную скорость электронов ν_{max} , освобождаемых при фотоэффекте светом с длиной волны $\lambda = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ с поверхности материала с работой выхода $A_{вых} = 1,9 \text{ эВ}$.

Решение

Для решения данной задачи воспользуемся уравнением Эйнштейна для фотоэффекта, подставив в него выражение для максимальной кинетической энергии электронов: $h \nu = A + m \nu_{max}^2 / 2$. Частота света ν связана с его скоростью c и длиной

волны λ следующим соотношением: $\nu=c/\lambda$. Подстановка последнего соотношения в предыдущее позволяет получить: $m v_{max}^2/2=h\cdot c/\lambda -A$. Тогда максимальное значение скорости определяется следующим соотношением:

$$v_{max} = \sqrt{2 \frac{(hc/\lambda) - A}{m}}.$$

Подстановка в данное соотношение заданных по условию параметров позволяет получить:

$$v_{max} = \sqrt{2 \frac{(6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 4 \cdot 10^{-7}) - 3,04 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \frac{м}{с} \approx 6,5 \cdot 10^5 \frac{м}{с}.$$

Давление света

Электромагнитная теория давления света

Двлением света называется механическое действие, производимое светом при падении его на поверхность тела. С точки зрения электромагнитной теории давление света объясняется возникновением механических сил, действующих на электроны, находящиеся вблизи освещаемой поверхности тела, и обусловленных электромагнитным полем световой волны. Электрическое поле возбуждает колебания электронов в поверхностном слое тела. Действие магнитного поля описывается силой Ампера, направление которой задаётся вектором Пойнтинга световой волны. Давление света определяется величиной вектора Пойнтинга и углом θ , под которым падает световая волна на поверхность тела.

Квантовая теория давление света

Согласно квантовой теории давление света объясняется передачей фотонами своего импульса атомам или молекулам поверхностного слоя освещаемого тела. Если свет полностью поглощается поверхностью, то при световом потоке с плотностью фотонов n на единицу поверхности в единицу времени падает $n c$ фотонов. Давление света p на поверхность тела - это импульс, сообщаемый в единицу времени единице поверхности:

$$p = (E/c) n c = E n = u,$$

где u - объёмная плотность электромагнитной энергии световой волны. Усреднение по времени последнего соотношения позволяет показать, что описание давления света в рамках электромагнитной и квантовой теорий эквивалентно.

Эффект Комптона

Эффектом Комптона называется явление изменения длины волны фотонов при их рассеянии на электронах. В 1922 г. опыт Комптона показал, что в рассеянном излучении наряду с исходной волной длины λ имеется смещённая линия с длиной волны $\lambda_1 > \lambda$. При этом разность $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda$, называемая комptonовским смещением, не зависит от природы рассеиваемого вещества и длины падающей волны λ , а зависит только от угла θ между направлениями падающего и рассе-

янного излучений. Эффект Комптона наблюдается при рассеянии монохроматических рентгеновских лучей на лёгких веществах (графите, парафине и т.д.), при рассеянии рентгеновских лучей на электронных оболочках атомов.

В квантовой теории (Комптон, Дебай) эффект Комптона рассматривается как процесс упругого столкновения фотонов со свободными электронами. В атомах вещества свободными можно считать электроны, энергия связи которых в атоме значительно меньше энергии, передаваемой фотоном электрону при соударении. Это условие хорошо выполняется для лёгких атомов и для периферических слабо связанных электронов более тяжёлых элементов. Их энергия связи составляет величину порядка нескольких электронвольт и является ничтожно малой по сравнению с энергией фотона рентгеновских лучей.

Пусть фотон с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\omega/c$ сталкивается с покоящимся электроном, имеющим энергию m_0c^2 , где m_0 – масса покоя электрона. После столкновения энергия фотона и его импульс примут значения $\hbar\omega'$ и $\hbar\omega'/c$, а энергия электрона будет равна $c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$, где p - его импульс после столкновения (рис. 2). Из законов сохранения энергии и импульса

$$\hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}, \quad \hbar k = \hbar k' + p$$

следует соотношение для комптоновского рассеяния

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c [1 - \cos(\theta)] = 2\lambda_c \sin^2(\theta/2), \quad (1)$$

где $\lambda = 2\pi/k$, $\lambda' = 2\pi/k'$ - длина волны до и после рассеяния, θ - угол между направлениями падающего и рассеянного фотона. Величина

$$\lambda_c = 2\pi\hbar/m_0c = h/m_0c$$

называется комптоновской длиной волны частицы с массой m_0 (в данном случае - электрона). При $\theta = \pi/2$ можно получить $\Delta\lambda = \lambda_c$. При $\theta = \pi$ можно получить $\Delta\lambda = 2\lambda_c$. Экспериментальное и теоретическое значения для электрона соответственно равны:

$$\lambda_{c,эксп} = (2,424 \pm 0,004) \cdot 10^{-12} \text{ м}, \quad \lambda_{c,теор} = (2,4263089 \pm 0,000004) \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

В настоящее время чаще используется величина $\tilde{\lambda}_c = \lambda_c/2\pi = 3,8615905 \pm 0,0000064 \cdot 10^{-12} \text{ с}$, также называемая комптоновской длиной волны электрона.

С увеличением атомного номера рассеивающего вещества интенсивность несмещённой линии λ возрастает, а интенсивность смещённой - падает. Это явление может быть объяснено тем, что электроны внутренних областей атома (внутренние электроны) сильно связаны с атомом и приближение о свободных электронах, рассеивающих фотоны, оказывается слишком грубым. При соударении фотона со связанным электроном обмен энергией и импульсом осуществляется с атомом как с целым. Так как масса атома намного больше массы электрона, комптоновское рассеяние мало, а величина энергии $\hbar\omega$ при рассеянии изменится мало. С увеличением атомного номера относительное число элек-

тронов, сильно связанных с атомом, увеличивается, что приводит к ослаблению интенсивности смещённой линии и увеличению интенсивности линии, соответствующей падающему пучку света.

Преобразование соотношения (1) позволяет получить соотношение для частоты рассеянного фотона в следующем виде:

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + (\hbar \omega / m_0 c^2) [1 - \cos(\theta)]},$$

где ω - частота падающего фотона, θ - угол рассеяния. Так как движения свободных электронов независимы, то рассеяние фотонов на них некогерентно. Колебания связанных электронов согласованы, что приводит к когерентному рассеянию фотонов, а падающая и рассеянные волны будут интерферировать между собой.

Пример 71

Пучок параллельных лучей света падает нормально на зеркальную поверхность площадью $S=2 \text{ м}^2$. Энергетическая освещенность поверхности $E_e=0,6 \text{ Вт/м}^2$. Определить силу давления F , испытываемую этой поверхностью.

Решение

Сила давления определяется с помощью следующего соотношения: $F = PS = E_e \cdot S(1+\rho)/c$, где $\rho=1$ - коэффициент отражения света. Подстановка в данное соотношение заданных по условию параметров позволяет получить: $F = PS = 0,6 \cdot 2 \cdot 2/3 \cdot 10^8 = 8 \cdot 10^9 \text{ Н}$.

Пример 72

На зеркальную поверхность площадью 1 см^2 каждую секунду падает $5 \cdot 10^{16}$ фотонов. Длина волны света $\lambda = 6,63 \cdot 10^{-7} \text{ м}$. Найти световое давление, испытываемое данной поверхностью.

Решение

Сила давления определяется с помощью следующего соотношения: $F = PS = E_e \cdot (1+\rho)S/c$, где $\rho=1$ - коэффициент отражения света. С учётом соотношений $E_e = h c N/\lambda$ и $N = n/c$ соотношение для искомого давления примет вид: $P = h N/\lambda c$. Подстановка в данное соотношение заданных по условию параметров позволяет получить: $P = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$.

20. Физика атома

Спектр атома водорода. Правило отбора

В первой четверти 20 века было установлено, что атом состоит из положительно заряженного ядра и окружающей его электронной оболочки. Размеры ядра $\sim 10^{-13} \div 10^{-12} \text{ м}$. Размеры атома, определяемые электронной оболочкой, примерно в 10^5 раз больше. В рамках классической физики данная система должна быть непрерывной. Однако процессы внутри атома являются дискретными. Н. Бором в 1913 г. были установлены два постулата:

1) атом (и любая атомная система) может находиться не во всех состояниях, допускаемых классической механикой, а только в избранных (квантовых) со-

стояниях, характеризующихся только дискретными значениями энергии E_1, E_2, E_3, \dots . В этих состояниях, вопреки классической электродинамике, атом не излучает. По этой причине они называются стационарными состояниями;

2) при переходе из стационарного состояния с большей энергией E_{n_2} в стационарное состояние с меньшей энергией E_{n_1} энергия атома изменяется от $E_{n_2} - E_{n_1}$. Если такое изменение происходит из-за излучения, то при этом испускается один фотон с энергией:

$$h\nu = \hbar\omega = E_{n_2} - E_{n_1}.$$

Такое же соотношение справедливо и для случая поглощения фотона, когда фотон переводит атом с более низкого на более высокий уровень, а сам при этом исчезает. Последнее соотношение называется правилом частот Бора. Таким образом, атомная система переходит из одного состояния в другое скачками (квантами). Что происходит с системой во время перехода из одного состояния в другое теория Бора ответа не даёт. Возможны многофотонные процессы, когда излучаются или испускаются несколько фотонов. Но такие процессы нелинейны. Они могут происходить только в сильных полях, формируемых, например, мощными лазерными импульсами. Возможны безизлучательные процессы, когда энергия выделяется или поглощается в виде тепла.

Дуализм свойств микрочастиц. Соотношение неопределённостей Гейзенберга

К середине 20-х годов XX века из опыта было известно, что в одних явлениях (интерференция, дифракция, ...) свет ведёт себя как волны, в других (фотоэффект, эффект Комптона, ...) – как частицы. Л. де Бройль поставил вопрос, не распространяется ли корпускулярно-волновой дуализм и на обычное вещество? Ответ, подтверждённый опытами оказался положительным.

Пусть частица движется в свободном пространстве с постоянной скоростью \vec{v} . Л. де Бройль предположил, что с такой частицей связана какая-то плоская монохроматическая волна:

$$\Psi = \Psi_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)},$$

распространяющаяся в направлении скорости \vec{v} . О природе этой волны, т.е. о физическом смысле функции Ψ , Л. де Бройль не смог сказать ничего определённого.

Рассмотрим несколько свойств волны де Бройля. Её длина определяется следующим соотношением:

$$\lambda = 2\pi/k = 2\pi\hbar/p = 2\pi h/p,$$

где p - импульс частицы. Длина волны де Бройля определяется однозначно в инерциальной системе отсчёта. Для фазовой и групповой скоростей волн де Бройля можно получить:

$$v_\phi = \omega/k = E/p, \quad v_{gp} = d\omega/dk = dE/dp,$$

где E - энергия частицы, групповая скорость совпадает со скоростью частицы.

Из релятивистской теории следует, что $v_{sp}v_{\phi}=c^2$.

Л. де Бройль использовал представление о фазовых волнах для наглядного толкования правила квантования Н. Бора в случае одноэлектронного атома. Он рассмотрел фазовую волну, бегущую вокруг ядра по круговой орбите электрона. Если на орбите длина волны убирается целое число раз, то волна при обходе вокруг ядра будет всякий раз возвращаться в исходную точку с одной и той же фазой и амплитудой. В этом случае условие стационарности орбиты (правило квантования) имеет вид: $2\pi R/\lambda=n$, где R - радиус круговой орбиты, λ - длина волны, n - целое (главное квантовое) число, $L = n\hbar$ - момент количества движения (импульса) электрона.

В классической механике состояние материальной точки (классической частицы) определяется заданием значений координат, импульса, энергии и т.д. Данные величины называются динамическими переменными. Микрообъекту не могут быть приписаны данные динамические переменные. Однако информацию о микрочастицах можно получить, наблюдая их взаимодействие с приборами, представляющими собой макроскопические тела. По этой причине результаты измерений выражаются в терминах, разработанных для характеристики макротел, т.е. через значения динамических переменных. В соответствии с этим измеренные значения динамических переменных приписываются микрочастицам. Например, говорят о состоянии электрона, в котором он имеет определённое значение энергии и т.д.

Своеобразие свойств микрочастиц проявляется в том, что не для всех переменных получается при измерениях определённые значения. Так, например, электрон (или другая микрочастица) не может иметь одновременно точных значений координаты x и компоненты импульса p_x . Неопределённости значений x и p_x удовлетворяют соотношению: $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2$.

Определение 163

Утверждение о том, что произведение неопределённостей значений двух сопряжённых величин не может быть по порядку величины меньше постоянной Планка \hbar , называется принципом неопределённости Гейзенберга.

Энергия и время являются канонически сопряжёнными величинами. Поэтому для них также справедливо соотношение неопределённости: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$.

Уравнение Шредингера

Плоская волна де Бройля $\Psi = \Psi_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ соответствует свободному равномерному движению частиц в определённом направлении и с определённым импульсом. Но частица в потенциальных полях может совершать и другие движения, описываемые более сложными волновыми функциями. Данные функции удовлетворяют уравнению Шредингера (1926 г.). Уравнение Шредингера в отсутствие силовых полей (нерелятивистский случай) имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi.$$

Физический смысл волновой функции: $\Psi\Psi^*$ - вероятность dP того, что частица находится в объёме dV .

При учёте силовых полей оно приобретает дополнительное слагаемое:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(\vec{r})\Psi.$$

Например, в атоме водорода для электрона в поле ядра полагают $U(r) = -e^2/r$, т.е. поступают также, как если бы обе эти частицы были бы локализованы.

По аналогии со световыми квантами примем гипотезу, что величина $\hbar\omega$ представляет собой полную энергию частицы E в стационарном состоянии. Стационарное уравнение Шредингера имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(\vec{r})\Psi = E\Psi.$$

Значения E принимаются за возможные состояния энергии в стационарных состояниях. Они могут принимать как дискретные значения, так и непрерывно изменяться в некоторой области. В этом случае спектр энергии называется соответственно дискретным или непрерывным.

Пример 73 (спектр энергии в бесконечно глубокой потенциальной яме)

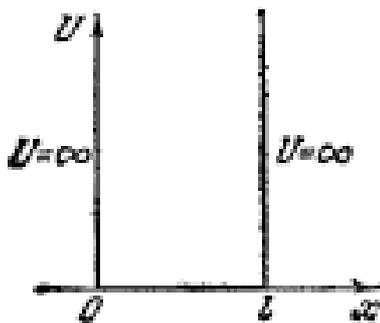


Рис. 140.

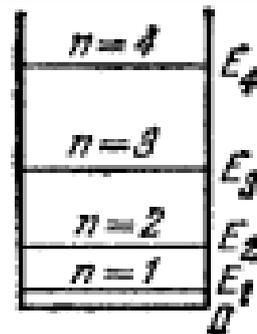


Рис. 141.

Найдём собственные значения энергии и соответствующие им собственные функции для частицы, находящейся в бесконечно глубокой потенциальной яме (рис. 142). Предположим, что частица может двигаться только вдоль оси x . Пусть движение ограничено непроницаемыми для частицы стенками с координатами $x=0$ и $x=L$. Потенциальная энергия имеет в этом случае следующий вид: она равна нулю при $0 \leq x \leq L$ и бесконечности при $x < 0$ и $x > L$.

В рассматриваемом случае потенциальная яма является одномерной. По этой причине и уравнение Шредингера также является одномерным, т.е.:

$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0.$$

За пределы потенциальной ямы частица попасть не может. По этой причине вероятность обнаружения частицы вне ямы равна нулю. Соответственно и волновая функция за пределами ямы равна нулю. Тогда в стлу непрерывности волновой функции можно записать следующие граничные условия: $\Psi(0) = \Psi(L) = 0$.

Внутри ямы уравнение Шредингера имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0.$$

Решение данного уравнения может быть представлено в следующей форме:

$$\Psi = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x\right),$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования. Из условия $\Psi(0)=0$ следует, что $C_1=0$.

Из условия $\Psi(L)=0$ следует, что $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2}$. Таким образом, спектр энергии

оказался дискретным. На рис. 143 изображена схема энергетических уровней. На рис. 142 и 143 изображены волновая функция и плотность вероятности, соответствующие различным значениям энергии.

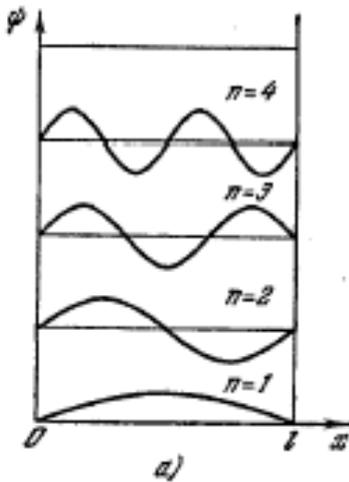


Рис. 142.

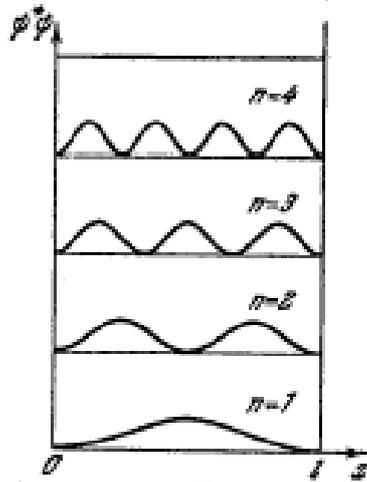


Рис. 143.

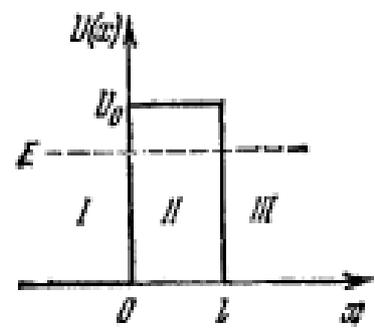


Рис. 144.

Пример 74 (прохождение частиц через потенциальный барьер)

Пусть частица, движущаяся слева направо, встречает на своём пути потенциальный барьер высоты U_0 и ширины L (рис. 144). По классическим представлениям поведение частицы имеет следующий характер. Если энергия частицы больше высоты барьера ($E > U_0$), частица беспрепятственно проходит над барьером (на участке $0 \leq x \leq L$ лишь уменьшится скорость частица, а на участке $x > L$ скорость снова принимает первоначальное состояние). Если энергия E частицы меньше высоты барьера U_0 , частица отражается от барьера и летит в противоположную сторону. Сквозь барьер частица проникнуть не может.

Поведение частицы в квантовой механике носит другой характер:

- (i) при $E > U_0$ имеется отличная от нуля вероятность того, что частица отразится от барьера и полетит в обратную сторону;
- (ii) при $E < U_0$ имеется отличная от нуля вероятность того, что частица проникает "сквозь" барьер и окажется в области $x > L$. Такое, невозможное с классической точки зрения, поведение частицы следует из уравнения Шредингера.

Рассмотрим случай $E < U_0$. В этом случае стационарное уравнение Шрединге-

ра имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0$$

для областей I и III или

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \Psi = 0$$

для области II. Причём $E - U_0 < 0$. Решение данных уравнений будем искать по методу Эйлера ($\Psi \sim e^{\lambda x}$). Общее решение данных уравнений представимо в следующей форме:

$$\Psi = A_1 \cdot \exp\left(i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x\right) + B_1 \cdot \exp\left(-i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x\right) \text{ для области I,}$$

$$\Psi = A_1 \cdot \exp\left(i \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar} x\right) + B_1 \cdot \exp\left(-i \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar} x\right) \text{ для области II,}$$

$$\Psi = A_3 \cdot \exp\left(i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x\right) + B_3 \cdot \exp\left(-i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x\right) \text{ для области III.}$$

В области III имеется только прошедшая волна. По этой причине $B_3 = 0$. Для определения остальных коэффициентов воспользуемся условиями, которым должна удовлетворять волновая функция. Волновая функция является гладкой и непрерывной (т.е. непрерывной вместе со своей производной). В этом случае получаем:

$$\Psi_1(-0) = \Psi_2(+0); \quad \Psi_2(L-0) = \Psi_3(L+0); \quad \left. \frac{\partial \Psi_1(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \Psi_2(x)}{\partial x} \right|_{x=0}; \quad \left. \frac{\partial \Psi_2(x)}{\partial x} \right|_{x=L} = \left. \frac{\partial \Psi_3(x)}{\partial x} \right|_{x=L}.$$

Из данных условий следуют соотношения:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \quad \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar} \left(A_2 e^{L\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar} - B_2 e^{-L\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar} \right) = i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} A_3 e^{L\sqrt{2mE}/\hbar},$$

$$i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} (A_1 - B_1) = (A_2 - B_2) \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}, \quad A_2 e^{L\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar} + B_2 e^{-L\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar} = A_3 e^{L\sqrt{2mE}/\hbar}.$$

Дополнив данную систему уравнений условием нормировки, получаем полную систему для определения параметров A_1, A_2, B_1, B_2 и B_3 .

Определение 164

Отношение квадратов модулей амплитуд отражённой и падающей волн $R = |B_1|^2 / |A_1|^2$ определяет вероятность отражения частицы от потенциального барьера и может быть названо коэффициентом отражения.

Определение 165

Отношение квадратов модулей амплитуд прошедшей и падающей волн D

$=|A_3|^2/|A_1|^2$ определяет вероятность отражения частицы от потенциального барьера и может быть названо коэффициентом прохождения (коэффициентом прозрачности).

Коэффициенты R и D связаны очевидным соотношением: $R+D=1$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Тело лежит на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 4^\circ$ (рис. 140). Какое время t потребуется для прохождения пути при коэффициенте трения $k=0,02$? Какую скорость v тело будет иметь в конце пути?

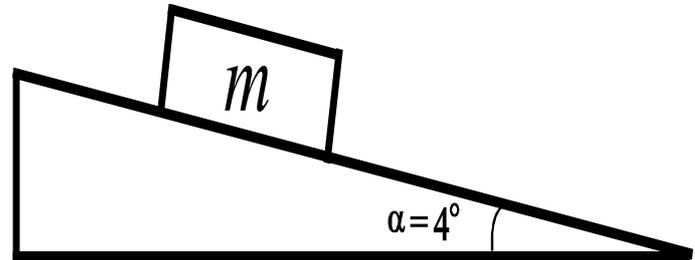


Рис. 140.

2. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45^\circ$ (рис. 141). Пройдя путь $S=36,4$ см, тело приобретает скорость $v = 2$ м/с. Найти коэффициент трения k тела о плоскость.

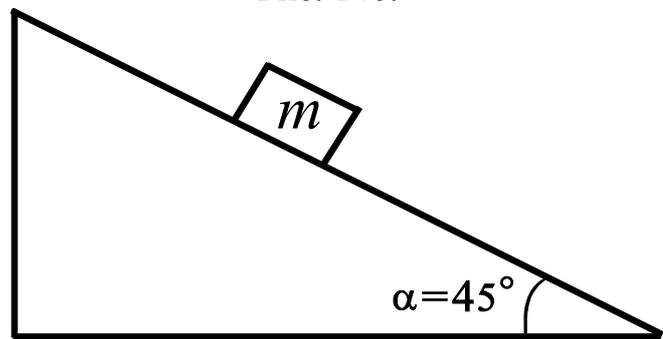


Рис. 141.

3. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45^\circ$ (рис. 140). Зависимость пройденного телом пути S от времени t даётся уравнением $S = Ct^2$, где $C = 1,73$ м/с². Найти коэффициент трения k тела о плоскость.

4. Невесомый блок укреплен на конце стола (рис. 142). Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинута через блок. Коэффициент трения гири 2 о стол $k = 0,1$. Найти ускорение a с которым движутся гири, и силу натяжения нити T . Трением в блоке пренебречь.

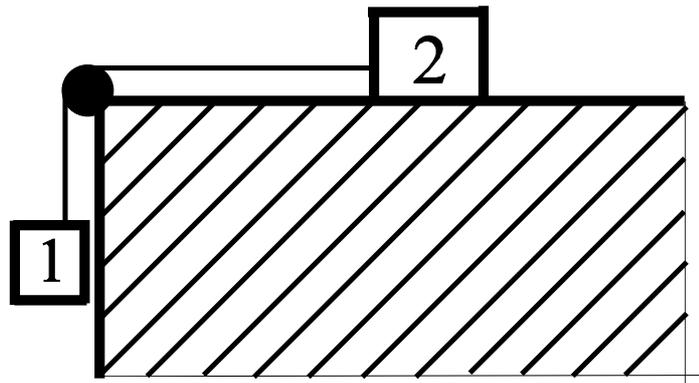


Рис. 142.

5. Невесомый блок укреплен в вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha=30^\circ$ (рис. 143). Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1=m_2=1$ кг соединены нитью и перекинута через блок. Найти ускорение a , с которым движутся гири, и силу натяжения T . Коэффициент трения

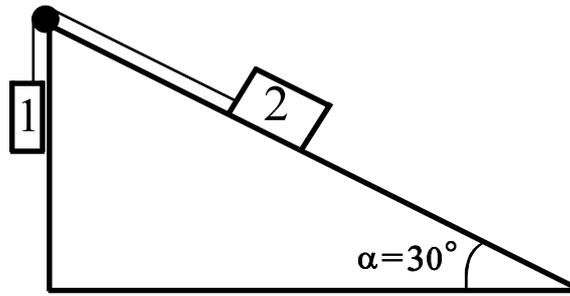


Рис. 143.

гири 2 о наклонную плоскость равен $k=0,1$.

6. Невесомый блок укреплен в вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha=30^\circ$ и $\beta=45^\circ$ (рис. 144). Гири одинаковой массы $m_1=m_2=1$ кг соединены нитью и перекинута

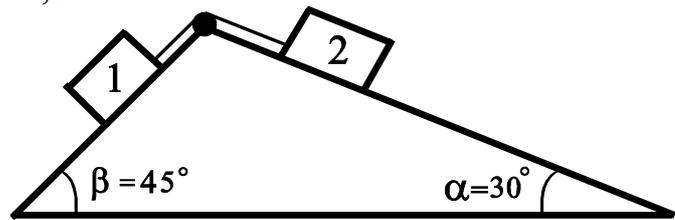


Рис. 144.

через блок. Найти ускорение a , с которым движутся гири, и силу натяжения нити T . Коэффициенты трения гирь о поверхности равны $k_1=k_2=0,1$.

7. Камень, пущенный по поверхности льда со скоростью $v=3$ м/с, прошёл до остановки расстояние $S=20,4$ м. Найти коэффициент трения k камня о лёд.

8. Вагон массой 20 т, двигаясь равнозамедленно с начальной скоростью $v_0=54$ км/ч, под действием силы трения $F_{тр}=6$ кН через некоторое время останавливается. Найти работу A сил трения и расстояние S , которое вагон пройдёт до остановки.

9. Найти работу A , которую необходимо совершить, чтобы увеличить скорость движения тела массой $m=1$ т от $v_1=2$ м/с до $v_2=6$ м/с на пути $S=10$ м. На всём пути действует сила трения $F_{тр}=2$ Н.

10. На автомобиль массой $m=1$ т во время движения действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,1 действующей на него силы тяжести mg . Найти силу тяги F , развиваемую мотором автомобиля, если автомобиль движется с ускорением $a=1$ м/с² в гору с уклоном 1 м на каждые 25 м пути.

11. Канат лежит на столе так, что часть его свешивается со стола, и начинает скользить тогда, когда длина свешивающейся части составляет 1/4 его длины. Найти коэффициент трения k каната о стол.

12. Два шара одинакового радиуса $R=5$ см закреплены на концах невесомого стержня. Расстояние между шарами $r=0,5$ м. Масса каждого шара $m=1$ кг. Найти: а) момент инерции J_1 системы относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно ему; б) момент инерции J_2 относительно той же оси, считая шары материальными точками, массы которых сосредоточены в их центрах; в) относительную ошибку $\delta=(J_1-J_2)/J_2$, которая будет допущена при вычислении момента инерции системы, заменяя J_1 на J_2 .

13. К ободу однородного диска радиуса $R=0,2$ см приложена касательная сила F

$=98,1 \text{ Н}$. При вращении на диск действует момент силы трения $M_{\text{тр}}=4,9 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Найти массу диска m , если известно, что диск вращается с угловым ускорением $\beta=100 \text{ рад/с}^2$.

14. Однородный стержень длиной $l=1 \text{ м}$ и массой $m=0,5 \text{ кг}$ вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину стержня. С каким угловым ускорением β вращается стержень, если на него действует момент сил $M=4,9 \text{ Н}\cdot\text{м}$?

15. Шар массой $m=1 \text{ кг}$, катящийся без скольжения, ударяется о стенку и отскакивает от неё. Скорость шара до удара $v_1=10 \text{ см/с}$, после удара $v_2=8 \text{ см/с}$. Найти количество теплоты Q , выделившееся в момент удара.

16. Маховик, момент инерции которого $J=63,6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, вращается с угловой скоростью $\omega=31,4 \text{ рад/с}$. Найти момент сил торможения M , под действием которого маховик останавливается через время $t=20 \text{ с}$. Маховик считать однородным диском.

17. Определить угловое ускорение блока радиусом R с моментом инерции J , через который перекинута нить с грузами массой m_1 и m_2 (рис. 145). Трением пренебречь.

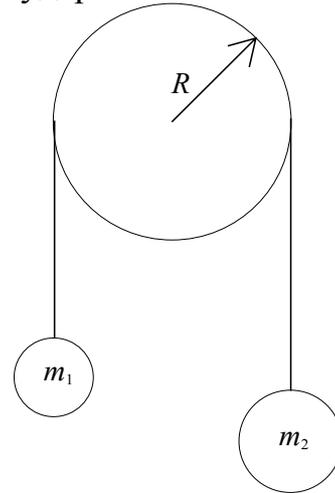


Рис. 145.

18. Диск массой $m=2 \text{ кг}$ катится без скольжения по горизонтальной поверхности со скоростью $v=4 \text{ м/с}$.

Найти кинетическую энергию диска.

19. По горизонтальной поверхности катится обруч со скоростью $v=7,2 \text{ км/ч}$. На какое расстояние может вкатиться обруч на горку за счёт кинетической энергии? Уклон горки равен 10 м на каждые 100 м пути.

20. Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого $J=50 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ и радиус $R=20 \text{ см}$. Момент сил трения вращающегося блока $M_{\text{тр}}=98,1 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Найти разность сил натяжения нити T_1-T_2 по обе стороны блока, если известно, что блок вращается с угловым ускорением $\beta=2,36 \text{ рад/с}^2$. Блок считать однородным блоком.

21. Мяч, летящий со скоростью $v_1=15 \text{ м/с}$, отбрасывается ракеткой в противоположную сторону со скоростью $v_2=20 \text{ м/с}$. Найти изменение импульса, если изменение кинетической энергии $\Delta W=8,75 \text{ Дж}$.

22. Сила $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ действует на частицу (рассматривается как материальная точка) массой $m=1 \text{ кг}$. При $t=0$ положение частицы описывается радиус-вектором $\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j}$, и она движется со скоростью $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$. Найти для $t=0$: а) силу, действующую на частицу; б) ускорение частицы; в) кинетическую энергию частицы.

23. Вагон массой 20 т , двигаясь равнозамедленно с начальной скоростью $v_0=54 \text{ км/ч}$, под действием силы трения $F_{\text{тр}}=-\alpha x$, $\alpha=100 \text{ Н/м}$ через некоторое время останавливается. Найти работу A сил трения и расстояние S , которое вагон

пройдёт до остановки.

24. Камень массой $m=1$ кг брошен вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=9,8$ м/с. Построить график зависимости от времени кинетической энергии W_k , потенциальной энергии W_n и полной энергии W камня для интервала времени $0 \leq t \leq 2$ с.
25. Камень массой $m=1$ кг брошен вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=9,8$ м/с. Построить график зависимости от расстояния кинетической энергии W_k , потенциальной энергии W_n и полной энергии W камня для интервала времени $0 \leq t \leq 2$ с.
26. Камень брошен со скоростью $v_0=15$ м/с под углом $\alpha=60^\circ$ к горизонту. Найти кинетическую энергию W_k , потенциальную энергию W_n и полную энергию W камня: а) через $t=1$ с после начала движения; б) в высшей точке траектории. Масса камня $m=0,2$ кг.
27. Вагон массой $m=20$ т движется с начальной скоростью $v_0=54$ км/ч. Найти среднюю силу \bar{F} , действующую на вагон, если известно, что вагон останавливается в течении времени: а) $t=1$ ч 40 мин; б) $t=10$ с; в) $t=1$ с.
28. Какую силу F надо приложить к вагону, стоящему на рельсах, чтобы вагон стал двигаться равноускоренно и за время $t=30$ с прошёл путь $S=11$ м? Масса вагона $m=20$ т. Во время движения на вагон действует сила трения $F_{тр}$, равная $0,05$ действующей на него силы тяжести mg .
29. Поезд массой $m=5000$ т после прекращения тяги тепловоза под действием силы трения $F_{тр}=98$ кН останавливается через время $t=1$ мин. С какой скоростью v_0 шёл поезд?
30. Тело массой $m=0,5$ кг движется прямолинейно. Зависимость пройденного телом пути S от времени t определяется соотношением $S=A-Bt+Ct^2-Dt^3$, где $C=5$ м/с², $D=1$ м/с³. Найти силу F , действующую на тело в конце первой секунды движения.
31. Масса лифта с пассажирами $m=800$ кг. С каким ускорением a и в каком направлении движется лифт, если известно, что сила натяжения троса, поддерживающего лифт: а) $T=12$ кН; б) $T=6$ кН.
32. К нити подвешена гиря. Если поднимать гирю с ускорением $a_1=2$ м/с², то сила натяжения нити T_1 будет вдвое меньше той силы натяжения T_2 , при котором нить разрывается. С каким ускорением a_2 надо поднимать гирю, чтобы нить разорвалась?
33. С аэростата, находящегося на высоте $h=300$ м, упал камень. Через какое время t камень достигнет земли, если: а) аэростат поднимается со скоростью $v=5$ м/с; б) аэростат опускается со скоростью $v=5$ м/с; в) аэростат неподвижен.
34. Тело падает с высоты $h=19,6$ м без начальной скорости. Какой путь пройдёт тело за n -ую секунду своего падения? За какое время тело пройдёт n -ый метр своего падения?
35. Мяч, брошенный горизонтально, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии $l=5$ м от места бросания. Высота места удара о стенку на $\Delta h=4,9$ м меньше высоты h , с которой брошен мяч. С какой скоростью брошен мяч? Под каким углом α мяч подлетает к поверхности стенки?

36. Камень брошен горизонтально со скоростью $v_x=15$ м/с. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения камня через $t=15$ с после начала движения.
37. На перроне стоит человек. Мимо него движется поезд. Первый вагон проехал за время $t=1$ с, второй - за время $t=1,5$ с. Длина вагона $l=12$ м. Найти ускорение a поезда и его скорость v_0 в начале наблюдения. Движение поезда считать равнопеременным.
38. Точка движется по окружности радиуса $R=20$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau=5$ см/с². Через какое время t после начала движения нормальное ускорение a_n точки будет: а) равно тангенциальному; б) вдвое больше тангенциального?
39. Точка движется по окружности радиуса $R=5$ см. Зависимость пути от времени даётся уравнением $s=ct^3$, где $c=0,1$ см/с³. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения точки в момент, когда линейная скорость точки $v_x=0,3$ м/с.
40. Колесо радиуса $R=10$ см вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени определяется соотношением $\varphi=a+bt^2+ct^3$, где a , b и c - константы: $b=2$ рад/с², $c=1$ рад/с³. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через время $t=2$ с после начала движения: а) угловую ω и линейную v скорости; б) нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения; в) угловое ускорение β .
41. Тело участвует в двух вращениях, происходящих со скоростями $\vec{\omega}_1 = at^2\vec{i}$ и $\vec{\omega}_2 = at^2\vec{j}$, где $a=1$ рад/с². На какой угол φ повернётся тело за первые 3 с? Вокруг какой оси произойдёт этот поворот?
42. Тело массой $m=0,5$ кг движется прямолинейно. Изменение координаты тела x во времени описывается следующим соотношением: $x=a-bt+ct^2-dt^3$, где $c=5$ м/с², $d=1$ м/с³. Найти силу F , действующую на тело в конце первой секунды движения.
43. Тело массой $m=1$ кг движется так, что зависимость пройденного расстояния S от времени определяется соотношением $S=a\sin(\omega t)$, где $a=5$ см, $\omega=\pi$ рад. Найти ускорение, силу и импульс тела через $1/6$ с после начала движения.
44. Тело массой $m=1$ кг движется так, что его координаты x и y изменяются во времени следующим образом: $x=a-bt+ct^2$ и $y=-dt^3$, где $c=1$ м/с², $d=2$ м/с³. Определить ускорение тела и действующую на тело силу к концу пятой секунды.
45. Человек массой $m=60$ кг, бегущий со скоростью $v=8$ км/ч, догоняет тележку массой $M=80$ кг, движущейся со скоростью $u=2,9$ км/ч, и вскакивает на неё. С какой скоростью будет двигаться тележка? С какой скоростью будет двигаться тележка, если человек бежал ей на встречу?
46. Снаряд массой $m=100$ кг, летящей со скоростью $v=500$ м/с, попадает в вагон с песком, масса которого $M=60$ т. Какова скорость движения вагона после попадания снаряда, если: а) вагон стоял неподвижно; б) вагон двигался со скоростью $u=36$ км/ч в том же направлении, что и снаряд; в) вагон двигался со скоростью $u=36$ км/ч в направлении, противоположном движению снаряда.

47. Граната, летящая со скоростью $v=10$ м/с, разорвалась на два осколка. Большой осколок, масса которого составляла 0,6 массы гранаты, продолжал двигаться в том же направлении со скоростью $u=25$ м/с. Найти скорость меньшего осколка.
48. Тело массой $m=1$ кг, движущееся со скоростью $v=1$ м/с, догоняет второе тело массой $M=0,5$ кг и неупруго сталкивается с ним. Какую скорость получают тела, если: а) второе тело стояло неподвижно; б) второе тело двигалось со скоростью $u=0,5$ м/с в том же направлении, что и первое тело; в) второе тело двигалось со скоростью $u=0,5$ м/с в направлении, противоположном первому телу.
49. На покоящееся тело массы m налетает со скоростью v тело массы M . Сила, возникающая при взаимодействии тел, линейно растёт во времени до значения F_0 за время t_0 , а затем равномерно убывает до нуля за такое же время t_0 . Определить скорость тел после взаимодействия, считая, что все движения происходят по одной прямой.
50. Радиоактивное ядро распалось на три осколка массы m_1 , m_2 и m_3 , имеющих скорости v_1 , v_2 и v_3 соответственно. Какова была скорость ядра до распада?
51. Мяч, летящий со скоростью $v_0=15$ м/с, отбрасывается ракеткой в противоположную сторону со скоростью $v_1=20$ м/с. Найти изменение импульса, если изменение кинетической энергии $\Delta W=8,75$ Дж.
52. Молекула массой $m=4,65 \cdot 10^{-26}$ кг, летящая по нормали к стенке сосуда со скоростью $v=600$ м/с, ударяется о стенку и упруго отскакивает от неё без потери скорости. Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой за время удара.
53. Молекула массой $m=4,65 \cdot 10^{-26}$ кг, летящая со скоростью $v=600$ м/с, ударяется о стенку сосуда под углом $\alpha=60^\circ$ и упруго отскакивает от неё без потери скорости. Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой за время удара.
54. Тело массой $m=1$ кг движется так, что координата тела изменяется во времени по закону $x=a-bt+ct^2-dt^3$, где $b=4,5$ м/с², $c=5$ м/с², $d=1$ м/с³. Найти импульс тела через $t=1$ с.
55. Под действием силы $F=10$ Н тело массой $m=1$ кг движется так, что координата тела изменяется во времени по закону $x=a-bt+ct^2$, где $b=4,5$ м/с², $c=5$ м/с². Найти импульс тела через $t=1$ с.
56. Вагон массой $m=20$ т движется равнозамедленно, имея начальную скорость $v_0=54$ км/ч и ускорение $a=-0,3$ м/с². Каково изменение импульса силы торможения с начала торможения вагона до его остановки?
57. Тело с известной теплоёмкостью C охлаждается от T_1 до T_2 . Определить количество отданного телом тепла.
58. Получить уравнение состояния идеального газа, если его теплоёмкость изменяется: а) $C=C_V+\alpha T$; б) $C=C_V+\beta V$; в) $C=C_V+\delta p$. α , β и δ - постоянные величины.
59. Определить теплоёмкость моля идеального газа, если а) $p=\alpha V$; б) $V=\beta p^{-2/3}$. α и β - постоянные величины. C_V считать известной.
60. Найти удельную теплоёмкость кислорода для а) $V=const$ и б) $p=const$.

61. Найти удельную теплоёмкость c_p : а) хлористого водорода; б) неона; в) окиси азота; г) окиси углерода; д) паров ртути.
62. Найти отношение удельных теплоёмкостей c_p/c_V для кислорода.
63. Удельная теплоёмкость некоторого двухатомного газа $c_p=14,7 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$.
Найти молярную массу μ этого газа.
64. Плотность некоторого двухатомного газа при нормальных условиях $\rho=1,43 \text{ кг}/\text{м}^3$. Найти удельные теплоёмкости c_V и c_p этого газа.
65. Молярная масса некоторого газа $\mu=0,03 \text{ кг}/\text{моль}$, отношение $c_p/c_V=1,4$. Найти удельные теплоёмкости c_V и c_p этого газа.
66. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, найти удельную теплоёмкость: а) меди; б) железа; в) алюминия.
67. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, найти, из какого материала сделан металлический шарик массой $m=0,025 \text{ кг}$, если известно, что для его нагревания от $T_1=10^\circ \text{ С}$ до $T_2=30^\circ \text{ С}$ потребовалось затратить количество теплоты $Q=117 \text{ Дж}$.
68. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, найти, во сколько раз удельная теплоёмкость алюминия больше удельной теплоёмкости платины.
69. Какую длину l_0 должны иметь при температуре $T_0=0^\circ \text{ С}$ стальной и медный стержни, чтобы при любой температуре стальной стержень был длиннее медного на $\Delta l=5 \text{ см}$?
70. На нагревание медной болванки массой $m=1 \text{ кг}$, находящейся при температуре $T_0=0^\circ \text{ С}$, затрачено количество теплоты $Q=138,2 \text{ кДж}$. Во сколько раз при этом увеличился её объём? Удельную теплоёмкость меди найти по закону Дюлонга и Пти.
71. При нагревании некоторого металла от $T_1=0^\circ \text{ С}$ до $T_2=500^\circ \text{ С}$ его плотность уменьшается в 1,027 раза. Найти для этого металла коэффициент линейного расширения α , считая его постоянным в данном интервале температур.
72. К стальной проволоке радиусом $r=1 \text{ мм}$ подвешен груз. Под действием этого груза проволока получила такое же удлинение, как и при нагревании на $\Delta T=20^\circ \text{ С}$. Найти массу m груза.
73. Какую силу F необходимо приложить к концам стального стержня с площадью поперечного сечения $S=10 \text{ см}^2$, чтобы не дать ему расширяться при нагревании от температуры $T_1=0^\circ \text{ С}$ до $T_2=30^\circ \text{ С}$?
74. При нагревании металлического стержня от температуры $T_1=0^\circ \text{ С}$ до $T_2=250^\circ \text{ С}$ его длина увеличилась на 0,2 %. Определить коэффициент линейного расширения материала.
75. При температуре $T_1=0^\circ \text{ С}$ медный стержень имеет длину $l=10 \text{ см}$ и радиус $r=1 \text{ см}$. Через стержень проходит количество теплоты Q . В результате нагревания объём тела увеличивается на 0,1 %. Какое количество теплоты затрачено на нагревание тела?
76. К медной проволоке радиуса $l=1 \text{ см}$ подвешен груз массой $m=1 \text{ кг}$. Под действием этого груза проволока получила такое же удлинение, как и при нагре-

- вании на ΔT °C. Найти величину ΔT .
77. Температура медного стержня радиуса $r=1$ см увеличилась от температуры $T_1=0^\circ$ C до температуры T_2 . Тепловое расширение компенсируется силой $F=100$ кН. Найти температуру T_2 .
 78. Медный стержень радиуса $r=1$ см и массой $m=1$ кг при нагревании от температуры $T_1=0^\circ$ C до T_2 удлиняется на 0,1 %. Найти температуру T_2 .
 79. При температуре $T_1=0^\circ$ C медный стержень массой $m=1$ кг имеет длину $l=1$ см. К стержню приложена сила F , не дающая расширяться стержню при нагреве от температуры $T_1=0^\circ$ C до температуры $T_2=250^\circ$ C. Во сколько раз изменится сила F , если температуру повышать до $T_2=500^\circ$ C?
 80. Медный стержень нагревается от температуры $T_1=0^\circ$ C до температуры T_2 . При этом стержень удлиняется на 0,1 %. Определить температуру T_2 .
 81. Найти плотность водорода при температуре $T=15^\circ$ C и давлении $p=97,3$ кПа.
 82. Построить график зависимости плотности кислорода от:
 - а) давления при $T=390^\circ$ K в интервале значений $0 \leq p \leq 400$ кПа через каждые 50 кПа;
 - б) температуры T при $p=400$ кПа в интервале 200° K $\leq T \leq 300^\circ$ K через каждые 20° K.
 83. В сосуде объёмом 2 л находится углекислый газ (CO_2) $m_1=6$ г и закись азота (N_2O) $m_2=4$ г при температуре 400° K. Найти давление смеси в сосуде.
 84. В сосуде находится $m_1=14$ г азота и $m_2=9$ г водорода при температуре $T=10^\circ$ C и давлении $p=1$ МПа. Найти молярную массу смеси и объём сосуда.
 85. В сосуде находится $m_1=10$ г CO_2 и $m_2=15$ г N_2 . Найти плотность смеси газов при температуре $T=300^\circ$ K и давлении $p=150$ кПа.
 86. Какую температуру T имеет масса $m=2$ г азота, занимающего объём $V=820$ см³ при давлении $p=0,2$ МПа?
 87. Какой объём занимает масса $m=10$ г кислорода при давлении $p=100$ кПа и температуре $T=20^\circ$ C?
 88. Баллон объёмом $V=12$ л наполнен азотом при давлении $p=8,1$ МПа и температуре $T=17^\circ$ C. Какая масса азота находится в баллоне?
 89. Давление воздуха внутри плотно закупоренной бутылки при температуре $T_1=17^\circ$ C было $p_1=100$ кПа. При нагревании бутылки пробка вылетела. До какой температуры T_2 нагрели бутылку, если известно, что пробка вылетела при давлении воздуха в бутылке $p_2=130$ кПа?
 90. Каким должен быть наименьший объём баллона, вмещающего массу $m=6,4$ кг кислорода, вмещающего массу $m=6,4$ кг кислорода, если его стенки при температуре $T_1=20^\circ$ C выдерживают давление $p=15,7$ МПа?
 91. В баллоне находилась масса $m_1=10$ кг газа при давлении $p_1=10$ МПа. Какую массу Δm газа взяли из баллона, если давление стало равным $p_2=2,5$ МПа? Температуру газа считать постоянной.
 92. Найти массу сернистого газа (SO_2), занимающего объём $V=25$ л при температуре $T=27^\circ$ C и давлении $p_1=100$ кПа?

93. Какой объём V воды можно вскипятить, затратив электрическую энергию $W = 3 \text{ кВт}\cdot\text{ч}$? Начальная температура воды $T_0 = 10^\circ\text{C}$.
94. Какую мощность P потребляет нагреватель электрического чайника, если объём $V = 1 \text{ л}$ воды закипает через $t = 5 \text{ мин}$. Каково сопротивление R нагревателя, если напряжение в сети $U = 220 \text{ В}$. Начальная температура воды $T_0 = 13,5^\circ\text{C}$.
95. Ламповый реостат состоит из пяти электрических лампочек сопротивлением $r = 350 \text{ Ом}$, включённых параллельно. Найти сопротивление R реостата, когда:
 а) горят все лампочки; б) вывинчиваются одна, две, три, четыре лампочки.
96. Определить ёмкость системы конденсаторов.

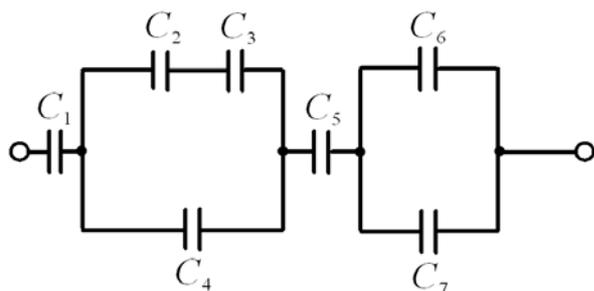


Рис. 146.

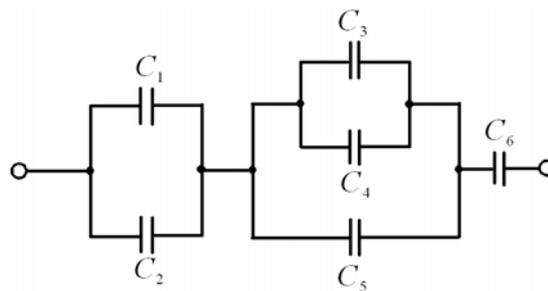


Рис. 147.

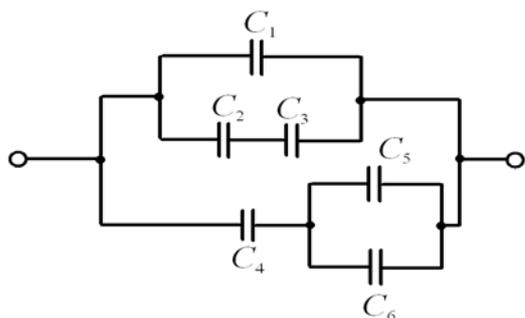


Рис. 148.

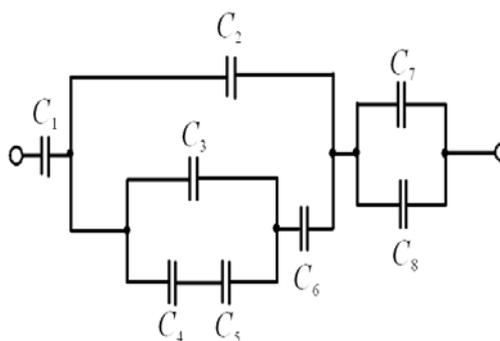


Рис. 149.

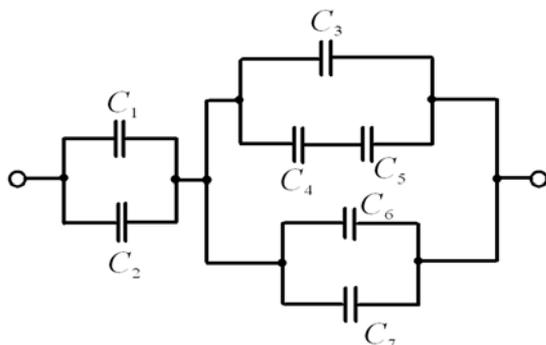


Рис. 150.

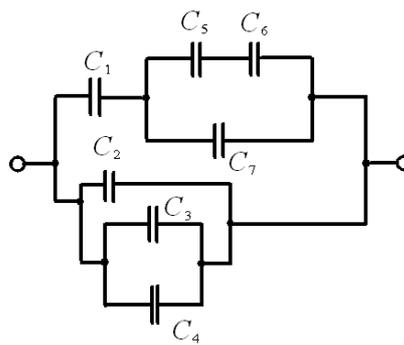


Рис. 151.

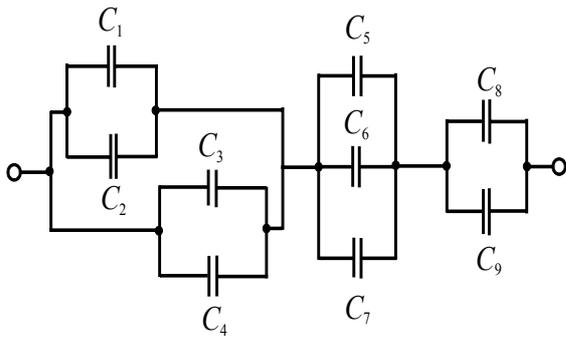


Рис. 152.

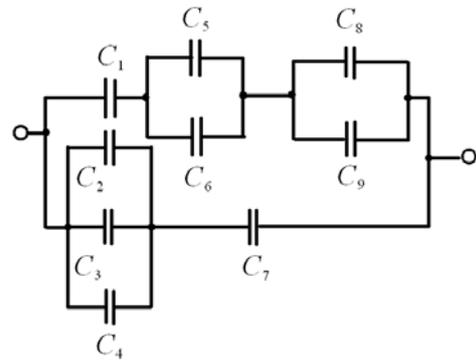


Рис. 153.

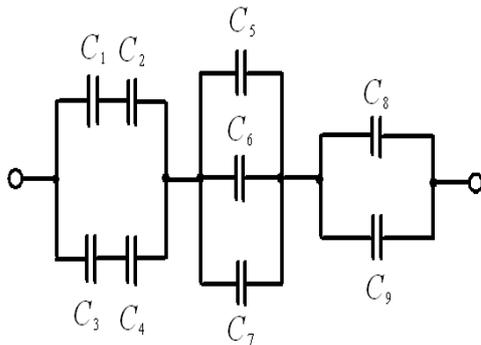


Рис. 154.

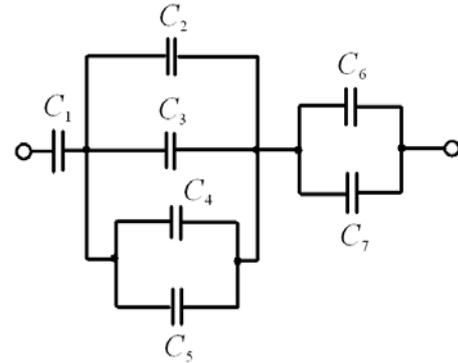


Рис. 155.

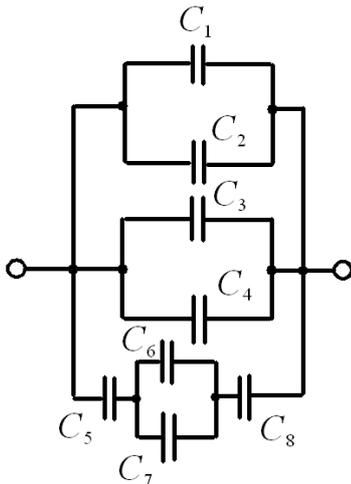


Рис. 156.

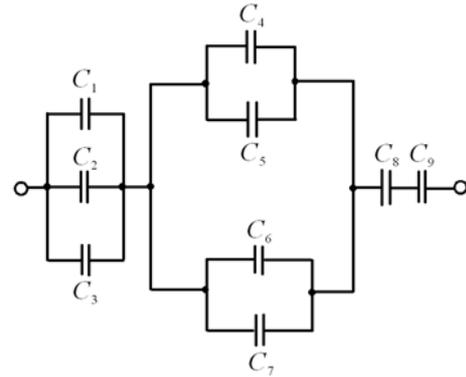


Рис. 157.

97. Вольфрамовая нить электрической лампочки при $T_1=20^\circ\text{C}$ имеет сопротивление $R_1=35,8 \text{ Ом}$. Какова будет температура T_2 нити лампочки, если при включении в сеть напряжением $U=220 \text{ В}$ по нити идёт ток $I=0,33 \text{ А}$? Температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha=4,6 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.
98. Обмотка катушки из медной проволоки при $T_1=14^\circ\text{C}$ имеет сопротивление $R_1=10 \text{ Ом}$. После пропускания тока сопротивление обмотки стало равным $R_2=12,2 \text{ Ом}$. До какой температуры T_2 нагрелась обмотка? Температурный коэффициент сопротивления меди $\alpha=4,15 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.
99. Элемент с э.д.с. $\mathcal{E}=2 \text{ В}$ имеет внутреннее сопротивление $r=0,5 \text{ Ом}$. Найти падение потенциала U_r внутри элемента при токе в цепи $I=0,25 \text{ А}$. Каково внешнее сопротивление R цепи при этих условиях?

100. Э.д.с. элемента $\varepsilon=6\text{ В}$. При внешнем сопротивлении $R=1,1\text{ Ом}$ ток в цепи $I=3\text{ А}$. Найти падение потенциала U_r внутри элемента и его сопротивление r .

101. Два параллельно соединённых элемента с одинаковыми э.д.с. $\varepsilon_1=\varepsilon_2=2\text{ В}$ и внутренними сопротивлениями $r_1=1\text{ Ом}$ и $r_2=1,5\text{ Ом}$ замкнуты на внутреннее сопротивление $R=1,4\text{ Ом}$ (рис. 156). Найти ток в каждом из элементов и во всей цепи.

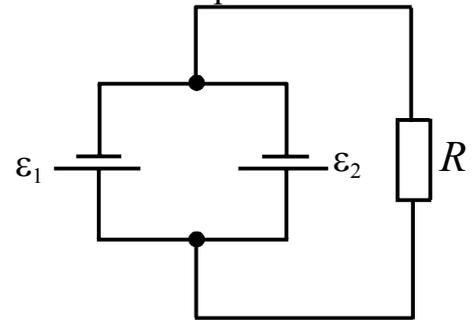


Рис. 158.

103. Элемент э.д.с. $\varepsilon=6\text{ В}$ даёт максимальный ток $I=3\text{ А}$. Найти наибольшее количество теплоты Q , которое может быть выделено во внешнем сопротивлении в единицу времени.

102. Имеются два одинаковых элемента с э.д.с. $\varepsilon=2\text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r=0,3\text{ Ом}$. Как необходимо соединить элементы (последовательно или параллельно), чтобы получить больший ток, если внешнее сопротивление:

а) $R=0,2\text{ Ом}$; б) $R=16\text{ Ом}$? Найти ток в каждом из этих случаев.

103. От генератора э.д.с. $\varepsilon=500\text{ В}$ требуется передать энергию на расстояние $l=2,5\text{ км}$. Потребляемая мощность $P=10\text{ кВт}$. Найти минимальные потери мощности ΔP в сети, если диаметр медных подводящих проводов $d=1,5\text{ см}$.

104. Батарея с э.д.с. $\varepsilon=240\text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r_1=1\text{ Ом}$ замкнута на внешнее сопротивление $R=23\text{ Ом}$. Найти полную мощность P_0 , полезную мощность P и к.п.д. η батареи.

105. Какой объём V воды можно вскипятить, затратив электрическую энергию $W=3\text{ гВт}\cdot\text{ч}$? Начальная температура воды $T_0=10^\circ\text{С}$.

106. Какую мощность P потребляет нагреватель электрического чайника, если объём $V=1\text{ л}$ воды закипает через $t=5\text{ мин}$. Каково сопротивление R нагревателя, если напряжение в сети $U=220\text{ В}$. Начальная температура воды $T_0=13,5^\circ\text{С}$.

107. Разность потенциалов между точками A и B равна $U=9\text{ В}$. Имеются два проводника с сопротивлениями $R_1=5\text{ Ом}$ и $R_2=3\text{ Ом}$. Найти количество теплоты Q_r , выделяющееся в каждом проводнике в единицу времени, если проводники между точками A и B соединены:

а) последовательно; б) параллельно.

108. Сколько витков нихромовой проволоки диаметром $d=1\text{ мм}$ надо намотать на фарфоровый цилиндр радиусом $a=1\text{ см}$, чтобы получить печь сопротивлением $R=40\text{ Ом}$?

109. Катушка из медной проволоки имеет сопротивление $R=10,8\text{ Ом}$. Масса медной проволоки $m=3,41\text{ кг}$. Какой длины l и какого диаметра d проволока намотана на катушке?

110. Сопротивления $R_2 = 20 \text{ Ом}$ и $R_3 = 15 \text{ Ом}$ (рис. 159). Через сопротивление R_2 течет ток $I_2 = 0,3 \text{ А}$. Амперметр показывает ток $I = 0,8 \text{ А}$. Найти сопротивление R_1 .

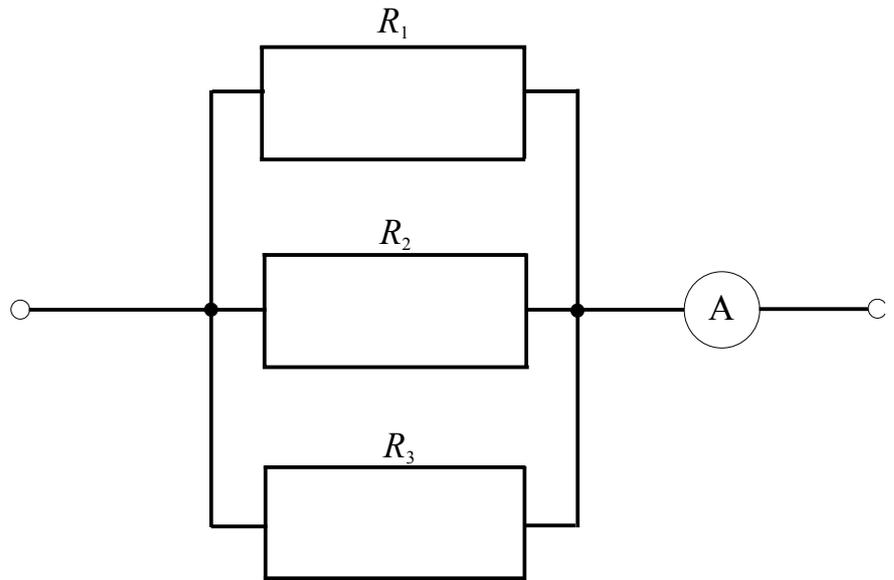


Рис. 159.

111. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 100 \text{ В}$, сопротивления $R_1 = R_3 = 40 \text{ Ом}$, $R_2 = 80 \text{ Ом}$, $R_4 = 34 \text{ Ом}$ (рис. 160). Найти ток I_2 , текущий через резистор R_2 , и падение потенциала U_2 на нём.

112. Найти сопротивление R железного стержня диаметром $d = 1 \text{ см}$, если масса стержня $m = 1 \text{ кг}$.

113. Медная и алюминиевая проволоки имеют длину одинаковую l и одинаковое сопротивление R . Во сколько раз медная проволока тяжелее алюминиевой?

114. Обмотка катушки из медной проволоки при $T_1 = 14^\circ \text{C}$ имеет сопротивление $R_1 = 10 \text{ Ом}$. После пропускания тока сопротивление обмотки стало равным $R_2 = 12,2 \text{ Ом}$. До какой температуры T_2 нагрелась обмотка? Температурный коэффициент сопротивления меди $\alpha = 4,15 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

115. Элемент э.д.с. $\varepsilon = 2 \text{ В}$ имеет внутреннее сопротивление $r = 0,5 \text{ Ом}$. Найти падение потенциала U_r внутри элемента при токе в цепи $I = 0,25 \text{ А}$. Каково внешнее сопротивление R цепи при этих условиях?

116. Элемент э.д.с. $\varepsilon = 6 \text{ В}$. При внешнем сопротивлении $R_2 = 1,1 \text{ Ом}$ ток в цеп $I = 3 \text{ А}$. Найти падение потенциала U_r внутри элемента и его сопротивление r .

117. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 120 \text{ В}$, сопротивления $R_3 = 20 \text{ Ом}$ и $R_4 = 25 \text{ Ом}$ (рис. 161). Падение потенциала на сопротивлении R_1 равно $U_1 = 40 \text{ В}$. Амперметр показывает ток $I = 2 \text{ А}$. Найти сопротивление R_2 .

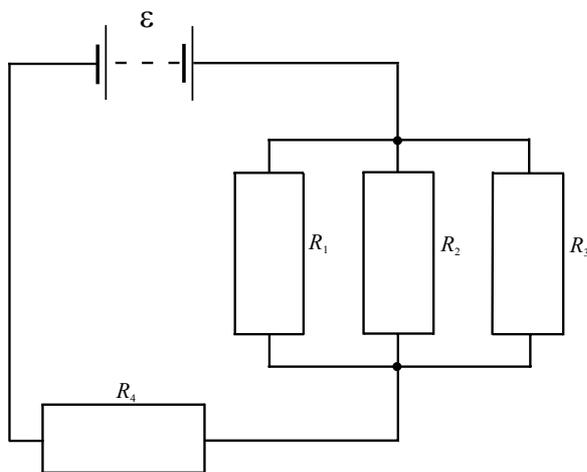


Рис. 160.

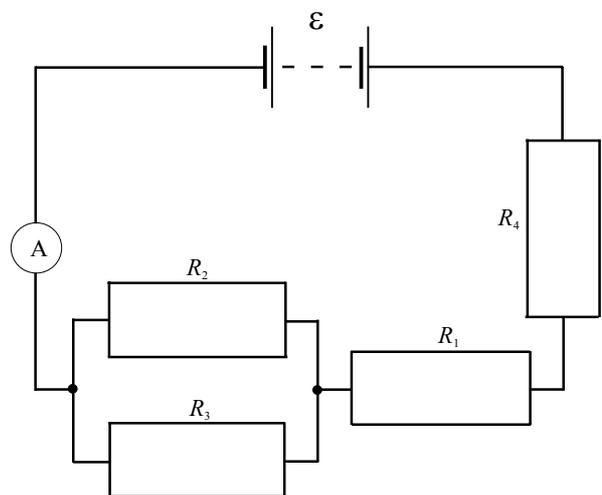


Рис. 161.

118. Имеются три 110-вольтовые электрические лампочки, мощности которых $P_1=P_2=40$ Вт и $P_3=80$ Вт. Как необходимо включить эти лампочки, чтобы они давали нормальный накал при напряжении $U_0=220$ В? Начертить схему. Найти токи I_1 , I_2 и I_3 , текущие через лампочки при нормальном накале.
119. Определить напряжённость магнитного поля H на оси кругового тока. Сила тока равна I , радиус витка равен R .
120. Найти показания амперметра и вольтметра в изображённых ниже схемах, если заданы э.д.с. батареи, её внутреннее сопротивление, сопротивления резисторов R_i и вольтметра R_V .

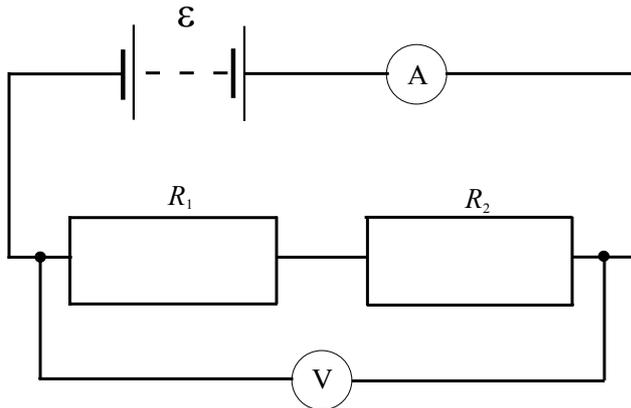


Рис. 162.

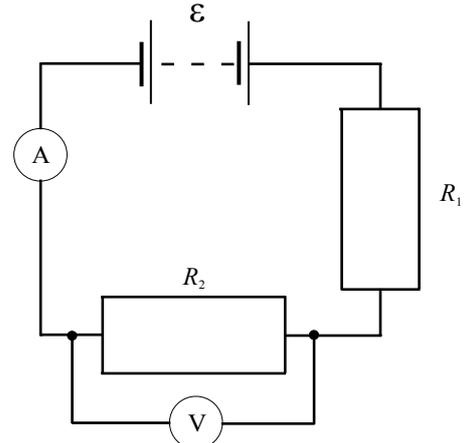


Рис. 163.

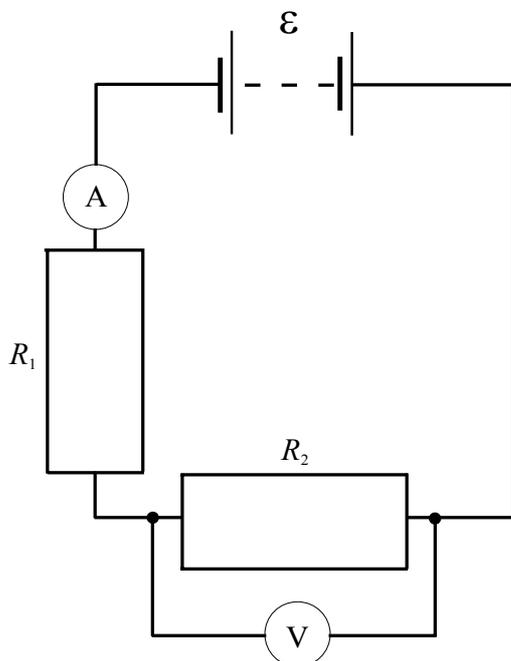


Рис. 164.

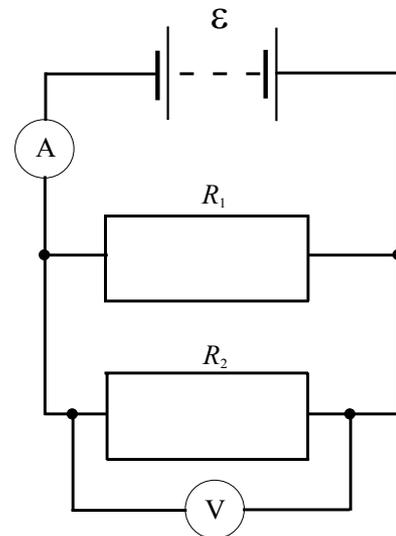


Рис. 165.

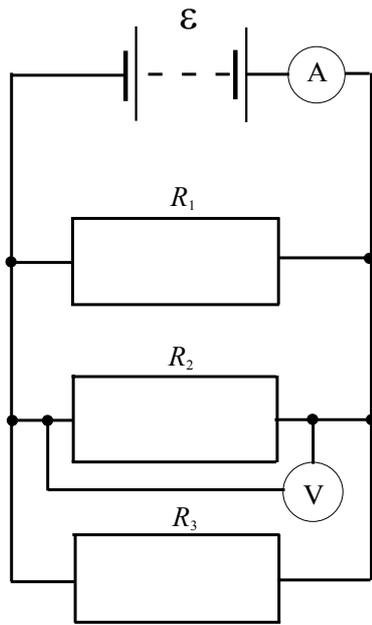


Рис. 166.

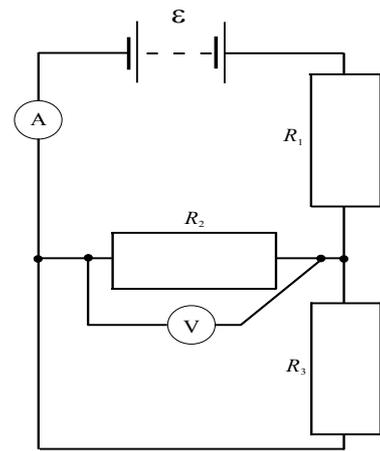


Рис. 167.

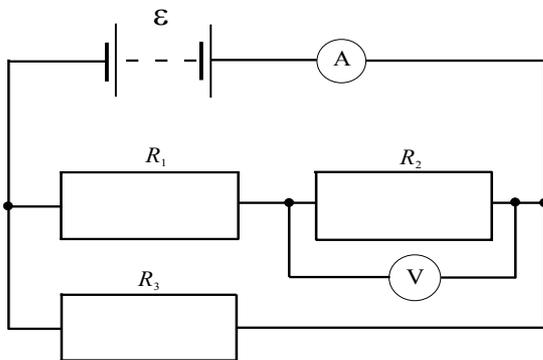


Рис. 168.

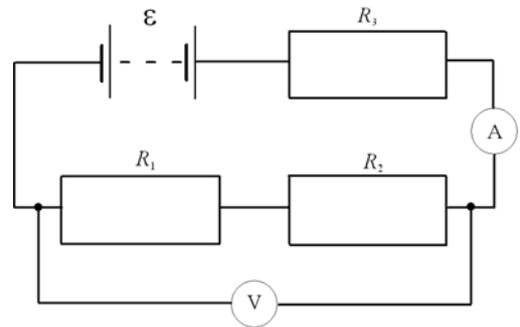


Рис. 169.

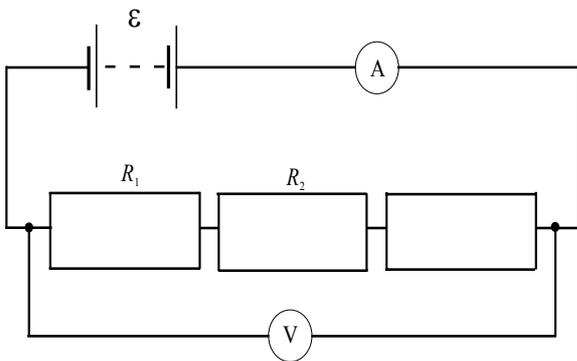


Рис. 170.

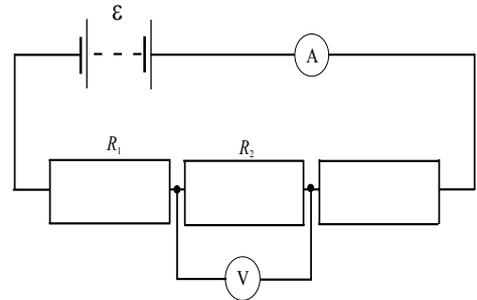


Рис. 171.

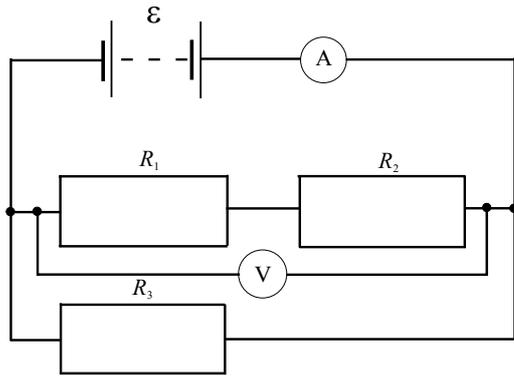


Рис. 172.

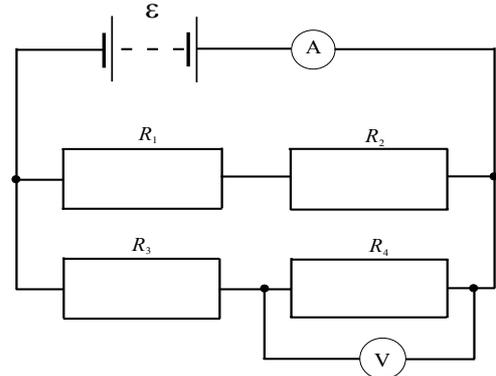


Рис. 173.

121. Найти напряжённость магнитного поля H в центре кругового проволочного витка радиусом $R=1$ см, по которому течёт ток силой $I=1$ А.

122. На рис. 174 изображены сечения двух прямолинейных бесконечно длинных проводников с токами. Расстояние между проводниками $AB=10$ см, силы тока $I_1=20$ А и $I_2=30$ А. Найти напряжённости магнитного поля H в точках M_1 , M_2 и M_3 . Расстояния $M_1A=2$ см, $AM_2=4$ см и $BM_3=3$ см.

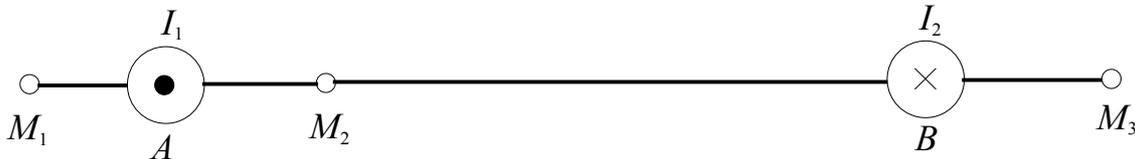


Рис. 174.

123. Решить предыдущую задачу при условии, что токи текут в одном направлении.

124. На рис. 175 изображены сечения трёх прямолинейных бесконечно длинных проводников с токами. Расстояния $AB=BC=5$ см, силы тока равны $I_1=I_2=I$ и $I_3=2I$. Найти точку на прямой AC , в которой вызванная токами I_1 , I_2 и I_3 напряжённость магнитного поля равна нулю.

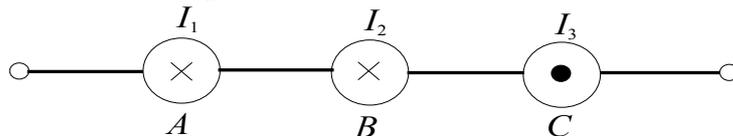


Рис. 175.

125. Решить предыдущую задачу при условии, что токи текут в одном направлении.

126. Два прямолинейных длинных проводника расположены параллельно друг другу на расстоянии $d=10$ см друг от друга. По проводникам текут токи силой $I_1=I_2=5$ А в противоположных направлениях. Найти модуль и направления напряжённости магнитного поля \vec{H} магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии $a=10$ см от каждого проводника.

127. Найти напряжённость магнитного поля H в центре кругового контура на расстоянии $a=3$ см от его плоскости. Радиус контура $R=4$ см, сила тока в контуре $I=2$ А.

128. Напряжённость магнитного поля в центре кругового витка $H_0=0,8$ Э. Радиус витка $R=11$ см. Найти напряжённость магнитного поля H на оси витка на

расстоянии $a=10$ см от его плоскости.

129. Два круговых витка радиусом $R=4$ см каждый расположены в параллельных плоскостях на расстоянии $d=5$ см друг от друга. По виткам текут токи силой $I_1=I_2=4$ А. Найти напряжённость магнитного поля H в центре одного из витков. Задачу решить, когда:

а) токи в витках текут в одном направлении; б) токи в витках текут в противоположных направлениях.

130. Из проволоки длиной $l=1$ м сделана квадратная рамка. По рамке течёт ток силой $I=10$ А. Найти напряжённость магнитного поля H в центре рамки.

131. По проволочной рамке, имеющей форму правильного шестиугольника, течёт ток силой $I=2$ А. При этом в центре рамки образуется магнитное поле напряжённостью $H=33$ А/м. Найти длину проволоки l , из которой сделана рамка.

132. Найти падение потенциала U на медном проводе длиной $l=500$ м и диаметром $d=2$ мм, если ток в нём $I=2$ А.

133. Найти падение потенциала U в сопротивлениях $R_1=4$ Ом, $R_2=2$ Ом и $R_3=4$ Ом (рис. 176), если амперметр показывает ток $I_1=3$ А. Найти токи I_2 и I_3 в сопротивлениях R_2 и R_3 .

134. Элемент, имеющий э.д.с. $\varepsilon=1,1$ В и внутреннее сопротивление $r=1$ Ом, замкнут на внешнее сопротивление $R=9$ Ом. Найти ток I в цепи, падение потенциала U во внешней цепи и падение потенциала U_r внутри элемента. С каким к.п.д. η работает элемент?

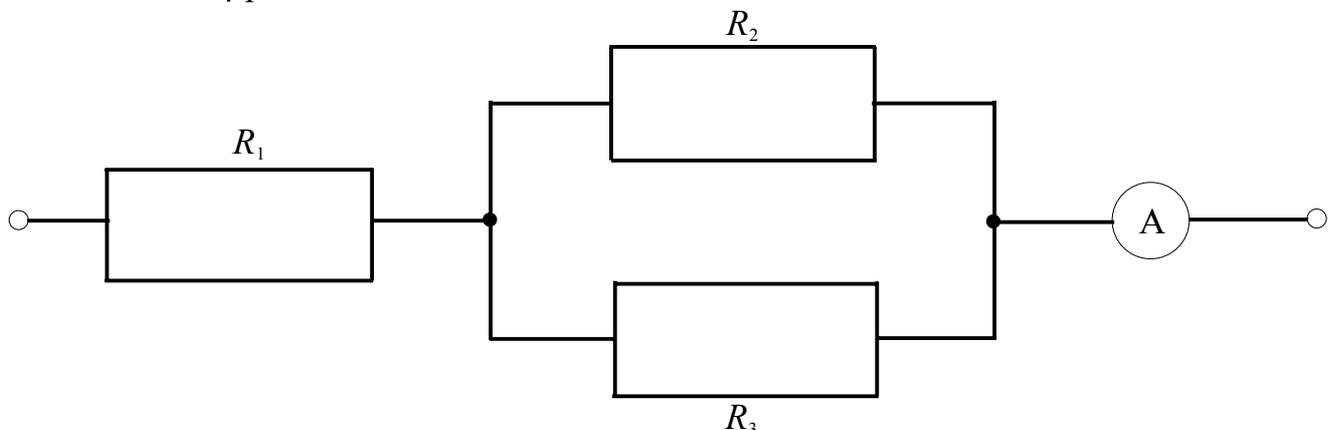


Рис. 176.

135. Элемент, имеющий э.д.с. $\varepsilon=1,1$ В и внутреннее сопротивление $r=1$ Ом, замкнут на внешнее сопротивление R . Построить график зависимости падения потенциала U во внешней цепи от внешнего сопротивления R . Сопротивление R взять в пределах $0 \leq R \leq 10$ Ом через каждые 2 Ом.

136. Элемент имеет э.д.с. $\varepsilon=2$ В и внутреннее сопротивление $r=0,5$ Ом. Найти падение потенциала U_r внутри элемента при токе в цепи $I=0,25$ А. Каково внешнее сопротивление R цепи при этих же условиях?

137. Элемент имеет э.д.с. $\varepsilon=1,6$ В и внутреннее сопротивление $r=0,5$ Ом. Найти к.п.д. η элемента при токе в цепи $I=2,4$ А.

138. Элемент имеет э.д.с. $\varepsilon=6$ В. При внешнем сопротивлении $R=1,1$ Ом ток в

цепи $I=3\text{ A}$. Найти падение потенциала U_r внутри элемента и его внутреннее сопротивление r .

139. Имеются два одинаковых элемента с э.д.с. $\varepsilon=2\text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r=0,3\text{ Ом}$. Как надо соединить эти элементы (последовательно или параллельно), чтобы получить больший ток, если внешнее сопротивление: а) $R=0,2\text{ Ом}$; б) $R=16\text{ Ом}$? Найти ток I в каждом из этих случаев.

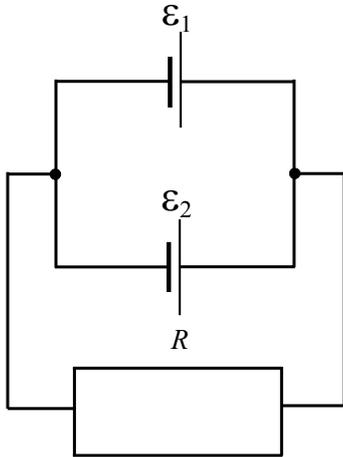


Рис. 177.

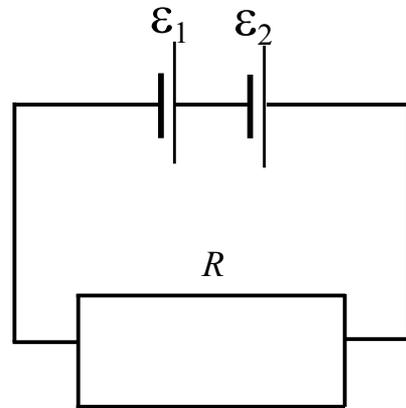


Рис. 178.

140. Два параллельно соединённых элемента с одинаковыми э.д.с. $\varepsilon_1=\varepsilon_2=2\text{ В}$ и внутренними сопротивлениями $r_1=1\text{ Ом}$ и $r_2=1,5\text{ Ом}$ замкнуты на внешнее сопротивление $R=1,4\text{ Ом}$ (рис. 177). Найти ток I в каждом из этих элементов и всей цепи.

141. Два последовательно соединённых элемента с одинаковыми э.д.с. $\varepsilon_1=\varepsilon_2=2\text{ В}$ и внутренними сопротивлениями $r_1=1\text{ Ом}$ и $r_2=1,5\text{ Ом}$ замкнуты на внешнее сопротивление $R=1,4\text{ Ом}$ (рис. 178). Найти разность потенциалов U на зажимах каждого элемента.

142. Элемент, амперметр и некоторое сопротивление соединены последовательно. Если взять сопротивление из медной проволоки длиной $l=100\text{ м}$ и поперечным сечением $S=2\text{ мм}^2$, то амперметр показывает ток $I_1=1,43\text{ А}$. Если же взять сопротивление из алюминиевой проволоки $l=57,3\text{ м}$ и поперечным сечением $S=1\text{ мм}^2$, то амперметр показывает ток $I_2=1\text{ А}$. Сопротивление амперметра $R_A=0,05\text{ Ом}$. Найти э.д.с. ε элемента и его внутреннее сопротивление r .

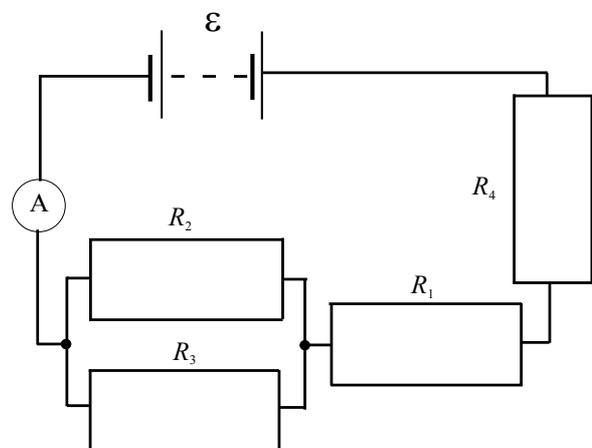


Рис. 179.

143. Батарея с э.д.с. $\varepsilon=10\text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r=1\text{ Ом}$ имеет к.п.д. $\eta=0,8$ (рис. 179). Падения потенциала на сопротивлениях R_1 и R_4 равны $U_1=4\text{ В}$ и $U_4=2\text{ В}$. Какой ток I показывает амперметр? Найти падение потенциала U_2 на сопротивлении R_2 .

144. Найти отношение кинетической энергии W_k материальной точки, совершающей гармоническое колебание, к её потенциальной энергии W_n для моментов времени: а) $t=T/12$; б) $t=T/8$; в) $t=T/6$. Начальная фаза колебаний $\varphi=0$.
145. Шарик, подвешенный на нити длиной $l=2$ м, отклоняют на угол $\alpha=4^\circ$ и наблюдают его колебания. Полагая колебания незатухающими гармоническими, найти скорость шарика при прохождении им положения равновесия.
146. К пружине подвешен груз массой $m=10$ кг. Зная, что пружина под влиянием силы $F=9,8$ Н растягивается на $l=1,5$ см, найти период T вертикальных колебаний груза.
147. К пружине подвешен груз. Максимальная кинетическая энергия колебаний груза $W_{k\max}=1$ Дж. Амплитуда колебаний $A=5$ см. Найти жесткость k пружины.
148. Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине подвесить вместо медного шарика алюминиевый такого же радиуса?
149. К пружине подвешена чашка весов с гирями. При этом период вертикальных колебаний $T_1=0,5$ с. После того, как на чашку весов положили ещё добавочные гири, период вертикальных колебаний стал равным $T_2=0,6$ с. На сколько удлинилась пружина от прибавления этого добавочного груза?
150. К резиновому шнуру длиной $l=40$ см и радиусом $r=1$ мм подвешена гиря массой $m=0,5$ кг. Зная, что модуль Юнга резины $E=3$ МН/м², найти период T вертикальных колебаний груза.
- Указание.* Учтеть, что жесткость k пружины связана с модулем Юнга E соотношением $k=SE/l$, где S - площадь поперечного сечения резины, l - её длина.
151. Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с периодом $T=8$ с и одинаковой амплитудой $A=2$ см. Разность фаз между этими колебаниями $\varphi_2-\varphi_1=\pi/4$. Начальная фаза одного из этих колебаний равна нулю.
152. Найти амплитуду A и начальную фазу φ гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями $x_1=0,02 \sin(5\pi t+\pi/2)$ и $x_2=0,03 \sin(5\pi t+\pi/4)$ м. Написать уравнение результирующего колебания.
153. В результате сложения двух одинаково направленных колебаний с одинаковыми амплитудами и одинаковыми периодами получается результирующее колебание с тем же периодом и той же амплитудой. Найти разность фаз $\varphi_2-\varphi_1$ складываемых колебаний.
154. Найти амплитуду A и начальную фазу φ гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями $x_1=4 \sin(\pi t)$ см и $x_2=3 \sin(\pi t+\pi/2)$ см. Написать уравнение результирующего колебания.
155. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за время $t=1$ мин уменьшилась вдвое. Во сколько раз уменьшилась амплитуда за время $t=3$ мин.

156. К пружине подвешен груз массой $m = 10$ кг. Зная, что пружина под влиянием силы $F = 9,8$ Н растягивается на $l = 1,5$ см, найти период T вертикальных колебаний груза.
157. К пружине подвешен груз. Максимальная кинетическая энергия $W_{kmax} = 1$ Дж. Амплитуда колебаний $A = 5$ см. Найти жёсткость k пружины.
158. Колебательный контур состоит из конденсатора ёмкостью $C = 888$ пФ и катушки с индуктивностью $L = 888$ мГн. На какую длину волны λ настроен контур?
159. Мыльная плёнка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекания жидкости. При наблюдении интерференционных полос в отражённом свете ртутной дуги ($\lambda = 546,1$ нм) оказалось, что расстояние между пятью полосами $l = 2$ см. Найти угол α клина. Свет падает перпендикулярно к поверхности плёнки. Показатель преломления мыльной воды $n = 1,33$.
160. Пучок света ($\lambda = 582$ нм) падает перпендикулярно к поверхности стеклянного клина. Угол клина $\alpha = 20''$. Какое число k_0 тёмных интерференционных полос приходится на единицу длины клина? Показатель преломления стекла $n = 1,5$.
161. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведётся в отражённом свете. Радиусы двух соседних тёмных колец равны $r_k = 4$ мм и $r_{k+1} = 4,38$ мм. Радиус кривизны линзы $R = 6,4$ м. Найти порядковые номера колец и длину волны λ падающего света.
162. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведётся в отражённом свете. Радиус кривизны линзы $R = 8,6$ м. Измерениями установлено, что радиус четвёртого тёмного кольца (считая центральное тёмное кольцо за нулевое) $r_4 = 4,5$ мм. Найти длину волны λ падающего света.
163. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведётся в проходящем свете. Радиус кривизны линзы $R = 5$ м. Найти радиусы r_c и $r_{кр}$ четвёртого синего кольца ($\lambda = 400$ нм) и третьего красного кольца ($\lambda = 630$ нм).
164. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведётся в отражённом свете. Радиус кривизны линзы $R = 15$ м. Расстояние между пятым и двадцать пятым кольцами Ньютона $l = 9$ см. Найти длину волны λ монохроматического света.
165. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведётся в отражённом свете. Расстояние между вторым и двадцатым тёмными кольцами $l_1 = 4,8$ см. Найти расстояние l_2 между третьим и шестнадцатым кольцами Ньютона.
166. Установка для получения колец Ньютона освещается светом ртутной лампы, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведётся в проходящем свете. Какое по порядку светлое кольцо, соответствующее линии $\lambda_1 = 579,1$ нм, совпадает со следующим светлым кольцом, соответствующим

щим линии $\lambda_2=577$ нм.

167. Установка для получения колец Ньютона освещается светом с длиной волны $\lambda=589$ нм, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы $R=10$ м. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью. Найти показатель преломления n жидкости, если радиус третьего светлого кольца в проходящем свете $r_3=3,65$ мм.
168. Установка для получения колец Ньютона освещается светом с длиной волны $\lambda=600$ нм, падающим по нормали к поверхности пластинки. Найти толщину h воздушного слоя между линзой и стеклянной пластинкой в том месте, где наблюдается четвёртое тёмное кольцо в отражённом свете.
169. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. После того, как пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнили жидкостью, радиусы тёмных колец в отражённом свете уменьшились в 1,25 раза. Найти показатель преломления n .
170. Пучок белого света падает по нормали к поверхности стеклянной пластины толщиной $d=0,4$ мкм. Показатель преломления стекла $n=1,5$. Какие длины волн λ , лежащие в пределах видимого спектра (от 400 до 700 нм), усиливаются в отражённом свете?
171. На мыльную плёнку падает белый свет под углом $\alpha=45^\circ$ к поверхности плёнки. При какой наименьшей толщине h плёнки отражённые лучи будут окрашены в жёлтый цвет ($\lambda=600$ нм)?
172. Луч света падает под углом $\alpha=30^\circ$ на плоскопараллельную стеклянную пластину и выходит из неё параллельно первоначальному лучу. Показатель преломления стекла $n=1,5$. Какова толщина d пластины, если расстояние между лучами $l=1,94$ см?
173. На плоскопараллельную стеклянную пластину толщиной $d=1$ см падает луч света под углом $\alpha=60^\circ$. Показатель преломления стекла $n=1,73$. Часть света отражается, а часть, преломляясь, проходит в стекло, отражаясь от нижней поверхности пластины и, преломляясь вторично, выходит обратно в воздух параллельно первому отражённому лучу. Найти расстояние l между лучами.
174. Луч света падает под углом α на тело с показателем преломления n . Как должны быть связаны между собой величины α и n , чтобы отражённый луч был бы перпендикулярен преломлённому?
175. Показатель преломления стекла $n=1,52$. Найти предельный угол полного внутреннего отражения β для поверхности раздела: а) стекло - воздух; б) вода - воздух; в) стекло - вода.
176. Луч света выходит из скипидара в воздух. Предельный угол полного внутреннего отражения для этого луча $\beta=42^\circ 23'$. Найти скорость v распространения света в скипидаре.
177. На стакан, наполненный водой, положена стеклянная пластинка. Под каким углом α должен падать на пластинку луч света, чтобы от поверхности

- раздела вода - стекло произошло полное внутреннее отражение? Показатель преломления стекла $n=1,5$.
178. Показатели преломления стекла для красного и фиолетового лучей равны $n_{кр}=1,51$ и $n_{ф}=1,53$. Найти предельные углы полного внутреннего отражения $\beta_{кр}$ и $\beta_{ф}$ при падении этих лучей на поверхность раздела стекло - воздух.
179. Монохроматический луч падает нормально на боковую поверхность призмы, преломляющий угол которой $\gamma=40^\circ$. Показатель преломления материала призмы для этого луча $n=1,5$. Найти угол отклонения δ луча, выходящего из призмы, от первоначального направления.
180. Монохроматический луч падает нормально на боковую поверхность призмы и выходит из неё отклонённым на угол $\delta=25^\circ$. Показатель преломления материала призмы для этого луча $n=1,7$. Найти преломляющий угол призмы γ .
181. Преломляющий угол равнобедренной призмы $\gamma=10^\circ$. Монохроматический луч падает на боковую поверхность призмы под углом $\alpha=15^\circ$. Показатель преломления материала призмы для этого луча $n=1,6$. Найти угол отклонения δ луча от первоначального направления.
182. Преломляющий угол призмы $\gamma=45^\circ$. Показатель преломления материала призмы для некоторого монохроматического луча $n=1,6$. Каков должен быть наибольший угол падения α этого луча на призму, чтобы при выходе луча из неё не наступило полное внутреннее отражение?
183. В опыте с зеркалами Френеля расстояние между мнимыми изображениями источника света $d=0,5$ мм, расстояние до экрана $L=5$ м. В зелёном свете получились интерференционные полосы, расположенные на расстоянии $l=5$ мм друг от друга. Найти длину волны λ зелёного света.
184. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиусы двух соседних тёмных колец равны $r_k=4$ мм и $r_{k+1}=4,38$ мм. Радиус кривизны линзы $R=6,4$ м. Найти порядковые номера колец и длину волны λ падающего света.
185. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы $R=8,6$ м. Наблюдение ведётся в отражённом свете. Измерениями установлено, что радиус четвёртого тёмного кольца (считая центральное тёмное кольцо за нулевое) $r_4=4,5$ мм. Найти длину волны λ падающего света.
186. В опыте с интерферометром Майкельсона для смещения интерференционной картины на $k=500$ полос потребовалось переместить зеркало на расстояние $L=0,161$ мм. Найти длину волны λ падающего света.
187. Пучок белого света падает по нормали к поверхности стеклянной пластинки толщиной $d=0,4$ мкм. Показатель преломления стекла $n=1,5$. Какие длины волн λ , лежащие в пределах видимого спектра (от 400 до 700 нм), усиливаются в отражённом свете?
188. На дифракционную решётку нормально падает пучок света. Натриевая ли-

- ния ($\lambda_1=589 \text{ нм}$) даёт в спектре первого порядка угол дифракции $\varphi_1=17^\circ 8'$. Некоторая линия даёт в спектре второго порядка угол дифракции $\varphi_2=24^\circ 12'$. Найти длину волны λ_2 этой линии и число штрихов N_0 на единицу длины решётки.
189. На дифракционную решётку нормально падает пучок света. При повороте трубы гониометра на угол φ в поле зрения видна линия $\lambda_1=440 \text{ нм}$ в спектре третьего порядка. Будут ли видны под эти же углом φ другие спектральные линии λ_2 , соответствующие длинам волн в пределах видимого спектра (от 400 до 700 нм).
190. На дифракционную решётку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линии λ_2 в спектре третьего порядка накладывается красная линия ($\lambda_1=670 \text{ нм}$) спектра второго порядка?
191. На дифракционную решётку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. Сначала зрительная труба устанавливается на фиолетовые линии ($\lambda_\varphi=389 \text{ нм}$) по обе стороны от центральной полосы в спектре первого порядка. Отсчёты по лимбу вправо от левого деления дали $\varphi_{\varphi_1}=27^\circ 33'$ и $\varphi_{\varphi_2}=36^\circ 27'$. После этого зрительная труба устанавливается на красные линии по обе стороны от центральной полосы в спектре первого порядка. Отсчёты по лимбу вправо от левого деления дали $\varphi_{\varphi_1}=23^\circ 54'$ и $\varphi_{\varphi_2}=40^\circ 56'$. Найти длину волны $\lambda_{кр}$ красной линии спектра гелия.
192. Какова должна быть постоянная d дифракционной решётки, чтобы в первом порядке были разрешены линии спектра калии $\lambda_1=404,4 \text{ нм}$ и $\lambda_2=404,7 \text{ нм}$? Ширина решётки $a=3 \text{ см}$.
193. Какова должна быть постоянная d дифракционной решётки, чтобы в первом порядке был разрешён дублет натрия $\lambda_1=589 \text{ нм}$ и $\lambda_2=589,6 \text{ нм}$? Ширина решётки $a=2,5 \text{ см}$.
194. Постоянная дифракционной решётки $d=2 \text{ мкм}$. Какую разность длин волн $\Delta\lambda$ может разрешить эта решётка в области жёлтых лучей ($\lambda=600 \text{ нм}$) в спектре второго порядка? Ширина решётки $a=2,5 \text{ см}$.
195. Найти температуру T печи, если известно, что излучение из отверстия в ней площадью $S=6,1 \text{ см}^2$ имеет мощность $N=34,6 \text{ Вт}$. Излучение считать близким к излучению абсолютно чёрного тела.
196. Какую мощность излучения N имеет Солнце? Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно чёрного тела. Температура поверхности Солнца $T=5800^\circ \text{ К}$.
197. Какую энергетическую светимость R' , имеет затвердевающий свинец? Отношение энергетических светимостей свинца и абсолютно чёрного тела для данной температуры $k=0,6$.
198. Мощность излучения абсолютно чёрного тела $N=34 \text{ кВт}$. Найти температуру T этого тела, если известно, что его поверхность равна $S=0,6 \text{ м}^2$?
199. Мощность излучения раскалённой металлической поверхности $N=0,67 \text{ кВт}$. Температура поверхности равна $T=2500^\circ \text{ К}$, её площадь - $S=10 \text{ см}^2$. Ка-

кую мощность излучения имела бы эта поверхность, если бы она была бы абсолютно чёрной? Найти отношение k энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно чёрного тела при данной температуре.

200. Диаметр вольфрамовой спирали в электрической лампочке равен $d = 0,3$ мм, длина спирали - $l = 5$ см. При включении лампочки в сеть напряжением $U = 127$ В через лампочку течёт ток $I = 0,31$ А. Найти температуру T спирали. Считать, что по установлении равновесия всё выделяющееся в нити тепло теряется в результате излучения. Отношение энергетических светимостей вольфрама и абсолютно чёрного тела для данной температуры $k = 0,31$.
201. Температура вольфрамовой спирали в 25-ваттной электрической лампочке $T = 2450^\circ$ К. Отношение её энергетической светимости к энергетической светимости абсолютно чёрного тела при данной температуре $k = 0,3$. Найти площадь S излучающей поверхности спирали.
202. Какую энергетическую светимость R_λ имеет абсолютно чёрное тело, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda = 484$ нм.
203. Мощность излучения абсолютно чёрного тела $N = 10$ кВт. Найти площадь S излучающей поверхности тела, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda = 700$ нм.
204. В каких областях спектра лежат длины волн, соответствующие максимуму спектральной плотности энергетической светимости, если источником света служат:
- а) спираль электрической лампочки ($T = 3000^\circ$ К);
 - б) поверхность Солнца ($T = 6000^\circ$ К);
 - в) атомная бомба, в момент взрыва которой развивается температура ($T \approx 10^7$ К)?
- Излучение считать близким к излучению абсолютно чёрного тела.
205. При нагревании абсолютно чёрного тела длина волны λ , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась от 690 нм до 500 нм. Во сколько раз увеличилась при этом энергетическая светимость тела?
206. На какую длину волны λ приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно чёрного тела, имеющего температуру, равную температуре $T = 37^\circ$ С человеческого тела, т.е. $T = 310^\circ$ К?
207. Найти длину волны λ света, соответствующую красной границе фотоэффекта, для лития, натрия, калия и цезия.
208. Длина волны λ света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda = 275$ нм. Найти минимальную энергию W фотона, вызывающую фотоэффект.
209. Длина волны λ света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda = 275$ нм. Найти работу выхода A электрона из металла, максимальную скорость v_{max} электронов, вырываемых из металла светом с длиной волны $\lambda = 180$ нм, и максимальную кинетическую энергию электронов

W_{max} .

210. Найти частоту ν света, вырывающего из металла электроны, которые полностью задерживаются разностью потенциалов $U=3$ В. Фотоэффект начинается при частоте света $\nu=10^{14}$ Гц. Найти работу выхода A электрона из металла.
211. Найти задерживающую разность потенциалов U для электронов, вырываемых при освещении калия светом с длиной волны $\lambda=330$ нм.
212. При фотоэффекте с платиновой поверхности электроны полностью задерживаются разностью потенциалов $U=0,8$ В. Найти длину волны λ применяемого облучения и предельную длину волны λ_0 , при которой ещё возможен фотоэффект.
213. Фотоны с энергией $W=4,9$ эВ вырывают электроны из металла с работой выхода $A=4,5$ эВ. Найти максимальный импульс p_{max} , передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона.
214. Найти постоянную Планка h , если известно, что электроны, вырываемые из металла светом с частотой $\nu_1=2,2 \cdot 10^{15}$ Гц, полностью задерживаются разностью потенциалов $U_1=6,6$ В, а вырываемые светом с частотой $\nu_2=4,6 \cdot 10^{15}$ Гц - разностью потенциалов $U_2=16,5$ В.
215. Найти световое давление P на стенки 100-ваттной электрической лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом $r=5$ см. Стенки лампы отражают 4 % и пропускают 6 % падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идёт на излучение.
216. На поверхность площадью $S=0,01$ м² в единицу времени падает световая энергия $E=1,05$ Дж/с. Найти световое давление P в случаях, когда поверхность полностью отражает и полностью поглощает падающие на неё лучи.
217. Монохроматический пучок света ($\lambda=490$ нм), падая по нормали к поверхности, производит световое давление $P=4,9$ мкПа. Какое число фотонов I падает в единицу времени на единицу площади этой поверхности? Коэффициент отражения света $\rho=0,25$.
218. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda_0=70,8$ нм испытывают комптоновское рассеяние на парафине. Найти длину волны λ рентгеновских лучей, рассеянных в направлениях: а) $\varphi=\pi/2$; б) $\varphi=\pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алешкевич В.А. Механика твёрдого тела. Лекции / В.А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В.А. Караваев. М: МГУ, 1997. 72 с.
2. Алешкевич В.А. Колебания и волны. Лекции / В.А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В.А. Караваев. М: МГУ, 2001. 143 с.
3. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. СПб: Книжный мир, 1979 и 2003. 177 с. и 164 с.
4. Кузмичёв, В.Е. Законы и формулы физики. Справочник / В.Е. Кузмичёв. Киев: Наукова Думка, 1989. 432 с.
5. Магнус К. Колебания: введение в исследование колебательных систем /

К. Магнус. М: Мир, 1982. 304 с.

6. Кравцов Ю.А. Геометрическая оптика неоднородных сред / Ю.А. Кравцов, Ю.А. Орлов. М: Наука, 1980. 153 с.

7. Пригожин И. Химическая термодинамика / И. Пригожин, R. Defay. Новосибирск: Наука, 1966. 501 с.

8. Савельев, И.В. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. - СПб: Издательство "Лань", 2015. 432 с.

9. Савельев, И.В. Электричество и магнетизм. Волны / И.В. Савельев. - СПб: Издательство "Лань", 2015. 496 с.

10. Савельев, И.В. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела / И.В. Савельев. - СПб: Издательство "Лань", 2015. 159 с.

11. Садовский, М.В. Лекции по квантовой теории поля. Т. 1, Т. 2 / М.В. Садовский. - Екатеринбург: Издательство Института электрофизики УрО РАН, 2000. 207 с., 2001., 184 с.

12. Сербо, В.Г. Конспект лекций по квантовой механике / В.Г. Сербо, И.Б. Хриплович. - Новосибирск: Издательство Новосибирского университета, 1999. 138 с.

13. Сивухин, Д.В. Механика / Д.В. Сивухин. - М.: Издательство Высшая школа, 2016. 531 с.

14. Сивухин, Д.В. Термодинамика и молекулярная физика / Д.В. Сивухин. - М.: Издательство Высшая школа, 2016. 565 с.

15. Сивухин, Д.В. Электричество / Д.В. Сивухин. - М.: Издательство Высшая школа, 2016. 703 с.

16. Сивухин, Д.В. Оптика / Д.В. Сивухин. - М.: Издательство Высшая школа, 2016. 568 с.

17. Сивухин, Д.В. Атомная физика / Д.В. Сивухин. - М.: Издательство Высшая школа, 2016. 426 с.

18. Сивухин, Д.В. Ядерная физика / Д.В. Сивухин. - М.: Издательство Высшая школа, 2016. 424 с.

19. Тамм, И.Е. Основы теории электричества. Учебное пособие / И.Е. Тамм. - М: Главное издательство физико-математической литературы, 1989. 504 с.

20. Иродов И.Е. Основные законы механики. / И.Е. Иродов. - М: Издательство Высшая школа, 1985. 248 с.

21. Иродов И.Е. Основные законы. Физика макросистем. / И.Е. Иродов. - М: Издательство Высшая школа, 2001. 200 с.

22. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма. / И.Е. Иродов. - М: Издательство Высшая школа, 1991. 288 с.

23. Иродов И.Е. Основные законы. Волновые процессы. / И.Е. Иродов. - М: Издательство Высшая школа, 1999. 256 с.

24. Иродов И.Е. Основные законы. Квантовая физика. / И.Е. Иродов. - М: Издательство Высшая школа, 2001. 272 с.

25. Иродов И.Е. Задачи по квантовой физике. / И.Е. Иродов. - М: Издательство Высшая школа, 1991. 175 с.

26. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. / И.Е. Иродов. - М: Издательство Высшая школа, 1979, 1988, 2002. 318 с., 416 с., 448.
27. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. / А.Н. Матвеев. - М: Издательство Высшая школа, 2003. 416 с.
28. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. / А.Н. Матвеев. - М: Издательство Высшая школа, 1981. 400 с.
29. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм.. / А.Н. Матвеев. - М: Издательство Высшая школа, 1983. 463 с.
30. Матвеев А.Н. Оптика. / А.Н. Матвеев. - М: Издательство Высшая школа, 1985. 351 с.
31. Матвеев А.Н. Атомная физика. / А.Н. Матвеев. - М: Издательство Высшая школа, 1989. 439 с.
32. Трофимова Т.И. Краткий курс физики. / Т.И. Трофимова. - М: Издательство Высшая школа, 2006. 352 с.
33. Трофимова Т.И. Курс физики. / Т.И. Трофимова. - М: Издательство Высшая школа, 2006. 560 с.
34. Трофимова Т.И., Фирсов А.В. Курс физики. Задачи и решения. / Т.И. Трофимова, А.В. Фирсов. - М: Издательство Высшая школа, 2011. 592 с.
35. Трофимова Т.И., Фирсов А.В. Сборник задач по курсу физики для втузов. / Т.И. Трофимова, А.В. Фирсов. - М: Издательство Высшая школа, 2005. 384 с.
35. Трофимова Т.И. Справочник по физике для студентов и абитуриентов. / Т.И. Трофимова. - М: Издательство Высшая школа, 2001. 399 с.
36. Трофимова Т.И. Физика в таблицах и формулах. / Т.И. Трофимова. - М: Издательство Высшая школа, 2002. 432 с.
37. Ивлиев А.Д. Физика. / А.Д. Ивлиев. - М: Издательство Высшая школа, 2008. 672 с.
38. Айзензон А.Е. Курс физики. / А.Е. Айзензон. - М: Издательство Высшая школа, 2012. 374 с.
39. Грабовский Р.И. Курс физики. / Р.И. Грабовский. - М: Издательство Высшая школа, 2009. 608 с.
40. Иванов А.Е. Механика / А.Е. Иванов, С.А. Иванов. - М: Издательство Высшая школа, 2016. 950 с.
41. Исаков А.Я. Молекулярная физика и термодинамика / А.Я. Исаков. - М: Издательство Высшая школа, 2007. 343 с.

Евгений Леонидович **Панкратов**
Елена Алексеевна **Булаева**

ФИЗИКА

Учебное пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижего-
родский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.