МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”

Е.Л. Панкратов

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов, обучающихся по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность»

Нижний Новгород
2020

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ: Автор: Панкратов Е.Л. Учебное пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. - 17 с.

Рецензенты: Рецензенты: к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика» НГТУ им. Р.Е. Алексеева М.Е. Елисеев.

Учебно-методическое пособие «Операции над матрицами. Решение систем линейных алгебраических уравнений» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность», с базовыми операциями над матрицами и методами решения систем линейных алгебраических уравнений. Для закрепления теоретических знаний в данном пособии приведены контрольные задания.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии ИЭП ННГУ,
к.э.н., доцент Макарова С.Д.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

Содержание

Введение

В последнее время в различных физических, технических, экономических и ряде других приложениях получает все более широкое распространение анализ процессов с помощью матриц. Также часто возникает необходимость решения алгебраических уравнений. Данное пособие подготовлено для ознакомления студентов с базовыми операциями над матрицами и методами решения систем линейных алгебраических уравнений. Для закрепления теоретических знаний в данном пособии приведены контрольные задания. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенций ОПК-1 (Способность применять математический инструментарий для решения экономических задач) и ПК-1 (Способность подготавливать исходные данные, необходимые для расчета экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйственных субъектов) образовательного стандарта по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность». В результате изучения раздела «Операции над матрицами. Решение систем линейных алгебраических уравнений» дисциплины «Математика» студенты должны знать основные операции над матрицами и основные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

1. ***Матричная алгебра***

Определение 1

Таблицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

скалярных величин a_{ik} называют (прямоугольной) матрицей размера $m \times n$. Величины a_{ik} называются элементами матрицы A. Элемент a_{ik} расположен в i-ой строке и k-ом столбце матрицы A.

Определение 2

Матрица размера $1 \times n$, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

называется строкой.

Определение 3

Матрица размера $m \times 1$, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

называется столбцом.

Определение 4

Матрица размера $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется квадратной матрицей порядка n.

Определение 5

Квадратная матрица называется треугольной (наддиагональной), если для $i > j$ выполняется a_{ik}=0, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 6

Квадратная матрица называется строго треугольной, если для $i \geq j$ выполняется a_{ik}=0, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение 7

Квадратная матрица называется диагональной, если для $i \neq j$ выполняется a_{ik}=0, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 8

Квадратная матрица называется мономиальной, если в каждой её строке и в каждом её столбце есть лишь один элемент отличный от нуля.

Определение 9

Матрица размера $m \times n$ называется нулевой (т.е. [0]), если все её элементы равны нулю.

Определение 10

Матрица порядка n называется единичной матрицей I, если все её диагональные элементы равны единице, т.е.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 11

Две матрицы $A=[a_{ik}]$ и $B=[b_{ik}]$ размера $m \times n$ равны друг другу ($A=B$) тогда и только тогда, когда $a_{ik}=b_{ik}$ для всех i и k.

Основные операции над матрицами

Операции над матрицами определяются с помощью операций над их элементами.

Определение 12

Суммой двух матриц $A=[a_{ik}]$ и $B=[b_{ik}]$ размера $m \times n$ является следующая матрица размера $m \times n$:

$$C=A+B=[c_{ik}]=[a_{ik}]+[b_{ik}].$$

Пример 1

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 14\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ 9 & 6 & 11\\ 6 & 5 & 4\end{pmatrix},\ C=A+B=\begin{pmatrix}3 & 9 & 16\\ 12 & 12 & 25\\ 13 & 7 & 5\end{pmatrix}.$$

Определение 13

Произведением матрицы $A=[a_{ik}]$ размера $m\times n$ на скаляр α является следующая матрица размера $m\times n$:

$$\alpha\mathrm{A}=\alpha\,[a_{ik}]=[\alpha\, a_{ik}].$$

Пример 2

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 14\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix},\ \alpha=3,\ \alpha\, A=\begin{pmatrix}6 & 15 & 24\\ 9 & 18 & 42\\ 21 & 6 & 3\end{pmatrix}.$$

Определение 14

Произведением двух матриц $A=[a_{ik}]$ размера $m\times n$ и $B=[b_{ik}]$ размера $n\times r$ является матрица $C=[c_{ik}]$ размера $r\times m$:

$$C=AB=[c_{ik}]=[a_{ik}][b_{ik}],$$

где

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\ .$$

Пример 3

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 9 & 6\end{pmatrix},\ C=AB=\begin{pmatrix}47 & 38\\ 57 & 48\end{pmatrix}.$$

Таким образом, элемент c_{ik} является суммой произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы k-ого столбца матрицы B. Следует заметить, что из существования произведения AB не следует в общем случае существование произведения BA. Оба произведения существуют только для квадратных матриц. В общем случае AB≠BA. Некоторые свойства матриц:

$$A+B=B+A,\ A+(B+C)=(A+B)+C,\ \alpha\,(\beta\,\mathrm{A})=(\alpha\beta)A,\ \alpha\,(AB)=A(\alpha B),\ A(BC)=(AB)C$$

$$\alpha\,(A+B)=\alpha\,A+\alpha\,B,\ (\alpha+\beta\,)A=\alpha\,A+\beta\,A,\ A(B+C)=AB+AC,\ (B+C)A=BA+CA.$$

Определение 15

Замена строк в матрице на соответствующие столбцы и наоборот называется транспонированием, т.е.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Определение 16

Определителем (детерминантом)

$$D = \det[a_{ik}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

квадратной матрицы A с n^2 элементами a_{ik} называется сумма с $n!$ членами $(-1)^r\cdot a_{1k1}\cdot a_{1k2}\cdot\ldots\cdot a_{1kn}$, каждый из которых соответствует одному из элементов $n!$ различных упорядоченных множеств k_1, k_2, …, k_n, полученных r попарными перестановками (транспозициями) элементов из множества 1, 2, …, n. Число n является порядком рассмотренного определителя.

Определение 17

(Дополнительный) минор D_{ik} элемента a_{ik} в определителе n-го порядка является определителем (n-1)-го порядка, который получается из определителя (1) после вычёркивания i-ой строки и k-го столбца. Алгебраическим дополнением A_{ik} элемента a_{ik} называется коэффициент при a_{ik} в разложении определителя (1), т.е.

$$A_{ik}=(-1)^{i+j}D_{ik}.$$

Пример 4

$$D = \det[a_{ik}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Пример 5

$$D = \det[a_{ik}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Свойства определителей

1. При замене строк столбцами и столбцов строками (т.е. перемене местами ендексов i и j) величина определителя не меняется.
2. При чётном числе перемен местами любых двух строк или любых двух столбцов величина определителя не меняется.
3. При прибавлении к элементам любой строки (или столбца) соответствующих элементов любой другой строки (или столбца), умноженных на одно и то же число α, величина определителя не меняется.

Пример 6

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+\alpha a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+\alpha a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. Нечётное число перемен местами любых двух строк или любых двух столбцов равносильно умножению определителя на -1.
5. Умножение всех элементов какой-либо строки или столбца на множитель α равносильно умножению определителя на α.
6. Если элементы какой-либо строки или столбца определителя представимы в виде некоторой суммы $\sum_{k=1}^{l} c_{nl}$, то определитель равен сумме соответствующих определителей.
7. Если все элементы какой-либо строки или столбца определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.
8. Если соответствующие элементы двух строк или столбцов равны или пропорциональны, то определитель равен нулю.

Определение 18

Аддитивно обратной (противоположной) матрицей $-A$ для матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ размера $m \times n$ является следующая матрица размера $m \times n$: $-A \equiv (-1)A \equiv [-a_{ik}]$.

Определение 19

Квадратная матрица A называется несобственной (невырожденной), если она имеет (необходимо единственную) обратную (мультипликативно) матрицу A^{-1}, определяемую условиями: $AA^{-1}=A^{-1}A=\mathrm{I}$. В противном случае матрица A является особенной (вырожденной). Обратная матрица определяется следующим соотношением:

$$A^{-1} \equiv [a_{ik}]^{-1} \equiv \left[\frac{A_{ki}}{\det[a_{ik}]} \right],$$

где A_{ki} - алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в определителе $\det[a_{ik}]$.

Определение 20

Рангом матрицы A называется наивысший из порядков отличных от нуля миноров данной матрицы. Ранг матрицы равен наибольшему числу линейно независимых строк или столбцов.

Определение 21

Следом (шпуром) матрицы $A \equiv [a_{ik}]$ размера $n \times n$ называется сумма всех её диагональных элементов, т.е.

$$Sp(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

2. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Пусть существует система линейных алгебраических уравнений

$$f_i(x_1, x_2, \ldots)=0,\ i=1,2,\ldots \tag{2}$$

с неизвестными x_1, x_2, ... Решением системы (2) называется множество значений неизвестных x_1, x_2, ..., удовлетворяющих одновременно каждому из уравнений системы (2). Система (2) решена полностью, если найдены все такие решения. Один из методов решения систем уравнений (2) является метод Гаусса. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений данной системы, приводящей матрицу коэффициентов в правых частях уравнений к диагональному виду. Рассмотрим данный метод на следующем примере.

<u>Пример 6</u>

Решим систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

На первом этапе проверим систему на совместность. В данном случае матрицы A и $\overline{A}$ соответственно равны

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A равен -19, т.е. ранг такой матрицы равен трём. Ранг расширенной марицы также равен трём. Далее исключим из второго и третьего уравнений данной системы x_1. Для этого прибавим ко второму и третьему уравнениям первое, умноженное соответственно на $-a_{21}/a_{11}$ и $-a_{31}/a_{11}$ (т.е. в данном случае соответственно на -3 и -2), что приводит к следующему результату

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ \quad x_2 + 14x_3 = -1 \\ \quad 2x_2 + 9x_3 = -2 \end{cases}$$

Аналогично исключаем из последнего уравнения x_2, т.е. умножаем второе уравнение последней системы на $-\dfrac{a_{32} - a_{31}a_{12}/a_{11}}{a_{22} - a_{12}a_{21}/a_{11}}$ (т.е. в данном случае на -2) и прибавляем его к третьему уравнению. Тогда

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = \ 1 \\ \quad x_2 + 14x_3 = -1 \\ \quad\quad -19x_3 = \ 0 \end{cases}$$

Таким образом, исходная система уравнений модифицирована таким образом, что матрица коэффициентов при неизвестных величинах является диагональной. Из третьего уравнения данной системы следует, что x_3=0. Тогда с учётом полученного результата из второго уравнения следует, что x_2=-1. Подстановка данных значений x_2 и x_3 в первое уравнение позволяет получить: x_1=3.

<u>Определение 21</u>

m уравнений $f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$, $i=1,2,\ldots,m$, определённых при всех значениях x_1, x_2, …, x_n, линейно независимы, если из условия

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv 0$$

при всех значениях x_1, x_2, …, x_n следует, что $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$.

<u>Правило Крамера</u>

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными: x_1, x_2, …, x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_k \qquad (4)$$

Если определитель системы (4)

$$D = \det[a_{ik}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то система (4) имеет единственное решение:

$$x_k=D_k/D, \qquad 5)$$

где D_k - определитель, получающийся из D при замене элементов a_{1k}, a_{2k}, …, a_{nk} k-го столбца соответствующими свободными членами b_1, b_2, …, b_k или

$$D_k = \sum_{i=1}^{n} A_{ik}b_i\ ,\ (k=1,2,\ldots n),$$

где A_{ik} - алгебраическое дополнение элемента a_{ik}. Соотношение (5) называется правилом Крамера.

<u>Пример 6*а*</u>

Вернёмся к системе (3) и решим её с помощью правила Крамера. На первом этапе вычислим определители, равные следующим величинам:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (7-12) - 2(3-4) - 4(18-14) = -19$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&2&-4\\2&7&2\\0&6&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&2\\6&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&2\\0&1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}2&7\\0&6\end{vmatrix}=(7-12)-2\times2-4\times12=-5-4-48=-57$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&-4\\3&2&2\\2&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2\\0&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&2\\2&1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}3&2\\2&0\end{vmatrix}=2-(3-4)-4(-4)=2+1+16=19$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&7&2\\2&6&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&2\\6&0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3&2\\2&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&7\\2&6\end{vmatrix}=-12-2(-4)+(18-14)=-12+8+4=0\,.$$

Вычисление соответствующих отношений определителей приводит к уже известному результату:

$$x_1=-57/(-19)=3,\ x_2=19/(-19)=-1,\ x_3=0/(-19)=0.$$

Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему уравнений

$$AX=B, \tag{4a}$$

где $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов левых частей уравнений системы (4), $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}$ - вектор решений уравнений системы (4), $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\ldots\\b_n\end{pmatrix}$ - вектор правых частей уравнений системы (4). Тогда решение уравнений системы (4*а*) может быть представлено в следующем виде:

$$X=A^{-1}B, \tag{4б}$$

<u>Пример 6*б*</u>

Вернёмся к системе (3) и решим её матричным методом. Матрицы A^{-1} и B имеют следующий вид:

$$A^{-1}=-\frac{1}{19}\begin{pmatrix}-5&-26&32\\1&9&-14\\4&-2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Умножение A^{-1} на B позволяет получить:

$$X=-\frac{1}{19}\begin{pmatrix}-5 & -26 & 32\\ 1 & 9 & -14\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

В развёрнутой форме данное соотношение имеет вид:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix},$$

что эквивалентно следующей записи x_1=3, x_2=-1, x_3=0.

<u>Определение 22</u>

Пусть коэффициенты левых частей уравнений системы (4) образуют матрицу А:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Расширенной матрицей системы (4) назовём следующую матрицу:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_{nn}\end{pmatrix}$$

Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\qquad(6)$$

Система уравнений (6) совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы $\overline{A}$ равен рангу матрицы А.

Доказательство

1. Пусть система (6) совместна и пусть x_{10}, x_{20}, …, x_{n0} является её решением. Подставляя это решение в систему (6) получаем n тождеств. Эти тождества показывают, что последний столбец матрицы $\overline{A}$ является суммой всех остальных столбцов, взятых соответственно с коэффициентами x_{10}, x_{20}, …, x_{n0}. Всякий другой столбец матрицы $\overline{A}$ входит соответственно и в матрицу А и поэтому линейно выражается через все столбцы этой матрицы. Обратно, всякий столбец матрицы А является столбцом и в $\overline{A}$, т.е. линейно выражается через столбцы этой матрицы. Отсюда следует, что системы

столбцов матриц А и $\overline{A}$ эквивалентны между собой. Поэтому матриц А и $\overline{A}$ имеют один и тот же ранг.

2. Пусть теперь дано, что матрицы А и $\overline{A}$ имеют одинаковые ранги. Отсюда следует, что любая максимально линейно независимая система столбцов матрицы А остаётся максимально линейно независимой и в матрице $\overline{A}$. Таким образом, через эту систему, а поэтому и вообще через систему столбцов матрицы А, линейно выражается последний столбец матрицы $\overline{A}$. Существует, следовательно, такая система коэффициентов x_{10}, x_{20}, …, x_{n0}, что сумма столбцов матрицы А, взятых с этими коэффициентами, равна столбцу из свободных членов. По этой причине числа x_{10}, x_{20}, …, x_{n0} составляют решение системы (6). Таким образом, совпадение рангов матриц А и $\overline{A}$ приводит к совместности системы (6).

Решение системы n уравнений с m неизвестными

Рассмотрим систему уравнений (6). Возможны два случая:

1) $n>m$. В этом случае количество переменных больше количества уравнений. Все члены уравнений системы (6) с x_{m+1}, x_{m+2}, …, x_n переносятся в правую часть этих уравнений и данные неизвестные рассматриваются как параметры с произвольными значениями c_{m+1}, c_{m+2}, …, c_n, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1m+1}x_{m+1} - a_{1m+2}x_{m+2} - \ldots - a_{1n}x_n = \\ \qquad\qquad = b_1 - a_{1m+1}c_{m+1} - a_{1m+2}c_{m+2} - \ldots - a_{1n}c_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2m+1}x_{m+1} - a_{2m+2}x_{m+2} - \ldots - a_{2n}x_n = \\ \qquad\qquad = b_2 - a_{2m+1}c_{m+1} - a_{2m+2}c_{m+2} - \ldots - a_{2n}c_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m - a_{mm+1}x_{m+1} - a_{mm+2}x_{m+2} - \ldots - a_{mn}x_n = \\ \qquad\qquad = b_m - a_{mm+1}c_{m+1} - a_{mm+2}c_{m+2} - \ldots - a_{mn}c_n \end{cases} \quad (6a)$$

<u>Пример 7</u>

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Переносим в правую часть системы члены уравнений с x_3, т.е.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2c_3 \\ 3x_1 - x_2 = 4 - c_3 \end{cases}$$

Определители данной системы имеют следующие значения:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4;\ D_1 = \begin{vmatrix} 1+2c_3 & 1 \\ 4-c_3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2c_3 - 4 + c_3 = -5 - c_3$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1+2c_3 \\ 3 & 4-c_3 \end{vmatrix} = 4 - c_3 - 3(1+2c_3) = 1 - 7c_3.$$

Корни рассмотренной системы уравнений x_{10} и x_{20} имеют следующие значения:

$$x_{10}=(c_3+5)/4,\ x_{20}=(7c_3-1)/4.$$

2) $m > n$. В этом случае количество переменных меньше количества уравнений. На первом этапе проверяем систему на совместность. Если система совместна, убираем лишние уравнения до тех пор, пока количество переменных не совпадёт с количеством уравнений. Далее решаем оставшуюся систему.

Пример 8

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \\ 4x_1 + 9x_2 = 11 \end{cases}$$

Ранги матриц из коэффициентов и расширенной равны 2. Левые части первых двух уравнений линейно независимы. Решение данной системы из первых двух уравнений определяется следующими корнями:

$$x_{10}=-5/17,\ x_{20}=23/17.$$

Подстановка таких корней в третье уравнение позволяет получить:

$$-\frac{20}{17} + \frac{207}{17} \equiv \frac{187}{17} \equiv 11.$$

Таким образом, последнее уравнение удовлетворяется.

Решение системы n однородных уравнений

Рассмотрим систему однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

В этом случае вычисляется ранг матрицы r

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Если r меньше n, то выражаем r решений $x_1, x_2, \ldots, x_r$ через n-r свободных членов $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I) Даны матрицы *A* и *B*. Найти:

1) сумму матриц *A* и *B*; 2) произведение матриц *A* и *B*;

3) определители матриц *A* и *B*; 4) ранги матриц *A* и *B*;

5) матрицы A^{-1} и B^{-1}; 6) транспонированные матрицы A^T и B^T.

1.01 $A=\begin{pmatrix}3&4&6\\1&2&8\\3&6&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&2&3\\6&8&4\end{pmatrix};$

1.02 $A=\begin{pmatrix}3&8&5\\4&6&2\\5&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&2&3\\6&8&4\end{pmatrix};$

1.03 $A=\begin{pmatrix}6&4&1\\3&8&5\\2&1&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&1&8\\3&2&6\\8&3&2\end{pmatrix};$

1.04 $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\2&1&3\\4&2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6&4&2\\4&2&1\\2&5&3\end{pmatrix};$

1.05 $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&1&4\\2&3&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&4&8\\3&3&1\end{pmatrix};$

1.06 $A=\begin{pmatrix}8&3&1\\7&2&4\\6&2&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&4\\6&3&2\\1&3&4\end{pmatrix};$

1.07 $A=\begin{pmatrix}4&3&1\\3&2&4\\6&8&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&8&6\\4&2&3\\8&3&7\end{pmatrix};$

1.08 $A=\begin{pmatrix}4&4&6\\2&3&2\\3&2&8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&4&1\\2&7&8\\6&8&1\end{pmatrix};$

1.09 $A=\begin{pmatrix}8&6&4\\2&2&1\\9&14&16\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&7&1\\1&8&7\\2&8&4\end{pmatrix};$

1.10 $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\2&1&1\\0&4&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&11&6\\0&4&1\\6&4&7\end{pmatrix};$

1.11 $A=\begin{pmatrix}7&8&4\\2&4&7\\7&4&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&1&3\\8&4&2\\7&4&3\end{pmatrix};$

1.12 $A=\begin{pmatrix}6&4&3\\7&3&2\\4&0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&4&4\\0&2&0\\4&3&3\end{pmatrix};$

1.13 $A=\begin{pmatrix}6&4&3\\1&8&8\\4&2&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&3&3\\6&4&0\\2&3&1\end{pmatrix};$

1.14 $A=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&4&6\\2&7&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}14&6&2\\7&1&1\\7&2&0\end{pmatrix};$

1.15 $A=\begin{pmatrix}1&4&8\\9&6&11\\6&5&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&9&16\\1&2&25\\3&7&5\end{pmatrix};$

1.16 $A=\begin{pmatrix}6&15&24\\9&18&42\\21&6&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}47&38&1\\57&48&4\\9&6&6\end{pmatrix};$

1.17 $A=\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & \cos(2\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 1.18 $A=\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$;

1.19 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 1.20 $A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & b & 1 \\ 0 & d & d \end{pmatrix}$;

1.21 $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 1.22 $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 8 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 11 & 3 \\ 8 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

1.23 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 1.24 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & -6 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

1.25 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 1.26 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

1.27 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 27 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; 1.28 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$;

1.29 $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$; 1.30 $A=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 11 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

II) Даны системы однородных и неоднородных уравнений. Найти их решения или показать их несовместность.

2.01 $\begin{cases} x+2y-3z=-2 \\ 2y-z=1 \\ 3x-y+2z=3 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x+2y+z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 6x-y+z=0 \end{cases}$; 2.02 $\begin{cases} -x+2y+z=3 \\ x+y+3z=2 \\ x-2z=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 5x+4y-5z=0 \end{cases}$;

2.03 $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 3x+y-2z=4 \\ 4x+y-4z=6 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x-3y+2z=0 \\ 2x+5y-3z=0 \\ 16x+y=0 \end{cases}$; 2.04 $\begin{cases} y-2z=-1 \\ 2x-3y+3z=-3 \\ 2x-3y+z=6 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ 3x-6y-16z=0 \end{cases}$;

2.05 $\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x+3z=-1 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 3x+4y-2z=0 \\ 3x-7y-1z=0 \end{cases}$; 2.06 $\begin{cases} 5x+2y-z=1 \\ -2x+3y-z=4 \\ x-4y+2z=6 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x+4y-2z=0 \\ 2x-y-3z=0 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$;

2.07 $\begin{cases} 2x-y+z=-1 \\ 2x+3y-2z=1 \\ x-3y=6 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 8x+3y-6z=0 \\ 4x-y-2z=0 \end{cases}$; 2.08 $\begin{cases} 4x-3y-2z=0 \\ 2x-3y+2z=1 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x-4y-2z=0 \\ 3x+y+z=0 \\ x-4y-z=0 \end{cases}$;

2.09 $\begin{cases} x-2y-z=2 \\ 2x-y+3z=4 \\ x-2y=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} 7x-5y=0 \\ 4x+11z=0 \\ -x+y+1{,}1z=0 \end{cases}$; 2.10 $\begin{cases} 3x-2y-2z=0 \\ x-2y+z=-3 \\ 2x+3z=4 \end{cases}$; $\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ 5x+y+2z=0 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases}$;

2.11 $\begin{cases} x-4y+2z=17 \\ 5x+y+2z=10 \\ 3x-y+z=6 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$; 2.12 $\begin{cases} x-4y-2z=2 \\ 3x+y+z=-4 \\ 3x-5y-6z=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ x-2y-4z=0 \\ x-4y-6z=0 \end{cases}$;

2.13 $\begin{cases} 6x+4y+z=3 \\ 2x-y+z=1 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x+y-2z=0 \\ x-3y+4z=0 \\ -5x+2y=0 \end{cases}$; 2.14 $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x-y+3z=-1 \\ x-2y-z=2 \end{cases}$; $\begin{cases} -x+8y+6z=0 \\ 4x+y-6z=0 \\ x-3y=0 \end{cases}$;

2.15 $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+2y-z=-2 \\ x+2y-3z=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+3y+6z=0 \\ 11x+3y+141z=0 \end{cases}$; 2.16 $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x-3y+z=2 \\ 2x+2y-2z=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x+4y-z=0 \\ x-6y+3z=0 \\ x-6y+3z=0 \end{cases}$;

2.17 $\begin{cases} x-2y+z=2 \\ x+y+2z=-3 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ x+y-6z=0 \\ 2x-5y+4z=0 \end{cases}$; 2.18 $\begin{cases} x-2y+z=2 \\ x+y+2z=-3 \\ 2x-y+3z=4 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x+3y-3z=0 \\ 3x-2y+z=0 \\ -3x+2y-z=0 \end{cases}$;

2.19 $\begin{cases} x-2y+5z=2 \\ 2x-3y+2z=-3 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-5y-z=0 \\ x+2y-3z=0 \\ 3x-3y-4z=0 \end{cases}$; 2.20 $\begin{cases} 3x-y+2z=-2 \\ 2x+3z=0 \\ 5x+2y-z=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x-4y+7z=0 \\ x+y-3z=0 \\ 5x-2y-z=0 \end{cases}$;

2.21 $\begin{cases} 2x-4y+z=5 \\ 3x-2y+z=-3 \\ 3x+9y+2z=7 \end{cases}$; $\begin{cases} x-7y+8z=0 \\ x+4y-z=0 \\ 3x+y+6z=0 \end{cases}$; 2.22 $\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ 4x+7y+8z=3 \\ 8x+2y+3z=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x-2y+6z=0 \\ 4x-7y+z=0 \\ x-2y+29z=0 \end{cases}$;

2.23 $\begin{cases} 2x-5y-13z=14 \\ 8x+7y+\dfrac{27}{2}z=9 \\ 7x+6y+11z=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x-7y+3z=0 \\ 3x+y-z=0 \\ 3x+y-7z=0 \end{cases}$; 2.24 $\begin{cases} 2x+4y+z=1 \\ x+7y+3z=4 \\ x-2y+3z=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x-4y+z=0 \\ x+5y-4z=0 \\ 9x-45y-4z=0 \end{cases}$;

2.25 $\begin{cases} 3x+4y-2z=6 \\ 2x-7y+4z=4 \\ 3x+y+4z=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x-4y+7z=0 \\ x-4y+8z=0 \\ x-4y+8z=0 \end{cases}$; 2.26 $\begin{cases} x-7y+3z=0 \\ 4x+6y-z=0 \\ -5x+3y-2z=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x-7y+3z=0 \\ 4x+6y-z=0 \\ -5x+3y-2z=0 \end{cases}$;

2.27 $\begin{cases} 4x+3y+5z=4 \\ 3x+y+8z=7 \\ 6x+8y+5z=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x-4y-5z=0 \\ x-y+3z=0 \\ x-4y-39z=0 \end{cases}$; 2.28 $\begin{cases} 3x+4y+2z=4 \\ x+3y+6z=6 \\ x+4y+2z=10 \end{cases}$; $\begin{cases} x-5y+4z=0 \\ 3x-2y-z=0 \\ 7x-6y-z=0 \end{cases}$;

2.29 $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ -x+3y+2z=4 \\ 7x-3y+5z=11 \end{cases}$; $\begin{cases} x-4y+7z=0 \\ 4x-8y+7z=0 \\ 3x-4y=0 \end{cases}$. 2.30 $\begin{cases} 4x+7y+8z=2 \\ 9x+y+3z=-7 \\ 2x-4y+z=4 \end{cases}$; $\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ 4x-y+2z=0 \\ x+3y+7z=0 \end{cases}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г. Курош. Курс высшей алгебры. - Москва: Наука. 1968.
2. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. - Москва: Наука. 1966.
3. В.И. Смирнов. Курс высшей математики в 5-и томах. - Москва: Наука. 2008.

Евгений Леонидович **Панкратов**

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.