МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

А.А. Перов

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Учебное пособие

Рекомендовано методической комиссией физического факультета
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
03.03.02 «Физика», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
28.03.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника»,
09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Нижний Новгород
2018

УДК 517.9:51-7
ББК 22.161.6
П26

П26 **Перов А.А.** СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРИЛОЖЕНИЯХ: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018. – 100 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **Н.В. Киселева**

В учебном пособии показано использование систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными при изучении реальных явлений и процессов. Излагаются теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными и методы их решения. Приведены многочисленные примеры с подробными решениями. Особое внимание уделено применению систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными в прикладных задачах, описывающих непрерывные физические, механические, электротехнические и другие процессы.

Для студентов физического факультета ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.02 «Физика», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 28.03.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника», 09.03.02 «Информационные системы и технологии». Оно адресовано также студентам других факультетов и институтов ННГУ, изучающим дифференциальные уравнения и их приложения.

Ответственный за выпуск:
председатель методической физического факультета ННГУ,
к.ф.-м.н., доцент **А.А. Перов**

УДК 517.9:51-7
ББК 22.161.6

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение многих задач физики, механики, химии, биологии и других наук приводит к интегрированию дифференциальных уравнений, что обусловлено универсальным характером закономерностей различных явлений природы. В связи с этим важную роль в математической подготовке будущих исследователей в области физики, нанотехнологии и информационных технологий играет курс дифференциальных уравнений.

При решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных используются аналитические [6, 9, 11, 12, 14 – 16, 18, 20 – 23, 28, 29, 32 – 35, 39, 40, 44, 48, 50] и численные [4, 10, 31, 42, 45 – 47] методы решения. В данном учебном пособии достаточно полно представлен не только теоретический материал, который иллюстрируется подробными решениями примеров, но и приведены задачи прикладного характера. Прикладные задачи сопровождаются иллюстрациями и подробными решениями. Это является необходимым этапом обучения студентов, который отвечает современным требованиям качества их подготовки.

Дисциплина «Дифференциальные уравнения», преподаваемая студентам физического факультета Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (ННГУ), обучающимся по направлениям подготовки 03.03.02 «Физика», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 28.03.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника», 09.03.02 «Информационные системы и технологии», ориентирована на формирование у студентов следующих компетенций:

– способность к самоорганизации и самообразованию (ОК-7);

– способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей (ОПК-2);

– способность использовать специализированные знания в области физики и математики для освоения профильных физических дисциплин (ПК-1).

При создании математических моделей профессиональных задач основную трудность представляет составление самого дифференциального уравнения по условию задачи, которая заключается в определении математической зависимости между переменными величинами и их приращениями, в получении выражения для производной. В данном учебном пособии этому вопросу уделено особое внимание. Оно содержит прикладные задачи, сопровождающиеся иллюстрациями и подробными решениями, в которых в зависимости от условия задачи для составления дифференциальных уравнений применяются законы физики, механики и других наук.

Материал, представленный в учебном пособии, адаптирован к учебному процессу. Практическая значимость учебного пособия обусловлена тем, что оно предназначено дать опыт применения теории дифференциальных уравнений для решения прикладных задач, описывающих непрерывные физические, механические и другие процессы.

Отметим, что в учебном пособии имеется большое количество упражнений для самостоятельной работы. Это позволит студентам овладеть практическими навыками решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

Учебное пособие адресовано студентам физического факультета ННГУ, обучающимся по направлениям подготовки 03.03.02 «Физика», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 28.03.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника», 09.03.02 «Информационные системы и технологии». Оно также будет полезно студентам других факультетов и институтов ННГУ, изучающим дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений и их применения в различных приложениях.

Автор выражает искреннюю признательность за поддержку и постоянное внимание декану физического факультета ННГУ, к.ф.- м.н., доценту А.И. Малышеву и заведующему кафедрой теоретической физики физического факультета ННГУ, д.ф.-м.н., профессору В.А. Бурдову.

Автор выражает искреннюю благодарность заместителю директора Института информационных технологий, математики и механики (ИИТММ) ННГУ по магистратуре, доценту кафедры теории управления и динамики систем ИИТММ, к.ф.-м.н., доценту Н.В. Киселевой за полезные замечания при рецензировании рукописи учебного пособия.

1. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решении многих задач для описания изучаемых процессов необходимо найти функции $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, … , $y_n = y_n(x)$, которые удовлетворяют системе n дифференциальных уравнений.

Определение 1.1. ***Системой дифференциальных уравнений*** называется совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимое переменное, искомые функции и их производные [6, 28, 39].

Предполагают, что число уравнений системы равно числу искомых функций.

Рассмотрим систему n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{1.1}$$

где x – аргумент, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – искомые функции.

Определение 1.2. ***Решением системы дифференциальных уравнений*** **(1.1)** называется совокупность n непрерывно дифференцируемых функций $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, которые при подстановке в каждое из уравнений (1.1) обращают его в тождество.

Совокупность функций

$$\begin{aligned} &y_1 = F_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &y_2 = F_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n = F_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{aligned} \tag{1.2}$$

называется *общим* решением системы (1.1), если:

а) система функций (1.2) разрешима относительно произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} &C_1 = \varphi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &C_2 = \varphi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C_n = \varphi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \end{aligned} \tag{1.3}$$

б) совокупность функций (1.2) является решением системы (1.1) при значениях постоянных C_1, C_2, … , C_n, которые определяются формулами (1.3).

Решение, получающееся из общего решения (1.2) при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется *частным решением*.

Каждое из равенств (1.3), где функции $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, являются постоянными на решениях $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, … , $y_n = y_n(x)$ системы уравнений (1.1), называется *первым интегралом* системы дифференциальных уравнений (1.1). Совокупность первых интегралов называется *общим интегралом* системы (1.1).

Нахождение решения *задачи Коши* для системы дифференциальных уравнений означает определение функций y_1, y_2, … , y_n, удовлетворяющих системе уравнений (1.1) и заданным начальным условиям:

$$y_1 = y_1^0,\ y_2 = y_2^0,\ \ldots,\ y_n = y_n^0 \quad \text{при } x = x_0. \tag{1.4}$$

1.1. Нормальные системы дифференциальных уравнений

Часто исследуемые процессы описываются не произвольными системами дифференциальных уравнений, а так называемыми *нормальными* системами.

Определение 1.3. Нормальной *системой дифференциальных уравнений* (или ***системой, имеющей нормальную форму Коши***) называется система уравнений вида (1.1), в которой в левой части уравнений стоят производные первого порядка, а правые части уравнений не содержат производных [6, 21, 40, 44].

Отметим, что изучение нормальных систем дифференциальных уравнений является важным, поскольку во многих случаях произвольно заданную систему дифференциальных уравнений можно привести к нормальной системе.

Для нормальных систем дифференциальных уравнений имеет место теорема, которая гарантирует существование и единственность частного решения (задача Коши).

Теорема 1.1. Если правые части нормальной системы дифференциальных уравнений непрерывны вместе со своими частными производными в окрестности значений $x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$, то существует единственная система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$, которая является решением системы и удовлетворяет начальным условиям.

Если рассматривать систему чисел $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ как точку в (n+1)-мерном пространстве, то теорема 1.1 имеет такое истолкование: *через каждую точку рассматриваемой области* (n+1)-*мерного пространства проходит единственная интегральная кривая*.

Замечание 1.1. Далее будем обозначать независимое переменное буквой t, а неизвестные функции, если их не больше трех, через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Пример 1.1. Дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} - 4x = 0, \\ \dfrac{dx}{dt} - 3\dfrac{dy}{dt} + 6y = t, \end{cases}$$

где t – аргумент, $x(t)$ и $y(t)$ – искомые функции. Требуется привести ее к нормальной системе.

Решение. Данная система дифференциальных уравнений приводится к нормальной системе, если разрешим уравнения относительно производных $\dfrac{dx}{dt}$ и $\dfrac{dy}{dt}$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{5}(6x - 6y + t), \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{5}(4x + 6y - t). \end{cases} \qquad \blacktriangle$$

Пример 1.2. Дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} - 4x = 0, \\ \dfrac{dx}{dt} - 3\dfrac{dy}{dt} + 6y = t, \end{cases}$$

где t – аргумент, $x(t)$ и $y(t)$ – искомые функции. Требуется привести ее к нормальной системе.

Решение. Данная система дифференциальных уравнений приводится к нормальной системе, если разрешим уравнения относительно производных $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2}{5}(6x - 6y + t), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{5}(4x + 6y - t). \end{cases} \quad \blacktriangle$$

Пример 1.3. Имеется система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 7y = 0, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 5tx = 0. \end{cases}$$

Необходимо привести ее к нормальной системе.

Решение. Эта система уравнений не приводится к нормальной, поскольку ее нельзя разрешить относительно производных $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$. ▲

Пример 1.4. Дана система дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + 3ty_2 = 0, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} + 2\frac{dy_1}{dt} - y_2 = 0. \end{cases}$$

Требуется привести ее к нормальной системе.

Решение. Данная система уравнений приводится к нормальной системе путем введения новых вспомогательных неизвестных функций:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_3, \ \frac{dy_2}{dt} = y_4.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{dy_3}{dt} = -3ty_2, \ \frac{dy_4}{dt} = y_2 - 2y_3.$$

Тогда система уравнений (1.6) заменяется следующей нормальной системой:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_4, \\ \dfrac{dy_3}{dt} = -3ty_2, \\ \dfrac{dy_4}{dt} = y_2 - 2y_3. \end{cases}$$

Следует отметить, что *одно* дифференциальное уравнение *n*-го порядка, которое разрешено относительно старшей производной, всегда можно свести к системе нормальных уравнений с помощью введения новых вспомогательных функций. ▲

Пример 1.5. Дано уравнение третьего порядка [6]:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Необходимо свести уравнение к нормальной системе дифференциальных уравнений.

Решение. Введем две новые вспомогательные функции

$$y = \frac{dx}{dt}, \ z = \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Тогда данное уравнение заменяется системой трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = f(t, x, y, z). \end{cases}$$

Эта система уравнений является частным случаем нормальной системы (1.1). Так можно поступать, если имеется дифференциальное уравнение любого порядка n. В этом случае количество вспомогательных функций будет равно $n - 1$. ▲

От системы нормальных уравнений в обычно встречающихся случаях можно перейти к дифференциальному уравнению, поэтому верно и обратное утверждение: *нормальная система уравнений может быть заменена одним дифференциальным уравнением, порядок которого равен числу уравнений системы*. Сведение нормальной системы к одному уравнению может быть достигнуто путем применения *метода исключений* [16]. Суть данного метода состоит в том, что дифференцируют одно из уравнений системы и затем исключают все неизвестные, кроме одного. В результате получается дифференциальное уравнение, которое содержит одну неизвестную функцию. Разыскав неизвестную функцию этого уравнения, необходимо подставить ее выражение в данные уравнения и найти остальные неизвестные функции.

Пример 1.6. Проинтегрировать систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - 2y + z. \end{cases}$$

Решение. Продифференцируем первое уравнение по переменной t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dy}{dt}.$$

Заменяем производную $\dfrac{dy}{dt}$ ее выражением из второго уравнения, находим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dy}{dt} = 4z.$$

Дифференцируем это уравнение еще раз:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dz}{dt}.$$

Заменим производную $\dfrac{dz}{dx}$ ее выражением из третьего уравнения нормальной системы, будем иметь:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 4\frac{dz}{dt} = 4(x - 2y + z).$$

Поскольку

$$y = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}$$

и

$$z = \frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2},$$

то получаем линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} - 4x = 0.$$

Общее решение этого уравнения, т. е. выражение для функции x, будет зависеть от трех произвольных постоянных. Другие неизвестные функции (y и z) определяются из их выражений через найденную функцию x. Следовательно, количество произвольных постоянных не увеличится и будет равно порядку данной системы.

Находим решение полученного уравнения. Характеристическое уравнение, соответствующее этому дифференциальному уравнению,

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0.$$

имеет корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -2i$. Общее решение дифференциального уравнения будет:

$$x = C_1 \exp(t) + C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t.$$

Так как при исключении y и z получили $y = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}$ и $z = \frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2}$, то

$$y = \frac{C_1}{2}\exp(t) + C_2 \cos 2t - C_3 \sin 2t,$$

$$z = \frac{C_1}{4}\exp(t) - C_2 \sin 2t - C_3 \cos 2t.$$

Рассмотрим пример, когда нормальную систему уравнений нельзя заменить одним дифференциальным уравнением. ▲

Пример 1.7. Проинтегрировать систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = 2z, \\ \frac{dz}{dt} = 3y. \end{cases}$$

Решение. Здесь первое уравнение никак не связано двумя другими уравнениями, поэтому его решаем отдельно. Разделяя в нем переменные и интегрируя, находим общее решение:

$$x = C_1 \exp(t).$$

Второе и третье уравнения системы заменяем одним дифференциальным уравнением способом, указанным в примере 1.5. Будем иметь дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{dz}{dt} = 6y.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y = C_2 \exp(\sqrt{6}t) + C_3 \exp(-\sqrt{6}t).$$

Тогда

$$z = \frac{1}{2}\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{6}}{2}\Big(C_2 \exp(\sqrt{6}t) - C_3 \exp(-\sqrt{6}t)\Big).$$

Окончательно решение нормальной системы будет:

$$x = C_1 \exp(t),$$

$$y = C_2 \exp(\sqrt{6}t) + C_3 \exp(-\sqrt{6}t),$$

$$\mathrm{z} = \sqrt{\frac{3}{2}}\Big(C_2 \exp(\sqrt{6}t) - C_3 \exp(-\sqrt{6}t)\Big). \quad ▲$$

В некоторых случаях решение системы дифференциальных уравнений можно найти, используя *метод интегрируемых комбинаций* [16], который состоит в следующем. Комбинируя уравнения системы и проводя затем несложные преобразования, удается получить легко интегрируемые уравнения.

Пример 1.8. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{x+2y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{x+2y}. \end{cases}$$

при начальных условиях: $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Решение. Составляем первую интегрируемую комбинацию, разделив первое уравнение на второе:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}.$$

Разделяем переменные в полученном уравнении

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

и интегрируя, находим:

$$\ln x = \ln y + \ln C_1, \text{ т. е. } x = C_1 y.$$

Составляем вторую интегрируемую комбинацию, сложив первое и удвоенное второе уравнения системы:

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = 1.$$

Отсюда получаем

$$dx + 2dy = dt, \text{ т. е. } x + 2y = t + C_2.$$

Из системы уравнений

$$x = C_1 y, \quad x + 2y = t + C_2$$

находим общее решение:

$$x = \frac{C_1(t + C_2)}{C_1 + 2}, \; y = \frac{t + C_2}{C_1 + 2}.$$

Используя начальные условия, определим произвольные постоянные:

$$1 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + 2}, \; 2 = \frac{C_2}{C_1 + 2}, \text{ т. е. } C_1 = \frac{1}{2}, \; C_2 = 5.$$

Подставим найденные значения C_1 и C_2 в общее решение, получим частное решение, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$x = \frac{1}{5}t + 1, \; y = \frac{2}{5}t + 2. \quad \blacktriangle$$

Пример 1.9. Решить систему дифференциальных уравнений, заданную в *симметричной* форме [48]:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}.$$

Решение. Рассмотрим первые две дроби

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x},$$

они образуют интегрируемую комбинацию. Разделяя переменные

$$xdx-ydy=0$$

и интегрируя, находим:

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=C;\ x^2-y^2=C_1,$$

где $C_1 = 2C$. Для нахождения второй интегрируемой комбинации воспользуемся свойством равных дробей: если

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=t,$$

то при любых k_1, k_2, … ,k_n имеем

$$\frac{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n}=t.$$

Полагаем $k_1 = z$, $k_2 = z$, тогда

$$\frac{zdx+zdy}{zy+zx}=\frac{dz}{z}.$$

Сократив на z и разделяя переменные, получаем:

$$\frac{d(x+y)}{x+y}=\frac{dz}{z},$$

откуда, интегрируя, находим:

$$\ln(x+y)=\ln z+\ln C_2;\ x+y=zC_2.\ \blacktriangle$$

Задача 1.1. ***Траектория снаряда***. Рассмотрим полет снаряда массы m, который вылетает из орудия с начальной скоростью v_0. Считаем, что на снаряд действует только сила тяжести $\vec{F}$, а силу сопротивления воздуха для простоты не будем принимать во внимание. Необходимо определить траекторию движения снаряда [19].

Решение. За начало координат примем точку вылета снаряда из ствола орудия, ось Oy направим вертикально вверх, ось Ox горизонтальна. Так как скорость v полета снаряда всегда направлена по касательной к его траектории, то направление скорости меняется с течением времени t. Поэтому, следуя [19], разложим силу $\vec{F}$ на составляющие F_x и F_y и скорость v на составляющие v_x и v_y в направлении осей координат. Тогда движение в плоскости Oxy можно рассматривать как результат сложения двух движений: движения вдоль оси Ox под действием силы F_x со скоростью v_x и движения вдоль оси Oy под действием силы F_y со скоростью v_y. Применяя к каждому из этих движений второй закон Ньютона, будем иметь:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = F_x, \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = F_y. \end{cases} \tag{1.5}$$

В каждом из уравнений (1.5) сила и скорость направлены вдоль одной прямой: в первом уравнении вдоль оси Ox, а во втором – вдоль оси Oy. Пусть ствол орудия составляет угол α с положительным направлением оси Ox. Угол α называется *углом бросания*. Поскольку сила тяжести $\vec{F}$ направлена к земле, то $F_x = 0$, $F_y = -mg$, где g – ускорение свободного падения. В этом случае система уравнений (1.5) принимает вид

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = 0, \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = -mg. \end{cases} \tag{1.6}$$

Зададим начальные условия: пусть функции $v_x(t)$ и $v_y(t)$ в момент вылета снаряда из орудия при $t = 0$ равны:

$$v_x(0) = v_0 \cos\alpha, \tag{1.7}$$

$$v_y(0) = v_0 \sin\alpha. \tag{1.8}$$

Решая систему уравнений (1.6) при начальных условиях (1.7) и (1.8), находим:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha, \tag{1.9}$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha\,. \tag{1.10}$$

Для нахождения координат x и y применим определение проекции вектора скорости на ось координат:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x, \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y. \end{cases} \tag{1.11}$$

С учетом формул (1.9) и (1.10), из (1.11) имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \\ \dfrac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha. \end{cases} \tag{1.12}$$

В начальный момент времени снаряд находился в начале координат, поэтому

$$x = 0,\ y = 0 \text{ при } t = 0. \tag{1.13}$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (1.12) от 0 до t и используя начальные условия (1.13), получаем формулы для определения положения снаряда в любой момент времени t:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha, \\ y = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases} \tag{1.14}$$

Формулы (1.14) представляют собой параметрическое задание кривой $y = y(x)$ при различных значениях параметра t. Исключим параметр t из этих формул. Из первого уравнения имеем

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}.$$

Подставляем это значение во второе уравнение (1.14), находим:

$$y = x\,tg\alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}. \qquad (1.15)$$

Из (1.15) видно, что если не учитывать сопротивление воздуха, то траектория снаряда y – многочлен второй степени от x, следовательно, его график – парабола (рис. 1.1).

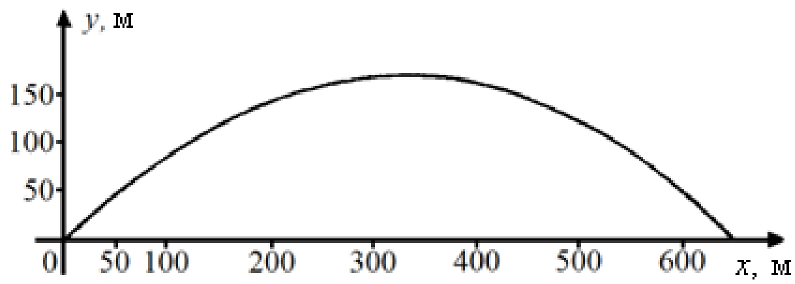

Рис. 1.1. Траектория движения снаряда: v_0 = 80 м/с, α = 45° [19]

Формула (1.15) показывает, что дальность стрельбы зависит от начальной скорости v_0 и от угла бросания α.

Следует сказать, что при небольшой начальной скорости v_0 роль сопротивления воздуха действительно невелика. Но, как отмечено в [19], если увеличить начальную скорость в 10 раз, т. е. взять v_0 = 800 м/с, то для снаряда калибром (диаметром) 305 мм при угле бросания α = 55° из-за сопротивления воздуха его дальность полета уменьшится с 61 км до 22,2 км.

Поскольку в действительности снаряд испытывает сопротивление воздуха, то реальные траектории снарядов не являются в точности параболами. Плотность воздуха, а также вес снаряда и его форма влияют на дальность стрельбы, высоту подъема снаряда, полетное время и т. п. ▲

Задача 1.2. ***Разложение вещества.*** Вещество A разлагается на два вещества: X и Y. Скорость образования каждого из них пропорциональна количеству неразложившегося вещества. Требуется определить закон изменения количеств x и y веществ X и Y в зависимости от времени t при условии, что $x = y = 0$ при $t = 0$, а через час $x = a/8$, $y = 3a/8$, где a – первоначальное количество вещества A [18].

Решение. Согласно условию задачи, в момент времени t количество неразложившегося вещества A равно $a - x - y$. Введем обозначения: $\frac{dx}{dt}$ – скорость образования вещества X; $\frac{dy}{dt}$ – скорость образования вещества Y. Тогда получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1(a - x - y), \\ \frac{dy}{dt} = k_2(a - x - y). \end{cases} \tag{1.16 }$$

Для решения системы уравнений (1.16) применим метод интегрируемых комбинаций. Разделим обе части второго уравнения системы на соответствующие части первого уравнения, будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2}{k_1}. \tag{1.17}$$

Интегрируя (1.17), получаем

$$y = \frac{k_2}{k_1}x + C_1, \tag{1.18}$$

где C_1 – произвольная постоянная.
Так как при $t = 0$ имеем $x = y = 0$, то из уравнения (1.18) находим $C_1 = 0$, следовательно,

$$y = \frac{k_2}{k_1}x. \tag{1.19}$$

Функцию (1.19) подставляем в первое уравнение системы (1.16), получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = (k_1 + k_2)x = k_1 a. \tag{1.20}$$

Общее решение уравнения (1.20) имеет вид:

$$x = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2} + C_2 \exp(-(k_1 + k_2)t). \tag{1.21}$$

Итак, получаем общее решение системы уравнений (1.16):

$$\begin{cases} x = \dfrac{k_1 a}{k_1 + k_2} + C_2 \exp(-(k_1 + k_2)t), \\ y = \dfrac{k_2}{k_1} x + C_1. \end{cases} \tag{1.22}$$

Произвольную постоянную C_2 находим из начального условия $x = 0$ при $t = 0$:

$$C_2 = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2}. \tag{1.23}$$

Следовательно, частное решение системы уравнений (1.16) имеет вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{k_1 a}{k_1 + k_2}(1 - \exp(-(k_1 + k_2)t)), \\ y = \dfrac{k_2}{k_1} x. \end{cases} \tag{1.24}$$

Определим коэффициенты k_1 и k_2 из условия, что $x = a/8$, $y = 3a/8$ при $t = 0$. Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{8} = \dfrac{k_1 a}{k_1 + k_2}(1 - \exp(-(k_1 + k_2))), \\ 3 = \dfrac{k_2}{k_1}, \end{cases} \tag{1.25}$$

или

$$\begin{cases} 3k = k_2, \\ \dfrac{1}{2} = \exp(-4k_1), \end{cases} \tag{1.26}$$

откуда

$$k_1 = \frac{\ln 2}{4}, \qquad k_2 = \frac{3\ln 2}{4}. \tag{1.27}$$

Таким образом, искомое решение системы уравнений (1.16), т.е. закон изменения во времени количеств *x* и *y* веществ *X* и *Y*, принимает следующий вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{4}\left(1 - 2^{-t}\right), \\ e = \dfrac{3a}{4}\left(1 - 2^{-t}\right). \end{cases} \quad \blacktriangle \tag{1.28}$$

Задача 1.3. ***Фильтр низких частот.*** Электрическая цепь (рис. 1.2) содержит две равные индуктивности *L*, ёмкость *C* и сопротивление *R*, которые подключены к источнику напряжения. Напряжение изменяется по закону $U(t) = U \cos \omega t$.

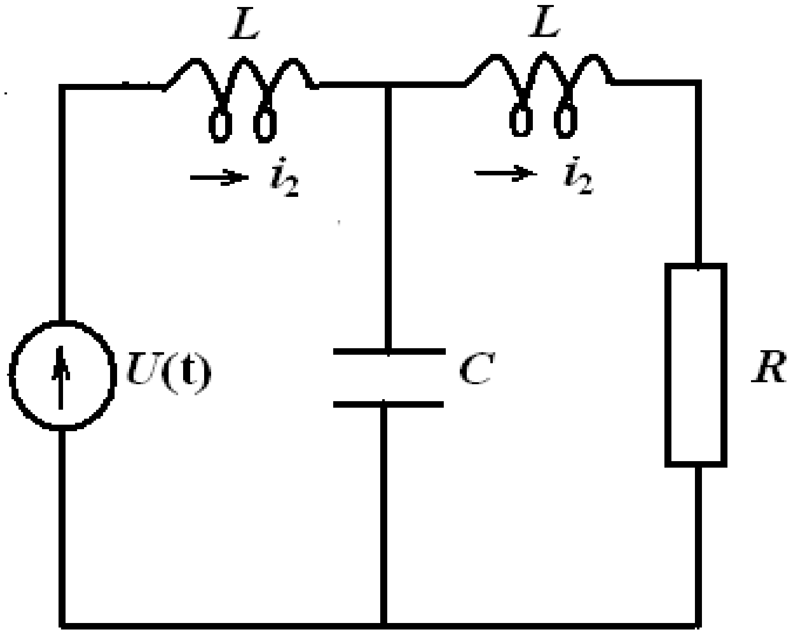

Рис. 1.2. Схема электрической цепи – фильтра низких частот

Ограничиваясь установившимся процессом, требуется определить характер колебаний падения напряжения на сопротивлении.

Решение. Следуя [18], обозначим через i_1 и i_2 токи в левом и правом электрических контурах соответственно. Тогда ток через ёмкость *C* равен $i_2 - i_1$. По закону Кирхгофа [41, 43] получаем систему дифференциальных уравнений относительно токов *i*1 и *i*2:

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1}{dt} + L\dfrac{di_2}{dt} + Ri_2 = U\cos \omega t, \\ L\dfrac{di_2}{dt} + Ri_2 + \dfrac{1}{C}\int\limits_0^t (i_2 - i_1)dt = 0. \end{cases} \tag{1.29}$$

Решим систему уравнений (1.29) методом исключения. Дифференцируя по t второе уравнение системы, получаем

$$L\frac{d^2 i_2}{dt^2} + R\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}(i_2 - i_1) = 0. \tag{1.30}$$

Откуда имеем

$$i_1 = LC\frac{d^2 i_2}{dt^2} + RC\frac{di_2}{dt} + i_2. \tag{1.31}$$

Уравнение (1.31) дифференцируем по t, подставляем в первое уравнение системы (1.29), в результате получаем неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами:

$$L^2C\frac{d^3 i_2}{dt^3} + LRC\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 2L\frac{di_2}{dt} + Ri_2 = U\cos\omega t. \tag{1.32}$$

Общее решение уравнения (1.32) запишем в виде $i_2 = i_2^O + i_2^{\times}$. Составляем характеристическое уравнение [38] однородного дифференциального уравнения

$$L^2C\frac{d^3 i_2^O}{dt^3} + LRC\frac{d^2 i_2^O}{dt^2} + 2L\frac{di_2^O}{dt} + Ri_2^O = 0, \tag{1.33}$$

соответствующего уравнению (1.32):

$$L^2C\lambda^3 + LRC\lambda^2 + 2L\lambda + R = 0. \tag{1.34}$$

Уравнение (1.34) содержит в левой части только положительные слагаемые, поэтому оно не имеет действительных корней. Покажем, что у комплексных корней действительные части отрицательные. Согласно критерию Рауса-Гурвица, необходимым и достаточным условием отрицательности действительных частей всех корней многочлена (1.34) является положительность всех главных диагональных миноров матрицы Рауса–Гурвица [13]

$$A = \begin{pmatrix} LRC & L^2C & 0 \\ R & 2L & LRC \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}. \tag{1.35}$$

Вычисляем главные миноры этой матрицы:

$$\Delta_1 = LRC > 0\,, \tag{1.36}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} LRC & L^2C \\ R & 2L \end{vmatrix} = LRC \cdot 2L - R \cdot L^2C = L^2RC > 0, \tag{1.37}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} LRC & L^2C & 0 \\ R & 2L & LRC \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix} = 2L^2R^2C - L^2R^2C = L^2R^2C > 0\,. \tag{1.38}$$

Так как все миноры матрицы Рауса–Гурвица положительны, то действительные части комплексных корней уравнения (1.34) являются отрицательными. Поэтому все слагаемые общего решения i_2^O однородного уравнения (1.33) содержат экспоненты с отрицательными показателями, следовательно, убывают при увеличении t.

По условию задачи ограничиваемся *установившимся процессом*, который определяется частным решением неоднородного уравнения (1.32). Частное решение ищем в виде

$$i_2 = i_2^{\times} = A\cos\omega t + B\sin\omega t\,. \tag{1.39}$$

Дифференцируем уравнение (1.39) по t и подставляем в неоднородное уравнение (1.32). В результате будем иметь систему уравнений

$$\begin{cases} A(-2L\omega + L^2C\omega^3) + B(R - RLC\omega^2) = 0, \\ A(R - RLC\omega^2) + B(2L\omega - L^2C\omega^3) = U, \end{cases} \tag{1.40}$$

решение которой равно

$$A = \frac{(R - RLC\omega^2)U}{(-2L\omega + L^2C\omega^3)^2 + (R - RLC\omega^2)^2}, \tag{1.41}$$

$$B = \frac{(2L\omega - L^2C\omega^3)U}{(-2L\omega + L^2C\omega^3)^2 + (R - RLC\omega^2)^2}. \tag{1.42}$$

Вычислим амплитуду решения i_2. Имеем

$$|v| = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|U|}{\sqrt{L^2\omega^2(LC\omega^2 - 2)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}}. \tag{1.43}$$

Падение напряжения на сопротивлении можно получить из выражения (1.39) с учетом (1.41) и (1.42), умножением обеих его частей на R, т.к. $U_2 = R \cdot i_2$:

$$U_2 = \frac{(R - RLC\omega^2)UR}{(-2L\omega + L^2C\omega^3)^2 + (R - RLC\omega^2)^2}\cos\omega t +$$

$$+\frac{(2L\omega - L^2C\omega^3)UR}{(-2L\omega + L^2C\omega^3)^2 + (R - RLC\omega^2)^2}\sin\omega t. \quad (1.44)$$

Исследуем влияние частоты колебаний ω на отношение амплитуд напряжения на сопротивлении к выходному напряжению. При малых частотах ω, пренебрегая величинами порядка ω^2 и выше, из (1.43) получаем

$$|\nu| \approx \frac{|U|}{R}. \quad (1.45)$$

Откуда

$$|\nu| \cdot \frac{R}{|U|} \approx 1. \quad (1.46)$$

Зависимость (1.46) показывает, что колебания малой частоты проходят через электрическую цепь, представленную на рис. 1.2, практически не изменяя амплитуды.

Для больших частот ω главным членом подкоренного выражения в формуле (1.43) является член со старшей степенью ω. Поэтому для таких частот из формулы (1.43) имеем

$$|\nu| \approx \frac{|U|}{L^2C\omega^3}, \quad (1.47)$$

следовательно,

$$|\nu| \cdot \frac{R}{|U|} \approx \frac{|U|}{L^2C\omega^3} \cdot \frac{R}{|U|} \approx \frac{R}{L^2C\omega^3} \approx 0, \quad (1.48)$$

т.е. колебания высокой частоты практически не проходят через электрическую цепь, изображенную на рис. 1.2.

Таким образом, электрическая цепь, приведенная на рис. 1.2, пропускает низкие частоты и почти не пропускает высокие частоты. Поэтому такая схема электрической цепи называется *фильтром низких частот*. ▲

УПРАЖНЕНИЯ

а) Привести к нормальной системе следующие системы дифференциальных уравнений:

1. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} = x^2, \\ 3\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = y^2. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{d^3x}{dt^3} = e^y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x. \end{cases}$$

б) Привести системы уравнений к одному уравнению и найти их решения:

1. $\dfrac{dx}{dt} = y,\ \dfrac{dy}{dt} = z,\ \dfrac{dz}{dt} = x.$

2. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 2(x+y),\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y.$

3. $\dfrac{dx}{dt} = x^2 + xy,\ \dfrac{dy}{dt} = xy + y^2.$

4. $\dfrac{dx}{dt} = e^{2t} - y,\ \dfrac{dy}{dt} = 4e^{2t} - x.$

5. $\dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y + 2\cos t,\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4\sin t.$

6. $\dfrac{dx}{dt} = x^2/y,\ \dfrac{dy}{dt} = x/2.$

7. $\dfrac{dx}{dt} = (y = 1)/y,\ \dfrac{dy}{dt} = 1/(x-t).$

8. $\dfrac{dx}{dt} = x - y,\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x.$

в) Решить системы дифференциальных уравнений, записанные в симметричной форме:

1. $\dfrac{dx}{z^2-y^2}=\dfrac{dy}{z}=-\dfrac{dz}{y}$.

2. $\dfrac{dx}{z}=\dfrac{dy}{xz}=\dfrac{dz}{y}$.

3. $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)}=-\dfrac{dy}{y(z^2+x^2)}=\dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}$.

1.2. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Будем рассматривать нормальные системы дифференциальных уравнений. Пусть дана система n дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{1.49}$$

коэффициенты которой a_{ij} (i, j =1, 2, … , n) являются постоянными числами. Система уравнений (1.49) называется *системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*.

Замечание 1.2. Систему дифференциальных уравнений (1.49) можно представить в виде одного матричного уравнения

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{AX}, \tag{1.50}$$

где квадратная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

называется *матрицей коэффициентов системы*,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{ax_n}{dt} \end{pmatrix}. \tag{1.52}$$

Для решения систем линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами применяют *метод Эйлера*, который часто называют *видоизменённым методом Эйлера* или *методом собственных чисел и собственных векторов*.

Решение системы уравнений (1.49) будем искать в виде [16, 44]:

$$x_1 = b_1 \exp(\lambda t),\ x_2 = b_2 \exp(\lambda t),\ \dots\ ,\ x_n = b_n \exp(\lambda t). \tag{1.53}$$

Требуется определить постоянные b_1, b_2, … , b_n так, чтобы функции (1.53) удовлетворяли системе уравнений (1.49). Подставляя эти функции в систему (1.49), будем иметь:

$$\begin{cases} \lambda b_1 \exp(\lambda t) = (a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n)\exp(\lambda t), \\ \lambda b_2 \exp(\lambda t) = (a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n)\exp(\lambda t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda b_n \exp(\lambda t) = (a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \dots + a_{nn}b_n)\exp(\lambda t). \end{cases} \tag{1.54}$$

Сокращаем на $\exp(\lambda t)$. Перенося все члены в одну часть равенств и собирая коэффициенты при b_1, b_2, … , b_n, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно b_1, b_2, … , b_n :

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n = 0, \\ a_{21}b_1 + (a_{22}-\lambda)b_2 + \cdots + a_{2n}b_n = 0, \\ \cdots\vdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)b_n = 0. \end{cases} \tag{1.55}$$

Составляем определитель системы (1.55):

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \tag{1.56}$$

Если λ таково, что определитель $\Delta(\lambda) \neq 0$, то система (1.55) имеет только нулевые решения $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$. Тогда формулы (1.53) дают тривиальные решения:

$$x_1(t) = x_2(t) = \ldots = x_n(t) = 0. \tag{1.57}$$

Нетривиальные решения, задаваемые формулами (1.53), будут только при таких значениях λ, при которых определитель $\Delta(\lambda) = 0$. Отсюда для определения λ получаем уравнение *n*-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{1.58}$$

Уравнение (1.58) является *характеристическим уравнением* системы (1.49), а его корни называются *корнями характеристического уравнения*. В случае, когда система дифференциальных уравнений записана в виде (1.50), уравнение (1.58) называется *характеристическим уравнением матрицы* **A**, а левая часть этого уравнения – *характеристическим многочленом матрицы* **A** [13]. Собственные значения матрицы **A** называются *характеристическими числами* и находятся как корни характеристического уравнения (1.58).

Рассмотрим несколько случаев для корней характеристического уравнения. Уравнение (1.58) имеет ровно n корней λ_1, λ_2, … , λ_n (с учетом их кратности), среди которых могут быть и комплексные корни.

Случай 1. Уравнение (1.58) имеет *n* действительных различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, которые являются характеристическими числами матрицы **A.** Каждому корню ставится в соответствие свой собственный вектор. Пусть, например, корню λ_i (i = 1, 2 ,…, n) соответствует собственный вектор $(b_1^{(i)},\ b_2^{(i)},\ \dots\ ,\ b_n^{(i)})$. Тогда система уравнений (1.55) и*м*еет n различных решений:

для корня $\lambda = \lambda_1$ решение системы уравнений (1.49):

$$x_1^{(1)} = b_1^{(1)}\exp(\lambda_1 t),\ x_2^{(1)} = b_2^{(1)}\exp(\lambda_1 t),\ \dots\ ,\ x_n^{(1)} = b_n^{(1)}\exp(\lambda_1 t),$$

для корня $\lambda = \lambda_2$ решение системы уравнений (1.49):

$$x_1^{(2)} = b_1^{(2)}\exp(\lambda_2 t),\ x_2^{(2)} = b_2^{(2)}\exp(\lambda_2 t),\ \dots\ ,\ x_n^{(2)} = b_n^{(2)}\exp(\lambda_2 t),$$

……………………………………………………………………

для корня $\lambda = \lambda_n$ решение системы уравнений (1.49):

$$x_1^{(n)} = b_1^{(n)}\exp(\lambda_n t),\ x_2^{(n)} = b_2^{(n)}\exp(\lambda_n t),\ \dots\ ,\ x_n^{(n)} = b_n^{(n)}\exp(\lambda_n t).$$

Таким образом, получили фундаментальную систему решений. Общее решение системы дифференциальных уравнений (1.49) имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = C_1 x_1^{(1)} + C_2 x_1^{(2)} + \cdots + C_n x_1^{(n)}, \\ x_2 = C_1 x_2^{(1)} + C_2 x_2^{(2)} + \cdots + C_n x_2^{(n)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = C_1 x_n^{(1)} + C_2 x_n^{(2)} + \cdots + C_n x_n^{(n)}, \end{cases} \tag{1.59}$$

где $C_1, C_2, \dots , C_n$ – произвольные постоянные.

Пример 1.10. Записать в матричной форме систему линейных однородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 7y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 9y. \end{cases}$$

Решение. Поскольку матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

и вектор

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

то данная система в матричной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

Пример 1.11. Найти общее решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение матрицы системы

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$ – это характеристические числа матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные векторы матрицы **A**. При $\lambda = 5$ для определения собственного вектора имеем следующие уравнения:

$$\begin{cases} (2-5)b_1 + b_2 = 0, \\ 3b_1 + (4-5)b_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем $3b_1 - b_2 = 0$. Это уравнение определяет собственный вектор (1; 3).

Находим второй собственный вектор. При $\lambda = 1$ имеем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases}(2-1)b_1 + b_2 = 0,\\ 3b_1 + (4-1)b_2 = 0,\end{cases}$$

из которой находим: $b_1 + b_2 = 0$. Следовательно, второй собственный вектор будет равен (1; –1).

Таким образом, фундаментальная система решений имеет вид:

$$\text{при}\quad \lambda = 5:\ x_1^{(1)} = \exp(5t),\ x_2^{(1)} = 3\exp(5t);$$
$$\text{при}\quad \lambda = 1:\ x_1^{(2)} = \exp(t),\ x_2^{(2)} = -\exp(t).$$

Общее решение данной системы дифференциальных уравнений:

$$x = x_1 = C_1\exp(5t) + C_2\exp(t);\ y = x_2 = C_1 3\exp(5t) - C_2\exp(t).\ \blacktriangle$$

Случай 2. Уравнение (1.58) имеет n различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, среди которых есть комплексные корни.

Допустим, что среди корней характеристического уравнения имеются два комплексных сопряженных корня:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

Этим корням соответствуют решения

$$x_k^{(1)} = b_k^{(1)}\exp((\alpha + i\beta)t),\ k = 1,2\ldots,n, \tag{1.60}$$

$$x_k^{(2)} = b_k^{(2)}\exp((\alpha - i\beta)t),\ k = 1,2\ldots,n. \tag{1.61}$$

Коэффициенты $b_k^{(1)}$ и $b_k^{(2)}$ находятся из системы уравнений (1.55).

Действительная и мнимая части комплексного решения тоже являются решениями [40], следовательно, получаем два линейно независимых решения системы дифференциальных уравнений (1.49):

$$x_{k\div}^{(1)} = \exp(\alpha t)\lambda_k^{(1)}\cos\beta t + \exp(\alpha t)\lambda_k^{(2)}\sin\beta t, \tag{1.62}$$

$$x_{k\div}^{(2)} = \exp(\alpha t)\overline{\lambda}_k^{(1)}\sin\beta t + \exp(\alpha t)\overline{\lambda}_k^{(2)}\cos\beta t, \tag{1.63}$$

где $\lambda_k^{(1)}, \lambda_k^{(2)}, \overline{\lambda}_k^{(1)}, \overline{\lambda}_k^{(2)}$ – действительные числа, которые определяются через $b_k^{(1)}$ и $b_k^{(2)}$. Общее решение системы дифференциальных уравнений (1.49) будет содержать соответствующие комбинации функций (1.62) и (1.63).

Пример 1.12. Найти общее решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение матрицы системы

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 + 4 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i$ – это характеристические числа матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определяем собственные векторы матрицы **A**. При $\lambda = 2i$ для определения собственного вектора имеем следующие уравнения:

$$\begin{cases} (-1-2i)b_1 - 5b_2 = 0, \\ b_1 + (1-2i)b_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $b_1 = -(1-2i)b_2$. Приняв $b_2 = 1$, получаем $b_1 = -(1-2i)$, т. е. собственный вектор будет: $(-1 + 2i; 1)$.

Находим второй собственный вектор. При $\lambda = -2i$ имеем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (-1+2i)b_1 - 5b_2 = 0, \\ b_1 + (1+2i)b_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим: $b_1 = -(1-2i)b_2$. Полагая $b_2 = 1$, получаем $b_1 = -(1+2i)$. Следовательно, второй собственный вектор будет равен $(-1 - 2i; 1)$.

Итак, фундаментальная система решений имеет вид:

для $\lambda = 2i$:

$$x_1^{(1)} = -(1-2i)\exp(2it) = (-\cos 2t - 2\sin 2t) + i(2\cos 2t - \sin 2t);$$

$$x_2^{(1)} = 1\cdot \exp(2it) = \cos 2t + i\sin 2t;$$

для $\lambda = -2i$:

$$x_1^{(2)} = -(1+2i)\exp(-2it) = -(\cos 2t + 2\sin 2t) + i(-2\cos 2t + \sin 2t);$$

$$x_2^{(2)} = 1\cdot \exp(-2it) = \cos 2t - i\sin 2t.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений будет:

$$x = -(C_1 + C_2)(\cos 2t + 2\sin 2t) + i(C_1 - C_2)(2\cos 2t - \sin 2t);$$

$$y = (C_1 + C_2)\cos 2t + i(C_1 - C_2)\sin 2t.$$

Обозначим $C_1^* = C_1 + C_2$, $C_2^* = i(C_1 - C_2)$, тогда общее решение запишется в виде:

$$x = (2C_2^* - C_1^*)\cos 2t - (2C_1^* + C_2^*)\sin 2t;$$

$$y = C_1^*\cos 2t + C_2^*\sin 2t. \quad \blacktriangle$$

УПРАЖНЕНИЯ

Решить системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 9y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 12x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 12y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y. \end{cases}$

1.3. Системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + U_1, \\
\dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + U_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + U_n,
\end{cases}
\tag{1.64}
$$

где a_{ij}, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ – постоянные действительные числа, t – независимое переменное, $x_i(t)$ – неизвестные функции, $U_i(t)$ – заданные функции.

Для получения общего решения линейной неоднородной системы уравнений (1.64) достаточно к ее частному решению прибавить общее решение соответствующей однородной системы (1.49) [9, 28, 44].

При нахождении частного решения неоднородной системы (1.64) можно применять *метод вариации произвольных постоянных* [9, 28].

Пример 1.13. Найти общее решение системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$
\begin{cases}
5\dfrac{dx}{dt} + 4x - 2\dfrac{dy}{dt} - y = e^{-t}, \\
\dfrac{dx}{dt} + 8x - 3y = 5e^{-t}.
\end{cases}
$$

Решение. Решим, следуя [9], данную систему уравнений методом вариации произвольных постоянных. Находим общее решение соответствующей однородной системы уравнений

$$
\begin{cases}
5\dfrac{dx}{dt} + 4x - 2\dfrac{dy}{dt} - y = 0, \\
\dfrac{dx}{dt} + 8x - 3y = 0.
\end{cases}
$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$2\lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0.$$

Его корни равны $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Тогда общее решение однородной системы будет:

$$x_0 = C_1e^t + C_2e^{-2t},\ y_0 = 3C_1e^t + 2C_2e^{-2t}.$$

Частное решение неоднородной системы уравнений будем искать в виде:

$$x_{\div} = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-2t}, \;\; y_{\div} = 3C_1(t)e^t + 2C_2(t)e^{-2t}.$$

Подставляя его в неоднородную систему уравнений, получаем:

$$\begin{cases} 5\dfrac{dC_1}{dt}e^t + 5\dfrac{dC_2}{dt}e^{-2t} - 6\dfrac{dC_1}{dt}e^t - 4\dfrac{dC_2}{dt}e^{-2t} = e^{-t}, \\ \dfrac{dC_1}{dt}e^t + \dfrac{dC_2}{dt}e^{-2t} = 5e^{-t}. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2\dfrac{dC_2}{dt}e^{-2t} - \dfrac{dC_1}{dt}e^t = e^{-t}, \\ \dfrac{dC_1}{dt}e^t + \dfrac{dC_2}{dt}e^{-2t} = 5e^{-t}. \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$2\frac{dC_1}{dt}e^t = 4e^{-t}, \;\; C_1 = e^{-2t} + C_3;$$

$$2\frac{dC_2}{dt}e^{-2t} = 6e^{-t}, \;\; C_2 = 3e^t + C_4.$$

Поскольку ищем частное решение, то полагаем $C_3 = C_4 = 0$. Частное решение неоднородной системы будет:

$$x_{\div} = 2e^{-t}, \;\; y_{\div} = 3e^{-t}.$$

Тогда общее решение неоднородной системы уравнений принимает вид:

$$x = x_0 + x_{\div} = C_1e^t + C_2e^{-2t} + 2e^{-t},$$

$$y = y_0 + y_{\div} = 3C_1e^t + 2C_2e^{-2t} + 3e^{-t}. \;\; \blacktriangle$$

Задача 1.4. ***Последовательный радиоактивный распад (радиоактивное семейство)***. Радиоактивный распад может приводить к образованию атомов, которые тоже радиоактивны, т. е. имеется цепочка распадов [19]: атом вещества A превращается в атом вещества B, а атом вещества B превращается в атом вещества C и т. д. Вещество A называется *материнским веществом*. Требуется рассмотреть математическую задачу об определении зависимости от времени t количества веществ A, В, C и ее решение.

Решение. Обозначим, следуя [19], количество атомов веществ A, B, C, не распавшихся к моменту времени t, теми же буквами A, B, C, а вероятности распада этих веществ соответственно через ω, v, u. Тогда

$$\frac{dA}{dt} = -\omega A. \tag{1.65}$$

За единицу времени, с одной стороны, распадается vB вещества B, а с другой – происходит ωA распадов вещества A. Поскольку при каждом распаде атома вещества A образуется атом вещества B, то за единицу времени будет образовано ωA вещества B. Следовательно, имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dB}{dt} = -vB + \omega A. \tag{1.66}$$

Рассуждая аналогично, для вещества C получаем уравнение:

$$\frac{dC}{dt} = -uC + vB. \tag{1.67}$$

Уравнения (1.65) – (1.67) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдем решение этой системы при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ количество атомов вещества A было равно A_0. Разделяя в уравнении (1.65) переменные

$$\frac{dA}{A} = -\omega\, dt$$

и интегрируя, получаем:

$$A(t) = A_0 \exp(-\omega t). \tag{1.68}$$

Подставляя выражение (1.68) в уравнение (1.66), будем иметь уравнение, которое содержит только одну неизвестную функцию B:

$$\frac{dB}{dt} = -\nu B + \omega A_0 \exp(-\omega t). \qquad (1.69)$$

По условию задачи $B = 0$ в начальный момент времени $t = 0$, поэтому решение уравнения (1.69) определяется формулой:

$$B(t) = A_0 \frac{\omega}{\nu - \omega}[\exp(-\omega t) - \exp(-\nu t)]. \qquad (1.70)$$

Исследуем полученное решение для двух частных случаев.

Случай 1. *Материнское вещество А является короткоживущим, а дочернее вещество В – долгоживущим.*

Наряду с вероятностями распада ω и ν будем использовать средние времена жизни

$$\overline{t_A} = \frac{1}{\omega} \text{ и } \overline{t_B} = \frac{1}{\nu} \qquad (1.71)$$

В данном случае имеем: $\overline{t_A} << \overline{t_B}$, $\omega >> \nu$. Тогда в формуле (1.70) дробь

$$\frac{\omega}{\nu - \omega} \approx \frac{\omega}{\omega} = 1.$$

Рассмотрим две последовательные стадии превращения вещества A в вещество B. Сначала, когда $t << \overline{t_B}$, согласно (1.71), будет $\nu t << 1$. Следовательно,. $\exp(-\nu t) \approx 1$. Поскольку t может быть величиной порядка $\overline{t_A}$, то ωt будет порядка единицы. Из формулы (1.70) получаем:

$$B(t) = A_0(1 - \exp(-\omega t)). \qquad (1.72)$$

Во второй стадии, при $t >> \overline{t_A}$, из (1.71) имеем $\omega t >> 1$. Отсюда следует, что $\exp(-\omega t)$ мало по сравнению с единицей, а также и по сравнению с величиной, $\exp(-\nu t)$, так как $\omega >> \nu$. Следовательно, из (1.70) будем иметь

$$B(t) = A_0 \exp(-\nu t). \qquad (1.73)$$

Случай 2. *Материнское вещество А является долгоживущим, а дочернее вещество В – короткоживущим.*

В этом случае имеем: $\overline{t_A} >> \overline{t_B}$, $\omega << v$. В формуле (1.70) пренебрегаем ω по сравнению с v в знаменателе дроби $\dfrac{\omega}{v-\omega}$. Поскольку, согласно (1.71), на временах $t >> \overline{t_B}$ $vt >> 1$, то, пренебрегая $\exp(-vt)$, из (1.70) находим:

$$B(t) = A_0 \frac{\omega}{v} \exp(-\omega t). \tag{1.74}$$

▲

Замечание 1.3. Решение уравнений (1.65) и (1.66) одного за другим показало, что каждый раз имеем дело только с одним уравнением системы (1.65)–(1.67) и одним неизвестным.

Аналогично решается и уравнение (1.67) для определения зависимости от времени количества вещества *C*.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

1. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y + t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y - z + 2t, \\ \dfrac{dz}{dt} = -z + t. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - y + 7\exp(t) - 27, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y - 3\exp(t) + 12. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + \cos\, t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2\sin t. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \dfrac{1}{\sin t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

1.4. Устойчивость по Ляпунову решений систем дифференциальных уравнений

Во многих задачах физики, механики, техники и др. важно знать характер поведения решения при изменении аргумента, а не конкретные значения решения при данном значении аргумента. Например, бывает важно знать, являются ли решения, которые удовлетворяют данным начальным условиям, периодическими. Такими задачами занимается *качественная теория дифференциальных уравнений*.

Один из основных вопросов качественной теории дифференциальных уравнений – это вопрос об *устойчивости решения* [1 – 3, 5, 8, 17, 20, 24, 26, 27, 30, 33, 36, 38, 40, 44, 51]. Этот вопрос был подробно исследован знаменитым русским математиком А.М. Ляпуновым (1857–1918).

Под *устойчивостью решений* дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений понимается их малое изменение при малом изменении начальных условий. Предметом теории устойчивости является исследование поведения решений дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений при изменении начальных условий.

Рассмотрим понятие *устойчивости по Ляпунову*, которое было введено А. М. Ляпуновым в 1892 г.

Пусть имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t,x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t,x,y), \end{cases} \tag{1.75}$$

где $\dfrac{\partial f_i}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f_i}{\partial y}$ предположим непрерывными (i = 1,2). Будем интерпретировать x и y как координаты движущейся точки, а t как время, $t_0 \le t < \infty$. Каждое частное решение системы уравнений (1.75) будем называть *движением*. Предположим, что данная система уравнений имеет решения $x = x(t)$, $y = y(t)$, удовлетворяющие начальным условиям:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.76}$$

Пусть $x^* = x^*(t)$, $y^* = y^*(t)$ есть решения системы (1.75), которые удовлетворяют начальным условиям:

$$\begin{cases} x^*(t_0) = x_0^*, \\ y^*(t_0) = y_0^*. \end{cases} \tag{1.77}$$

Определение 1.4. Решение $x = x(t)$, $y = y(t)$, удовлетворяющее системе уравнений (1.75) и начальным условиям (1.76), называется ***устойчивым по Ляпунову***, если для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при всех значениях $t > t_0$ будут выполняться неравенства

$$\begin{cases} \left|x^*(t) - x(t)\right| < \varepsilon, \\ \left|y^*(t) - y(t)\right| < \varepsilon, \end{cases} \tag{1.78}$$

если начальные условия удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{cases} \left|x_0^* - x_0\right| < \delta, \\ \left|y_0^* - y_0\right| < \delta. \end{cases} \tag{1.79}$$

Всякое движение, которое не является устойчивым, называется ***неустойчивым***. Это означает, что существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что какое бы малое $\delta > 0$ ни было выбрано, всегда найдутся x^*, y^* и $t = t_1$, что будут выполняться неравенства:

$$\begin{cases} \left|x^*(t_1) - x(t_1)\right| \ge \varepsilon_1, \\ \left|y^*(t_1) - y(t_1)\right| \ge \varepsilon_1, \end{cases} \tag{1.80}$$

несмотря на то, что

$$\begin{cases} \left|x_0^* - x_0\right| < \delta, \\ \left|y_0^* - y_0\right| < \delta. \end{cases} \tag{1.81}$$

Исследуемое движение, которое соответствует начальным условиям (1.76), Ляпунов называет *невозмущенным*, а движение, соответствующее измененным начальным условиям (1.77), *возмущенным* движением [44]. Геометрически устойчивость невозмущенного движения означает, что в любой заданный момент времени t точка траектории возмущенного движения находится в достаточно малой окрестности соответствующей точки невозмущенного движения.

Определение 1.5. Если для решения $x = x(t)$, $y = y(t)$, обладающего свойством устойчивости при стремлении независимой переменной t к *бесконечно-*

сти, выполняется условие приближения решения $x^* = x^*(t)$, $y^* = y^*(t)$ к решению $x = x(t)$, $y = y(t)$, т.е. имеет место предельный переход

$$x^*(t) \to x(t),\ y^*(t) \to y(t) \text{ при } t \to \infty, \tag{1.82}$$

то говорят, что решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ является ***асимптотически устойчивым*** [31].

Отметим, что с помощью введения новых переменных $\tilde{x}(t) = x(t) - x(t_0)$, $\tilde{y}(t) = y(t) - y(t_0)$ можно перейти от исследования устойчивости по Ляпунову решения $x = x(t)$, $y = y(t)$ к исследованию на устойчивость *тривиального* решения $\tilde{x}(t) \equiv 0$, $\tilde{y}(t) \equiv 0$.

Рассмотрим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (1.75). Устойчивость тривиального решения для этой системы будем исследовать в пространстве переменных x, y которое называется *фазовой плоскостью*. В этом случае начальное условие

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.83}$$

изображается точкой в начале координат. Отметим, что при размерности пространства переменных $n \geq 3$ оно называется *фазовым пространством*.

Если правые части уравнений системы (1.75) не зависят явно от аргумента t, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(x, y), \end{cases} \tag{1.84}$$

которая называется *автономной системой*.

Метод исследования на *устойчивость по линейному приближению*, называемый также *первым методом Ляпунова*, заключается в линеаризации функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ вблизи тривиального решения (1.83). При этом решение полученной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно получить явно.

Разлагаем функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ в ряд в окрестности точки (0,0), будем иметь:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,0)x + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,0)y + P(x,y), \\
\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)x + \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)y + Q(x,y),
\end{cases} \tag{1.85}
$$

где

$$
P(x,y) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(0,0)y^2 + \cdots \tag{1.86}
$$

и

$$
Q(x,\ y) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(0,0)y^2 + \cdots \tag{1.87}
$$

стремятся к нулю при $x \to 0$ и $y \to 0$, причем быстрее, чем ρ, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Другими словами, имеем

$$
\lim_{\rho \to 0} \frac{P(x,y)}{\rho} = 0; \quad \lim_{\rho \to 0} \frac{Q(x,y)}{\rho} = 0. \tag{1.88}
$$

Если в системе уравнений (1.85) отбросить члены, порядок которых выше первого, то получим систему уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\
\dfrac{dy}{dt} = cx + gy,
\end{cases} \tag{1.89}
$$

в которой коэффициенты образуют матрицу из частных производных:

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix}. \tag{1.90}
$$

Система уравнений (1.89) называется *системой первого приближения* для нелинейной системы (1.84) [44].

Собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы (1.90), определяемые характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & g-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 - (a+g)\lambda + (ag - bc) = 0, \qquad (1.91)$$

описывают поведение линеаризованной системы при изменении аргумента t.

Если все корни характеристического уравнения (1.91) удовлетворяют условию Re $\lambda_j < 0$, $j = 1, 2$, то тривиальное решение системы дифференциальных уравнений (1.84) является *устойчивым* [1 – 3, 5, 8, 17, 20, 24, 26, 27, 30, 33, 36, 38, 40, 44, 51].

В случае, когда хотя бы один из корней λ_1 или λ_2 обладает свойством Re $\lambda_k > 0$, $k = 1$ либо $k = 2$, то тривиальное решение системы (1.84) является *неустойчивым*.

Если характеристическое уравнение (1.91) не имеет корней с положительными действительными частями, но при этом имеются значения с Re $\lambda_j = 0$, $j = 1, 2$, вопрос об устойчивости тривиального решения системы дифференциальных уравнений (1.84) в рамках первого приближения решить нельзя. В данном случае необходим анализ последующих членов разложения в ряд функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$.

Пример 1.14. Определить, при каких значениях параметра α асимптотически устойчиво тривиальное решение $x(t) = 0,\ y(t) = 0$ системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha\, x - 2y + x^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + xy. \end{cases}$$

Решение. Оценим, следуя [14], нелинейные члены функций

$$f_1(t, x, y) = \alpha\, x - 2y + x^2$$

и

$$f_2(t, x, y) = x + y + xy.$$

Обозначим $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Для нелинейных членов справедливы оценки $x^2 \le \rho^2$ è $|xy| \le \rho^2$, т.е. они стремятся к нулю при $x \to 0$ и $y \to 0$ быстрее чем ρ. Поэтому будем исследовать на устойчивость нулевое решение линейной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha\, x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Запишем характеристическое уравнение матрицы коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 + (-\alpha - 1)\lambda + \alpha + 2 = 0\,.$$

Необходимое и достаточное условие для асимптотической устойчивости квадратного трехчлена – его коэффициенты должны быть положительны. Отсюда следует, что

$$-\alpha - 1 > 0 \text{ и } \alpha + 2 > 0\,.$$

Окончательно получаем

$$-2 < \alpha < -1. \quad \blacktriangle$$

Пример 1.15. Дана автономная система линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$$

Провести исследование устойчивости решения $x = 0$, $y = 0$ этой системы.

Решение. Находим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 11x = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 11 = 0.$$

Корни характеристического уравнения будут:

$$\lambda_1 = 3 + i\sqrt{2}\,, \quad \lambda_2 = 3 - i\sqrt{2}\,.$$

Корни λ_1 и λ_2 – комплексные, с положительной действительной частью. Следовательно, на комплексной плоскости они располагаются справа от мнимой оси. Таким образом, решение $x = 0$, $y = 0$ данной системы дифференциальных уравнений является неустойчивым. ▲

УПРАЖНЕНИЯ

Исследовать на устойчивость решение $x = 0$, $y = 0$ для систем дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 12x + 18y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 12y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 12x - 11y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 13x - 12y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 10y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 4y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$

1.4.1. Элементы качественной теории динамических систем на плоскости

Определение 1.6. Точка $M(x,y)$ фазовой плоскости автономной системы уравнений (1.80) называется *обыкновенной точкой*, если функции $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ дифференцируемы и не обращаются одновременно в нуль [23].

Если уравнения

$$f_1(x,y) = 0, \quad f_2(x,y) = 0 \tag{1.92}$$

для правой части системы дифференциальных уравнений (1.84) имеют корни $x = x_0$, $y = y_0$, то эти корни являются *стационарными* решениями системы (1.84), а точка $M(x_0, y_0)$ называется *особой точкой*. Физически особая точка есть *точка покоя* или *положение равновесия* системы дифференциальных уравнений (1.84).

Полагая $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, введем, следуя [24], следующие обозначения:

$$\Delta = \Delta(0,0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & g \end{vmatrix}, \tag{1.93}$$

$$\sigma = \sigma(0,0) = -\left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) \right\}. \tag{1.94}$$

Характеристическое уравнение (1.91) в этих обозначениях будет иметь вид

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0. \tag{1.95}$$

Корни λ_1 и λ_2 уравнения (1.91) называются *характеристическими корнями состояния равновесия* $M(0,0)$ [24].

Состояния равновесия подразделяются на простые и сложные состояния.

Определение 1.7. Состояние равновесия, для которого $\Delta = \Delta(0,0) \neq 0$, называется ***простым***, а состояние равновесия, для которого $\Delta = \Delta(0,0) = 0$, – ***сложным***.

Рассмотрим качественные особенности поведения решений системы дифференциальных уравнений (1.84), изображая соответствующие кривые на *фазовой плоскости* в окрестности простого состояния равновесия (*особой точки*).

Определение 1.8. Кривые на фазовой плоскости, заданные параметрически как $x = = x(t)$, $y = y(t)$, называются *фазовыми траекториями*.

Фазовые кривые рассматриваемой системы обладают важным свойством: *через любую точку фазовой плоскости проходит единственная фазовая траектория системы*, т.е. фазовые траектории не пересекаются [24, 28, 31].

Корни характеристического уравнения (1.95) определяют качественные особенности поведения траекторий в окрестности состояния равновесия.

I. Рассмотрим строение фазовых кривых в окрестности точки $M(0,0)$ при *различных* корнях λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (1.95).

Случай 1. Корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (1.95) – вещественные и одного знака, т.е. $\lambda_1\lambda_2 > 0,\ \Delta > 0,\ \sigma^2 - 4\Delta > 0.$ В этом случае $M(0,0)$ – *узел* (*невырожденный узел*). Все кривые на фазовой плоскости отвечают движению во времени, приближаясь к точке $M(0,0)$ при $\lambda_{1,2} < 0$ либо удаляясь от этой точки при $\lambda_{1,2} > 0$. При $\lambda_{1,2} < 0$ имеем *устойчивый узел* [точка $M(0,0)$ – асимптотически устойчивое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (1.84)], а при $\lambda_{1,2} > 0$ – *неустойчивый узел* [точка $M(0,0)$ – неустойчивое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (1.84)]. Характерное поведение траекторий в окрестности устойчивого узла, т.е. фазовый портрет, приведен на рис. 1.3.

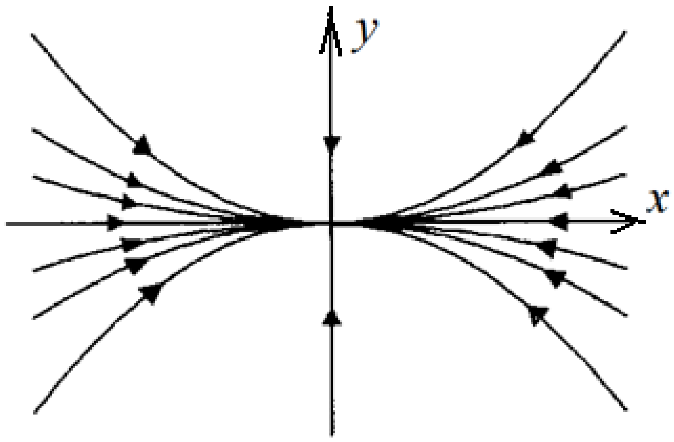

Рис. 1.3. Устойчивый узел

Случай 2. Характеристические корни λ_1 и λ_2 – вещественные и разных знаков, т.е. $\lambda_1\lambda_2 < 0, \quad \Delta < 0.$ Особая точка $M(0,0)$ – *седло* (рис. 1.4).

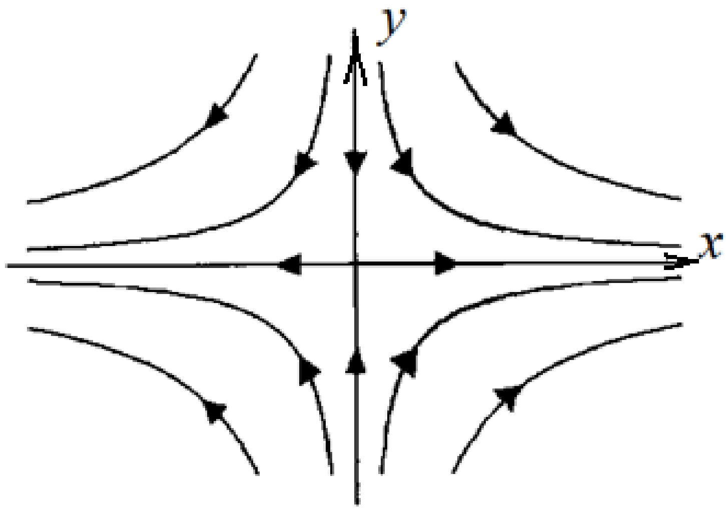

Рис. 1.4. Седло

В отличие от узла через седловую точку проходят только две интегральные кривые системы дифференциальных уравнений (1.84). Эти фазовые траектории называют *сепаратрисами седла*. Вдоль направления на фазовой плоскости, которое отвечает собственному вектору для $\lambda_1 < 0$, движение будет направлено к положению равновесия $M(0,0)$. По направлению, отвечающему $\lambda_2 > 0$, изображающая точка на фазовой плоскости будет уходить от положения равновесия. Сепаратрисы седла разделяют фазовую плоскость на области с различным поведением фазовых траекторий.

Случай 3. Корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (1.95) – комплексно-сопряженные: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ и имеют отличную от нуля действительную часть $\alpha = \operatorname{Re} \lambda_{1,2}$. Точка $M(0,0)$ – *фокус*. В этом случае действительная часть α определяет приближение изображающей точки на траектории к точке $M(0,0)$ или удаление от нее, а мнимая часть $\beta = \operatorname{Im} \lambda_{1,2}$ описывает осцилляции решения вокруг данной точки. Если $\alpha < 0$, положение равновесия $M(0,0)$ линеаризованной системы дифференциальных уравнений (1.89) асимптотически устойчиво и называется *устойчивым фокусом* (рис. 1.5).

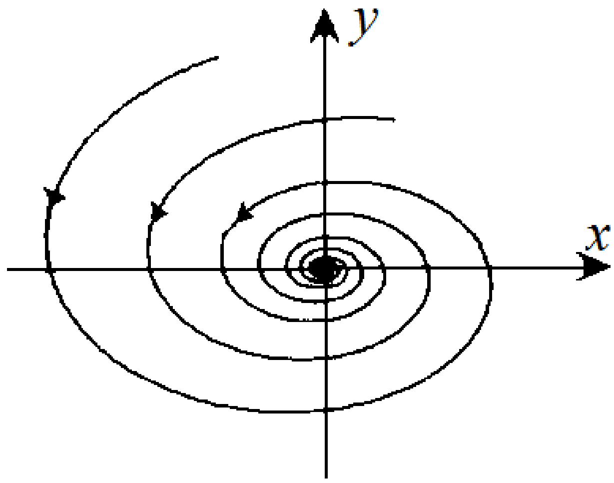

Рис. 1.5. Устойчивый фокус

Фазовые кривые будут иметь вид спирали, которая скручивается к положению равновесия. Если $\alpha > 0$, то положение равновесия $M(0,0)$ системы (1.84) неустойчиво и называется *неустойчивым фокусом*. При этом фазовые кривые удаляются со временем от положения равновесия, имеем разматывающуюся спираль (рис. 1.6).

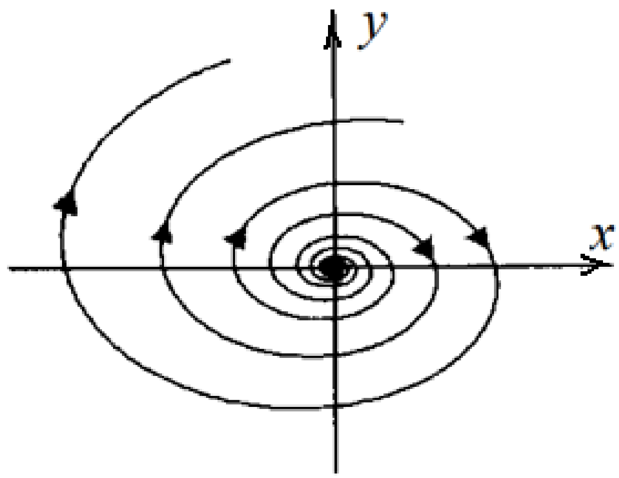

Рис. 1.6. Неустойчивый фокус

Случай 4. Характеристические корни λ_1 и λ_2 – чисто мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$. В данном случае точка $M(0,0)$ является *центром* (рис. 8.4) для системы (1.89) и может быть фокусом (устойчивым либо неустойчивым) для системы (1.84).

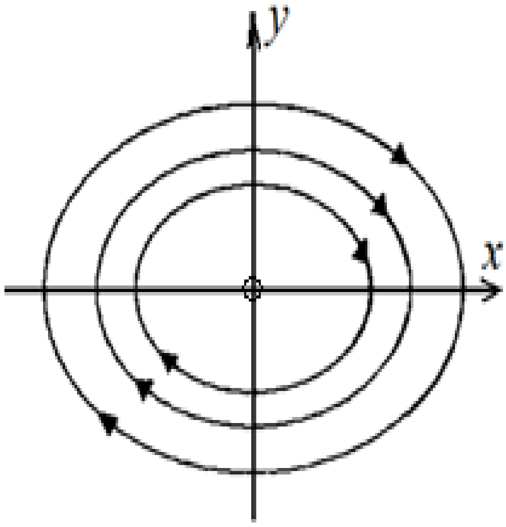

Рис. 1.7. Центр

Состояние равновесия является устойчивым по Ляпунову, и приближения к состоянию равновесия или удаления от него не происходит. Фазовые траектории – это замкнутые кривые вокруг точки $M(0,0)$, имеющие форму эллипсов.

Пример 1.16. Найти и исследовать на устойчивость состояния равновесия нелинейной системы дифференциальных уравнений [38]

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = xy - 2y - 4, \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -x^2 + 4y^2. \end{cases}$$

Решение. Находим состояния равновесия данной системы, т.е. особые точки, в которых правые части системы уравнений обращаются в нуль:

$$\begin{cases} xy - 2y - 4 = 0, \\ -x^2 + 4y^2 = 0. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения $x = \pm 2y$ и подставляя в первое уравнение, получаем два состояния равновесия с вещественными координатами: $M_1(4, 2)$ и $M_2(-2, -1)$.

Для точки $M_1(4, 2)$ вычисляем выражения σ и Δ:

$$\sigma = -\left\{\frac{\partial f_1}{\partial x}(4,2) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(4,2)\right\} = -\{y + 8y\}_{(4,2)} = -18,$$

$$\Delta = \Delta(4,2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(4,2) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(4,2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(4,2) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(4,2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -8 & 16 \end{vmatrix} = 48.$$

Характеристическое уравнение, согласно (1.91), принимает вид

$$\lambda^2 - 18\lambda + 48 = 0$$

и имеет корни $\lambda_1 = 9 + \sqrt{33} > 0$, $\lambda_2 = 9 - \sqrt{33} > 0.$ Следовательно, состояние равновесия $M_1(4, 2)$ является неустойчивым узлом.

Для точки $M_2(-2, -1)$ находим:

$$\sigma = -\left\{\frac{\partial f_1}{\partial x}(-2,-1) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(-2,-1)\right\} = -\{y + 8y\}_{(-2,-1)} = 9,$$

$$\Delta = \Delta(-2,-1) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(-2,-1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(-2,-1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(-2,-1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(-2,-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 24.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 9\lambda + 24 = 0,$$

которое имеет корни

$$\lambda_1 = -\frac{9}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{9}{2} - i\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Это говорит о том, что состояние равновесия $M_2(-2, -1)$ – устойчивый фокус. ▲

II. Рассмотрим строение фазовых кривых в окрестности точки $M(0,0)$, которые отвечают *равным* корням ($\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$) характеристического уравнения (1.95). Имеем: $\Delta > 0,\ \sigma^2 - 4\Delta = 0,$ и состояние равновесия $M(0,0)$ – *вырожденный узел* (рис. 1.8) либо *дикритический узел* (рис. 1.9). Соответствующий узел при $\lambda < 0$ будет устойчивым, а при $\lambda > 0$ – неустойчивым.

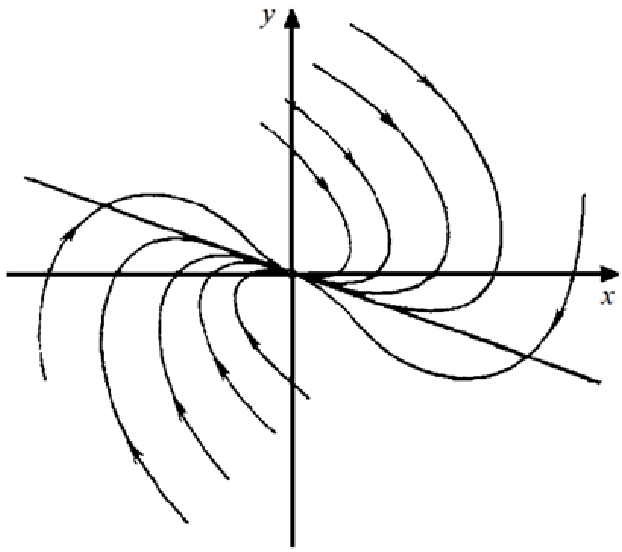

Рис. 1.8. Вырожденный узел [3]

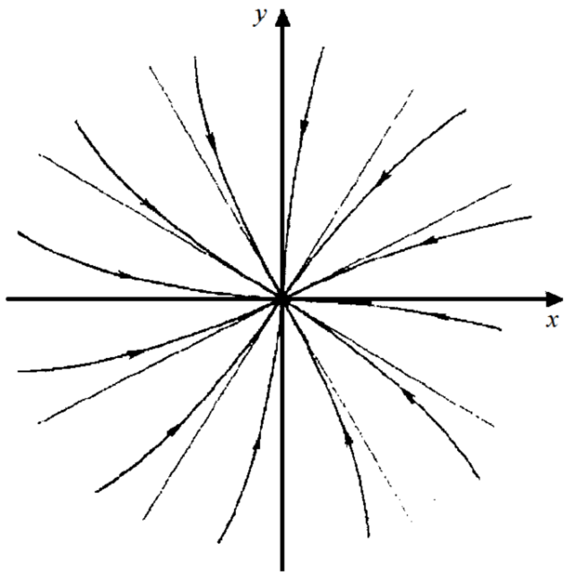

Рис. 1.9. Дикритический узел [3]

Рассмотренные выше варианты поведения фазовых траекторий в окрестности состояния равновесия, которые определяются корнями характеристического уравнения (1.95), можно представить диаграммой разбиения плоскости параметров (Δ, σ) на области [1, 24, 38], которые соответствуют различным типам состояний равновесия (рис. 1.10).

Рис. 1.10. Плоскость параметров (Δ, σ):
области соответствуют различным типам состояний равновесия [38]

III. Кроме состояний равновесия, или точек покоя, нелинейная система (1.75) на фазовой плоскости может иметь замкнутые фазовые траектории. Такие фазовые траектории являются геометрическим образом периодических движений.

Замкнутая траектория называется *изолированной*, если в достаточно малой (кольцеобразной) ее окрестности нет других замкнутых траекторий [24].

Определение 1.9. Замкнутая изолированная фазовая траектория называется ***предельным циклом***.

Предельные циклы могут быть *устойчивыми* и *неустойчивыми*. Предельный цикл называется *устойчивым*, если существует такая его окрестность, что все фазовые траектории, которые начинаются в этой окрестности, при $t \to +\infty$ приближаются к предельному циклу. Если же в сколь угодно малой окрестности предельного цикла существует хотя бы одна фазовая траектория, которая не приближается к нему при $t \to +\infty$, то такой предельный цикл называется *неустойчивым*.

Устойчивый предельный цикл является геометрическим образом *автоколебаний*.

Автоколебания – это установившиеся колебания автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, амплитуда которых не зависит от начальных условий (по крайней мере, для некоторого достаточно широкого класса начальных условий). Амплитуда автоколебаний определяется «размерами» предельного цикла, а период автоколебаний – временем прохода изображающей точки по циклу.

Неустойчивые предельные циклы не имеют непосредственного «физического» содержания. Они так же, как сепаратрисы седла, разделяют фазовую плоскость на области с различным поведением фазовых траекторий [1–3, 24, 28].

Пример 1.17. Дана автономная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right) - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right) + x. \end{cases}$$

Требуется показать, что имеется устойчивый предельный цикл, представляющий собой окружность, которая описывается уравнением

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Решение. Перейдем, следуя [31], к полярным координатам

$$x = \rho\cos\varphi, \;\; y = \rho\sin\varphi.$$

Тогда система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = -\rho(\rho-2), \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 1. \end{cases}$$

Интегрируя каждое уравнение системы по времени t, получаем

$$\rho(t) = \frac{2}{1 - C\exp(-2t)}, \;\; \varphi(t) = t + \varphi(0),$$

где постоянная

$$C = \frac{\rho(0) - 2}{\rho(0)}.$$

Функция $\varphi(t)$ описывает линейный рост угла φ со временем t. В плоскости исходных переменных (x, y) это соответствует равномерному вращению с постоянной угловой частотой $\omega = 1$. При $C = 0$ получаем решение $\rho(t) = 2,$ которое представляет собой окружность.

Рассмотрим поведение траекторий на фазовой плоскости в окрестности этой окружности. Для всех значений $C > 0$ с увеличением t фазовые траектории описываются значениями $\rho(t) > 2$ и асимптотически приближаются к окружности (рис. 1.11).

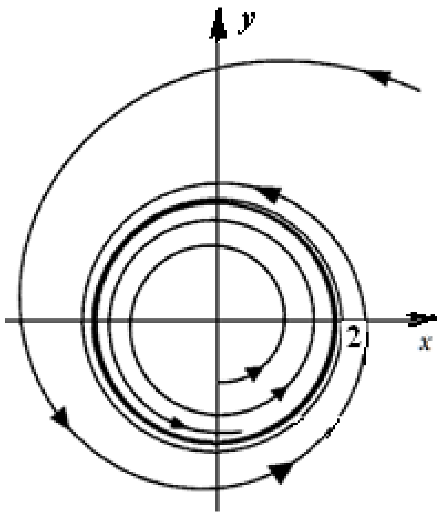

Рис. 1.11. Устойчивый предельный цикл

При значениях $C < 0$ и $\rho(t) < 2$ фазовые траектории будут находиться внутри окружности и также асимптотически приближаться к ней. Следовательно, полученное решение $\rho(t) = 2$ представляет собой устойчивый предельный цикл. ▲

ЗАДАЧИ

Задача 1.5. ***Математический маятник.*** Имеется консервативная система – маятник без трения. Пусть l – длина подвеса, φ – угол отклонения маятника от вертикали. Необходимо определить фазовый портрет математического маятника.

Решение. Динамическая система называется *консервативной*, когда при отсутствии внешнего влияния остаются неизменными ее характеристики: полная энергия, количество движения, момент количества движения и др. В консервативных системах процессы являются обратимыми во времени. В таких системах сохраняются объемы (в двумерном случае площади) в фазовом пространстве. Рассматривая элемент объема как множество начальных условий, в процессе эволюции он преобразуется в другой элемент фазового пространства, объем которого остается постоянным. В этом случае каждая точка объема следует своей траекторией.

Полная энергия маятника выражается формулой:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgl(1 - \cos\varphi), \tag{1.96}$$

где m – масса маятника, v – линейная скорость, g – ускорение свободного падения. Учитывая, что угловая скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{l}$, запишем E в виде:

$$E = ml^2\left(\frac{1}{2}\omega^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos\varphi)\right). \tag{1.97}$$

При отсутствии трения маятник сохраняет свою энергию, т.е. имеем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(ml^2\left(\frac{1}{2}\omega^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos\varphi)\right)\right) = 0. \tag{1.98}$$

Дифференцируя выражение (1.98) по времени t, получаем уравнение колебаний математического маятника:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{1.99}$$

Заменяем дифференциальное уравнение второго порядка системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega, \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.100}$$

Отсюда находим состояния равновесия

$$\omega = 0, \quad \varphi = \pm\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{1.101}$$

Нижнее положение (n- четное) окружено периодическими орбитами, период которых зависит от амплитуды. При стремлении амплитуды к нулю период $\tau \to 2\pi\sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

В случае, когда энергия колебаний превышает величину $2mgl$, т.е. $\omega > 2\sqrt{g/l}$, колебания переходят во вращение. Уравнение линий, называемых *сепаратрисами,* которые разделяют область колебаний и область вращения, имеет вид:

$$\frac{l\omega^2}{4g} + \frac{1-\cos\varphi}{2} = 1. \qquad (1.102)$$

На рис. 1. 12 представлено поведение фазовых траекторий математического маятника.

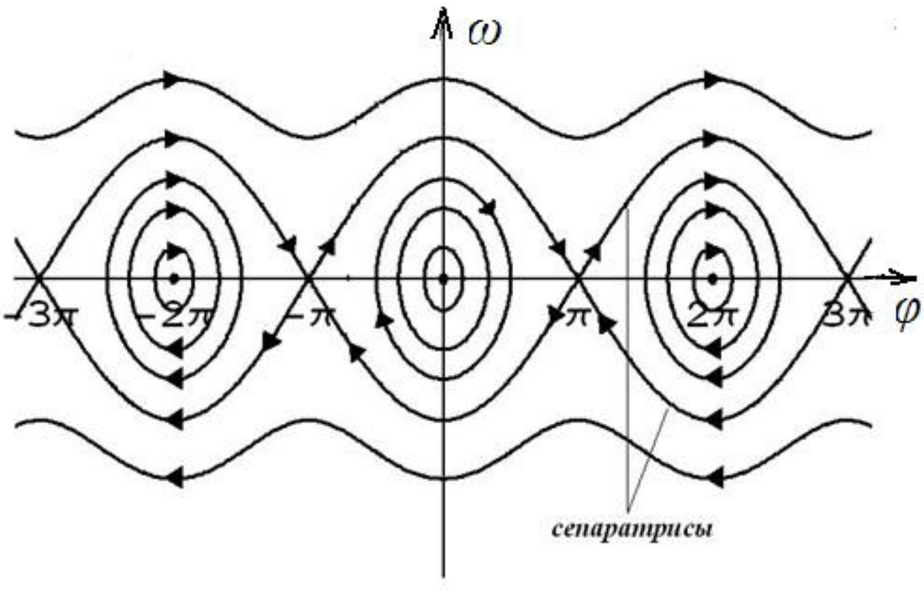

Рис. 1.12. Фазовые траектории математического маятника ▲

УПРАЖНЕНИЯ

Определить состояния равновесия автономных систем дифференциальных уравнений и исследовать поведение фазовых траекторий:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax, \\ \dfrac{dy}{dt} = by, \end{cases}$ где $ab > 0.$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x\left(x^2 + y^2 - 1\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y\left(x^2 + y^2 - 1\right). \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2ay - b^2 x. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2 + y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = xy. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sin y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Пусть искомая функция z зависит от нескольких переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$.

Определение 2.1. Уравнение

$$F\left(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k z}{\partial x_1^k}, \ldots\right) = 0, \qquad (2.1)$$

которое связывает искомую функцию, независимые переменные и частные производные от искомой функции, называется ***уравнением с частными производными*** (или ***уравнением в частных производных***) [23, 39, 44]. Здесь F – данная функция своих аргументов.

Порядок старшей производной, входящей в уравнение (2.1), называется ***порядком уравнения*** с частными производными.

Определение 2.2. Функция $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая уравнению (2.1) в некоторой области точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называется ***решением*** или ***интегралом*** дифференциального уравнения с частными производными.

Общее решение (***общий интеграл***) уравнения k-го порядка (2.1) содержит, как правило, *произвольные функции*. ***Частные интегралы*** выделяются с помощью задания соответствующих дополнительных условий (*краевые условия*, *начальные условия*), т. е. условий, которые налагаются на функцию z или на функцию z и ее производные, на кривой, поверхности и т. д. в пространстве точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Многие дифференциальные уравнения с частными производными допускают ***особые интегралы*** – дополнительные решения, которые не могут быть получены из общего интеграла ни при каком выборе произвольных функций.

Определение 2.3. Дифференциальное уравнение с частными производными называется ***однородным***, если произведение Az любой постоянной A на решение z есть также решение.

Определение 2.4. Дифференциальное уравнение с частными производными (2.1) называется ***линейным***, если F является линейной функцией от z и ее производных.

Общее уравнение с частными производными *первого* порядка с n независимыми переменными может быть представлено в виде:

$$F\left(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0. \qquad (2.2)$$

В случае *двух* независимых переменных часто пользуются следующими обозначениями Монжа: z – искомая функция, x и y – независимые переменные, $\frac{\partial z}{\partial x} \equiv p,\ \frac{\partial z}{\partial y} \equiv q$. Тогда уравнение первого порядка напишется в форме:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \tag{2.3}$$

или

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{2.4}$$

В уравнение (2.3) или (2.4) могут не входить явно независимые переменные, искомая функция, но оно должно содержать, по крайней мере, одну частную производную первого порядка.

В случае двух независимых переменных x и y, используя обозначения Монжа для частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv r,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv s,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv t,$$

будем иметь общее уравнение с частными производными *второго* порядка в виде:

$$F(x.y, z, p, q, r, s, t) = 0. \tag{2.5}$$

Пример 2.1. Найти общее решение дифференциального уравнения с частными производными первого порядка [44]

$$z - px - x^2 y^2 = 0.$$

Решение. Напишем уравнение в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x} - xy^2.$$

Это уравнение, если рассматривать y как параметр, является линейным для функции z. Его общее решение будет:

$$z = Cx - x^2 y^2.$$

Общее решение исходного уравнения в частных производных есть

$$z = \varphi(y)x - x^2 y^2,$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция. ▲

Пример 2.2. Найти общее решение дифференциального уравнения с частными производными второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Решение. Напишем, следуя [44], уравнение в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ не зависит от x, поэтому полагаем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \theta(y),$$

где $\theta(y)$ – произвольная функция от y. Интегрируем это равенство по y:

$$z = \int \theta(y)dy = \psi(y) + C.$$

Здесь $\psi(y)$ – произвольная дифференцируемая функция от y. Произвольная постоянная C – это постоянная по отношению к y, т. е. может быть любой функцией от x. Следовательно, общее решение данного уравнения будет:

$$z = \varphi(x) + \psi(y). \quad ▲$$

2.1. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка. Геометрическая интерпретация

Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

$$F(x,y,z,p,q)=0 \quad \left(p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},\ \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2\neq 0\right), \tag{2.6}$$

где $z = z(x, y)$ – неизвестная функция. Здесь данная функция F дважды непрерывно дифференцируема. Будем рассматривать x, y, z как декартовы прямоугольные координаты. Тогда каждое решение $z = z(x, y)$ уравнения (2.6) в координатном пространстве (x, y, z) изображает поверхность, которая называется *интегральной поверхностью* уравнения (2.6). Таким образом, задача нахождения решений уравнения с частными производными есть задача нахождения интегральных поверхностей. Для любой интегральной поверхности, которая проходит через фиксированную точку $M(x, y, z)$, уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y), \tag{2.7}$$

где p и q – связаны с уравнением (2.6) и являются угловыми коэффициентами касательной плоскости; X, Y, Z – текущие координаты; x, y, z рассматриваются как постоянные.

Огибающая семейства интегральных поверхностей представляет собой *конус Монжа*. Касательная плоскость к любой интегральной поверхности будет касаться и конуса Монжа вдоль одной из его образующих [23]. Линии на интегральной поверхности, которые в каждой своей точке касаются соответствующей образующей, называются *характеристическими линиями* или *характеристиками*. Вдоль таких характеристик выполняются соотношения:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}. \tag{2.8}$$

Следует отметить, что в случае, когда $\frac{\partial F}{\partial p}$ и $\frac{\partial F}{\partial q}$ не зависят явно от p и q, каждый конус Монжа вырождается в прямую, которая называется *осью Монжа* [23].

2.2. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка

Определение 2.5. ***Линейным дифференциальным уравнением с частных производными первого порядка*** называется уравнение вида

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Y, \tag{2.9}$$

в котором $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – независимые переменные, $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – неизвестная функция, $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y$ – данные непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в рассматриваемой области.

Если функции $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y$ зависят также и от z, то уравнение (2.9) называется ***квазилинейным*** уравнением [25].

Если $Y = 0$, то уравнение (2.9) есть ***линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка***:

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0. \tag{2.10}$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (2.10) не зависят от неизвестной функции z. Напишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{2.11}$$

которая соответствует уравнению (2.10). Эта система уравнений называется ***характеристической системой***.

Теорема 2.1. Левая часть любого первого интеграла системы уравнений (2.11) есть решение дифференциального уравнения (2.10); обратно, всякое решение дифференциального уравнения (2.10), приравненное произвольной постоянной, дает первый интеграл системы уравнений (2.11) [9, 44].

При этом в случае, когда n-1 первых интегралов

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_i \quad (i = 1, 2\ldots, n-1) \tag{2.12}$$

системы уравнений (2.11) независимы, произвольная функция (n–1)-го аргумента

$$z = f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \tag{2.13}$$

является *общим* решением линейного однородного уравнения (2.10).

Пример 2.3. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка [48]

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Решение. Характеристическая система, соответствующая данному уравнению, имеет вид:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$

Разделяя переменные $y\,dy = -x\,dx,\ y\,dy + x\,dx = 0,$ и интегрируя, находим:

$$x^2 + y^2 = C.$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения, согласно теореме 2.1, будет:

$$z = f(x^2 + y^2),$$

где f – произвольная функция. ▲

Решение *линейного неоднородного* дифференциального уравнения (2.9) обычно ищется в неявном виде [9]

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0. \tag{2.14}$$

Тогда функция V от n+1 независимых переменных является решением однородного линейного уравнения

$$X_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial V}{\partial x_2} + \cdots + X_n\frac{\partial V}{\partial x_n} + Y\frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{2.15}$$

Характеристическая система уравнения (2.15) имеет вид:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Y} \tag{2.16}$$

и называется *характеристической системой неоднородного уравнения* (2.9).

Для случая двух независимых переменных: $x_1 = x,\ x_2 = y$ уравнение (2.9) напишем в виде:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z). \qquad (2.17)$$

Искомое решение $z = z(x, y)$ этого уравнения изображается интегральной поверхностью в пространстве xyz. Уравнение (2.17) означает, что в каждой точке интегральной поверхности $z = z(x, y)$ вектор нормали

$$\left\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right\}$$

ортогонален заданному в данной точке вектору $\{P,Q,R\}$. Система уравнений (2.16) будет:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}. \qquad (2.18)$$

Отсюда следует, что характеристики, т. е. интегральные кривые системы (2.18), касаются векторов $\{P,Q,R\}$. Поэтому характеристика, которая имеет с интегральной поверхностью $z = z(x, y)$ общую точку, целиком лежит на этой поверхности. Через каждую точку пространства xyz проходит интегральная кривая характеристической системы (2.18) и интегральные поверхности составляются из характеристик.

Пример 2.4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка [48]

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x-y.$$

Решение. Характеристическая система, соответствующая данному неоднородному уравнению, в симметричной форме имеет вид:

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{x-y}.$$

Первая интегрируемая комбинация

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}$$

при разделении переменных: $x\,dx = y\,dy,\ x\,dx - y\,dy = 0$ и интегрировании дает:

$$x^2 - y^2 = C_1.$$

По свойству равных дробей имеем

$$\frac{-dx + dy}{-y + x} = \frac{dz}{x - y},$$

или

$$dz = -dx + dy.$$

Отсюда, интегрируя, находим:

$$x - y + z = C_2.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения в неявном виде будет:

$$F(x^2 - y^2, x - y + z) = 0,$$

где F – произвольная функция. ▲

Пример 2.5. Найти общее решение квазилинейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка [50]

$$x^2 z \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = x + y.$$

Решение. Характеристическая система, которая соответствует данному квазилинейному уравнению, в симметричной форме имеет вид:

$$\frac{dx}{x^2 z} = \frac{dy}{y^2 z} = \frac{dz}{x + y}.$$

Первая интегрируемая комбинация

$$\frac{dx}{x^2 z} = \frac{dy}{y^2 z}$$

после сокращения на z:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$$

и интегрирования дает

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C_1.$$

Для получения еще одного первого интеграла составляем интегрируемую комбинацию

$$\frac{dx - dy}{x^2 z - y^2 z} = \frac{dz}{x + y}.$$

Откуда

$$\frac{d(x - y)}{z\left(x^2 - y^2\right)} = \frac{dz}{x + y}$$

или

$$\frac{d(x - y)}{x - y} = zdz.$$

После интегрирования получаем

$$\ln|x - y| - \frac{z^2}{2} = C_2.$$

Следовательно, общее решение данного квазилинейного дифференциального уравнения будет:

$$F\left(C_1, C_2\right) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y},\ \ln|x - y| - \frac{z^2}{2}\right) = 0,$$

где F – произвольная функция. Так как z входит только в один из первых интегралов, то общее решение можно записать в виде

$$\ln|x - y| - \frac{z^2}{2} = \psi\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right),$$

где ψ – произвольная функция. ▲

Пример 2.6. Найти общее решение квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка [50]

$$xy\frac{\partial z}{\partial x}+(x-2z)\frac{\partial z}{\partial y}=yz.$$

Решение. Характеристическая система, соответствующая данному квазилинейному уравнению, в симметричной форме принимает вид:

$$\frac{dx}{xy}=\frac{dy}{x-2z}=\frac{dz}{yz}.$$

Из первой интегрируемой комбинации

$$\frac{dx}{xy}=\frac{dz}{yz}$$

получаем

$$\frac{z}{x}=C_1.$$

Для нахождения второго независимого интеграла характеристической системы перепишем ее в виде:

$$\begin{cases} x'=xy, \\ y'=x-2z, \\ z'=yz. \end{cases}$$

Продифференцируем второе уравнение системы

$$y''=x'-2y',$$

подставим вместо x' и y' их выражения из первого и третьего уравнений системы:

$$y''=xy-yz=y(x-2z)=yy',$$

в результате получаем уравнение второго порядка

$$y'' = yy'.$$

С помощью замены $y' = p$, где $p = p(y)$, $y'' = pp'$ понижаем порядок уравнения:

$$pp' = yp.$$

Откуда имеем два уравнения: $p = 0$ и $p' = y$. Первое из них дает тривиальное решение

$$y' = 0, \quad y = const,$$

которое нас не интересует. Решая второе уравнение, получаем

$$p = \frac{y^2}{2} + \tilde{C}_2$$

или

$$2x - 4z - y^2 = 2\tilde{C}_2 = C_2.$$

Таким образом, общее решение исходного квазилинейного дифференциального уравнения равно

$$F(C_1, C_2) = \left(\frac{z}{x},\ 2x - 4z - y^2\right) = 0,$$

где F – произвольная функция. ▲

Задача Коши. Дана пространственная кривая с непрерывно изменяющейся касательной. Требуется провести интегральную поверхность через заданную кривую.

Геометрическое решение этой задачи состоит в том, что такая поверхность – это поверхность, составленная из характеристик, которые проходят через каждую точку заданной кривой. При этом заданная кривая сама не является характеристикой. Эта задача имеет единственное решение. Если данная кривая является характеристикой, то через нее проходит бесконечное множество интегральных поверхностей, т. е. задача Коши становится неопределенной.

Аналитическое решение задачи Коши состоит в следующем. Если линия задана уравнениями [44]:

$$x = \alpha(t),\ y = \beta(t),\ z = \gamma(t), \tag{2.19}$$

то для нахождения искомой интегральной поверхности необходимо подставить заданные выражения (2.19) в первые интегралы характеристической системы уравнений, соответствующей данному дифференциальному уравнению, а затем исключить параметр *t* из полученных уравнений.

Пример 2.7. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

и проходящую через линию: $x = 0,\ z = y^2$ [48].

Решение. Характеристическая система, соответствующая данному уравнению, будет:

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x}.$$

Рассмотрим первую интегрируемую комбинацию

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy}.$$

Разделяя переменные

$$x\,dx = y\,dy$$

и интегрируя, получаем:

$$y^2 - x^2 = C_1.$$

Из второй интегрируемой комбинации

$$\frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x}$$

находим:

$$z - \ln|y| = C_2.$$

Характеристики, проходящие через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, будут:

$$\begin{cases} y_0^2 - x_0^2 = C_1, \\ z_0 - \ln|y_0| = C_2. \end{cases}$$

При $x_0 = 0,\ z_0 = y_0^2$ имеем параметрическое представление искомой интегральной поверхности:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = y_0^2 - 0, \\ z - \ln|y| = y_0^2 - \ln|y_0|. \end{cases}$$

Исключая параметр y_0, получаем уравнение поверхности в виде:

$$z - \ln y = y^2 - x^2 - \ln\sqrt{y^2 - x^2}. \quad \blacktriangle$$

Пример 2.8. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

и проходящую через линию: $x = 0,\ z = y^2$.

Решение. Характеристическая система, соответствующая данному уравнению, будет:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Отсюда имеем первый интеграл

$$dz = 0, \quad C_1 = z.$$

Рассматривая интегрируемую комбинацию

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x},$$

находим второй интеграл. Разделяя переменные

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

и интегрируя, получаем

$$x^2 + y^2 = C_2.$$

Характеристики, проходящие через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, будут:

$$\begin{cases} z_0 = C_1, \\ x_0^2 + y_0^2 = C_2. \end{cases}$$

При $x_0 = 0,\ z_0 = y_0^2$ имеем параметрическое представление искомой интегральной поверхности:

$$\begin{cases} z = z_0, \\ x^2 + y^2 = z_0. \end{cases}$$

Исключая параметр z_0, получаем уравнение поверхности в виде:

$$z = x^2 + y^2. \quad \blacktriangle$$

Пример 2.9. Найти частное решение квазилинейного дифференциального уравнению

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy$$

при условии, что $z^2 + y^2 = 9$, если $x = 3$.

Решение. Для нахождения общего решения уравнения составляем характеристическую систему

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}.$$

Из интегрируемой комбинации $\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz}$ получаем первый интеграл

$$x^2 - y^2 = C_1,$$

а из интегрируемой комбинации $\frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$ имеем второй независимый интеграл

$$y^2 - z^2 = C_2.$$

Общее решение принимает вид:

$$y^2 - z^2 = \psi\left(x^2 - y^2\right),$$

где ψ – произвольная функция.

Для определения функции ψ используем начальные условия:

$$y^2 - \left(9 - y^2\right) = \psi\left(9 - y^2\right).$$

Откуда

$$2y^2 - 9 = \psi\left(9 - y^2\right).$$

Обозначим $t = 9 - y^2$. Тогда

$$\psi(t) = 9 - 2t$$

или

$$\psi(x^2 - y^2) = 9 - 2x^2 + 2y^2.$$

Итак, частное решение запишется в виде:

$$2x^2 - y^2 - z^2 = 9. \ \blacktriangle$$

Пример 2.10. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} - (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$$

и проходящую через линию $z = y = -x$ [50].

Решение. Запишем характеристическую систему, соответствующую данному уравнению

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}.$$

Рассмотрим первую интегрируемую комбинацию

$$\frac{dx+dy+dz}{(y-z)+(z-x)+(x-y)} = \frac{dz}{x-y}.$$

Откуда

$$\frac{d(x+y+z)}{0} = \frac{dz}{x-y},$$

$$x+y+z = C_1.$$

Из второй интегрируемой комбинации

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)} = \frac{dz}{x-y}.$$

получаем

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{0} = \frac{dz}{x-y},$$

$$x^2+y^2+z^2 = C_2.$$

Исключаем переменные x, y, z из соотношений:

$$\begin{cases} x+y+z = C_1, \\ x^2+y^2+z^2 = C_2, \\ z = y = -x, \end{cases}$$

находим $C_2 = 3C_1^2$.

Подставляем в последнее соотношение выражения C_1 и C_2 через переменные x, y и z , получаем уравнение искомой поверхности:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3(x + y + z)^2. \ \blacktriangle$$

ЗАДАЧИ

Задача 2.1. ***Электрические линии с распределенными параметрами***. Составить дифференциальные уравнения для *однородных* электрических линий с распределенными параметрами.

Решение. *Электрическими линиями с распределенными параметрами* называют линии, в которых ток и напряжение непрерывно изменяются при переходе от одной точки (сечения) линии к соседней точке [7]. Такие линии обладают распределенными продольными и поперечными сопротивлениями. Участок линии с распределенными параметрами представлен на рис. 2.1, где бесконечно малый элемент длины линии обозначен через dx.

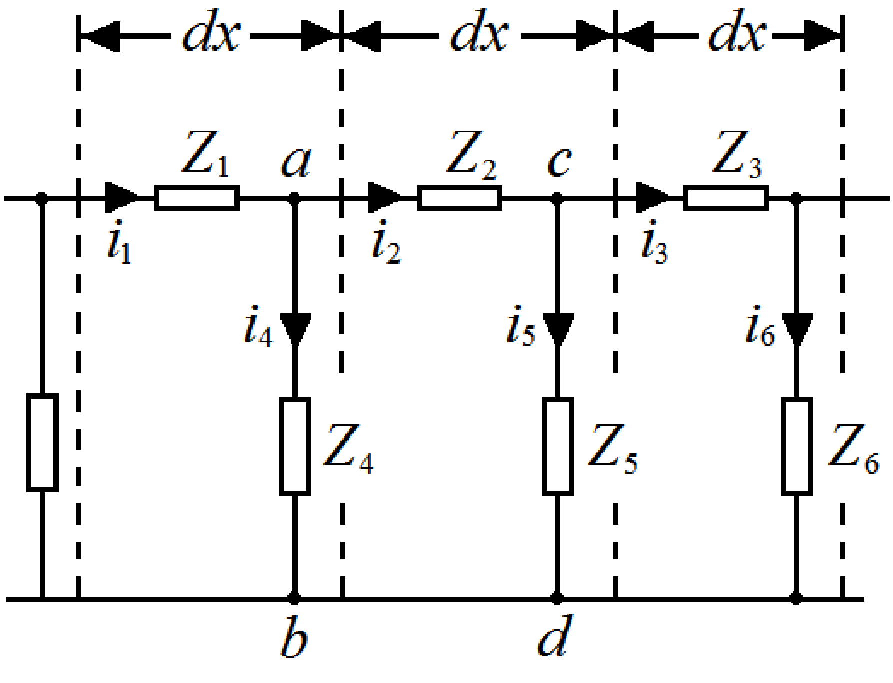

Рис. 2.1. Схема участка электрической линии с распределенными параметрами: Z_1, Z_2, Z_3,… – продольные сопротивления, Z_4, Z_5, Z_6, … – поперечные сопротивления [7]

В электрических линиях с распределенными параметрами продольные сопротивления составлены из активных сопротивлений проводов линии и индуктивностей двух участков линии длиной dx, которые противостоят друг другу. Поперечные сопротивления образованы сопротивлениями утечки, появляющейся вследствие несовершенства изоляции между проводами линии, и емкостями, которые образуются противостоящими друг другу участками линии.

Линия с распределенными параметрами называется *однородной,* если равны друг другу:

а) все продольные сопротивления участков одинаковой длины этой линии;

б) все поперечные сопротивления участков одинаковой длины этой линии.

Например, участок линии, изображенный на рис. 2.1, будет однородным, если $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \ldots$ и $Z_4 = Z_5 = Z_6$.

Пусть для единицы длины однородной линии с распределенными параметрами R_0 – продольное сопротивление, L_0 – индуктивность, C_0 – емкость, G_0 – поперечная проводимость. Следует подчеркнуть, что G_0 не является обратной величиной по отношению к R_0.

Обозначим, следуя [7], через x расстояние, отсчитываемое от начала линии, и разобьем линию на участки длиной dx (рис. 2.2).

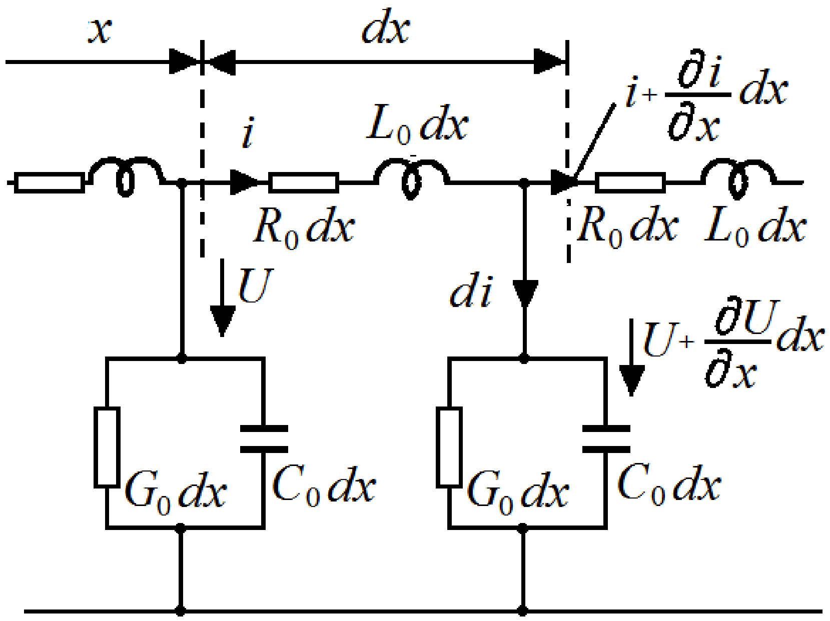

Рис. 2.2. Схема участка однородной электрической линии
с распределенными параметрами [7]

Тогда на длине dx будем иметь: активное сопротивление R_0dx, индуктивность L_0dx, емкость C_0dx и проводимость утечки G_0dx.

Пусть в некоторый момент времени t в начале рассматриваемого участка линии ток равен i, а напряжение равно u. В общем случае i и u являются функциями расстояния вдоль линии x и времени t. Так, в тот же момент времени t в силу наличия утечки тока через поперечный элемент в конце участка ток будет равен $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$, а напряжение равно $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$.

Согласно второму закону Кирхгофа [41, 43], для замкнутого контура, который образован участком линии длиной dx, при обходе его по часовой стрелке получаем:

$$-u + R_0 dx\, i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0. \tag{2.20}$$

После упрощения и деления уравнения на dx, будем иметь:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 i. \tag{2.21}$$

По первому закону Кирхгофа [41, 43] имеем:

$$i = di + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx. \tag{2.22}$$

Ток di (рис. 2.2) равен сумме токов, которые проходят через проводимость G_0dx и через емкость C_0dx, т. е.

$$di = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) G_0 dx + \frac{\partial}{\partial t} C_0 dx \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right). \tag{2.23}$$

Отсюда, пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, находим:

$$di = uG_0 dx + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2.24}$$

Подставив (2.24) в (2.22), после упрощения и деления на dx, получаем:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2.25}$$

Уравнения (2.21) и (2.25) – это основные дифференциальные уравнения для электрической линии с распределенными параметрами. ▲

УПРАЖНЕНИЯ

а) Найти общее решение дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

1. $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} - x^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz.$

2. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x} - xz\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^z.$

3. $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} - (y - x)\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2.$

4. $2y^4\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = x\sqrt{z^2 + 1}.$

5. $(x + z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (x + yz)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1 - z^2.$

6. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

7. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 9.$

б) Найти поверхность, удовлетворяющую заданному уравнению и проходящую через данную линию:

1. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2;\quad y = 1,\ z = x^2.$

2. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z;\quad x = 1,\ z = y^2.$

2.3. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка

Определение 2.6. Уравнение с частными производными второго порядка называется ***линейным*** относительно старших производных, если оно содержит эти производные только в первой степени.

Для функции двух независимых переменных $z = z(x, y)$ *общий* вид линейного уравнения второго порядка можно записать так:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \qquad (2.26)$$

где $A = A(x, y)$, $B = B(x, y)$, $C = C(x, y)$, $F = F\left(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ – заданные непрерывные функции своих аргументов. В приложениях наиболее часто встречается случай, когда коэффициенты A, B и C постоянны и когда функция F является линейной относительно $z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Определение 2.7. Уравнение (2.26) называется уравнением ***гиперболического типа*** в данной области, если $B^2 - AC > 0$ в этой области; уравнением ***параболического типа***, если $B^2 - AC = 0$; уравнением ***эллиптического типа***, если $B^2 - AC < 0$. Если выражение $B^2 - AC$ в данной области меняет знак, то уравнение (2.26) называется уравнением ***смешанного типа*** [9, 15].

2.3.1. Каноническая форма дифференциальных уравнений

С помощью замены переменных

$$\zeta = \zeta(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \tag{2.27}$$

где $\zeta(x, y)$ и $\eta(x, y)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции аргументов x и y, дифференциальное уравнение (2.26) всегда может быть приведено к некоторой *канонической* форме. Для нахождения этих функций рассматривают *характеристическое* уравнение

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0, \tag{2.28}$$

которое равносильно системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{A} = \dfrac{dy}{B + \sqrt{B^2 - AC}}, \\ \dfrac{dx}{A} = \dfrac{dy}{B - \sqrt{B^2 - AC}}. \end{cases} \tag{2.29}$$

Здесь A, B, C те же, что и в уравнении (2.26).

Интегральные кривые уравнения (2.28), или, что то же самое, системы уравнений (2.29), называются *характеристиками* дифференциального уравнения (2.26).

2.3.1.1. Каноническая форма дифференциальных уравнений гиперболического типа

В случае, когда дифференциальное уравнение (2.26) *гиперболического* типа, первые интегралы $\varphi_1(x, y) = C_1$ и $\varphi_2(x, y) = C_2$ действительны и различны. Это означает, уравнение (2.28) будет иметь *два различных однопараметрических семейства действительных характеристик* [29]. Через каждую точку рассматриваемой области проходит одна кривая каждого семейства. Путем замены переменных

$$\xi = \varphi_1(x, y),\ \ \eta = \varphi_2(x, y), \tag{2.30}$$

где $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ – интегралы системы уравнений (2.29), дифференциальное уравнение (2.26) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = \hat{O}_1\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\right). \tag{2.31}$$

Эта форма является *канонической* для уравнений гиперболического типа (1-*я нормальная форма*) [29].

Замечание 2.1. Дифференциальное уравнение гиперболического типа с помощью замены переменных

$$\xi = \chi + \psi\ ,\ \ \eta = \chi - \psi \tag{2.32}$$

приводится к каноническому уравнению вида (2-*я нормальная форма*) [29]:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\chi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} = \hat{O}_2\left(\chi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\chi}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\right). \tag{2.33}$$

Пример 2.11. Определить, к какому типу принадлежит дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Решение. Сравним это уравнение с общим видом линейного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка (2.26). Определяем значения коэффициентов:

$$A = 1,\ B = 0,\ C = -4.$$

Вычисляем выражение $B^2 - AC = 0 - 1\cdot(-4) = 4 > 0$. Следовательно, исходное уравнение принадлежит к дифференциальным уравнениям гиперболического типа. ▲

Пример 2.12. Привести дифференциальное уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 3x \frac{\partial z}{\partial x} - 3y \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (x \neq 0,\ \ y \neq 0)$$

к каноническому виду и проинтегрировать его.

Решение. Следуя [15], сначала определяем тип данного уравнения. Сравним данное уравнение с общим видом линейного уравнения с частными производными второго порядка (2.26). Поскольку $A = x^2$, $B = 0$, $C = -y^2$, имеем $B^2 - AC = -x^2(-y^2) = x^2y^2 > 0$, если $x \neq 0$, $y \neq 0$. Следовательно, это уравнение гиперболического типа. Характеристическое уравнение (2.28) принимает вид:

$$x^2\,dy^2 - y^2\,dx^2 = 0, \text{ или } \ y^2\,dx^2 - x^2\,dy^2 = 0,$$

а равносильная система уравнений (2.29) будет:

$$\begin{cases} ydx + xdy = 0, \\ ydx - xdy = 0. \end{cases}$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$xy = C_1,\ \ y / x = C_2.$$

По формулам (2.30) введем новые переменные:

$$\xi = xy,\ \ \eta = y / x.$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + 2\frac{y}{x^3} \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем его каноническую форму:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{xy}\frac{\partial z}{\partial\eta}=0,$$

или

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}=0.$$

Проинтегрируем последнее уравнение. Обозначим $\frac{\partial z}{\partial\eta}=w$. Тогда имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial w}{\partial\xi},\ \ \frac{\partial w}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi}w=0,\ \ \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi}=0.$$

Откуда

$$\ln|w|+\ln|\xi|=\ln|\mu(\eta)|,\ \ w\xi=\mu(\eta).$$

Возвращаясь к функции *z*, будем иметь дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial\eta}\xi=\mu(\eta),$$

интегрируя которое, находим:

$$\xi\, z=\int\mu(\eta)d\eta+\nu(\xi).$$

Следовательно,

$$z=\frac{1}{\xi}\mu(\eta)+\nu(\xi),$$

где μ и ν – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Возвращаемся к переменным *x* и *y*, окончательно получаем:

$$z=\frac{1}{xy}\mu(y/x)+\nu(xy).\ \ \blacktriangle$$

Пример 2.13. Привести дифференциальное уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \quad (x\neq 0,\ y\neq 0)$$

к каноническому виду.

Решение. Определяем, к какому типу принадлежит исходное уравнение, сравнивая его с общим видом линейного уравнения с частными производными второго порядка (2.26). Имеем $A = x^2$, $B = 0$, $C = -y^2$, откуда $B^2 - AC = -x^2(-y^2) = x^2y^2 > 0$, если $x \neq 0$, $y \neq 0$. Следовательно, данное уравнение гиперболического типа. Характеристическое уравнение (2.28) принимает вид:

$$x^2\,dy^2 - y^2\,dx^2 = 0, \text{ или } y^2\,dx^2 - x^2\,dy^2 = 0,$$

а равносильная система уравнений (2.29) будет:

$$\begin{cases} ydx + xdy = 0, \\ ydx - xdy = 0. \end{cases}$$

Разделяя переменные

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}, \\ \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \end{cases}$$

и интегрируя эти уравнения, получаем

$$xy = C_1, \quad \frac{y}{x} = C_2.$$

Отсюда следует, что C_1 и C_2 определяют уравнения характеристик. Согласно формулам (2.30), введем новые переменные

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}.$$

Вычисляя частные производные (см. пример 2.12) и подставляя их в исходное уравнение, получаем его каноническую форму:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{2\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta} = 0. \quad \blacktriangle$$

2.3.1.2. Каноническая форма дифференциальных уравнений параболического типа

Если дифференциальное уравнение (2.26) *параболического* типа, то уравнения системы (2.29) совпадают между собой. В данном случае будем иметь один первый интеграл $\varphi(x, y) = C$ системы (2.29), т. е. существует *одно однопараметрическое семейство действительных характеристик*. Формулы (2.30) будут:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \mu(x, y). \qquad (2.34)$$

Здесь $\mu(x, y)$ – любая функция, которая удовлетворяет условию, что якобиан функций φ и μ не равен нулю [15]:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\mu}{\partial x} & \frac{\partial\mu}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2.35)$$

В этом случае уравнение (2.26) имеет следующую *каноническую* форму [15, 29, 49]:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} = \hat{O}_3\left(\chi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\chi}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\right). \qquad (2.36)$$

Пример 2.14. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$2x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 2y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + 3y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Решение. Здесь $A = 2x^2$, $B = -2xy$, $C = 2y^2$, $B^2 - AC = (-2xy)^2 - 4x^2y^2 = 0$, т. е. это уравнение параболического типа. Уравнение характеристик (2.28) будет:

$$2x^2dy^2 + 4xy\,dx\,dy + 2y^2dx^2 = 0, \text{ или } x\,dy + y\,dx = 0.$$

Так как $x\,dy + y\,dx = d(xy)$, то $d(xy) = 0$. Отсюда имеем: $xy = C$, т. е. $\varphi(x, y) = xy$.

В формулах (2.34) полагаем $\xi = xy$, а в качестве функции η возьмем любую функцию, которая удовлетворяет условию (2.35), в частности, $\eta = y$.

Преобразуем исходное дифференциальное уравнение, введя новые переменные по формулам:

$$\xi = xy,\ \eta = y.$$

Находим частные производные по x и y через частные производные по ξ и η:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial \xi},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2x\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем его канонический вид:

$$2y\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + 3\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0,\qquad 2\eta\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + 3\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0.$$

Введем новую функцию $w = \frac{\partial z}{\partial \eta}$, тогда $\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$. Дифференциальное уравнение для функции w будет:

$$2\eta\frac{\partial w}{\partial \eta} + 3w = 0,$$

или

$$\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{3}{2\eta} = 0.$$

Интегрируя, находим

$$\ln|w| + \frac{3}{2}\ln|\eta| = \ln|\lambda_1(\xi)|, \quad w\eta^{3/2} = \lambda_1(\xi).$$

Возвращаемся к функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial \eta}\eta^{3/2} = \lambda_1(\xi), \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta^{3/2}}\lambda_1(\xi).$$

Интегрируем последнее уравнение, получаем

$$z = -2\lambda_1(\xi)\frac{1}{\sqrt{\eta}} + \lambda_2(\xi).$$

Возвращаясь к переменным x и y, получаем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$z = -2\lambda_1(xy)\frac{1}{\sqrt{y}} + \lambda_2(xy),$$

где $\lambda_1(xy)$ и $\lambda_2(xy)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции от произведения xy аргументов x и y. ▲

Пример 2.15. Привести дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

к каноническому виду.

Решение. Определяем, к какому типу принадлежит исходное уравнение, сравнивая его с общим видом линейного уравнения с частными производными второго порядка (2.26). Имеем $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, откуда $B^2 - AC = 0$. Следовательно, данное уравнение параболического типа. Характеристическое уравнение (2.28) принимает вид:

$$dy^2 - 2dxdy + dx^2 = 0, \text{ или } d(y - x) = 0.$$

Откуда $y - x = C_1$. Делаем замену:

$$\xi = y - x, \quad \eta = x.$$

Находим частные производные по x и y через частные производные по ξ и η:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(-\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(-\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(-\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(-\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}=-\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем его канонический вид:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}+\frac{\partial z}{\partial \eta}=0. \quad \blacktriangle$$

Пример 2.16. Привести дифференциальное уравнение [50]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

к каноническому виду и найти общее решение этого уравнения.

Решение. Определяем тип исходного уравнения, сравнивая его с общим видом линейного уравнения с частными производными второго порядка (2.26). Имеем $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, откуда $B^2 - AC = 0$. Следовательно, данное уравнение параболического типа. Характеристическое уравнение (2.28) принимает вид:

$$dy^2 + 2dxdy + dx^2 = 0, \text{ или } d(y + x) = 0.$$

Откуда $y + x = C_1$. Делаем замену:

$$\xi = y + x, \quad \eta = y.$$

Вычисляем частные производные по x и y через частные производные по ξ и η:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}.$$

Подставляем эти выражения в исходное уравнение, приводим его к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\partial z}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0.$$

Для нахождения решения полученного уравнения понизим его порядок на единицу с помощью замены

$$v = v(\xi, \eta) = \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

и уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = v.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\ln|v| = \ln|\eta| + \ln|C_1(\xi)|.$$

Откуда

$$v = C_1(\xi)\exp(\eta).$$

Возвращаясь к функции *z*, имеем уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = C_1(\xi)\exp(\eta),$$

решение которого равно

$$z(\xi,\eta) = C_1(\xi)\exp(\eta) + C_2(\xi),$$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ – произвольные функции. Возвращаясь к переменным *x* и *y*, получаем общее решение исходного уравнения в виде:

$$z(x, y) = C_1(x+y)\exp(y) + C_2(x+y). \quad \blacktriangle$$

ЗАДАЧИ

Задача 2.2. ***Распределение температуры внутри пластины***. Имеется бесконечная пластина толщиной *D*, которая проводит тепло. Допустим, что пластина изолирована с одной стороны (при $x = D$). Пусть температура *T* пластины в начальный момент времени $t = 0$ равнялась нулю, а затем к поверхности $x = 0$ стало с постоянной скоростью подводиться тепло с плотностью потока *Q* [35]. Требуется найти температуру внутри пластины в зависимости от координаты *x* и времени *t* (рис. 2.3).

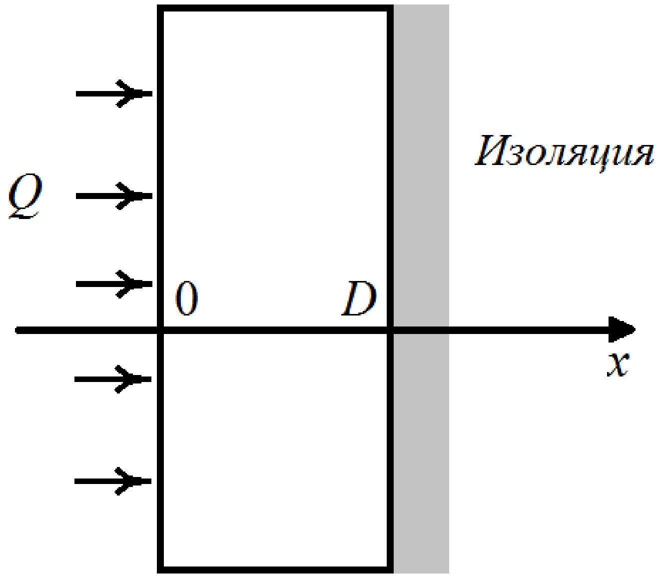

Рис. 2.3. Бесконечная пластина, проводящая тепло [35]

Решение. Следуя [35], распределение температуры внутри бесконечной пластины можно описать одномерным уравнением диффузии вида:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \chi = \frac{K}{C\rho}, \tag{2.37}$$

где K – теплопроводность, C – удельная теплоемкость, ρ – плотность.

Уравнение (2.37) является дифференциальным уравнением *параболического* типа. Отметим, что параболические уравнения описывают диффузионные процессы и характеризуются необратимостью.

Для решения уравнения (2.37) применим *метод разделения переменных*. Разделение переменных достигается представлением решения в виде произведения либо суммы функций, причем каждая из них зависит от меньшего числа переменных, чем в исходном уравнении. Из физических соображений следует, что после начального переходного периода в каждой точке пластины ожидается линейный рост температуры T от времени t. Поэтому будем искать частное решение в виде суммы:

$$T_ч(x, t) = M(x) + N(t) = M(x) + \alpha t. \tag{2.38}$$

Уравнение для $M(x)$ будет:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{\alpha}{\chi}. \tag{2.39}$$

Решая уравнение (2.39), находим:

$$M(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{\chi}\right)x^2 + \lambda x + \delta\,. \tag{2.40}$$

Константы α и λ определяются краевыми условиями

$$K\left.\frac{dM}{dx}\right|_{x=0} = Q,\quad \left.\frac{dM}{dx}\right|_{x=D} = 0\,, \tag{2.41}$$

а величину δ можно выбрать произвольно. Решение (2.40), удовлетворяющее краевым условиям (2.41), равно

$$M(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{KD}\right)(x-D)^2,\quad \alpha = \frac{Q\chi}{KD} = \frac{Q}{C\rho D}\,. \tag{2.42}$$

Таким образом, частное решение (2.38) дифференциального уравнения (2.37) принимает вид:

$$T_{\div}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{KD}\right)(x-D)^2 + \frac{Q}{C\rho D}t\,.\quad \blacktriangle \tag{2.43}$$

2.3.1.3. Каноническая форма дифференциальных уравнений эллиптического типа

В случае, когда дифференциальное уравнение (2.26) *эллиптического* типа, первые интегралы системы уравнений (2.29) являются комплексно-сопряженными [9, 15, 23, 29]:

$$\varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y) = C_1,\ \ \varphi_1(x, y) - i\varphi_2(x, y) = C_2. \tag{2.44}$$

В этом случае *действительных характеристик не существует*. Путем замены переменных по формулам (2.30) дифференциальное уравнение (2.26) приводится к виду:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\chi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} = \hat{O}_4\left(\chi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\chi}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\right), \tag{2.45}$$

который называется *каноническим* видом дифференциального уравнения эллиптического вида.

Пример 2.17. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Решение. Здесь $A=1$, $B=0$, $C=1$, $B^2-AC=0-1<0$, т. е. это каноническое уравнение эллиптического типа. Будем искать решение *методом разделения переменных* (*методом Фурье*). Искомую функцию $z(x, y)$ представим в виде произведения двух функций:

$$z(x, y) = P(x)Q(y),$$

где $P(x)$ – функция только от x, а $Q(y)$ – функция только от y. Находим производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=Q(y)\frac{d^2P}{dx^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=P(x)\frac{d^2Q}{dy^2}.$$

Подставляем эти производные в данное уравнение, получаем:

$$Q(y)\frac{d^2P}{dx^2}+P(x)\frac{d^2Q}{dy^2}=0.$$

Отсюда имеем:

$$\frac{d^2P}{dx^2}\Big/P(x)+\frac{d^2Q}{dy^2}\Big/Q(y)=0,$$

или

$$\frac{d^2Q}{dy^2}\Big/Q(y)=-\frac{d^2P}{dx^2}\Big/P(x).$$

Последнее равенство должно выполняться для всех значений x и y, так как функция $z(x, y)$ является решением исходного уравнения. Это возможно только тогда, когда обе части не зависят ни от x, ни от y, т. е. они являются постоянными. Обозначая постоянную буквой a, будем иметь два обыкновенных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2Q}{dy^2} - aQ(y) = 0, \quad \frac{d^2P}{dx^2} + aP(x) = 0.$$

Полагая $a = \beta^2 > 0$, находим соответствующие характеристические уравнения:

$$\lambda^2 - \beta^2 = 0,\ \ \lambda = \pm\,\beta;$$

$$\lambda^2 + \beta^2 = 0, \lambda = \pm i\beta.$$

Тогда решения обыкновенных дифференциальных уравнений будут:

$$Q(y) = C_1 \exp(-\beta y) + C_2 \exp(\beta y)\,, \quad P(x) = C_3 \cos\beta x + C_4 \sin\beta x\,.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения принимает вид:

$$z(x,y) = \left(C_1 \exp(-\beta y) + C_2 \exp(\beta y)\right)\cdot\left(C_3 \cos\beta x + C_4 \sin\beta x\right). \ \ \blacktriangle$$

Пример 2.18. Привести дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

к каноническому виду.

Решение. Определяем, к какому типу принадлежит данное уравнение, сравнивая его с общим видом линейного уравнения с частными производными второго порядка (2.26). Имеем $A = 1$, $B = -1$, $C = 2$, откуда $B^2 - AC = 1 - 2 = -1 < 0$. Следовательно, данное уравнение эллиптического типа. Вводим новые переменные

$$\xi = x + y, \quad \eta = x.$$

Находим частные производные по x и y через частные производные по ξ и η:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}.$$

Подставляя выражения для производных в исходное уравнение, получаем его канонический вид:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial\eta}=0. \quad \blacktriangle$$

УПРАЖНЕНИЯ

а) Привести к каноническому виду линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка:

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-8\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+10\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial y}=0.$
2. $3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0.$
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+8\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0.$
4. $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

б) Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

1. $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad a=const.$
2. $2x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+3y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$
3. $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+k^2\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad k=const.$
4. $2x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{2}y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial z}{\partial x}=0.$

Список литературы

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 915 с.
2. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 568 с.
3. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 636 с.
5. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1954. – 216 с.
6. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Физматлит, 2002. – 800 с.
7. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. М.: Высшая школа, 1964. – 750 с.
8. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1963. – 410 с.
9. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1985. – 545 с.
10. Вербжицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 2001. – 384 с.
11. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1975. – 872 с.
12. Высшая математика для экономических специальностей: Учебник и Практикум (части I и II) / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Высшее образование, 2008. – 893 с.
13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.
14. Глызин С.Д., Толбей А.О. Практикум по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений: Учебное пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 68 с.
15. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике. Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 640 с.
16. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. II: Учебное пособие для студентов втузов. – М.: Высшая школа, 1980. – 360 с.
17. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
18. Жарова Н.Р., Кузнецова Л.Г. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. – Нижневартовск: Изд-во Нижневарт. гос. ун-та, 2014. – 147 с.
19. Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике. – М.: Физматлит, 2007. – 520 с.
20. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. – М.: Наука, 1966. – 260 с.

21. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
22. Киселева Н.В., Хентов А.А. Введение в теорию обыкновенных линейных дифференциальных уравнений: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2011. – 44 с.
23. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
24. Кузнецов Ю.А. Оптимальное управление экономическими системами. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2008. – 449 с.
25. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
26. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 164 с.
27. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.- Л.: ГИТТЛ, 1950. – 471 с.
28. Лерман Л.М. Линейные дифференциальные уравнения и системы: Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 89 с. URL: http://www.unn.ru. Фонд образовательных электронных ресурсов. – Рег. номер 481.12.06 (дата обращения 15.05.2017).
29. Маделунг Э. Математический аппарат физики. Справочное руководство / Пер. с нем. – М.: Наука, 1968. – 620 с.
30. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
31. Марков К.А., Фаддеев М.А., Хомицкий Д.В. Избранные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений для физиков: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2015. – 261 с.
32. Математический энциклопедический словарь. Гл. ред. Ю.В. Прохоров; Ред. кол.: С.И. Адян, Н.С. Бахвалов, В.И. Битюцков, А.П. Ершов, Л.Д. Кудрявцев, А.Л. Онищик. А.П. Юшкевич. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – 847 с.
33. Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 428 с.
34. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969. – 640 с.
35. Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики / Пер. с англ. – М.: АТОМИЗДАТ, 1972. – 392 с.
36. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: ОГИЗ , 1947. – 448 с.
37. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
38. Перов А.А., Перова В.И. Дифференциальные уравнения в прикладных задачах: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2018. – 223 с.

39. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 296 с.
40. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.2. – М.: Физматлит, 1985. – 560 с.
41. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – М.: Наука, 1982. – 496 с.
42. Сатанин А.М. Численные методы в нанофизике. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2016. – 72 с.
43. Сивухин Д.В. Курс общей физики. Т. 3. Электричество. – М.: Физматлит, 2004. – 656 с.
44. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Едиторал УРСС, 2004. – 468 с.
45. Стронгина Н.Р. Практикум по курсу «Численные методы»: Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем: Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2011. – 68 с.
46. Фаддеев М.А., Марков К.А. Основные методы вычислительной математики. – СПб.: Лань, 2008. – 155 с.
47. Фаддеев М.А., Марков К.А. Численные методы. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2005. – 156 с.
48. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 2008. – 240 с.
49. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. – 428 с.
50. Хватцев А.А., Строчков И.А. Дифференциальные уравнения в частных производных: Учебное пособие. Псков: Псковский государственный университет, 2016. – 80 с.
51. Эльсгольц Л.Э. Качественные методы в математическом анализе. – М.: КомКнига, 2010. – 304 с.

Анатолий Александрович **Перов**

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Учебное пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.