МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

М.И. Сумин

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А.Н. ТИХОНОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.01 “Математика”,
02.03.01 “Математика и компьютерные науки”

Нижний Новгород
2016

УДК 517.983.54+519.853
ББК В102.164+В161.8
С89

С89 Сумин М.И. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А.Н. ТИХОНОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. — 56 с.

Рецензент: к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ИИТММ **А.Л. Калашников**

В учебно-методическом пособии рассматриваются элементы теории методов решения некорректно поставленных задач, имеющей важное значение в развитии современного естествознания и лежащей в основе получения многих новых знаний об окружающем нас мире. Подробно излагается классический метод регуляризации А.Н. Тихонова. Приводится достаточно обширный вспомогательный материал, лежащий в основе методов решения некорректных задач.

Предназначено для знакомства студентов старших курсов бакалавриата с основами теории методов решения некорректных задач.

УДК 517.983.54+519.853
ББК В102.164+В161.8

©Сумин М.И., 2016
©Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, 2016

Введение

При решении разнообразных прикладных задач, а также при исследованиях в области математической теории естественным образом возникают так называемые корректно и некорректно поставленные задачи. Некорректно поставленные задачи или, другими словами, задачи, неустойчивые по отношению к погрешностям в их исходных данных, отличаются тем, что сколь угодно малые изменения в этих исходных данных приводят к произвольно большим изменениям решений таких задач.

Для самых различных приложений, с которыми мы встречаемся во многих научных и технических дисциплинах, обычной является ситуация, когда исследователи имеют дело с задачами, исходные данные которых получаются в результате некоторой экспериментальной деятельности и, стало быть, известны лишь приближенно. По этой причине неустойчивость по отношению к погрешностям в исходных данных таких задач, которая имеет место практически для всех наиболее интересных для исследователей случаях, приводит к необходимости сформулировать принципы отбора приемлемых для исследователей их приближенных решений. При этом формулировка таких принципов отбора решений или, другими словами, изучение и применение методов решения некорректных задач является неизбежным делом при условии, что мы признаем неизбежность получения новой информации об окружающем нас мире.

Настоящее учебное пособие посвящено знакомству с самым известным методом решения некорректных задач, за которым исторически закрепилось название метод регуляризации Тихонова. В нем метод регуляризации Тихонова излагается применительно к задаче решения так называемых операторных уравнений первого рода. С необходимостью приближенного решения таких уравнений приходится неизбежно сталкиваться при исследовании разнообразных некорректных задач естествознания, естественным образом сводящихся во многих случаях к решению подобных уравнений, являющихся, как правило, неустойчивыми по отношению к ошибкам входных данных. Метод регуляризации Тихонова вот уже более пятидесяти лет широко используется при решении самых разнообразных практических задач, возникающих в различных естественных и технических науках и их приложениях.

Пособие состоит из двух основных разделов. В первом из них излагаются базовые понятия теории некорректных задач и необходимые теоретические факты. Второй посвящен достаточно подробному изложению непосредственно метода регуляризации А.Н. Тихонова для решения операторных уравнений первого рода.

При написании учебного-методического пособия существенным образом использовалось учебное пособие:

[23] Сумин М.И. Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов: Учебное пособие. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2009.

Глава 1

Базовые понятия теории некорректных задач и необходимые теоретические факты

Первая глава учебного пособия посвящена знакомству с основными понятиями теории некорректных задач. В ней, прежде всего, вводятся и обсуждаются определения корректно и некорректно поставленных задач, приводятся примеры некорректных задач. В первой главе вводится также основное для всего учебного пособия в целом понятие регуляризирующего оператора (алгоритма). Глава завершается обсуждением необходимых для понимания основного материала теоретических сведений из теории функций, функционального анализа, интегральных и дифференциальных уравнений, нелинейного анализа и теории оптимизации.

1.1. Понятия корректно и некорректно поставленных задач. Примеры

Определим прежде всего понятия корректно и некорректно поставленных задач. По сложившейся традиции это будет удобно сделать на примере классической задачи решения так называемых абстрактных (операторных) уравнений первого рода, к которым сводятся очень многие математические задачи.

1.1.1. Определения корректно и некорректно поставленных задач

Рассмотрим абстрактное уравнение первого рода

$$Az = u, \quad z \in Z, \;\; u \in U, \tag{1.1.1}$$

которое с подходящими пространствами (конечномерными, функциональными) Z, U, а также с некоторым оператором $A:\ Z \to U$ возникает в различного рода исследованиях. Решение этого уравнения в наиболее важных и интересных случаях является по своей природе неустойчивым по отношению к ошибкам исходных данных – оператора A и “правой части” u или, другими словами, задача решения этого уравнения является некорректно поставленной. Введем строгое с математической точки зрения понятие некорректно поставленной задачи. Для этого определим сначала, следуя Ж. Адамару [38], корректно поставленную или, короче, корректную задачу. Пусть в уравнении (1.1.1) Z, U – метрические пространства, $A : Z \to U$ – непрерывный оператор. Задачу определения z из уравнения первого рода (1.1.1) будем называть корректно поставленной, если:

1) уравнение (1.1.1) разрешимо для всех $u \in U$;

2) решение единственно;

3) решение устойчиво по возмущению правой части, т.е. малым в метрике пространства U возмущениям правой части u соответствуют и малые в метрике пространства Z возмущения решения z.

В качестве приближенного решения в корректных задачах, если вместо "точной" правой части u имеется ее приближение u_δ, $u_\delta \to u$, $\delta \to 0$, благодаря предельному соотношению $z_\delta \to z$, $\delta \to 0$, принимается элемент $z_\delta = A^{-1}u_\delta$.

Под некорректной задачей решения уравнения (1.1.1) понимается любая такая задача, в которой не выполняется хотя-бы одно из перечисленных трех условий корректности. В огромном числе случаев при этом не выполняются условия 1) и 3). Тогда элемент $z_\delta = A^{-1}u_\delta$, даже если он и определен, не может служить в качестве приближения к z, так как z_δ при сколь угодно малых δ может как угодно сильно отличаться от точного решения z.

1.1.2. Примеры некорректных задач

Первый пример неустойчивости может быть проиллюстрирован посредством результатов формального решения с помощью ЭВМ следующей двумерной системы (см. [32])

$$\begin{cases} z_1 + 7z_2 = 5, \\ \sqrt{2}z_1 + \sqrt{98}z_2 = \sqrt{50}. \end{cases}$$

Точное нормальное, т.е. наименее уклоняющееся от нуля, решение этой системы из двух зависимых уравнений равно, как легко показать, $(0.1, 0.7)$.

Указанная система решалась на ЭВМ для различных степеней округления иррациональных чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{98}$, $\sqrt{50}$ и одновременно вычислялся определитель Δ. Сначала берем два знака после запятой и, стало быть, система имеет вид

$$\begin{cases} z_1 + 7z_2 = 5, \\ 1.41z_1 + 9.90z_2 = 7.07. \end{cases}$$

В этом случае оказывается

$$\Delta^{(3)} = 0.03, \;\; z_1^{(3)} = \frac{1}{3}, \;\; z_2^{(3)} = \frac{2}{3},$$

где верхний индекс (3) указывает число знаков, которое было удержано при записи иррациональных чисел. Повышая точность решения задачи посредством улучшения аппроксимации иррациональных чисел, получаем следующие результаты в случаях, когда удерживалось, соответственно, 50, 200, 400, 600 знаков при записи иррациональных чисел:

$$\Delta^{(50)} = -3 \cdot 10^{-49}, \;\; z_1^{(50)} = 9.666\ldots, \;\; z_2^{(50)} = 0.666\ldots;$$

$$\Delta^{(200)} = 2 \cdot 10^{-199}, \;\; z_1^{(200)} = -5.5, \;\; z_2^{(200)} = 1.5;$$

$$\Delta^{(400)} = 1 \cdot 10^{-399}, \;\; z_1^{(400)} = 5, \;\; z_2^{(400)} = 0;$$

$$\Delta^{(600)} = -2 \cdot 10^{-599}, \;\; z_1^{(600)} = 8.5, \;\; z_2^{(600)} = -0.5.$$

Из этих результатов хорошо видно, что решения при различных степенях округления ведут себя очень неустойчиво и с увеличением количества удерживаемых знаков ни к нормальному, ни к какому-либо другому фиксированному решению точной системы не стремятся.

Другим и уже аналитическим примером может служить система

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 1, \\ (1+\mu) z_1 + z_2 = 1 + \delta \end{cases}$$

с $\mu \neq 0$ и с точным решением $z_1 = \delta/\mu$, $z_2 = 1 - \delta/\mu$. Очевидно, компонента z_1 этого решения может принимать произвольное значение при как угодно малых δ и μ.

Рассмотрим далее, в качестве следующего примера, линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода, к которому приводятся разнообразные прикладные задачи физики, астрономии, механики и т.п. Таким уравнением является уравнение

$$A(z)(x) \equiv \int_a^b K(x,s) z(s)\, ds = u(x), \;\; c \leqslant x \leqslant d, \tag{1.1.2}$$

в котором решение $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, будем считать принадлежащим пространству непрерывных функций $Z = C[a,b]$ с метрикой

$$\rho_Z(z_1, z_2) \equiv \max_{s \in [a,b]} |z_1(s) - z_2(s)|,$$

правую часть $u(x)$, $c \leqslant x \leqslant d$, – пространству $U = L_2[c,d]$ с метрикой

$$\rho_U(u_1, u_2) \equiv \{\int_c^d (u_1(x) - u_2(x))^2 dx\}^{1/2},$$

а ядро $K(x,s)$, $(x,s) \in \Pi \equiv \{c \leqslant x \leqslant d;\ a \leqslant s \leqslant b\}$ вместе с его первой частной производной $\partial K/\partial x$ – пространству $C(\Pi)$ непрерывных на прямоугольнике Π функций.

Пусть $z_0 \in C[a,b]$ – единственное точное решение уравнения (1.1.2) с правой частью $u_0 \in L_2(c,d)$, т.е. уравнения

$$\int_a^b K(x,s) z(s)\, ds = u_0(x), \;\; c \leqslant x \leqslant d.$$

Вопросы существования и единственности решения уравнения Фредгольма первого рода разрешаются в рамках классической теоремы Пикара, формулировку и доказательство которой можно найти в разделе 1.3.3 (см. также, например, [20]).

В тех прикладных задачах, в которых возникает уравнение (1.1.2), правая часть $u(x)$, $c \leqslant x \leqslant d$, как правило, представляет собой результат работы некоторого физического прибора и, стало быть, на самом деле в распоряжении математика имеется не реально существующая правая часть уравнения $u_0(x)$, $c \leqslant x \leqslant d$, а лишь некоторое ее приближение $\widetilde{u}(x)$, $c \leqslant x \leqslant d$, про которое известно, поскольку реальный физический прибор работает с некоторой реальной конечной ошибкой, что

$$\rho_U(u_0, \widetilde{u}) \leqslant \delta,$$

где величина $\delta > 0$ и характеризует погрешность физического прибора.

Приближенная правая часть $\widetilde{u}(x)$, $c \leqslant x \leqslant d$, в результате эксперимента может быть получена, например, с помощью самописца и иметь "угловые" точки. Это означает, что в некоторых точках $x \in [c, d]$ функция $\widetilde{u}(\cdot)$ может не иметь производной. Однако, такой правой части заведомо не отвечает ни одного решения из пространства $C[a, b]$ уравнения (1.1.2), так как из непрерывности производной $\partial K/\partial x$ в силу классической теоремы анализа о дифференцировании интеграла по параметру следует, что решениям из $C[a, b]$ уравнения (1.1.2) обязательно должны соответствовать лишь гладкие (непрерывно дифференцируемые в классическом смысле) правые части $u(x)$, $c \leqslant x \leqslant d$. Так как в любой окрестности (в метрике $L_2(c, d)$) точной правой части $u_0(x)$, $c \leqslant x \leqslant d$, содержится бесчисленное множество недифференцируемых функций из $U = L_2(c, d)$, то можно сделать первый вывод о том, что задача решения уравнения (1.1.2) является некорректно поставленной для пары пространств $Z = C[a, b]$, $U = L_2(c, d)$, поскольку уже первое требование из определения корректной по Адамару постановки задачи не выполняется. Это означает, что в качестве приближенного решения уравнения (1.1.2) нельзя брать точное решение этого уравнения с приближенной правой частью, так как такого решения может просто не существовать.

В то же время, очевидно, уравнение (1.1.2) имеет решение (в обычном смысле) только для тех правых частей $u(\cdot)$ из $L_2(c, d)$, которые принадлежат образу AZ пространства решений $Z = C[a, b]$ при отображении $A : Z \to U$,

$$A(z)(x) \equiv \int_a^b K(x, s) z(s)\, ds, \ \ c \leqslant x \leqslant d.$$

При этом для простоты рассуждений предположим, что ядро $K(\cdot, \cdot)$ таково, что каждой правой части $u \in AZ$ отвечает единственное решение из Z (это может быть обеспечено в силу упомянутой выше теоремы Пикара), что позволяет сделать вывод о существовании в этом случае обратного оператора $A^{-1} : AZ \to Z$, задаваемого на метрическом пространстве AZ.

Покажем теперь, что уравнение (1.1.2) обладает еще одной, пожалуй наиболее важной с точки зрения приложений особенностью, заключающейся в том, что обратное отображение $A^{-1} : AZ \to Z$ является неустойчивым, т.е. в случае уравнения Фредгольма первого рода с выбранными выше пространствами Z, U не выполняется и третье требование определения корректности по Адамару.

Действительно, так как $z_0(s), a \leqslant s \leqslant b$, есть по предположению решение уравнения (1.1.2) при $u(\cdot) = u_0(\cdot)$, то функция

$$z_{N,\omega}(s) = z_0(s) + N \sin \omega s, \ \ a \leqslant s \leqslant b,$$

является решением уравнения (1.1.2) с правой частью

$$u_{N,\omega}(x) = u_0(x) + N \int_a^b K(x, s) \sin \omega s\, ds, \ \ c \leqslant x \leqslant d.$$

Вычислим расстояние $\rho_U(u_{N,\omega}, u_0)$. Элементарные вычисления говорят о том, что оно равно

$$\rho_U(u_{N,\omega}, u_0) = |N|\{\int_c^d [\int_a^b K(x,s)\sin\omega s\, ds]^2\, dx\}^{1/2}.$$

Очевидно, при любом $N > 0$ это расстояние можно сделать сколь угодно малым за счет выбора достаточно большого ω, поскольку хорошо известно (см., например, [35, с. 91]), что

$$\int_c^d [\int_a^b K(x,s)\sin(\omega s) ds]^2\, dx \to 0, \quad \omega \to \infty.$$

В то же время расстояние

$$\rho_Z(z_{N,\omega}, z_0) = \max_{s\in[a,b]} |N\sin(\omega s)| = |N|$$

при всех достаточно больших ω тем больше, чем больше $|N|$, что и говорит о неустойчивости обратного оператора $A^{-1} : AZ \to Z$ и невыполнимости третьего условия определения корректности.

Тот же эффект неустойчивости имеет место и в случае другой естественной для уравнения (1.1.2) пары пространств Z, U: $Z = L_2(a,b)$, $U = L_2(c,d)$. Аналогичный элементарный подсчет в этом случае дает следующее выражение для $\rho_Z(z_{N,\omega}, z_0)$:

$$\rho_Z(z_{N,\omega}, z_0) = |N|\{\int_a^b \sin^2(\omega s)\, ds\}^{1/2} =$$

$$= |N|\sqrt{\frac{b-a}{2} - \frac{1}{2\omega}\sin[\omega(b-a)]\cos[\omega(b+a)]},$$

из которого хорошо видно, что и для этой пары пространств за счет подбора параметров N, ω при сколь угодно малом расстоянии $\rho_U(u_{N,\omega}, u_0)$ уклонение решений $\rho_Z(z_{N,\omega}, z_0)$ может быть сколь угодно велико.

Итак, приведенные рассуждения показывают, что задача решения интегрального уравнения (1.1.2) в случае рассмотренных выше естественных пар пространств Z, U не удовлетворяет как первому, так и, что особенно важно, третьему условию корректности по Адамару и, значит, является некорректно поставленной задачей.

Поговорим далее о другой важной с точки зрения приложений задаче решения уравнения первого рода, а именно о задаче дифференцирования функции, заданной приближенно. Пусть функция $z_0(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, есть производная функции $u_0(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Очевидно, что тогда функция $u_{N,\omega}(t) = u_0(t) + N\sin(\omega t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, в метрике пространства $U = C[a,b]$ отличается от функции $u_0(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, на величину $\rho_U(u_{N,\omega}, u_0) = |N|$ при любых достаточно больших значениях ω. При этом ее производная $z_{N,\omega}(t) = \dot{u}_{N,\omega}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, отличается от $z_0(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, в метрике пространства $Z = C[a,b]$ на величину $|N\omega|$, которая может быть произвольно большой при достаточно больших значениях $|\omega|$. Таким образом, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, также не обладает свойством устойчивости по возмущению исходных данных.

Можно заметить, что эта задача нахождения производной функции, заданной приближенно и удовлетворяющей условию $u(a) = 0$, сводится к задаче решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода

$$\int_a^t z(\tau)d\tau = u(t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Можно утверждать, что для уравнений Вольтерра первого рода имеют место те же эффекты некорректности, что и приведенные выше для уравнения Фредгольма.

Заметим также, что если в рассмотренной выше задаче дифференцирования функции, заданной приближенно, взять другую пару пространств, а именно $Z = C[a,b]$, $U = C^1[a,b]$ с метрикой

$$\rho_U(u_1, u_2) = \max_{t\in[a,b]}\{|u_1(t) - u_2(t)| + |\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)|\},$$

то для этой новой пары пространств задача дифференцирования приближенно заданной функции будет уже, очевидно, корректной. Однако в практических задачах вложение приближенно задаваемых функций $u(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, в класс $C^1[a,b]$ с целью их последующего дифференцирования не является естественным.

Следующим важным примером некорректно поставленной задачи, который мы рассмотрим, является важная для различных физических приложений задача численного суммирования рядов Фурье в случае, когда их коэффициенты заданы приближенно в метрике l_2. Пусть $u_0(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Если вместо точных коэффициентов a_n брать возмущенные $c_n = a_n + \varepsilon/n$ при $n \geqslant 1$ и $c_0 = a_0$, получаем ряд $u_\varepsilon(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nt)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Коэффициенты этих рядов отличаются в метрике l_2 на величину

$$\bar{\varepsilon} = \{\sum_{n=0}^{\infty}(c_n - a_n)^2\}^{1/2} = \varepsilon\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\}^{1/2} = \varepsilon\sqrt{\frac{\pi^2}{6}},$$

которую посредством выбора числа ε можно сделать сколь угодно малой. Одновременно, норма в пространстве $C[0,\pi]$ разности сумм этих рядов

$$u_0(t) - u_\varepsilon(t) = \varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(nt)$$

может быть сделана сколь угодно большой, так как, например при $t = 0$ последний ряд вообще расходится.

Заметим одновременно, что если уклонение функций $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, оценивать не в метрике $C[0,\pi]$, а в метрике $L_2(0,\pi)$, то задача численного суммирования рядов Фурье в случае, когда их коэффициенты заданы приближенно в метрике l_2, будет для такой пары пространств корректно поставленной, так как в силу теоремы Парсеваля имеем

$$\{\int_0^{\pi}(u_0(t) - u_\varepsilon(t))^2 dt\}^{1/2} = \{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}(c_n - a_n)^2\}^{1/2} = \bar{\varepsilon}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Рассмотрим, наконец, в этой серии иллюстративных примеров, пример, сыгравший существенную роль в истории развития теории некорректных задач. Этот пример принадлежит Адамару [38]. Он возник в результате исследований, связанных с изучением того, какие постановки краевых задач являются естественными или, другими словами, корректными для различных типов уравнений в частных производных.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа в двумерном случае. Она состоит в нахождении решения уравнения

$$\Delta u(x,y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

с начальными данными

$$u(x,0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

где $f(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ – заданные функции.

Если положить $f_1(x) \equiv 0$, $\varphi_1(x) = \frac{1}{a}\sin(ax)$, то решением задачи Коши будет функция

$$u_1(x,y) = \frac{1}{a^2}\sin(ax)\,\mathrm{sh}(ay), \quad -\infty \leqslant x \leqslant +\infty, \ \ y \geqslant 0, \quad a > 0.$$

Если положить $f_2(x) = \varphi_2(x) \equiv 0$, то решением такой задачи Коши будет функция $u_2(x,y) \equiv 0$, $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$, $y \geqslant 0$.

Если уклонения начальных данных и решений оценивать в метрике C, то имеем

$$\rho_C(f_1,f_2) = \sup_x |f_1(x) - f_2(x)| = 0,$$

$$\rho_C(\varphi_1,\varphi_2) = \sup_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \frac{1}{a}.$$

Последняя величина при достаточно больших значениях a может быть сделана сколь угодно малой. Однако уклонение решений

$$\rho_C(u_1,u_2) = \sup_{x,y} |u_1(x,y) - u_2(x,y)| =$$

$$= \sup_{x,y}\left|\frac{1}{a^2}\sin(ax)\,\mathrm{sh}(ay)\right| = \sup_y \frac{1}{a^2}\,\mathrm{sh}(ay)$$

может быть сделано произвольно большим при достаточно больших значениях числа a.

Подытоживая сказанное в данном вводном разделе, мы видим, что имеется большое число важных как с теоретической, так и прикладной точек зрения математических задач, исходные данные которых известны лишь приближенно и которые являются неустойчивыми по отношению к возмущению этих данных. Для успешного решения таких задач с приближенно заданной информацией об их исходных данных нужны специальные методы, принципиальным образом учитывающие неустойчивость задач по возмущению этих исходных данных.

1.2. Понятие регуляризирующего оператора (алгоритма). Понятие априорной информации

Основным объектом нашего внимания далее будет операторное уравнение первого рода

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U, \tag{1.2.1}$$

где Z, U – гильбертовы пространства, $A : Z \to U$ – линейный непрерывный оператор. Мы предполагаем, что уравнение (1.2.1) разрешимо классическим образом, не предполагая, вообще говоря, заранее, что такое решение единственно. Среди всех решений мы выделяем нормальное, т.е. минимальное по норме пространства Z среди всех решений. Как известно (см. раздел 1.3.6), таким образом определенное нормальное решение всегда существует и единственно. Везде ниже нашей основной задачей и будет задача приближенного нахождения этого решения.

Заметим, что с самой общей абстрактной точки зрения типичным примером некорректной задачи (1.2.1) является задача с вполне непрерывным оператором A (см. раздел 1.3.2), поскольку в этом случае, как хорошо известно, не выполняются сразу первое и третье условия корректности задачи (1.2.1) по Адамару.

1.2.1. Понятие регуляризирующего оператора (алгоритма)

Итак, пусть у нас имеется операторное уравнение с точными исходными данными

$$A^0 z = u^0, \quad z \in Z, \quad u^0 \in U, \tag{1.2.2}$$

где Z, U – гильбертовы пространства, $A^0 : Z \to U$ – линейный непрерывный оператор, $u^0 \in U$ – некоторый заданный элемент, которое будем считать разрешимым. Обозначим через z^0 нормальное решение уравнения (1.2.2). Оператор A^0 и правая часть u^0 представляют собой соответственно точный оператор и точную правую часть (именно об этом и говорит верхний индекс 0), однако они точно не известны, а известны только их приближения: линейный непрерывный оператор $A^h : Z \to U$ и правая часть $u^\delta \in U$ вместе с оценками их отклонения от A^0 и u^0 соответственно

$$\|A^h - A^0\| \equiv \sup_{\|z\| \leqslant 1} \|(A^h - A^0)z\| = \sup_{z \neq 0} \frac{\|(A^h - A^0)z\|}{\|z\|} \leqslant h,$$

$$\|u^\delta - u^0\| \leqslant \delta,$$

где $h \in (0, h_0)$, $\delta \in (0, \delta_0)$, h_0, δ_0 – некоторые фиксированные положительные числа. Из сказанного в разделе 1.1 следует, что в качестве приближения к какому-либо решению z_0 (например, нормальному z^0) уравнения (1.2.2) нельзя брать формально элемент $(A^h)^{-1} u^\delta$, так как он может просто не существовать (не выполняется первое условие определения корректности по Адамару) или в случае формального существования может как угодно сильно в норме Z отличаться от z_0 (не выполняется третье условие определения корректности по Адамару).

Понятие регуляризирующего оператора (алгоритма) является центральным понятием в теории регуляризации неустойчивых задач и было введено А.Н. Тихоновым в 1963 г. [25, 26]. Приведем достаточно общее определение регуляризирующего оператора (см. [28, 30]).

Определение 1.2.1. *Зависящий от параметра $\eta \equiv (h, \delta)$ оператор (алгоритм) $R(A, u, \eta)$, вообще говоря, многозначный, определенный на элементах пространства линейных непрерывных операторов $L(Z, U)$ и пространства U и имеющий в качестве значений множества элементов пространства Z (т.е. действующий во множество 2^Z), называется регуляризирующим (относительно элемента u^0 и оператора A^0), если*

1) существуют числа h_1, $\delta_1 > 0$ такие, что оператор R определен при всякой паре $\eta = (h, \delta)$, $h \in (0, h_1)$, $\delta \in (0, \delta_1)$ для любого оператора $A \in L(Z, U)$ и любого элемента $u \in U$ таких, что

$$\|A - A^0\| \leqslant h, \quad \|u - u^0\| \leqslant \delta;$$

2) имеет место предельное соотношение

$$\|z^\eta - z^0\| \to 0,$$

если только $z^\eta \in R(A^h, u^\delta, \eta)$ (т.е. z^η выбирается из множества $R(A^h, u^\delta, \eta)$ произвольным образом), где A^h, u^δ – любая такая пара исходных данных, для которой выполняются оценки

$$\|A^h - A^0\| \leqslant h < h_1, \quad \|u^\delta - u^0\| \leqslant \delta < \delta_1.$$

Можно сообразить, что важность определения регуляризирующего оператора состоит в том, что, если у нас такой оператор имеется, то в качестве приближения к решению z^0 уравнения (1.2.2) с приближенно известной информацией об исходных данных A^0, h^0,

$$\|A^h - A^0\| \leqslant h, \quad \|u^\delta - u^0\| \leqslant \delta,$$

следует просто взять любой элемент $z^\eta \in R(A^h, u^\delta, \eta)$, так как тогда в соответствии с определением регуляризирующего алгоритма будет иметь место предельное соотношение

$$\|z^\eta - z^0\| \to 0, \quad \eta \to 0.$$

Таким образом, главным вопросом теперь становится вопрос существования регуляризирующих в смысле определения 1.2.1 операторов (алгоритмов) для решения задачи (1.2.2), неустойчивой к ошибкам исходных данных. Ответу на этот важнейший вопрос будет посвящена глава 2 данного пособия, где мы рассмотрим метод регуляризации Тихонова для решения операторного уравнения первого рода вида (1.2.2), который является устойчивым по отношению к ошибкам в исходных данных регуляризирующим алгоритмом. Ввиду ограниченности объема пособия будем рассматривать уравнение (1.2.2) лишь на паре гильбертовых пространств без каких-либо дополнительных ограничений на искомое решение. Несмотря на указанное сужение класса задач, он содержит много важных для приложений конкретных неустойчивых задач.

1.2.2. Понятие априорной информации

При решении некорректных задач мы неизбежно сталкиваемся с таким наиважнейшим в теории некорректных задач понятием, как понятие априорной информации. Для эффективного решения некорректной задачи очень важно знать *a priori* какими естественными и физически оправданными с точки зрения данной конкретной задачи свойствами обладает ее предполагаемое решение. При решении любой прикладной задачи такая априорная информация имеется. Она может выражаться в самых разнообразных формах. Это может быть естественное для представителей конкретных наук знание о той или иной гладкости искомых функций (для физиков является обычным утверждение о том, что физически оправданное решение не может быть "устроено слишком плохо"), их априорной принадлежности тому или иному классу функций и т.п. Любая такая априорная информация, трансформированная математиком в адекватную для данной конкретной задачи математическую "форму", может привести к успешному решению этой прикладной задачи, причем успех и эффективность такого решения напрямую зависят от "качества" взаимодействия представителей конкретных естественных наук с математиками – специалистами в области методов решения некорректных задач.

1.3. Необходимые теоретические сведения из различных математических дисциплин

В основе теории и методов решения некорректных задач лежат самые различные факты из теории функций, функционального анализа, теории интегральных и дифференциальных уравнений, нелинейного анализа и теории оптимизации. В данном разделе формулируются все необходимые факты для изучения теории и методов решения некорректных задач в рамках настоящего пособия.

1.3.1. Необходимые сведения из теории функций

Напомним сначала необходимые определения и факты из теории функций вещественной переменной (см., например, [10, 15]).

Определение 1.3.1. *Конечная функция $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, называется абсолютно-непрерывной, если каковы бы ни были система интервалов*

$$(\alpha_i, \beta_i) \subset [a, b], \quad \alpha_i < \beta_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n, \;\; \bigcap_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i) = \emptyset,$$

и натуральное n, по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\sum\limits_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) \leqslant \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n} |z(\beta_i) - z(\alpha_i)| \leqslant \varepsilon$.

Хорошо известен следующий критерий абсолютной непрерывности.

Лемма 1.3.1. *Непрерывная функция $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, является абсолютно-непрерывной тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде*

$$z(s) = z(a) + \int_a^s f(s) ds,$$

где f – суммируемая на $[a, b]$ функция, т.е. $f \in L_1(a, b)$.

Непосредственным следствием этой леммы являются следующие две.

Лемма 1.3.2. *Если функция $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, абсолютно-непрерывна, то она имеет при почти всех $s \in [a, b]$ производную $z'(s)$, причем эта производная суммируема на $[a, b]$.*

Лемма 1.3.3. *Для абсолютно-непрерывной функции $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, имеет место равенство*

$$z(s) = z(a) + \int_a^s z'(s) ds.$$

1.3.2. Необходимые сведения из функционального анализа

Примем прежде всего некоторые стандартные для функционального анализа обозначения.

Пусть Z, U – линейные нормированные пространства, $A : Z \to U$ – линейный ограниченный оператор. В этом случае, как известно, вся совокупность линейных ограниченных операторов из Z в U, которая обозначается через $L(Z, U)$, образует также линейное нормированное пространство с нормой

$$\|A\| \equiv \|A\|_{Z \to U} \equiv \sup_{\|z\| \neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|} = \sup_{\|z\| \leqslant 1} \frac{\|Az\|}{\|z\|},$$

а расстояние между двумя линейными ограниченными операторами $A_1, \ A_2$ задается формулой

$$\rho(A_1, A_2) \equiv \|A_1 - A_2\|.$$

Через $D(A)$ и $R(A)$ обозначаем соответственно область определения и область значений оператора $A : Z \to U$. Оператор $A : Z \to U$ называется инъективным, если из равенства $Az_1 = Az_2$ следует, что $z_1 = z_2$.

Приводимые ниже классические определения и факты могут быть найдены в стандартных учебниках по функциональному анализу [8, 10, 12, 36].

Определение 1.3.2. *Множество M из линейного нормированного пространства называется компактным (компактом), если из любой бесконечной последовательности его элементов можно выделить сходящуюся к некоторой его точке подпоследовательность.*

Определение 1.3.3. *Оператор $A : Z \to U$ называется вполне непрерывным, если замыкание $\operatorname{cl} AX \equiv \overline{AX}$ образа ограниченного множества $X \subset Z$ является компактным множеством.*

Центральное внимание в пособии мы уделяем так называемым абстрактным (операторным) уравнениям первого рода на паре гильбертовых пространств Z, U

$$Az = u,$$

где $A \in L(Z, U)$, $u \in U$ – заданные оператор и элемент. В случае разрешимости такого уравнения для некоторой правой части $u \in U$ минимальное по норме среди всех его решений называется нормальным, оно существует и единственно (см. ниже необходимые сведения из теории оптимизации).

Везде ниже знак $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будет использоваться для обозначения скалярного произведения в гильбертовом пространстве.

Определение 1.3.4. *Пусть H – гильбертово пространство. Последовательность $z_n \in H$, $n = 1, 2, \ldots$, называется слабо сходящейся к элементу $z_0 \in H$, если для любого элемента $z \in H$ выполняется предельное соотношение $\langle z_n, z \rangle \to \langle z_0, z \rangle$, $n \to \infty$. Указанную слабую сходимость будем обозначать символом $z_n \xrightarrow{w} z_0$.*

Теорема 1.3.1. *Замкнутое выпуклое множество M, принадлежащее гильбертову пространству H, является слабо замкнутым, т.е. любая принадлежащая ему слабо сходящаяся последовательность $z_n \in M$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к некоторой его точке $z_0 \in M$.*

Теорема 1.3.2. *Ограниченное замкнутое выпуклое множество M в гильбертовом пространстве H является слабо компактным, т.е. из любой принадлежащей* *ему бесконечной последовательности $z_n \in M$, $n = 1, 2, \ldots$, можно извлечь слабо сходящуюся к некоторой его точке $z_0 \in M$ подпоследовательность $z_{n_k} \in M$, $k = 1, 2, \ldots$.*

Определение 1.3.5. *Функционал $f : H \to R^1$, заданный на гильбертовом пространстве H называется полунепрерывным (слабо полунепрерывным) снизу в точке $z_0 \in H$, если из сходимости $z_n \longrightarrow z_0$ ($z_n \xrightarrow{w} z_0$) следует неравенство $\varliminf_{n\to\infty} f(z_n) \geqslant f(z_0)$.*

Оказывается справедливой следующая важная

Лемма 1.3.4. *Выпуклый непрерывный функционал в гильбертовом пространстве в каждой точке слабо полунепрерывен снизу.*

Вспомним здесь еще один важный для нас факт из функционального анализа, который сформулируем также в виде леммы.

Лемма 1.3.5. (*H-свойство гильбертова пространства*). *Из слабой сходимости $z_n \xrightarrow{w} z_0, n \to \infty$ и сходимости норм $\|z_n\| \to \|z_0\|, n \to \infty$, в гильбертовом пространстве H следует сильная сходимость $\|z_n - z_0\| \to 0, n \to \infty$ (топологии слабой и сильной сходимости на единичной сфере гильбертова пространства совпадают).*

Наиважнейшее значение для нас будет иметь также понятие производной в смысле Фреше функционала в гильбертовом пространстве. Напомним соответствующее определение.

Определение 1.3.6. *Производной в смысле Фреше (или градиентом) нелинейного функционала $f : H \to R^1$ на гильбертовом пространстве H называется элемент $f'[z] \in H$, для которого справедливо равенство*

$$f(z + h) - f(z) = \langle f'[z], h\rangle + o(\|h\|),$$

где $o(\|h\|)/\|h\| \to 0$ при $\|h\| \to 0$, $\langle z_1, z_2\rangle$ – скалярное произведение в пространстве H.

Справедлива следующая лемма, обобщающая хорошо известную теорему классического конечномерного анализа.

Лемма 1.3.6. *Если функционал $f : H \to R^1$, заданный на гильбертовом пространстве H, дифференцируем в смысле Фреше в точке $z_0 \in H$ и достигает в ней минимального значения на H, то $f'(z_0) = 0$.*

Нам понадобится также следующая теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

Теорема 1.3.3. *Пусть $f : H \to R^1$ – линейный непрерывный функционал на гильбертовом пространстве H. Тогда найдется такой единственный элемент $z_f \in H$, что справедливо представление: $f(z) \equiv \langle z_f, z\rangle \; \forall\, z \in H$.*

В теории методов регуляризации часто (см., например, [28]) в качестве функционального пространства, в котором ищется решение некорректной задачи, используется гильбертово пространство $W_2^1(a, b)$ (классов эквивалентности) функций $f : (a, b) \to R^1$, суммируемых с квадратом и имеющих суммируемые с квадратом обобщенные в смысле Соболева производные первого порядка $f' : (a, b) \to R^1$. Скалярное произведение в нем задается равенством

$$\langle f_1, f_2\rangle \equiv \int_a^b (f_1(s)f_2(s) + f_1'(s)f_2'(s))ds.$$

В связи с пространством $W_2^1(a,b)$, напомним, что суммируемая на (a,b) функция f' называется обобщенной производной первого порядка в смысле Соболева суммируемой на (a,b) функции f, если для любой бесконечно дифференцируемой и финитной на (a,b) (т.е. равной нулю вне некоторого отрезка $[c,d] \subset (a,b)$) функции φ имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\frac{d\varphi}{dx}dx = -\int_a^b f'(x)\varphi(x)dx.$$

В данном учебном пособии в качестве пространства решений в силу одномерности интервала (a,b) нам будет удобнее вместо пространства $W_2^1(a,b)$ использовать гильбертово пространство абсолютно-непрерывных функций $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, (обычные) производные которых существуют для почти всех $s \in (a,b)$ и суммируемы с квадратом, т.е. $z' \in L_2[a,b]$, а скалярное произведение задается равенством

$$\langle z_1, z_2\rangle \equiv \int_a^b (z_1(s)z_2(s) + z_1'(s)z_2'(s))ds.$$

Это гильбертово пространство обозначим через $V_2^1[a,b]$. Скалярное произведение $\langle z_1, z_2\rangle$ стандартным образом порождает, очевидно, норму в пространстве $V_2^1[a,b]$: $\|z\| \equiv \sqrt{\langle z, z\rangle}$. Подчеркнем, что при определении пространства $V_2^1[a,b]$ используется лишь понятие обычной производной функции одного переменного. Заметим также, что в каждом классе эквивалентности $f \in W_2^1(a,b)$ присутствует ровно одна абсолютно-непрерывная на $[a,b]$ функция $f \in V_2^1[a,b]$ и, наоборот, каждая абсолютно-непрерывная на $[a,b]$ функция $f \in V_2^1[a,b]$ порождает класс эквивалентности (функцию) $f \in W_2^1[a,b]$.

1.3.3. Необходимые сведения из теории интегральных уравнений

При рассмотрении интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода важно иметь представление о том когда и как оно разрешимо. В то же время, теория интегральных уравнений 1-го рода, как правило, не излагается сколь-нибудь подробно в современных доступных книгах по интегральным уравнениям. С этой целью сформулируем и докажем здесь классическую теорему Пикара (см., например, [11, 20, 22]) существования и единственности решения линейного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$\int_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{1.3.1}$$

Решение этого уравнения будем искать в классе $L_2[a,b]$. Будем считать, что правая часть $u(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, суммируема с квадратом, а ядро $K(\cdot,\cdot)$ непрерывно в прямоугольнике $\Pi \equiv \{a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant s \leqslant b\}$ и является симметрическим, т.е. выполняется равенство $K(x,s) = K(s,x)$. Заметим при этом, что всякое интегральное уравнение

вида
$$\int\limits_a^b \bar{K}(x,s)z(s)ds = \bar{u}(x), \quad c \leqslant x \leqslant d, \tag{1.3.2}$$
может быть сведено к уравнению вида (1.3.1) с симметрическим ядром (см., например, [11, 20], а также [22, с. 56]). Действительно, умножим равенство (1.3.2) на $\bar{K}(x,y)$ и проинтегрируем по x от c до d. Тогда можем записать
$$u(y) = \int\limits_c^d \bar{K}(x,y)\bar{u}(x)dx = \int\limits_c^d \bar{K}(x,y)\int\limits_a^b \bar{K}(x,s)z(s)dsdx =$$
$$= \int\limits_c^d \int\limits_a^b \bar{K}(x,y)\bar{K}(x,s)z(s)dsdx =$$
$$= \int\limits_a^b (\int\limits_c^d \bar{K}(x,y)\bar{K}(x,s)dx)z(s)ds = \int\limits_a^b K(y,s)z(s)ds,$$
где
$$K(y,s) \equiv \int\limits_c^d \bar{K}(x,y)\bar{K}(x,s)dx$$
и справедливо равенство $K(y,s) = K(s,y)$, $a \leqslant y, s \leqslant b$.

Будем также считать это симметрическое ядро замкнутым (полным) (см. [11, 20, 22]). Ядро $K(\cdot,\cdot)$ мы называем замкнутым в классе $L_2(a,b)$, если каждая функция $\omega(\cdot)$ из этого класса, удовлетворяющая тождеству
$$\int\limits_a^b K(x,s)\omega(s)ds = 0, \quad a \leqslant s \leqslant b,$$
необходимо равна нулю почти всюду в интервале (a,b).

Последнее означает, в частности, что однородное ($u(x) = 0$, $a \leqslant x \leqslant b$) уравнение (1.3.1) имеет лишь тривиальное решение в классе $L_2[a,b]$.

Для формулировки теоремы Пикара нам потребуются следующие понятия (см. [11, 20, 35]).

Определение 1.3.7. *Фундаментальными числами и фундаментальными функциями ядра $K(\cdot,\cdot)$ называются числа λ_i и функции $\varphi_i \in L_2[a,b]$, $\varphi_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots$ такие, что*
$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int\limits_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Оказывается, для замкнутости ядра $K(\cdot,\cdot)$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующая система всех фундаментальных функций образововала замкнутую в $L_2[a,b]$ ортонормированную систему (см. [11, 20, 35]). Напомним при этом, что ортонормированная система функций $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots$ из $L_2[a,b]$ называется замкнутой, если не существует никакой функции из $L_2[a,b]$, ортогональной ко всем функциям системы. При этом, как известно из теории рядов Фурье, для того, чтобы ортогональная и нормированная система $\varphi_1,\ \varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ \ldots$ из $L_2[a,b]$ была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f\in L_2(a,b)$ выполнялось равенство Парсеваля

$$\int\limits_a^b f^2(x)dx=\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2,$$

где

$$c_i\equiv\int\limits_a^b f(x)\varphi_i(x)dx.$$

Напомним также одновременно, что для ортонормированной системы функций φ_1, $\varphi_2,\ \ldots,\varphi_n,\ \ldots$ из $L_2[a,b]$ и любой суммируемой на (a,b) с квадратом функции f справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2\leqslant\int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Напомним, наконец, необходимую при доказательстве теоремы Пикара классическую теорему Фишера–Рисса.

Теорема 1.3.4. *Пусть заданы замкнутая ортонормированная система функций $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\varphi_n,\ \ldots$ из $L_2[a,b]$ и последовательность чисел $a_1,\ a_2,\ldots,a_n,\ldots$ такая, что ряд $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+\ldots$ сходится. Тогда существует единственная функция $f\in L_2[a,b]$, которая имеет числа a_i, $i=1,2,\ldots$ своими коэффициентами Фурье относительно данной ортонормированной системы функций.*

После формулировки необходимых классических фактов мы можем сформулировать и доказать следующую теорему Пикара.

Теорема 1.3.5. *Интегральное уравнение (1.3.1) в случае симметрического и замкнутого ядра имеет единственное в классе $L_2[a,b]$ решение тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\lambda_1^2u_1^2+\lambda_2^2u_2^2+\cdots+\lambda_n^2u_n^2+\ldots,$$

где λ_i – фундаментальные числа ядра $K(\cdot,\cdot)$, u_i – коэффициенты Фурье правой части $u(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, по системе фундаментальных функций ядра $K(\cdot,\cdot)$, $i=1,2,\ldots$.

Доказательство. Покажем сначала необходимость сформулированного условия. Пусть $z\in L_2(a,b)$ – решение уравнения (1.3.1). Тогда имеем

$$u_i=\int\limits_a^b u(x)\varphi_i(x)dx=\int\limits_a^b\int\limits_a^b K(x,s)\varphi_i(x)z(s)dxds= \tag{1.3.3}$$

$$=\frac{1}{\lambda_i}\int\limits_a^b\varphi_i(s)z(s)ds,$$

так как
$$\int\limits_a^b K(x,s)\varphi_i(x)dx = \frac{1}{\lambda_i}\varphi_i(s).$$
Равенство (1.3.3) можем записать в виде
$$\int\limits_a^b \varphi_i(s)z(s)ds = \lambda_i u_i.$$
Таким образом, числа $\lambda_i u_i$ есть коэффициенты Фурье функции $z \in L_2(a,b)$ и в силу неравенства Бесселя ряд из квадратов коэффициентов $\lambda_i^2 u_i^2$ с необходимостью должен быть сходящимся. При этом очевидно
$$z(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \varphi_i(s),$$
причем ряд сходится в среднем.

Для доказательства достаточности сформулированного условия предположим, что ряд
$$\lambda_1^2 u_1^2 + \lambda_2^2 u_2^2 + \dots + \lambda_n^2 u_n^2 + \dots$$
сходится. Тогда по теореме Фишера–Рисса существует функция $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, и притом единственная в классе $L_2(a,b)$, удовлетворяющая равенствам
$$\int\limits_a^b \varphi_i(s)z(s)ds = \lambda_i u_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$
т.е. представимая в виде сходящегося в среднем ряда
$$z(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \varphi_i(s).$$
Покажем, что эта функция z и представляет собой решение уравнения (1.3.1), причем единственное в силу замкнутости ядра. Пусть
$$u^1(x) \equiv \int\limits_a^b K(x,s)\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \varphi_i(s)ds.$$
Можем записать
$$u_k^1 \equiv \int\limits_a^b u^1(x)\varphi_k(x)dx = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x,s)\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \varphi_i(s)ds\varphi_k(x)dx.$$
Меняя порядок интегрирования и суммирования, имеем
$$u_k^1 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \int\limits_a^b \varphi_k(x)(\int\limits_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \int_a^b \varphi_k(x) \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} dx = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_i(x) dx = u_k,$$
$$k = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, у функций $u(\cdot)$ и $u^1(\cdot)$ оказались одни и те же коэффициенты Фурье, откуда, в силу замкнутости системы функций φ_1, φ_2, $\ldots, \varphi_n$, $\ldots$ следует, что функции $u(\cdot)$ и $u^1(\cdot)$ совпадают почти всюду на (a, b). Так как они одновременно и непрерывны, то, стало быть, $u(x) = u^1(x)$ при всех $x \in [a, b]$. Теорема Пикара доказана.

1.3.4. Необходимые сведения из теории линейных алгебраических систем

Рассмотрим произвольную линейную алгебраическую систему

$$Az = u, \;\; z \in Z = R^n, \;\; u \in U = R^m, \tag{1.3.4}$$

где $z \equiv (z_1, \ldots, z_n)^*$, $u \equiv (u_1, \ldots, u_m)^*$ – векторы-столбцы, A – $(m \times n)$-матрица с элементами $a_{i,j}$, $A \equiv \{a_{i,j}\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Здесь n, m – любые фиксированные натуральные числа. Как хорошо известно, система (1.3.4) может быть однозначно разрешимой, вырожденной (и иметь бесчисленное множество решений) и несовместной. Изложенный ниже во втором основном разделе данного учебно-методического пособия метод регуляризации Тихонова подразумевает, что искомое решение исходного уравнения первого рода понимается в классическом смысле (равенство $Az^0 = u$ понимается как обычное равенство в пространстве U). Поэтому в случае несовместности системы (1.3.4) становится совершенно непонятно, какое отношение этот метод может иметь к ее "решению". Ситуация кардинально меняется, если ввести понятие обобщенного решения системы (1.3.4), которое имеет смысл для любой такой системы (с любыми n, m) и совпадает с классическим в случае его существования. Речь здесь идет о нормальном решении системы (1.3.4), имеющем смысл как в случае ее совместности, так и несовместнсти. Для введения понятия нормального решения прежде всего нам необходимо вспомнить классический результат из линейной алгебры, каковым является следующая теорема Фредгольма.

Теорема 1.3.6. *Система, состоящая из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $A\xi = b$, совместна тогда и только тогда, когда каждое решение транспонированной однородной системы $A^*\eta = 0$ ортогонально правой части b исходной системы.*

Напомним, что нормальной системой относительно исходной системы (1.3.4) называется система

$$A^*Az = A^*u. \tag{1.3.5}$$

Ее главным свойством является то, что она всегда совместна какова бы ни была исходная система (1.3.4).

Лемма 1.3.7. *Система (1.3.5) всегда совместна какова бы ни была матрица A.*

Доказательство. Матрица A^*A – симметрична и по этой причине транспонированная однородная система для системы (1.3.5) имеет вид

$$A^*Ay = 0.$$

Для любого решения этой системы имеют место равенства, последовательно вытекающие одно из другого

$$0 = y^*A^*Ay \Rightarrow (Ay)^*(Ay) = 0 \Rightarrow$$

$$Ay = 0 \Rightarrow u^*Ay = 0 \Rightarrow (u^*Ay)^* = 0 \Rightarrow$$

$$(Ay)^*u = 0 \Rightarrow y^*A^*u = 0.$$

Последнее из них означает, что для системы (1.3.5) выполнено условие теоремы Фредгольма и, стало быть, она совместна.

Определение 1.3.8. *Псевдорешением линейной алгебраической системы (1.3.4) или, другими словами, решением системы (1.3.4) по методу наименьших квадратов (МНК) называется вектор, минимизирующий невязку $|Az - u|^2$ на всем пространстве R^n.*

Понятно, что в случае совместности системы (1.3.4) множество всех ее псевдорешений совпадает со множеством всех ее решений в классическом смысле.

Лемма 1.3.8. *Псевдорешения всегда существуют.*

Доказательство. Функция $f(z) \equiv |Az - u|^2$ является, очевидно, выпуклой и непрерывно дифференцируемой на R^n. Непосредственное вычисление ее градиента дает

$$f'(z) = 2(A^*Az - A^*u).$$

Поскольку критерием оптимальности в случае выпуклой и непрерывно дифференцируемой функции является зануление ее градиента, то необходимым и достаточным условием того, чтобы некоторая точка z_0 минимизировала невязку $f(z)$, является равенство

$$A^*Az - A^*u = 0.$$

Но такая система, являющаяся нормальной для линейной алгебраической системы (1.3.4), всегда совместна и, значит, по этой причине псевдорешения всегда существуют.

Более того, любое обычное решение нормальной системы (1.3.5) зануляет градиент выпуклой непрерывно дифференцируемой невязки $f(z) \equiv |Az - u|^2$ и, значит, минимизирует ее, т.е. является псевдорешением системы (1.3.4). И, наоборот, любое псевдорешение системы (1.3.4), минимизируя выпуклую невязку, зануляет ее градиент и, тем самым, является решением в обычном смысле нормальной системы (1.3.5). Таким образом, справедлива

Лемма 1.3.9. *Множество всех псевдорешений системы (1.3.4) и множество всех решений в обычном смысле нормальной системы (1.3.5) совпадают.*

Обозначим через F_A совокупность всех псевдорешений системы (1.3.4). Очевидно, множество F_A как множество всех обычных решений линейной нормальной системы (1.3.5), выпукло и замкнуто. Поэтому сильно выпуклая функция $|z|^2$, $z \in F_A$ достигает на нем минимума, причем только в одной точке (см. раздел 1.3.6). Это обстоятельство приводит нас к следующему важному определению.

Определение 1.3.9. *Нормальным решением системы (1.3.4) называется псевдорешение z^0 с минимальным (евклидовым) модулем*

$$|z^0|^2 = \min_{z \in F_A} |z|^2.$$

Таким образом, предшествующие этому определению рассуждения приводят к следующим двум важным леммам.

Лемма 1.3.10. *Нормальное решение для любой линейной алгебраической системы (1.3.4) существует и единственно.*

Лемма 1.3.11. *Нормальные решения линейных алгебраических систем (1.3.4) и (1.3.5) совпадают, причем нормальное решение системы (1.3.5) является ее решением в обычном смысле.*

Итак, в силу последней леммы поиск нормального решения системы (1.3.4) можно заменить поиском нормального обычного решения совместной нормальной системы (1.3.5).

1.3.5. Необходимые сведения из выпуклого анализа

Приводимые ниже определения и факты из выпуклого и нелинейного (негладкого) анализа могут быть найдены в [9, 17, 18, 39]. Заметим, что ниже без дополнительных оговорок мы будем заданные на гильбертовом пространстве функционалы называть также, когда это удобно, функциями.

Определение 1.3.10. *Функционал $f : D \to R^1$, заданный на выпуклом множестве D гильбертова пространства H, называется выпуклым, если $\forall\, z_1,\ z_2 \in D,\ \ \alpha \in [0,1]$ справедливо неравенство*

$$f(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) \leqslant \alpha f(z_1) + (1-\alpha) f(z_2).$$

Если в последнем неравенстве знак $\leqslant$ сменить на $\geqslant$, то функционал f называется вогнутым на D.

В выпуклом, да и в негладком (нелинейном) анализе оказалось очень удобным соглашение о том, что функции могут принимать и бесконечные значения, а именно $+\infty$. Последнее не противоречит данному выше определению. Выпуклый функционал $f : D \to R^1$ с учетом этого замечания можно считать заданным на всем пространстве H, допуская в этом случае для него значения $+\infty$ и сохраняя обозначение функции f:

$$f(z) = \begin{cases} f(z),\ \ z \in D, \\ +\infty,\ z \in H,\ \ z \notin D. \end{cases}$$

С учетом отмеченного обстоятельства данное выше определение можно переписать так.

Определение 1.3.11. *Функционал $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$ называется выпуклым, если $\forall\, z_1,\ z_2 \in H,\ \ \alpha \in [0,1]$, справедливо неравенство*

$$f(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) \leqslant \alpha f(z_1) + (1-\alpha) f(z_2).$$

Если функционал f принимает хотя бы в одной точке конечное значение, то он называется собственным.

Наиважнейшее значение в выпуклом и нелинейном анализе имеют понятия надграфика и эффективного множества функции.

Определение 1.3.12. *Пусть в гильбертовом пространстве H задан функционал $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$. Надграфиком f называется множество*

$$\operatorname{epi} f \equiv \{(z,\alpha) \in H \times R^1 :\ f(z) \leqslant \alpha\}.$$

Определение 1.3.13. *Пусть в гильбертовом пространстве H задан функционал $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$. Эффективным множеством f называется множество*

$$\operatorname{dom} f \equiv \{z \in H : f(z) < +\infty\}.$$

Справедливы следующие наиважнейшие свойства, с помощью которых ниже мы свяжем дифференциальные свойства функций с понятиями нормалей к их надграфикам.

Лемма 1.3.12. *Функционал $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$, заданный на гильбертовом пространстве H, является выпуклым тогда и только тогда, когда его надграфик* $\operatorname{epi} f$ *есть выпуклое множество.*

Лемма 1.3.13. *Функционал $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$, заданный на гильбертовом пространстве H, является полунепрерывным снизу тогда и только тогда, когда его надграфик* $\operatorname{epi} f$ *есть замкнутое множество.*

Определение 1.3.14. *Функционал $f : D \to R^1$, заданный на выпуклом множестве D гильбертова пространства H, называется сильно выпуклым (сильно вогнутым) с постоянной $\varkappa > 0$, если $\forall\, z_1,\, z_2 \in D,\ \ \alpha \in [0,1]$, справедливо неравенство*

$$f(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) \overset{(\geqslant)}{\leqslant} \alpha f(z_1) + (1-\alpha)f(z_2) \overset{(+)}{-} \varkappa\alpha(1-\alpha)\|z_1 - z_2\|^2.$$

Оказывается, выпуклость функционала определяет автоматически некоторые его важные дополнительные свойства. Справедлива, в частности,

Лемма 1.3.14. *Предположим, что на выпуклом множестве D гильбертова пространства H задан выпуклый ограниченный функционал f. Если внутренность* $\operatorname{int} D$ *множества D не пуста, то f – локально липшицев (а, значит, и непрерывный) функционал на* $\operatorname{int} D$. *Напомним одновременно, что функционал называется локально липшицевым на множестве D, если он удовлетворяет условию Липшица в окрестности любой точки $z \in D$ (при этом, вообще говоря, постоянная Липшица зависит от точки z).*

Следующие две леммы представляют собой соответственно первый и второй критерии сильной выпуклости в классе дифференцируемых функций.

Лемма 1.3.15. *Функционал $f : H \to R^1$, заданный на гильбертовом пространстве H и дифференцируемый по Фреше на выпуклом множестве $D \subset H$, является сильно выпуклым на D с постоянной $\varkappa > 0$ тогда и только тогда, когда справедливо неравенство*

$$f(z_2) \geqslant f(z_1) + \langle f'(z_1), z_2 - z_1\rangle + \frac{\varkappa}{2}\|z_2 - z_1\|^2 \ \forall\, z_1,\, z_2 \in D.$$

Лемма 1.3.16. *Функционал $f : H \to R^1$, заданный на гильбертовом пространстве H и дифференцируемый по Фреше на выпуклом множестве $D \subset H$, является сильно выпуклым на D с постоянной $\varkappa > 0$ тогда и только тогда, когда справедливо неравенство*

$$\langle f'(z_2) - f'(z_1), z_2 - z_1\rangle \geqslant 2\varkappa\|z_2 - z_1\|^2 \ \forall\, z_1,\, z_2 \in D.$$

В следующей лемме сформулировано важное характеристическое свойство сильно выпуклых функций, заключающееся в возможности для них оценить сверху отклонение некоторой точки от точки минимума функции через отклонение ее значений в этих точках.

Лемма 1.3.17. *Пусть на выпуклом замкнутом множестве D гильбертова пространства H задан сильно выпуклый с постоянной $\varkappa > 0$ функционал $f : D \to R^1$ и $z^* \in D$ – его точка минимума на этом множестве. Тогда для любой точки $z \in D$ справедлива оценка*

$$\varkappa\|z - z^*\|^2 \leqslant f(z) - f(z^*).$$

1.3.6. Необходимые сведения из теории оптимизации

Приводимые в данном разделе факты из теории оптимизации и теории двойственности могут быть найдены в [2, 3, 4, 9, 14, 17, 18, 24]. Прежде всего введем следующие традиционные для теории оптимизации обозначения. Символы $\operatorname*{Argmin}_{z\in D} f(z)$, $\operatorname*{Argmax}_{z\in D} f(z)$ представляют собой стандартные обозначения множеств точек минимума и максимума функции f на множестве D:

$$\operatorname*{Argmin}_{z\in D} f(z) \equiv \{z^* \in D :\ f(z^*) = \min_{z\in D} f(z)\},$$

$$\operatorname*{Argmax}_{z\in D} f(z) \equiv \{z^* \in D :\ f(z^*) = \max_{z\in D} f(z)\}.$$

В том случае, когда эти множества одноточечные, принято использовать соответственно обозначения

$$\operatorname*{argmin}_{z\in D} f(z) \equiv \{z^* \in D :\ f(z^*) = \min_{z\in D} f(z)\},$$

$$\operatorname*{argmax}_{z\in D} f(z) \equiv \{z^* \in D :\ f(z^*) = \max_{z\in D} f(z)\}.$$

Начнем со следующих двух фактов, касающихся наиважнейших свойств экстремальных точек сильно выпуклых функционалов.

Теорема 1.3.7. *Непрерывный сильно выпуклый функционал на выпуклом замкнутом множестве гильбертова пространства достигает минимального значения, причем это значение достигается в единственной точке.*

Важным для нас следствием этой теоремы является

Следствие 1.3.1. *Если операторное уравнение*

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U,$$

где Z, U – гильбертовы пространства, $A : Z \to U$ – линейный непрерывный оператор, $u \in U$ – заданный элемент, разрешимо, то оно имеет единственное нормальное, т.е. минимальное по норме, решение. Это нормальное решение является решением задачи минимизации

$$\|z\|^2 \to \min, \ \ z \in \{y \in Z :\ Ay = u\}.$$

Теорема 1.3.8. *Пусть задан сильно выпуклый функционал f на выпуклом замкнутом множестве D гильбертова пространства Z. Тогда из сходимости $f(z_n) \to \min_{z\in D} f(z)$ следует сходимость $\|z_n - z^*\| \to 0, n \to \infty$, где $z^* = \operatorname*{argmin}_{z\in D} f(z)$.*

Глава 2

Метод регуляризации Тихонова для решения операторных уравнений первого рода

Итак, в данном разделе мы изучаем, пожалуй, самый известный на данный момент и самый популярный в приложениях метод регуляризации, каковым является метод регуляризации Тихонова, предложенный в работах [25, 26] и развитый затем в многочисленных работах самого А.Н. Тихонова (см., например, книгу [28] и библиографию к ней) и его учеников. На самом деле, под этим названием скрывается не один какой-то конкретный прием решения, а целая совокупность приемов, объединенных одной основной идеей. Начнем изложение с предварительных соображений.

2.1. Предварительные соображения

Итак, пусть опять в нашем распоряжении имеются гильбертовы пространства Z, U, линейный ограниченный оператор $A^0 : Z \to U$ и элемент $u^0 \in U$, задающие в совокупности операторное уравнение первого рода

$$A^0 z = u^0, \quad z \in Z. \tag{2.1.1}$$

Предположим, что некоторый элемент $z^0 \in Z$ есть единственное решение этого уравнения. Ясно, что с чисто формальной точки зрения задача решения уравнения (2.1.1) эквивалентна задаче минимизации

$$\Phi(z) \equiv \|A^0 z - u^0\|^2 \to \min, \quad z \in Z \tag{2.1.2}$$

выпуклого функционала $\Phi : Z \to R^1$. Некорректность задачи (2.1.1) в проекции на эквивалентную ей задачу минимизации (2.1.2) заключается в том, что, вообще говоря, имеются такие минимизирующие последовательности элементов $z_n \in Z, n = 1, 2, \ldots$, в задаче (2.1.2), которые не сходятся в норме пространства Z к элементу z^0, т.е. последовательности, для которых, с одной стороны,

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(z_n) = \min_{z\in Z} \Phi(z) = 0,$$

а с другой стороны,

$$\|z_n - z^0\|^2 \nrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Так, в случае задачи решения уравнения Фредгольма первого рода такой минимизирующей последовательностью является, например, последовательность

$$z_n(s) = z^0(s) + \sin(ns),\ n \to \infty,$$

для которой, очевидно, в силу приведенных рассуждений, справедливы соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(z_n) = 0,\ \ \|z_n - z^0\| \nrightarrow 0,\ n \to \infty.$$

Задачи минимизации, для которых существуют минимизирующие последовательности, не сходящиеся к решению z^0 в норме Z также называются некорректными. Таким образом, решение задачи минимизации (2.1.2), эквивалентной исходной задаче (2.1.1), с помощью каких-либо стандартных методов минимизации (например, градиентного типа), вообще говоря, в силу приведенного выше эффекта не может дать “приемлемого” приближенного к z^0 в норме Z решения задачи (2.1.2).

Оказывается, однако, что возможно так возмутить задачу (2.1.2), заменив ее целым семейством зависящих от числового параметра $\alpha > 0$ задач минимизации, что, во-первых, решение каждой из задач этого семейства уже не будет обладать указанным эффектом неустойчивости, и, во-вторых, при стремлении параметра α к нулю эти решения будут сходиться в норме Z к решению z_0 исходной задачи (2.1.2). Другими словами, отказываясь от непосредственного решения задачи (2.1.2), мы, тем не менее, можем получить приближенное ее решение с любой наперед заданной точностью.

Действительно, рассмотрим семейство задач минимизации

$$M^\alpha(z) \equiv \Phi(z) + \alpha\|z\|^2 \equiv \|A^0 z - u^0\|^2 + \alpha\|z\|^2 \to \min, \tag{2.1.3}$$

$$z \in Z,\ \alpha > 0.$$

В теории некорректных задач функционал $\|z\|^2$, $z \in Z$ принято называть стабилизирующим, а составной функционал $M^\alpha(z)$, $z \in Z$ – сглаживающим или функционалом Тихонова. Так как функционал $\|\cdot\|^2$ является сильно выпуклым на Z, то, очевидно, при каждом $\alpha > 0$ функционал $M^\alpha(\cdot)$ также сильно выпуклый на Z. Из теории оптимизации хорошо известно, что непрерывный сильно выпуклый функционал на гильбертовом пространстве Z достигает минимального значения, причем в единственной точке (см. раздел 1.3.6). Обозначим через z^α точку из Z, которая является единственным решением задачи на минимум (2.1.3). Так как

$$\min_{z\in Z} M^\alpha(z) = \|A_0 z^\alpha - u^0\|^2 + \alpha\|z^\alpha\|^2 = M^\alpha(z^\alpha) \leqslant M^\alpha(z^0) =$$

$$= \|A^0 z^0 - u^0\|^2 + \alpha\|z_0\|^2 = \alpha\|z_0\|^2,$$

то получаем неравенство

$$\|z^\alpha\|^2 \leqslant \|z^0\|^2\ \ \forall\alpha > 0. \tag{2.1.4}$$

Неравенство (2.1.4) говорит об ограниченности в норме Z множества $\Lambda \equiv \{z^\alpha : \alpha > 0\}$.

Покажем, что

$$\|z^\alpha - z^0\| \to 0,\ \alpha \to 0. \tag{2.1.5}$$

Так как множество $\Lambda \subset Z$ ограничено, то в силу теоремы о слабой компактности шара в гильбертовом пространстве (см. раздел 1.3.2) существует последовательность чисел α_i, $i = 1, 2, \ldots$, $\alpha_i \to 0$, $i \to \infty$, такая, что имеет место слабая сходимость

$$z^{\alpha_i} \xrightarrow{w} z^*, \; i \to \infty. \tag{2.1.6}$$

Применим далее лемму о слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве (см. раздел 1.3.2). Так как функционал невязки $\Phi(\cdot)$ является выпуклым и непрерывным на Z, то по лемме 1.3.4 он и слабо полунепрерывен снизу. Поэтому в силу неравенства $M^{\alpha_i}(z^{\alpha_i}) \leqslant M^{\alpha_i}(z)$ $\forall z \in Z$ и предельного равенства $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i \|z^{\alpha_i}\|^2 = 0$ (так как множество Λ ограничено) можем записать следующие оценки:

$$\|A^0 z^* - u^0\|^2 \leqslant \varliminf_{i\to\infty} \|A^0 z^{\alpha_i} - u^0\|^2 = \lim_{s\to\infty} \|A^0 z^{\alpha_{i_s}} - u^0\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{s\to\infty} \|A^0 z^{\alpha_{i_s}} - u^0\|^2 + \lim_{s\to\infty} \alpha_{i_s} \|z^{\alpha_{i_s}}\|^2 =$$

$$= \lim_{s\to\infty} (\|A^0 z^{\alpha_{i_s}} - u^0\|^2 + \alpha_{i_s} \|z^{\alpha_{i_s}}\|^2) = \lim_{s\to\infty} M^{\alpha_{i_s}}(z^{\alpha_{i_s}}) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{s\to\infty} M^{\alpha_{i_s}}(z) \leqslant \lim_{s\to\infty} \|A^0 z - u^0\|^2 + \lim_{s\to\infty} \alpha_{i_s} \|z\|^2 =$$

$$= \|A^0 z - u^0\|^2 \; \forall z \in Z,$$

где i_s, $s = 1, 2, \ldots$, представляет собой такую подпоследовательность последовательности $i = 1, 2, \ldots$, для которой выполняется равенство

$$\varliminf_{i\to\infty} \|A^0 z^{\alpha_i} - u^0\|^2 = \lim_{s\to\infty} \|A^0 z^{\alpha_{i_s}} - u^0\|^2.$$

Из последних неравенств и единственности решения z^0 задачи на минимум (2.1.2) вытекает

$$z^* = z^0$$

и, значит,

$$z^{\alpha_i} \xrightarrow{w} z_0, \; i \to \infty.$$

Используя и слабую полунепрерывность снизу стабилизирующего функционала имеем также в силу оценки (2.1.4)

$$\|z^0\|^2 = \|z^*\|^2 \leqslant \varliminf_{i\to\infty} \|z^{\alpha_i}\|^2 \leqslant \varlimsup_{i\to\infty} \|z^{\alpha_i}\|^2 \leqslant \|z_0\|^2,$$

откуда, в свою очередь, заключаем

$$\lim_{i\to\infty} \|z^{\alpha_i}\| = \|z_0\|. \tag{2.1.7}$$

Пользуясь здесь опять H-свойством гильбертова пространства (см. лемму 1.3.5), в силу доказанных выше соотношений (2.1.6), (2.1.7), получаем

$$\|z^{\alpha_i} - z^0\| \to 0, \; \alpha_i \to 0, \; i \to \infty.$$

Из последнего предельного соотношения, по сути дела, и следует предельное соотношение (2.1.5), так как если предположить, что существует последовательность $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, \alpha_i \to 0,\ i \to \infty$, такая, что

$$\|z^{\alpha_i} - z^0\| \geqslant \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

то вышеприведенные рассуждения приводят непосредственно к заключению о существовании такой подпоследовательности $\alpha_{i_s}, s = 1, 2, \ldots$, для которой

$$\|z^{\alpha_{i_s}} - z^0\| \to 0,\ s \to \infty,$$

что противоречит сделанному предположению.

Итак, заменив некорректно поставленную задачу на минимум (2.1.2), эквивалентную исходной задаче (2.1.1), семейством корректно поставленных задач минимизации (2.1.3), мы получили возможность приближать точное решение исходной задачи (2.1.1) с любой наперед заданной точностью, беря в качестве таких приближений элементы z^α при достаточно малых $\alpha > 0$.

В то же время, если бы мы решали задачу на минимум (2.1.2), то в качестве минимизирующих последовательностей мы могли бы получить, вообще говоря, (что и происходит на практике) последовательности, которые, с одной стороны, являются минимизирующими, а с другой стороны, не сходятся к элементу z^0 в норме Z, а сходятся, например, слабо в Z к z^0. В случае $Z = L_2[a, b]$ такой слабо сходящейся последовательностью является, например, как было сказано выше, последовательность $z_n(s) = z^0(s) + \sin ns$, $s \in [a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$, для которой, как известно из теории рядов Фурье, выполняется предельное соотношение (см., например, [35])

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b z_n(s) y(s) ds = \int\limits_a^b z^0(s) y(s) ds, \ \ \forall y \in L_2[a, b],$$

что и определяет ее слабую сходимость в $L_2[a, b]$.

Роль стабилизирующего слагаемого $\alpha\|z\|^2$ в сглаживающем функционале $M^\alpha(z)$ как раз и заключается в том, чтобы отбросить такие минимизирующие последовательности, которые не сходятся к точному решению z^0 в норме Z. При этом ясно, что параметр $\alpha > 0$ должен стремиться к нулю, так как аппроксимирующие задачи (2.1.3) должны сколь угодно точно апроксимировать исходную задачу (2.1.2), коль скоро мы хотим найти решение этой задачи. Таким образом, сглаживающий функционал есть результат компромисса: с одной стороны, ясно, что должна решаться задача, близкая к исходной, с другой же — должны отсеиваться "плохие" минимизирующие последовательности. Именно поэтому и принято в этом случае говорить о регуляризации некорректно поставленной задачи.

2.2. Метод регуляризации Тихонова

Приведенные в предыдущем разделе рассуждения относятся к тому идеальному с точки зрения приложений случаю, когда и оператор A^0, и правая часть u^0 в (2.1.1) заданы точно. В случае же их неточного задания, что и имеет место всегда при решении практических задач, ситуация существенно усложняется, хотя основная изложенная выше идея и сохраняет свою силу. В этом случае возникает дополнительная проблема в теории регуляризации, а именно проблема согласования параметра регуляризации $\alpha > 0$ с ошибками задания оператора и правой части $h, \delta > 0$ – с целью приближения к точному решению z^0. Метод Тихонова является едва ли не самым популярным при решении задач с приближенно заданной информацией. В нем также существенным образом используется априорная информация о точном решении задачи (2.1.1). Однако, в отличие от изложенного в предыдущем разделе метода, эта информация дается в виде априорного знания о гладкости искомого решения. Как правило, в приложениях такая гладкость формулируется в виде включения точного решения в класс W_2^l, где W_2^l – гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом и имеющих суммируемые с квадратом обобщенные в смысле Соболева производные до порядка l включительно (см. раздел 1.3.2). Рассмотрим абстрактную схему Тихонова для решения уравнения (2.1.1).

Центральной в этой схеме является конструкция сглаживающего функционала (часто его называют функционалом Тихонова) при каждом фиксированном значении параметра $\alpha > 0$, который носит название параметра регуляризации,

$$M^\alpha(z) \equiv \|A^h z - u^\delta\|^2 + \alpha \|z\|^2, \ \ z \in Z. \tag{2.2.1}$$

Здесь, как и ранее, оператор A^h и элемент u^δ являются приближениями соответственно оператора A^0 и правой части u^0

$$\|A^h - A^0\| \leqslant h, \quad \|u^\delta - u^0\| \leqslant \delta.$$

Очевидно, сглаживающий фунционал M^α является сильно выпуклым (из-за выпуклости квадратичного функционала невязки $\|A^h z - u^\delta\|^2$ и сильной выпуклости стабилизирующего функционала $\|z\|^2, \ z \in Z$) на всем пространстве Z.

Центральное свойство этого функционала сформулировано в следующей лемме.

Лемма 2.2.1. *Минимальное значение функционала M^α на всем гильбертовом пространстве Z достигается при любой тройке A^h, u^δ, η, причем в единственной точке, которую обозначим через z^α_η. Для этой точки справедлива оценка*

$$\|z^\alpha_\eta\| \leqslant \|u^\delta\| / \sqrt{\alpha}.$$

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из теоремы 1.3.7. Второе утверждение является непосредственным следствием очевидной оценки

$$\min_{z \in Z} M^\alpha(z) \leqslant M^\alpha(0).$$

С помощью элементов z^α_η в методе Тихонова и происходит аппроксимация точного решения z^0 уравнения (2.1.1). Главной при этом является идея согласованного стремления к нулю ошибок задания оператора h и правой части δ, а также параметра регуляризации α. Первый регуляризирующий алгоритм в рамках метода Тихонова, который мы здесь сформулируем, основан на следующей фундаментальной теореме, доказательство которой может быть найдено в [1, 28, 30].

Теорема 2.2.1. *Пусть, как и ранее, z^0 – нормальное решение уравнения (2.1.1). Тогда, если $\alpha(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$, причем выполняется условие согласования*

$$\frac{h^2 + \delta^2}{\alpha(\eta)} \to 0, \tag{2.2.2}$$

то

$$\|z_\eta^{\alpha(\eta)} - z^0\| \to 0,\ \eta \to 0.$$

Доказательство. Можем записать

$$M^\alpha(z_\eta^\alpha) = \min_{z\in Z} M^\alpha(z) \leqslant M^\alpha(z^0) = \tag{2.2.3}$$

$$= \|A^h z^0 - u^\delta\|^2 + \alpha\|z^0\|^2 = \|A^h z^0 - A^0 z^0 + u^0 - u^\delta\|^2 + \alpha\|z^0\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (h\|z^0\| + \delta)^2 + \alpha\|z^0\|^2,$$

откуда следует, что

$$\|z_\eta^\alpha\|^2 \leqslant (h\|z^0\| + \delta)^2/\alpha + \|z^0\|^2. \tag{2.2.4}$$

В силу условий теоремы существует постоянная $C > 0$, не зависящая от η, такая, что

$$(h\|z^0\| + \delta)^2/\alpha(\eta) \leqslant C. \tag{2.2.5}$$

Так как шар в гильбертовом пространстве слабо компактен (см. раздел 1.3.2), то в силу (2.2.4), (2.2.5) существует такая последовательность η_k, $k = 1, 2, \dots$, что соответствующая последовательность $z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)}$ слабо сходится к некоторому элементу $z^* \in Z$. Поэтому в силу слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве (см. лемму 1.3.4 в разделе 1.3.2)

$$\|z^*\| \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)}\|. \tag{2.2.6}$$

Далее в силу условия согласования теоремы и неравенства (2.2.4)

$$\liminf_{k\to\infty} \|z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)}\| \leqslant \limsup_{k\to\infty} \|z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)}\| \leqslant \|z^0\|. \tag{2.2.7}$$

В силу соотношений (2.2.3)–(2.2.5) можем записать цепочку неравенств

$$\|A^0 z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} - A^0 z^0\| \leqslant \|A^0 z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} - A^{h_k} z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)}\| +$$
$$+ \|A^{h_k} z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} - u^{\delta_k}\| + \|u^{\delta_k} - u^0\| \leqslant$$
$$\leqslant h_k \|z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)}\| + \|A^{h_k} z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} - u^{\delta_k}\| + \delta_k \leqslant$$
$$\leqslant h_k (C + \|z^0\|^2)^{1/2} + ((h_k\|z^0\| + \delta_k)^2 + \alpha(\eta_k)\|z^0\|^2)^{1/2} + \delta_k.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, используя при этом условие $\alpha(\eta_k) \to 0$, $k \to \infty$ и слабую полунепрерывность снизу (непрерывного выпуклого) функционала нормы, получаем

$$\|A^0 z^* - A^0 z^0\| = 0.$$

Так как одновременно в силу (2.2.6), (2.2.7)

$$\|z^*\| \leqslant \|z^0\|,$$

то благодаря единственности нормального решения получаем равенство $z^* = z^0$, а следовательно в силу опять же (2.2.6), (2.2.7) приходим к сходимости норм

$$\lim_{k\to\infty} \|z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)}\| = \|z^0\|.$$

Вспоминая здесь, что последовательность элементов $z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ слабо сходится к элементу $z^* = z^0$ и одновременно H-свойство гильбертова пространства (см. лемму 1.3.5 в разделе 1.3.2), получаем

$$\lim_{k\to\infty} z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} = z^0.$$

Полученная сильная сходимость для некоторой последовательности η_k, $k = 1, 2, \ldots$, на самом деле обеспечивает и требуемую в формулировке теоремы сходимость $\|z_\eta^{\alpha(\eta)} - z^0\| \to 0$, $\eta \to 0$, так как предположение о том, что существует такая последовательность $\bar{\eta}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, для которой справедливо неравенство

$$\|z_{\bar{\eta}_k}^{\alpha(\bar{\eta}_k)} - z^0\| \geqslant \varepsilon$$

с некоторым $\varepsilon > 0$, незавсящим от k, приводит сразу в силу проведенных выше рассуждений к выделению такой подпоследовательности $\bar{\eta}_{k_l}$, $l = 1, 2, \ldots$, для которой справедливо противоречащее последнему неравенству предельное соотношение

$$\lim_{l\to\infty} z_{\bar{\eta}_{k_l}}^{\alpha(\bar{\eta}_{k_l})} = z^0.$$

Теорема доказана.

Определим на основе доказанной теоремы регуляризирующий оператор. С этой целью определим для каждой пары исходных данных $A^h \in L(Z, U)$, $u^\delta \in U$ таких, что

$$\|A^h - A^0\| \leqslant h, \quad \|u^\delta - u^0\| \leqslant \delta,$$

при каждом $\eta = (h, \delta)$, $h > 0$, $\delta > 0$, $0 < h < h_0$, $0 < \delta < \delta_0$, где h_0, δ_0 – некоторые положительные величины, однозначный оператор (алгоритм) $R(A^h, u^\delta, \eta)$ по формуле

$$R(A^h, u^\delta, \eta) \equiv z_\eta^{\alpha(\eta)}. \tag{2.2.8}$$

Теорема 2.2.2. *Оператор R, определенный, посредством формулы (2.2.8), является регуляризирующим.*

Доказательство. Условие 1) определения регуляризирующего оператора 1.2.1 выполняется, если взять в качестве чисел h_1, δ_1 соответственно числа h_0, δ_0. Выполнимость же условия 2), в свою очередь, непосредственно вытекает из сформулированной выше теоремы 2.2.1.

2.3. Принцип обобщенной невязки

Сформулированный выше на основе теоремы 2.2.1 регуляризирующий алгоритм явился первым регуляризирующим алгоритмом в рамках классической схемы Тихонова и сыграл важнейшую роль в развитии этой схемы.

В то же время, этот алгоритм оказался малопригодным для решения различных практических задач. Это связано с тем, что в реальных прикладных задачах исходные данные всегда известны приближенно, но ошибка приближения не стремится к нулю и является конечной фиксированной величиной. В этом случае центральным оказывается вопрос: как понимать условие согласования (2.2.2), если η не стремится к нулю. Понятно, что в таком случае это центральное условие теряет смысл из-за неопределенности с выбором параметра регуляризации α.

Выход из этой ситуации и, вместе с тем, создание нового регуляризирующего алгоритма, свободного от указанного недостатка, был найден на пути детального исследования поведения значений сглаживающего функционала и составляющих его двух слагаемых, взятых на элементе z_η^α. Результатом этих исследований явился новый регуляризирующий алгоритм – так называемый принцип обобщенной невязки. Этот алгоритм предполагает, при фиксированных и известных с некоторой конечной ошибкой исходных данных, решение некоторой вспомогательной задачи минимизации сильно выпуклого функционала квадрата нормы при одном функциональном ограничении типа неравенства вместо решения целой серии задач минимизации сглаживающего функционала при стремящихся согласованно к нулю α и η. В соответствии с ним решение этой вспомогательной задачи минимизации с одним ограничением типа неравенства осуществляется, по сути дела, на основе решения соответствующей двойственной задачи (подробности см. в [30]).

Приведем основные результаты, лежащие в основе принципа обобщенной невязки. Определим с этой целью следующие функции параметра $\alpha > 0$

$$\phi_\eta(\alpha) \equiv M^\alpha(z_\eta^\alpha) \equiv \|A^h z_\eta^\alpha - u^\delta\|^2 + \alpha\|z_\eta^\alpha\|^2,$$

$$\beta_\eta(\alpha) \equiv \|A^h z_\eta^\alpha - u^\delta\|^2, \;\; \gamma_\eta(\alpha) \equiv \|z_\eta^\alpha\|^2.$$

Определим также величину $\mu_\eta(u^\delta, A^h)$, называемую мерой несовместности уравнения, по формуле

$$\mu_\eta(u^\delta, A^h) \equiv \inf_{z\in Z} \|A^h z - u^\delta\|.$$

Элементарная оценка этой величины говорит о том, что она стремится к нулю, если $\eta \to 0$. Действительно, можем записать

$$\mu_\eta(u^\delta, A^h) = \inf_{z\in Z} \|A^h z - u^\delta\| \leqslant \|A^h z^0 - u^\delta\| \leqslant h\|z^0\| + \delta,$$

откуда и следует указанное стремление к нулю.

Мы предполагаем, что эта величина вычисляется с погрешностью $k > 0$ и по этой причине в нашем распоряжении имеется величина $\mu_\eta^k(u^\delta, A^h)$ и выполняются неравенства

$$\mu_\eta(u^\delta, A^h) \leqslant \mu_\eta^k(u^\delta, A^h) \leqslant \mu_\eta(u^\delta, A^h) + k,$$

причем погрешность k считаем согласованной с погрешностью исходных данных η таким образом, что $k = k(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$ (например, можно считать $k(\eta) = h + \delta$).

Лемма 2.3.1. *Функции ϕ_η, β_η, $\gamma_\eta : (0, +\infty) \to R^1$ обладают следующими свойствами:*

1) они непрерывны при $\alpha > 0$;

2) функция γ_η монотонно не возрастает, а функции ϕ_η, β_η монотонно не убывают при $\alpha > 0$, причем на интервале $(0, \alpha_0)$ таком, что $z_\eta^{\alpha_0} \neq 0$, функция ϕ_η строго монотонна;

3) справедливы предельные соотношения

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \gamma_\eta(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty} \alpha\gamma_\eta(\alpha) = 0,$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \phi_\eta(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty} \beta_\eta(\alpha) = \|u^\delta\|^2,$$

$$\lim_{\alpha\to 0+0} \alpha\gamma_\eta(\alpha) = 0, \;\; \lim_{\alpha\to 0+0} \phi_\eta(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0+0} \beta_\eta(\alpha) = (\mu_\eta(u^\delta, A^h))^2.$$

Доказательство. Фиксируем $\alpha' \in (0, \alpha)$. Можем записать

$$\phi_\eta(\alpha) = \|A^h z_\eta^\alpha - u^\delta\|^2 + \alpha\|z_\eta^\alpha\| \leqslant \|A^h z_\eta^{\alpha'} - u^\delta\|^2 + \alpha\|z_\eta^{\alpha'}\|^2.$$

Вычитая из этого неравенства выражение для $\phi_\eta(\alpha')$, получим

$$\phi_\eta(\alpha) - \phi_\eta(\alpha') \leqslant (\alpha - \alpha')\|z_\eta^{\alpha'}\|^2. \tag{2.3.1}$$

Аналогично получаем

$$\phi_\eta(\alpha') - \phi_\eta(\alpha) \leqslant (\alpha' - \alpha)\|z_\eta^{\alpha}\|^2.$$

Из этих двух неравенств следует

$$\|z_\eta^\alpha\|^2 \leqslant \frac{\phi_\eta(\alpha) - \phi_\eta(\alpha')}{\alpha - \alpha'} \leqslant \|z_\eta^{\alpha'}\|^2. \tag{2.3.2}$$

Из (2.3.2) следует, так как $\|z_\eta^\alpha\|^2 \geqslant 0$, что $\phi_\eta(\alpha)$ монотонно не убывает, а если $\|z_\eta^\alpha\| \neq 0$ на интервале $(0, \alpha_0)$, то $\phi_\eta(\alpha)$ монотонно возрастает на этом интервале. Из (2.3.2) следует также, что если $\alpha' \in (0, \alpha)$, то $\|z_\eta^\alpha\|^2 \leqslant \|z_\eta^{\alpha'}\|^2$, что означает невозрастание функции $\gamma_\eta(\alpha)$ при $\alpha > 0$.

Из неравенства леммы 2.2.1 следует, что если мы фиксируем α_0: $0 < \alpha_0 < \alpha' < \alpha$, то

$$\|z_\eta^{\alpha'}\| \leqslant \|u^\delta\|/\sqrt{\alpha_0}.$$

Отсюда и из (2.3.1) вытекает непрерывность $\phi_\eta(\alpha)$ для любого $\alpha > 0$, так как $\phi_\eta(\alpha)$ монотонно не убывает.

Далее из того же неравенства следует, что

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \gamma_\eta(\alpha) = 0.$$

Отсюда, в силу непрерывности оператора A^h,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \beta_\eta(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} \|A^h z_\eta^\alpha - u^\delta\|^2 = \|u^\delta\|^2.$$

Таким образом, поскольку $M^\alpha(z_\eta^\alpha) \leqslant M^\alpha(0) = \|u^\delta\|^2$, то

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \alpha\gamma_\eta(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \to +\infty} \phi_\eta(\alpha) = \|u^\delta\|^2.$$

Покажем теперь, что невязка $\beta_\eta(\alpha)$, $\alpha > 0$ монотонно не убывает. Для этого достаточно заметить, что при $\alpha' \in (0, \alpha)$ в силу невозрастания функции $\gamma_\eta(\alpha)$

$$\|A^h z_\eta^{\alpha'} - u^\delta\|^2 + \alpha'\|z_\eta^{\alpha'}\|^2 \leqslant \|A^h z_\eta^{\alpha} - u^\delta\|^2 + \alpha'\|z_\eta^{\alpha}\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|A^h z_\eta^{\alpha} - u^\delta\|^2 + \alpha'\|z_\eta^{\alpha'}\|^2.$$

Для доказательства непрерывности $\gamma_\eta(\alpha)$, $\alpha > 0$ воспользуемся равенством нулю производной Фреше функционала M^α в точке минимума $z_\eta^\alpha \in Z$, показав прежде всего, что

$$M^{\alpha\prime}(z_\eta^\alpha) = 2(A^{h*}A^h z_\eta^\alpha + \alpha z_\eta^\alpha - A^{h*}u^\delta). \tag{2.3.3}$$

Покажем сначала, что

$$(\|z\|^2)' = 2z. \tag{2.3.4}$$

Действительно, равенство (2.3.4) имеет место в силу следующего элементарного преобразования приращения

$$\|z+g\|^2 - \|z\|^2 = \langle z+g, z+g\rangle - \langle z, z\rangle = \langle 2z, g\rangle + \langle g, g\rangle =$$

$$= \langle 2z, g\rangle + o(\|g\|),$$

так как $\langle g, g\rangle/\|g\| \to 0$ при $g \to 0$.

Покажем, во-вторых, что

$$(\|A^h z - u^\delta\|^2)' = 2(A^{h*}A^h z - A^{h*}u^\delta). \tag{2.3.5}$$

Проводим аналогичные преобразования приращения с применением известного равенства $\langle A^h z, g\rangle = \langle z, A^{h*}g\rangle$ и имеем цепочку равенств

$$\|A^h(z+g) - u^\delta\|^2 - \|A^h z - u^\delta\|^2 =$$

$$= \langle A^h(z+g) - u^\delta, A^h(z+g) - u^\delta\rangle - \langle A^h z - u^\delta, A^h z - u^\delta\rangle =$$
$$= \langle 2(A^{h*}A^h z - A^{h*}u^\delta), g\rangle + \langle A^{h*}A^h g, g\rangle =$$
$$= \langle 2(A^{h*}A^h z - A^{h*}u^\delta), g\rangle + o(\|g\|),$$

так как $\langle A^{h*}A^h g, g\rangle \leqslant \|A^h\|\|g\|^2$. Таким образом, равенство (2.3.5) также справедливо. Очевидно, равенства (2.3.4) и (2.3.5) в совокупности и приводят к (2.3.3).

Итак, зануляя производную Фреше функционала M^α в точке минимума z_η^α, имеем равенство

$$M^{\alpha\prime}(z_\eta^\alpha) = A^{h*}A^h z_\eta^\alpha + \alpha z_\eta^\alpha - A^{h*}u^\delta = 0. \tag{2.3.6}$$

Из (2.3.6) вытекает для любого $z \in Z$

$$\langle A^{h*}A^h z_\eta^\alpha + \alpha z_\eta^\alpha - A^{h*}u^\delta, z - z_\eta^\alpha\rangle \geqslant 0,$$

$$\langle A^{h*}A^h z_\eta^{\alpha'} + \alpha' z_\eta^{\alpha'} - A^{h*}u^\delta, z - z_\eta^{\alpha'}\rangle \geqslant 0.$$

Положив в первом из этих неравенств $z = z_\eta^{\alpha'}$, а во втором $z = z_\eta^\alpha$ и сложив их, получим

$$\langle A^{h*}A^h(z_\eta^\alpha - z_\eta^{\alpha'}) + \alpha z_\eta^\alpha - \alpha' z_\eta^{\alpha'}, z_\eta^{\alpha'} - z_\eta^\alpha\rangle \geqslant 0$$

или

$$\langle A^{h*}A^h(z_\eta^\alpha - z_\eta^{\alpha'}) + \alpha z_\eta^\alpha - \alpha z_\eta^{\alpha'} + \alpha z_\eta^{\alpha'} - \alpha' z_\eta^{\alpha'}, z_\eta^\alpha - z_\eta^{\alpha'}\rangle \leqslant 0$$

или

$$\|A^h(z_\eta^\alpha - z_\eta^{\alpha'})\|^2 + \alpha\|z_\eta^\alpha - z_\eta^{\alpha'}\|^2 \leqslant (\alpha' - \alpha)\langle z_\eta^{\alpha'}, z_\eta^\alpha - z_\eta^{\alpha'}\rangle.$$

Отсюда

$$\|z_\eta^{\alpha'}\| - \|z_\eta^\alpha\| \leqslant \|z_\eta^\alpha - z_\eta^{\alpha'}\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha}}|\alpha' - \alpha|^{1/2}\{\|z_\eta^{\alpha'}\|(\|z_\eta^{\alpha'}\| + \|z_\eta^\alpha\|)\}^{1/2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\alpha_0}\|u^\delta\||\alpha' - \alpha|^{1/2},$$

т.е. функция $\|z_\eta^\alpha\| = \sqrt{\gamma_\eta(\alpha)}$, а, стало быть, и $\gamma_\eta(\alpha) = \|z_\eta^\alpha\|^2$ непрерывны при $\alpha > 0$. Непрерывность функции $\beta_\eta(\alpha)$ следует из непрерывности функций $\phi_\eta(\alpha)$ и $\gamma_\eta(\alpha)$. Таким образом, утверждение 1) полностью доказано.

В силу того, что $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\|z_\eta^\alpha\| = 0$ и $\|z_\eta^\alpha\|$ не возрастает при увеличении α, легко видеть, что если $z_\eta^{\alpha_0} = 0$ при некотором $\alpha_0 \in (0, +\infty)$, то $z_\eta^\alpha = 0$ и при всех $\alpha > \alpha_0$. Если $z_\eta^{\alpha_0} \neq 0$ при $\alpha_0 > 0$, то $z_\eta^\alpha \neq 0$ при всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Утверждение 2) также доказано.

Мы доказали также и часть утверждения 3), рассмотрев поведение функций ϕ_η, γ_η, β_η при $\alpha \to +\infty$. Рассмотрим в заключение их поведение при $\alpha \to 0+0$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое $z^\varepsilon \in Z$, что

$$\mu_\eta(u^\delta, A^h) \leqslant \|A^h z^\varepsilon - u^\delta\| \leqslant \mu_\eta(u^\delta, A^h) + \varepsilon.$$

Очевидно, можем записать

$$\beta_\eta(\alpha) \leqslant \phi_\eta(\alpha) \leqslant \|A^h z^\varepsilon - u^\delta\|^2 + \alpha\|z^\varepsilon\|^2,$$

откуда следует

$$\limsup_{\alpha\to0+0} \beta_\eta(\alpha) \leqslant \limsup_{\alpha\to0+0} \phi_\eta(\alpha) \leqslant (\mu_\eta(u^\delta, A^h) + \varepsilon)^2.$$

Но, так как

$$\phi_\eta(\alpha) \geqslant \beta_\eta(\alpha) \geqslant \inf_{z\in Z} \|A^h z - u^\delta\|^2 = (\mu_\eta(u^\delta, A^h))^2,$$

то

$$\liminf_{\alpha\to0+0} \phi_\eta(\alpha) \geqslant \liminf_{\alpha\to0+0} \beta_\eta(\alpha) \geqslant (\mu_\eta(u^\delta, A^h))^2.$$

Поэтому в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем

$$\lim_{\alpha\to0+0} \phi_\eta(\alpha) = \lim_{\alpha\to0+0} \beta_\eta(\alpha) = (\mu_\eta(u^\delta, A^h))^2$$

и, значит,

$$\lim_{\alpha\to0+0} \alpha\gamma_\eta(\alpha) = 0.$$

Лемма 2.3.1 полностью доказана.

Введем далее функцию, называемую обобщенной невязкой:

$$\rho_\eta^k(\alpha) \equiv \|A^h z_\eta^\alpha - u^\delta\|^2 - (\delta + h\|z_\eta^\alpha\|)^2 - (\mu_\eta^k(u^\delta, A^h))^2, \ \ \alpha > 0.$$

Непосредственным следствием доказанной выше технической леммы 2.3.1 является

Теорема 2.3.1. *Обобщенная невязка ρ_η^k обладает следующими свойствами:*

1) она непрерывна и монотонно не убывает при $\alpha > 0$;

2) справедливы предельные соотношения

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \rho_\eta^k(\alpha) = \|u^\delta\|^2 - \delta^2 - \mu_\eta^k(u^\delta, A^h))^2, \quad \limsup_{\alpha\to0+0} \rho_\eta^k(\alpha) \leqslant -\delta^2.$$

Доказательство. Первое утверждение леммы, очевидно, является следствием утверждений 1), 2) леммы 2.3.1. В силу утверждения 3) той же леммы имеем, очевидно,

$$\lim_{\alpha\to0+0} \rho_\eta^k(\alpha) = \|u^\delta\|^2 - \delta^2 - (\mu_\eta^k(u^\delta, A^h))^2,$$

$$\limsup_{\alpha\to0+0} \rho_\eta^k(\alpha) \leqslant -\delta^2,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

В свою очередь, непосредственным следствием этой теоремы является

Теорема 2.3.2. *Если выполняется условие*

$$\|u^\delta\|^2 > \delta^2 + (\mu_\eta^k(u^\delta, A^h))^2, \tag{2.3.7}$$

то существует корень $\alpha^*(\eta)$ (положительный) уравнения обобщенной невязки

$$\rho_\eta^k(\alpha) = 0, \quad \alpha > 0. \tag{2.3.8}$$

Доказательство. Существование корня уравнения обобщенной невязки (2.3.8) является прямым следствием условия (2.3.7), а также непрерывности и монотонности обобщенной невязки $\rho_\eta^k(\alpha)$, $\alpha > 0$ (утверждения 1), 2) леммы 2.3.1) и утверждения 2) теоремы 2.3.1.

Замечание 2.3.1. *Строго говоря, функция ρ_η^k не обязана быть строго монотонной, поэтому, вообще говоря, корень α^* может определяться неоднозначно. Тем не менее, можно показать, что элемент $z_\eta^{\alpha^*}$, взятый для произвольного α^* из отрезка всех корней, один и тот же. Действительно, в силу непрерывности и монотонности $\rho_\eta^k(\alpha)$ множество корней α^* уравнения $\rho_\eta^k(\alpha) = 0,\ \alpha > 0$ заполняет, вообще говоря, некоторый отрезок. Для всех $z_\eta^{\alpha^*}$ с α^* из этого отрезка имеем равенство $\rho_\eta^k(\alpha^*) = 0$, откуда в силу монотонности функций $\beta_\eta(\alpha)$, $\gamma_\eta(\alpha)$ при $\alpha > 0$ следует, что они постоянны на этом отрезке. Пусть α_1^*, α_2^* – две произвольные точки из этого отрезка. В силу сказанного выше тогда имеем равенство*

$$M^{\alpha_1^*}(z_\eta^{\alpha_1^*}) = M^{\alpha_1^*}(z_\eta^{\alpha_2^*}),$$

из которого, в силу единственности экстремали z_η^α для функционала $M^\alpha(z),\ z \in Z$, выводим $z_\eta^{\alpha_1^*} = z_\eta^{\alpha_2^*}$, т.е., действительно, элемент $z_\eta^{\alpha^*}$, взятый для произвольного α^* из отрезка всех корней, один и тот же.

Более того, оказывается при сделанных предположениях в случае выполнения условия (2.3.7) корень α^* уравнения обобщенной невязки единственный. Доказательство последнего факта можно найти в [30].

Теперь мы можем сформулировать новый алгоритм – принцип обобщенной невязки. Он состоит в следующем:

1) если условие (2.3.7) не выполнено, то в качестве приближенного решения уравнения (2.1.1) выбираем $z_\eta = 0$;

2) если же условие (2.3.7) выполнено, то полагаем, что $z_\eta = z_\eta^{\alpha^*(\eta)}$, где $\alpha^*(\eta)$ есть корень уравнения обобщенной невязки (2.3.8).

Справедлива следующая фундаментальная в теории регуляризации

Теорема 2.3.3. *Пусть z^0 – нормальное решение уравнения $A^0 z = u^0,\ z \in Z$. Имеет место предельное соотношение*

$$\|z_\eta - z^0\| \to 0,$$

если $\eta \to 0$ и z_η выбирается в соответствии с обобщенным принципом невязки.

Доказательство. Если $z^0 = 0$, то $\|u^\delta\| \leqslant \delta$ и условие (2.3.7) не выполнено. В этом случае $z_\eta = 0$ и теорема доказана.

Пусть далее $z^0 \neq 0$. Тогда, так как

$$\delta^2 + (\mu_\eta^k(u^\delta, A^h))^2 \to 0, \quad \|u^\delta\| \to \|u^0\| \neq 0,$$

то условие (2.3.7) выполняется, по крайней мере, для всех достаточно малых η.

Предположим, что $z_\eta^{\alpha^*(\eta)} \nrightarrow z^0$ при $\eta \to 0$. Это значит, что существуют такие число $\varepsilon > 0$ и последовательность η_i, $i = 1, 2, \ldots$, что $\|z^0 - z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\| \geqslant \varepsilon$, $z_{\eta_i}^{\alpha_i^*} \equiv z_{\eta_i}^{\alpha^*(\eta_i)}$. Так как $z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}$ доставляет минимальное значение сглаживающему функционалу, то

$$\|A^{h_i} z_{\eta_i}^{\alpha_i^*} - u^{\delta_i}\|^2 + \alpha_i^* \|z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\|^2 \leqslant \|A^{h_i} z^0 - u^{\delta_i}\|^2 + \alpha_i^* \|z^0\|^2.$$

Поэтому, с учетом обозначения $k_i \equiv k(\eta_i)$, а также равенства $\rho_{\eta_i}^{k_i}(\alpha_i^*) = 0$, можем далее записать

$$(\delta_i + h_i \|z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\|)^2 + \alpha_i^* \|z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (\delta_i + h_i \|z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\|)^2 + (\mu_{\eta_i}^{k_i}(u^{\delta_i}, A^{h_i}))^2 + \alpha_i^* \|z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\|^2 =$$
$$= \|A^{h_i} z_{\eta_i}^{\alpha_i^*} - u^{\delta_i}\|^2 + \alpha_i^* \|z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|A^{h_i} z^0 - u^{\delta_i}\|^2 + \alpha_i^* \|z^0\|^2 \leqslant (\delta_i + h_i \|z^0\|)^2 + \alpha_i^* \|z^0\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$f(\|z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\|) \leqslant f(\|z^0\|),$$

где $f(x) \equiv (A + Bx)^2 + Cx^2$ с $A,\ B > 0,\ C > 0$. Так как функция f одного переменного $x > 0$ строго монотонна, то получаем

$$\|z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\| \leqslant \|z^0\|.$$

Считая без ограничения общности в силу последнего неравенства и слабой компактности замкнутого шара в гильбертовом пространстве (см. лемму 1.3.2 в разделе 1.3.2), что

$$z_{\eta_i}^{\alpha_i^*} \to z^* \ \text{ слабо в } Z, \quad z^* \in Z, \tag{2.3.9}$$

можем записать опять же в силу полунепрерывности снизу функционала нормы в гильбертовом пространстве (см. раздел 1.3.2)

$$\|z^*\| \leqslant \liminf_{i\to\infty} \|z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\| \leqslant \limsup_{i\to\infty} \|z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\| \leqslant \|z^0\|. \tag{2.3.10}$$

Покажем в завершение доказательства, что $z^* = z^0$. Для этого сначала запишем

$$\|A^0 z_{\eta_i}^{\alpha_i^*} - A^0 z^0\| \leqslant$$
$$\|A^0 z_{\eta_i}^{\alpha_i^*} - A^{h_i} z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\| + \|A^{h_i} z_{\eta_i}^{\alpha_i^*} - u^{\delta_i}\| + \|u^{\delta_i} - u^0\| \leqslant$$
$$\leqslant h_i \|z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\| + \{(\delta_i + h_i \|z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\|)^2 + (\mu_{\eta_i}^{k_i}(u^{\delta_i}, A^{h_i}))^2\}^{1/2} + \delta_i.$$

Так как при этом

$$h_i \|z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\| + \{(\delta_i + h_i \|z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\|)^2 + (\mu_{\eta_i}^{k_i}(u^{\delta_i}, A^{h_i}))^2\}^{1/2} + \delta_i \to 0,\ \ i \to \infty,$$

то, вспоминая опять свойство слабой полунепрерывности снизу нормы в гильбертовом пространстве, имеем

$$\|A^0 z^* - A^0 z^0\| = 0,$$

т.е.

$$A^0 z^* = A^0 z^0 = u^0.$$

Отсюда, в силу доказанного выше неравенства $\|z^*\| \leqslant \|z^0\|$ (см. (2.3.10)) и единственности нормального решения, получаем равенство $z^* = z^0$. И, наконец, вспоминая H-свойство гильбертова пространства (см. раздел 1.3.2) и учитывая слабую сходимость (2.3.9) и сходимость норм $\|z_{\eta_i}^{\alpha_i^*}\| \to \|z^0\|$, $i \to \infty$, вытекающую из оценок (2.3.10), получаем, что

$$z_{\eta_i}^{\alpha_i^*} \to z^0, \;\; i \to \infty.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Определим для каждой пары исходных данных (A^h, u^δ), $A^h \in L(Z, U)$, $u^\delta \in U$ таких, что

$$\|A^h - A^0\| \leqslant h, \;\; \|u^\delta - u^0\| \leqslant \delta,$$

при каждом $\eta = (h, \delta)$, $h > 0$, $\delta > 0$, $0 < h < h_0$, $0 < \delta < \delta_0$, h_0, δ_0 – некоторые положительные величины, однозначный оператор (алгоритм) $R(A^h, u^\delta, \eta)$ по формуле

$$R(A^h, u^\delta, \eta) \equiv z_\eta, \tag{2.3.11}$$

в которой элемент z_η выбирается в соответствии с обобщенным принципом невязки. Справедлива следующая теорема, доказательство которой точно такое же, как и доказательство аналогичной теоремы 2.2.2.

Теорема 2.3.4. *Оператор R, заданный формулой (2.3.11), является регуляризирующим.*

Помимо принципа обобщенной невязки существуют его модификации, с которыми можно познакомиться в [1, 30].

Описанный выше метод Тихонова может быть применен к очень большому числу различных прикладных задач (см., например, [1, 6, 7, 16, 19, 33]). Однако, по-видимому, наиболее часто в приложениях приходится применять метод Тихонова непосредственно для решения линейных алгебраических систем, а также интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Рассмотрим как метод Тихонова применяется для решения этих двух канонических задач.

2.4. Применение метода Тихонова для решения линейных алгебраических систем

Рассмотрим произвольную линейную алгебраическую систему

$$Az = u, \;\; z \in Z = R^n, \;\; u \in U = R^m, \tag{2.4.1}$$

где $z \equiv (z_1, \ldots, z_n)^*$, $u \equiv (u_1, \ldots, u_m)^*$ – векторы-столбцы, A – $(m \times n)$-матрица с элементами $a_{i,j}$, $A \equiv \{a_{i,j}\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Здесь n, m – любые фиксированные натуральные числа. Как известно, система (2.4.1) может быть однозначно разрешимой, вырожденной (и иметь бесчисленное множество решений) и несовместной. Изложенный выше абстрактный метод Тихонова подразумевал, что искомое решение исходного уравнения первого рода понимается в классическом смысле (равенство $Az^0 = u$ понимается как обычное равенство в пространстве U). Поэтому в случае несовместности системы (2.4.1) становится совершенно непонятно какое отношение этот метод может иметь к ее “решению”. Ситуация кардинально меняется, если воспользоваться понятием обобщенного или, другими словами, нормального решения системы (2.4.1), которое введено нами в разделе 1.3.4 и которое имеет смысл для любой такой системы (с любыми n, m) и совпадает с классическим в случае его существования. Речь здесь идет о нормальном решении системы (2.4.1), имеющем смысл как в случае ее совместности, так и несовместнсти.

Итак, в силу леммы 1.3.11 поиск нормального решения системы (2.4.1) можно заменить поиском нормального обычного решения совместной нормальной системы

$$A^*Az = A^*u, \tag{2.4.2}$$

для чего уже могут быть непосредственно применены изученные выше абстрактные регуляризирующие алгоритмы.

Покажем теперь, что задача поиска нормального решения системы (2.4.1) (возможно несовместной) является некорректной.

Покажем это на совсем простом примере. Пусть требуется минимизировать функцию $f(z) = |az - u|^2$ на множестве $\mathcal{D} = R^1$ при условии, что числа a, b заданы с погрешностями. Пусть точные значения $a = b = 0$ и

$$f(z) \equiv 0 = f^* \equiv \inf_{\mathcal{D}} f(z), \;\; \mathcal{D}^* \equiv \{z \in \mathcal{D} : \, f(z) = f^*\} = R^1.$$

Пусть $\bar{z} = 0$, тогда нормальным решением будет $z^0 = 0$. Предположим, что величины a, b задаются приближенно и в нашем распоряжении имеются их отличные от нуля приближения a_k, b_k, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$. В этом случае множество точек минимума функции $|a_k z - b_k|^2$, $z \in R^n$ состоит из одной точки $z_k = b_k/a_k$. Легко видеть, что эта величина, являющаяся отношением малых чисел, может принимать любые значения. Следовательно, как бы точно ни задавались величины a_k, b_k, не имеет смысла использовать z_k в качестве приближения к нормальному решению $z^0 = 0$ в метрике R^1. Естественно, аналогичные явления наблюдаются и в более общих случаях.

Рассмотрим также конкретную несовместную двумерную систему (случай совместной системы был рассмотрен в разделе 1.1.2)

$$\begin{cases} 1 \cdot z_1 + 1 \cdot z_2 = 1, \\ 0 \cdot z_1 + 0 \cdot z_2 = 1, \end{cases}$$

нормальным решением которой является, в чем легко убедиться, вектор

$$z^0 = (1/2, 1/2)^*.$$

Зададим возмущенную систему

$$\begin{cases} 1 \cdot z_1 + 1 \cdot z_2 = 1, \\ 0 \cdot z_1 + \varepsilon \cdot z_2 = 1, \end{cases}$$

с нормальным (и одновременно единственным классическим) решением $z^{0,\varepsilon} = (1 - 1/\varepsilon, 1/\varepsilon)^*$, который не сходится при $\varepsilon \to 0$ к z^0, в то время как евклидово расстояние между матрицами исходной и возмущенной систем стремится, очевидно, к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Пусть теперь имеется система (2.4.1) с точно известными исходными данными $A^0 \equiv \{a^0_{i,j}\}$, $u^0 \equiv (u^0_1, \ldots, u^0_m)^*$

$$A^0 z = u^0, \;\; z \in Z = R^n, \;\; u^0 \in U = R^m \tag{2.4.3}$$

с нормальным решением z^0. Пусть вместо точной системы (2.4.3) имеем приближенную систему

$$A^h z = u^\delta, \;\; z \in Z = R^n, \;\; u^\delta \in U = R^m \tag{2.4.4}$$

с приближенно известными исходными данными $A^h \equiv \{a^h_{i,j}\}$, $u^\delta \equiv (u^\delta_1, \ldots, u^\delta_m)^*$ и справедливы оценки ($|\cdot|$ – евклидов модуль, $|A|$ – евклидова норма матрицы A)

$$|A^h - A^0| \leqslant h, \;\; |u^\delta - u^0| \leqslant \delta.$$

Так как нормальное решение системы (2.4.3) совпадает с обычным нормальным решением совместной нормальной системы

$$A^{0*}A^0 z = A^{0*}u^0, \;\; z \in Z = R^n, \;\; u^0 \in U = R^m, \tag{2.4.5}$$

то для его поиска мы можем формально применить регуляризирующий алгоритм теоремы 2.2.1, а также метод обобщенной невязки, требующие классической разрешимости исходной системы. Заметим, что для формального применения этих теорем требуется использовать так называемую операторную норму матрицы

$$\|A\| = \sup_{z \neq 0} \frac{|Az|}{|z|}.$$

Так как $\|A\| \leqslant |A|$, то из оценки $|A^h - A^0| \leqslant h$ вытекает и нужная для формального применения указанных регуляризирующих алгоритмов оценка $\|A^h - A^0\| \leqslant h$. Не составляет труда в силу имеющихся теперь оценок

$$\|A^h - A^0\| \leqslant h, \;\; |u^\delta - u^0| \leqslant \delta,$$

где $h \in [0, h_0]$, $\delta \in [0, \delta_0]$, h_0, δ_0 – некоторые фиксированные положительные числа, записать и оценки для отклонений $\|A^{h*}A^h - A^{0*}A^0\|$, $|A^{\delta*}u^\delta - A^{0*}u^0|$. После элементарных оценок можем записать

$$\|A^{h*}A^h - A^{0*}A^0\| \leqslant Kh, \;\; |A^{h*}u^\delta - A^{0*}u^0| \leqslant K_1\delta + K_2 h,$$

где положительные постоянные K, K_1, K_2 зависят лишь от $|A^0|$, $|u^0|$, h_0. Таким образом, после проверки выполнимости всех условий для нахождения интересующего нас нормального решения совместной системы (2.4.5) можно применить формализм теоремы 2.2.1 и метода обобщенной невязки.

Сделаем, однако, предварительно следующее важное замечание. Указанный формализм требует, чтобы пространства Z, U были гильбертовыми. Строго говоря, конечномерные пространства R^n, R^m таковыми не являются (см., например, [10, с. 155], [13]). Однако, все доказательства того, что указанные выше алгоритмы являются регуляризирующими можно практически дословно повторить и для случая конечномерных Z, U (при этом эти доказательства существенно упрощаются, так как в конечномерном пространстве понятия сильной и слабой сходимости совпадают).

Введем далее обозначения $A^{h*}A^h \equiv B^h$, $A^{h*}u^\delta \equiv v^{h,\delta}$ и сглаживающий функционал – сглаживающую функцию

$$M_\eta^\alpha(z) \equiv |B^h z - v^{h,\delta}|^2 + \alpha|z|^2, \ \ z \in R^n.$$

Тогда единственная точка минимума z_η^α этой функции, как легко показать, удовлетворяет уравнению Эйлера

$$B^{h*}B^h z + \alpha z = B^{h*}v^{h,\delta}.$$

В соответствии с формализмом теоремы 2.2.1 при условии согласования

$$(Kh + K_1\delta + K_2 h)^2/\alpha(\eta) \to 0, \ \ \alpha(\eta) \to 0, \ \eta \equiv (h,\delta) \to 0,$$

эквивалентном, очевидно, условию

$$(h^2 + \delta^2)/\alpha(\eta) \to 0, \ \ \alpha(\eta) \to 0, \ \eta \equiv (h,\delta) \to 0,$$

регуляризованные решения z_η^α сходятся при $\eta \to 0$ к нормальному решению исходной системы (2.4.3).

Заметим, что приближать точное решение z^0 невозмущенной системы (2.4.3) можно оказывается и при помощи элементов z_η^α, доставляющих минимальное значение сглаживающей функции

$$M_\eta^\alpha(z) \equiv |A^h z - u^\delta|^2 + \alpha|z|^2.$$

Однако, в данном учебно-методическом пособии мы не будем обосновывать это утверждение.

Рассмотрим в заключение иллюстративный пример решения линейной алгебраической системы второго порядка, в котором будем предполагать известной информацию о совместности точной системы. Пусть задана возмущенная система

$$\begin{cases} 1 \cdot z_1 + 1 \cdot z_2 = 2, \\ 0 \cdot z_1 + \varepsilon \cdot z_2 = \varepsilon^2 \end{cases}$$

и известно, что $|A^\varepsilon - A^0| \leqslant \varepsilon$, $\ |u^\varepsilon - u^0| \leqslant \varepsilon^2$. Запишем сглаживающую функцию (при этом в силу информации о совместности системы мы не переходим к ее нормальной системе)

$$M_\varepsilon^\alpha(z) = |A^\varepsilon z - u^\varepsilon|^2 + \alpha|z|^2 = (z_1 + z_2 - 2)^2 + (\varepsilon z_2 - \varepsilon^2)^2 + \alpha z_1^2 + \alpha z_2^2.$$

Легко подсчитать, что элемент z_ε^α, доставляющий минимум функции M_ε^α, удовлетворяет системе

$$\begin{cases} (1+\alpha)z_1 + z_2 = 2, \\ z_1 + (1 + \varepsilon^2 + \alpha)z_2 = 2 + \varepsilon^3. \end{cases}$$

Решая эту систему с помощью правила Крамера, находим

$$z_{\varepsilon,1}^\alpha = \frac{2\alpha + 2\varepsilon^2 - \varepsilon^3}{2\alpha + \alpha^2 + \alpha\varepsilon^2 + \varepsilon^2} = \frac{2 + 2\varepsilon^2/\alpha - \varepsilon^3/\alpha}{2 + \alpha + \varepsilon^2 + \varepsilon^2/\alpha},$$

$$z^{\alpha}_{\varepsilon,2} = \frac{2\alpha + \alpha\varepsilon^3 + \varepsilon^3}{2\alpha + \alpha^2 + \alpha\varepsilon^2 + \varepsilon^2} = \frac{2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^3/\alpha}{2 + \alpha + \varepsilon^2 + \varepsilon^2/\alpha}.$$

В соответствии с теоремой 2.2.1 для регуляризации в рассматриваемой ситуации достаточно выполнения предельных соотношений $(\varepsilon + \varepsilon^2)^2/\alpha(\varepsilon) \to 0$, $\alpha(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ или, после упрощения, $\varepsilon^2/\alpha(\varepsilon) \to 0$, $\alpha(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Применяя эти предельные соотношения к последним равенствам, получаем

$$z^{\alpha(\varepsilon)}_{\varepsilon,1} \to 1, \quad z^{\alpha(\varepsilon)}_{\varepsilon,2} \to 1, \ \ \varepsilon \to 0,$$

т.е. получаем, что нормальное решение невозмущенной системы равно $z^0 = (1,1)^*$. Это легко проверяется непосредственным вычислением нормального решения невозмущенной системы при $\varepsilon = 0$ (вообще говоря, на практике невозмущенная система неизвестна, но в данном иллюстративном примере она легко угадывается). Легко вычислить здесь и классическое единственное решение, которое естественно является и нормальным, возмущенной системы. Оно равно $(2-\varepsilon,\varepsilon)^*$ и, как видно, $(2-\varepsilon,\varepsilon)^* \nrightarrow (1,1)^*$ при $\varepsilon \to 0$.

2.5. Применение метода Тихонова для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода

Рассмотрим как с помощью описанной выше схемы регуляризации Тихонова может быть построено непосредственное численное решение уравнения Фредгольма первого рода

$$A^0[z](x) \equiv \int_a^b K^0(x,s)z(s)ds = u^0(x), \ \ c \leqslant x \leqslant d, \tag{2.5.1}$$

где ядро $K^0(x,s)$ – непрерывная в заданном прямоугольнике $\Pi \equiv \{c \leqslant x \leqslant d;\ a \leqslant s \leqslant b\}$ функция, а в качестве пространств Z, U взяты соответственно пространства $L_2(a,b)$, $L_2(c,d)$. Считаем для простоты, что уравнение (2.5.1) имеет единственное решение z^0.

Вместо уравнения (2.5.1) в нашем распоряжении имеется его приближение

$$A^h[z](x) \equiv \int_a^b K^h(x,s)z(s)ds = u^\delta(x), \ \ c \leqslant x \leqslant d, \tag{2.5.2}$$

где $h \in [0,h_0]$, $\delta \in [0,\delta_0]$, h_0, $\delta_0 > 0$ – некоторые числа, ядро $K^h \in C[\Pi]$ и справедливы оценки

$$\|u^\delta - u^0\| \leqslant \delta, \quad \|K^h - K^0\|_{L_2(\Pi)} \leqslant h. \tag{2.5.3}$$

Рассмотрим сначала случай задачи (2.5.1), когда в качестве пространств Z, U, как уже сказано выше, выбраны пространства $Z = L_2(a,b)$, $U = L_2(c,d)$. В этом случае, как хорошо известно, A^0, $A^h : Z \to U$ – линейные непрерывные операторы.

Заметим, во-первых, что, как легко показать, из оценки $\|K^h - K^0\|_{L_2(\Pi)} \leqslant h$ следует оценка $\|A^h - A^0\| \leqslant h$, необходимая для применения при решении уравнения (2.5.1) описанной выше абстрактной схемы Тихонова. Поэтому, с учетом оценки $\|u^\delta -$

$u^0\| \leqslant \delta$, мы можем применить в данной ситуации опять формализм теоремы 2.2.1 и метода обобщенной невязки. В силу теоремы 2.2.1 при условии согласования

$$\frac{(h+\delta)^2}{\alpha(\eta)} \to 0,\ \ \alpha(\eta) \to 0,\ \ \eta \to 0$$

имеет место предельное соотношение

$$\|z_\eta^{\alpha(\eta)} - z^0\| \to 0,\ \ \eta \to 0,$$

где $z_\eta^{\alpha(\eta)} \in L_2(a,b)$ – элемент, минимизирующий на $L_2(a,b)$ сглаживающий функционал

$$M_\eta^{\alpha(\eta)}(z) \equiv \int_c^d (\int_a^b K^h(x,s)z(s)ds - u^\delta(x))^2 dx + \alpha(\eta)\int_a^b z^2(s)ds.$$

Не составляет труда выписать здесь же уравнение обобщенной невязки и воспользоваться принципом обобщенной невязки. Однако, мы обратим здесь внимание на другое обстоятельство. Важным моментом в разобранном случае является решение взять в качестве пространства решений Z пространство $L_2(a,b)$. Как известно, функции из $L_2(a,b)$ могут быть устроены “весьма плохо” и, в частности, иметь бесчисленное множество точек разрыва. В то же время, если уравнение (2.5.1) соответствует реальному физическому явлению, то в большом числе случаев о функции $z^0(s)$, характеризующей это явление и являющейся точным решением этого уравнения, можно с определенностью сказать, что она не может быть устроена “очень плохо”. Например, она не может иметь разрывов или ее производная не может иметь разрывов. Такая естественная для физической постановки задачи информация и является в данном случае априорной информацией о точном решении. Как уже обсуждалось нами выше, при анализе метода регуляризации на компактах, роль такой априорной информации при решении реальных некорректных задач чрезвычайно велика, так как в зависимости от тех или иных естественных физических предположений можно организовать соответственно тот или иной процесс регуляризации, по возможности, наиболее адекватный данной физической задаче. Рассмотренный выше процесс реуляризации, когда в качестве пространства решений Z было взято пространство $L_2(a,b)$ (кстати, это тоже априорная информация) называется регуляризацией нулевого порядка, так как в нем не использовалась информация о производных точного решения.

Ниже рассмотрим для того же интегрального уравнения (2.5.1) процесс регуляризации первого порядка, в котором будет использована априорная информация о дифференцируемости функции $z^0(\cdot)$. Этот процесс, благодаря более сильной априорной информации о функции $z^0(\cdot)$ (при условии, что такая информация действительно адекватна физической сути задачи), приводит к равномерной сходимости $z_\eta^{\alpha(\eta)}(\cdot)$ к $z^0(\cdot)$ при $\eta \to 0$.

Итак, с целью регуляризации первого порядка в качестве гильбертова пространства решений Z рассмотрим пространство $V_2^1[a,b]$ абсолютно-непрерывных функций $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$ (см. раздел 1.3.1), производные которых суммируемы с квадратом, т.е. $z'(\cdot) \in L_2(a,b)$, а скалярное произведение в котором задается равенством

$$(z_1, z_2) \equiv \int_a^b (z_1(s)z_2(s) + z_1'(s)z_2'(s))ds$$

и порождает норму $\|z\| \equiv \sqrt{\langle z, z\rangle}$. Проверка этих утверждений предоставляется читателю в качестве упражнения.

Следующая лемма говорит о компактности в норме $C[a,b]$ замкнутого шара $B_R \equiv \{z \in V_2^1[a,b] : \|z\| \leqslant R\}$ из $V_2^1[a,b]$ и играет ключевую роль в регуляризации первого порядка.

Лемма 2.5.1. *Из любой бесконечной совокупности функций $z_i \in B_R,\ i = 1, 2, \ldots$ можно извлечь последовательность z_{i_j} $j = 1, 2, \ldots,$ такую, что*

$$\|z_{i_j} - z_*\|_{C[a,b]} \to 0,\ \ j \to \infty,$$

где $z_* \in B_R$.

Доказательство. Для любого $z \in B_R$ можем, очевидно, записать

$$\int_a^b z^2(s)ds \leqslant R^2, \quad \int_a^b (z')^2(s)ds \leqslant R^2. \tag{2.5.4}$$

Из (2.5.4) следует, что для любой функции $z \in B_R$ существует точка $s_0 \in [a,b]$ (для каждой z, вообще говоря, своя), в которой

$$|z(s_0)| \leqslant \sqrt{\frac{R^2}{b-a}}. \tag{2.5.5}$$

Далее, для любой пары s_1, s_2, $s_2 > s_1$ и для любого $z \in B_R$ можем записать

$$|z(s_2) - z(s_1)|^2 = |\int_{s_1}^{s_2} z'(s)ds|^2.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$|z(s_2) - z(s_1)|^2 \leqslant |s_2 - s_1|| \int_{s_1}^{s_2} (z'(s))^2 ds| \leqslant (s_2 - s_1)R^2,$$

а, значит,

$$|z(s_2) - z(s_1)| \leqslant \sqrt{(s_2 - s_1)}R. \tag{2.5.6}$$

Полагая в (2.5.6) $s_1 = s_0$ (напоминаем, что для каждой z, вообще говоря, своя s_0), получим для любого $s_2 \in [a,b]$ и любой $z \in B_R$ в силу (2.5.5)

$$|z(s_2)| = |z(s_2) - z(s_0) + z(s_0)| \leqslant |z(s_2) - z(s_0)| + |z(s_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(s_2 - s_0)}R + \sqrt{\frac{R^2}{(b-a)}} \leqslant \sqrt{(b-a)}R + \sqrt{\frac{R^2}{(b-a)}}.$$

Таким образом, множество B_R есть множество равномерно ограниченных функций, а в силу (2.5.6) также и равностепенно непрерывных функций. Поэтому по теореме Арцела существует подпоследовательность $z_{i_j}(\cdot)$, $j = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$\|z_{i_j} - z_*\|_{C[a,b]} \to 0,\ \ j \to \infty, \tag{2.5.7}$$

где z_* – некоторая непрерывная на $[a,b]$ функция.

Кроме того, в силу (2.5.4) и слабой компактности замкнутого шара в $L_2(a,b)$ можно без ограничения общности считать последовательность $z_{i_j}(\cdot)$, $j=1,2,\dots$ слабо в $L_2(a,b)$ сходящейся к некоторой функции $z^*(\cdot) \in L_2(a,b)$ такой, что

$$\int_a^b (z^*(s))^2 ds \leqslant R^2.$$

Имеем

$$z_{i_j}(s) = z_{i_j}(a) + \int_a^s z'_{i_j}(s)ds, \quad j=1,2,\dots. \tag{2.5.8}$$

Переходя в (2.5.8) к пределу при $j \to \infty$ в силу слабой сходимости $z'_{i_j} \xrightarrow{w} z^*,\ j \to \infty$ и равномерной сходимости (2.5.7) имеем

$$z_*(s) = z_*(a) + \int_a^s z^*(s)ds \ \ \forall\, s \in [a,b].$$

При этом, так как $z^*(\cdot) \in L_2(a,b)$, то $z_* \in V_2^1[a,b]$. Кроме того, так как

$$\int_a^b z_{i_j}^2(s)ds \leqslant R^2, \quad \int_a^b (z'_{i_j})^2(s)ds \leqslant R^2,$$

то в силу слабой полунепрерывности снизу нормы в $L_2(a,b)$ и предельных соотношений $z'_{i_j} \xrightarrow{w} z^*,\ j \to \infty$, (2.5.7), а также равенства $z^*(\cdot) = z'_*(\cdot)$ в $L_2(a,b)$ имеем

$$\|z_*\|^2 = \int_a^b z_*^2(s)ds + \int_a^b (z'_*(s))^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{j\to\infty} \int_a^b (z_{i_j}(s))^2 ds + \liminf_{j\to\infty} \int_a^b (z'_{i_j}(s))^2 ds =$$

$$= \liminf_{j\to\infty} (\int_a^b (z_{i_j}(s))^2 ds + \int_a^b (z'_{i_j}(s))^2 ds) \leqslant R^2,$$

откуда заключаем, что $z_* \in B_R$ и, значит, лемма доказана.

Из последней леммы, в свою очередь, вытекает

Лемма 2.5.2. *Из предельного соотношения в норме пространства $V_2^1[a,b]$*

$$\|z_i - z_*\| \to 0, \ \ i \to \infty$$

вытекает предельное соотношение в норме $C[a,b]$

$$\|z_i - z_*\|_{C[a,b]} \to 0, \ \ i \to \infty.$$

Теперь после краткого изучения необходимых свойств пространства $V_2^1[a,b]$ вернемся к нашей некорректно поставленной задаче (2.5.1), взяв в качестве гильбертова пространства Z пространство $V_2^1[a,b]$ и оставив в качестве гильбертова пространства U пространство $L_2(c,d)$. Будем смотреть при этом естественно на операторы A^0, A^h как на операторы из $V_2^1[a,b]$ в $L_2(c,d)$. Они являются, как легко видеть, линейными ограниченными и для этой пары пространств (проверка предоставляется читателю). Предположим, что точное решение уравнения (2.5.1) существует и единственно как элемент пространства $V_2^1[a,b]$. Это априорное предположение о гладкости точного решения не вытекает из каких-либо строгих математических теорем. Считаем и в этом случае регуляризации первого порядка, что выполняются оценки (2.5.3) для отклонений исходных данных. Покажем, что вторая из этих оценок также приводит к оценке

$$\|A^h - A^0\| \leqslant h,$$

но уже для новой пары пространств Z, U. Действительно, можем записать

$$\|A^h - A^0\|^2 = \sup_{\|z\|\leqslant 1} \|(A^h - A^0)z\|^2 =$$

$$= \sup_{\|z\|\leqslant 1} \int_c^d (\int_a^b (K^h(x,s) - K^0(x,s))z(s)ds)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|z\|\leqslant 1} \int_c^d (\int_a^b (K^h(x,s) - K^0(x,s)))^2 dsdx \int_a^b z^2(s)ds \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|z\|\leqslant 1} \int_c^d (\int_a^b (K^h(x,s) - K^0(x,s)))^2 dsdx \times$$

$$\times (\int_a^b z^2(s)ds + \int_a^b (z'(s))^2 ds) \leqslant$$

$$\leqslant \int_c^d \int_a^b (K^h(x,s) - K^0(x,s))^2 dsdx \leqslant h^2,$$

откуда и вытекает доказываемая оценка для $\|A^h - A^0\|$.

Таким образом и в этом случае ($Z = V_2^1[a,b]$) выполнены все условия теоремы 2.2.1 и принципа обобщенной невязки. Последнее означает, что и в этом случае при выполнении условия согласования

$$\frac{(h+\delta)^2}{\alpha(\eta)} \to 0, \ \ \alpha(\eta) \to 0, \ \ \eta \to 0$$

имеет место сходимость элементов $z_\eta^{\alpha(\eta)}$ к z^0 при $\eta \to 0$, но уже в норме $V_2^1[a,b]$

$$\|z_\eta^{\alpha(\eta)} - z^0\| \to 0, \ \ \eta \to 0, \tag{2.5.9}$$

где $z_\eta^{\alpha(\eta)} \in V_2^1[a,b]$ – элемент, минимизирующий на $V_2^1[a,b]$ сглаживающий функционал

$$M_\eta^{\alpha(\eta)}(z) \equiv \int_c^d (\int_a^b K^h(x,s)z(s)ds - u^\delta(x))^2 dx +$$

$$+\alpha(\eta)(\int_a^b z^2(s)ds + \int_a^b (z'(s))^2 ds).$$

При этом принципиальное отличие от регуляризации нулевого порядка состоит в наличии в сглаживающем функционале дополнительного слагаемого $\alpha(\eta)\int\limits_a^b (z'(s))^2 ds$ и том факте, что из сходимости (2.5.9) в норме $V_2^1[a,b]$ вытекает с учетом леммы 2.5.2 равномерная сходимость

$$\max_{s\in[a,b]} |z_\eta^{\alpha(\eta)}(s) - z^0(s)| \to 0, \ \ \eta \to 0,$$

явившаяся следствием более сильной априорной информации о точном решении. Последнее обстоятельство является, в частности, очень важным с точки зрения организации вычислительного процесса.

Уравнение обобщенной невязки (2.3.8) принимает здесь вид

$$\rho_\eta^{k(\eta)}(\alpha) \equiv \int_c^d (\int_a^b K^h(x,s) z_\eta^\alpha(s) ds - u^\delta(x))^2 dx -$$

$$-(\delta + h[\int_a^b (z_\eta^\alpha(s))^2 ds + \int_a^b (z_\eta^{\alpha\prime}(s))^2 ds]^{1/2})^2 -$$

$$-(\mu_\eta^{k(\eta)}(A^h, u^\delta))^2 = 0, \ \ \alpha > 0,$$

где

$$\mu_\eta(A^h, u^\delta) \equiv \inf_{z \in V_2^1[a,b]} \{\int_c^d (\int_a^b K^h(x,s) z(s) ds - u^\delta(x))^2 dx\}^{1/2},$$

$$\mu_\eta(A^h, u^\delta) \leqslant \mu_\eta^{k(\eta)}(A^h, u^\delta) \leqslant \mu_\eta(A^h, u^\delta) + k(\eta),$$

$$k(\eta) \to 0, \ \ \eta \to 0.$$

Для нахождения корня уравнения обобщенной невязки (если мы приближаем z^0 с помощью доказанного выше принципа обобщенной невязки) можно использовать различные классические процедуры нахождения корней (метод хорд, метод касательных и т.п.), а также их модификации. Это поиск, а тем самым и приближенное нахождение z^0, может быть естественно запрограммирован и вестись с помощью ЭВМ, что и реализовано в большом числе программ (см., например, книги [30, 31]). Центральным моментом поиска корня является, конечно, нахождение на каждом шаге этого процесса элемента z_η^α, минимизирующего сглаживающий функционал $M_\eta^\alpha(z)$. Нахождение этого элемента можно вести с помощью какой-либо стандартной процедуры численной минимизации [4]. Можно, однако, искать элемент z_η^α, решая соответствующее уравнение Эйлера, которому он должен удовлетворять, как элемент, минимизирующий сглаживающий функционал. Выведем здесь это уравнение, являющееся, как известно, следствием обращения в нуль производной в смысле Фреше в точке минимума z_η^α функционала $M_\eta^\alpha(z)$, $z \in Z = V_2^1[a,b]$ (см. раздел 1.3.2, лемма 1.3.6).

Для того, чтобы воспользоваться леммой 1.3.6, нам необходимо вычислить элемент $\Phi'(z)$ для сглаживающего функционала $\Phi(z) = M_\eta^\alpha(z)$, $z \in Z$. Вычислим сначала производную Фреше для стабилизирующего функционала $\|\cdot\|^2$. Можем записать

$$\int_a^b [(z(s)+g(s))^2 + (z'(s)+g'(s))^2] ds - \int_a^b [z^2(s) + (z'(s))^2] ds =$$

$$= \int_a^b [2z(s)g(s) + 2z'(s)g'(s)] ds + \int_a^b [g^2(s) + (g'(s))^2] ds =$$

$$= (2z, g) + (g, g).$$

Так как, очевидно, $(g,g)/\|g\| \to 0$ при $g \to 0$, то производной в смысле Фреше для стабилизирующего функционала является элемент $2z$:

$$(\|z\|^2)' = 2z.$$

Вычислим производную в смысле Фреше для функционала невязки. Имеем

$$\int_c^d (\int_a^b K^h(x,s)(z(s)+g(s))ds - u^\delta(x))^2 dx -$$

$$- \int_c^d (\int_a^b K^h(x,s)z(s)ds - u^\delta(x))^2 dx =$$

$$= \int_c^d (\int_a^b K^h(x,s)(z(s)+g(s))ds - u^\delta(x) +$$

$$+ \int_a^b K^h(x,s)z(s)ds - u^\delta(x)) \int_a^b K^h(x,s)g(s)dsdx =$$

$$= \int_c^d 2(\int_a^b K^h(x,s)z(s)ds - u^\delta(x)) \int_a^b K^h(x,s)g(s)dsdx +$$

$$+ \int_c^d \int_a^b K^h(x,s)g(s)ds \int_a^b K^h(x,s)g(s)dsdx.$$

Так как в силу неравенства Коши–Буняковского имеем оценку

$$\int_c^d \int_a^b K^h(x,s)g(s)ds \int_a^b K^h(x,s)g(s)dsdx =$$

$$= \int_c^d (\int_a^b K^h(x,s)g(s)ds)^2 dx \leqslant \int_c^d \int_a^b (K^h(x,s))^2 dsdx \int_a^b g^2(s)ds,$$

и, очевидно,

$$\int_c^d \int_a^b (K^h(x,s))^2 dsdx \int_a^b g^2(s)ds / \|g\| \to 0, \quad g \to 0,$$

то главная линейная часть приращения функционала невязки

$$\int_c^d (\int_a^b K^h(x,s)[z(s)+g(s)]ds - u^\delta(x))^2 dx -$$

$$- \int_c^d (\int_a^b K^h(x,s)z(s)ds - u^\delta(x))^2 dx,$$

представляющая собой линейный непрерывный функционал на Z, задается выражением

$$J(g) \equiv \int_c^d 2(\int_a^b K^h(x,s)z(s)ds - u^\delta(x)) \int_a^b K^h(x,s)g(s)dsdx.$$

Для вычисления производной в смысле Фреше функционала невязки займемся преобразованием этого выражения. Изменяя порядок интегрирования, имеем

$$J(g) = \int_a^b \psi(s)g(s)ds,$$

$$\psi(s) \equiv 2\int_c^d K^h(x,s)(\int_a^b K^h(x,s)z(s)ds - u^\delta(x))dx.$$

Из определения производной в смысле Фреше следует, что если нам удастся найти такую функцию $y \in V_2^1[a,b]$, для которой имеет место равенство

$$J(g) = \int_a^b (y(s)g(s) + y'(s)g'(s))ds = (y,g) \quad \forall\, g \in V_2^1[a,b],$$

то эта самая функция y в силу теоремы Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве и будет искомой производной в смысле Фреше функционала невязки.

Покажем, что такой функцией является решение краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' - y = -\psi(s), \;\; y'(a) = y'(b) = 0. \tag{2.5.10}$$

Действительно, во-первых, как хорошо известно, например, из курса математической физики [5, с. 338], решение краевой задачи

$$y'' - y = f(s), \;\; y'(a) = y'(b) = 0$$

существует и единственно в классе функций с суммируемой на (a,b) с квадратом второй производной для любой функции $f \in C(a,b) \cap L_2(a,b)$, а функция ψ, как легко видеть, является функцией такого класса. Во-вторых, производя интегрирование по частям во втором слагаемом искомого выражения для $J(g)$, можем записать

$$\int_a^b y'(s)g'(s)ds = g(s)y'(s)\,\Big|_a^b - \int_a^b y''(s)g(s)ds =$$

$$= -\int_a^b y''(s)g(s)ds,$$

а, значит, получаем

$$J(g) = \int_a^b [y(s) - y''(s)]g(s)ds = \int_a^b \psi(s)g(s)ds =$$

$$= \int_a^b [y(s)g(s) + y'(s)g'(s)]ds = (y,g).$$

Итак, функция $y(s) \equiv y[z](s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, является решением краевой задачи (2.5.10) и одновременно производной в смысле Фреше функционала невязки. Производная же в смысле Фреше сглаживающего функционала M_η^α представляет собой сумму производных функционала невязки и стабилизируещего слагаемого с весом α:

$$M_\eta^{\alpha\prime}(z) = y[z] + 2\alpha z.$$

Пользуясь здесь леммой 1.3.6, находим, наконец, искомое уравнение Эйлера, которому должна удовлетворять функция z_η^α, минимизирующая сглаживающий функционал. Это уравнение имеет вид

$$y[z](s) + 2\alpha z(s) = 0, \quad s \in [a,b].$$

Так как одновременно имеем

$$(y[z])'(s) + 2\alpha z'(s) = 0, \quad s \in [a, b],$$

то получаем в силу (2.5.10) краевые условия для функции z_η^α и уравнение для нее

$$\alpha z'' - \alpha z = \frac{1}{2}\psi(s), \quad z'(a) = z'(b) = 0,$$

или окончательно для экстремали z_η^α получаем следующую краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения Эйлера

$$\alpha z'' - \alpha z = \int_c^d K^h(x,s)(\int_a^b K^h(x,s)z(s)ds - u^\delta(x))dx, \tag{2.5.11}$$

$$z'(a) = z'(b) = 0.$$

Заметим, что производная в смысле Фреше в точке z функционала в гильбертовом пространстве, которую мы называем также градиентом (см., например, [4]), задает направление наискорейшего возрастания в точке z, что является основой для построения методов минимизации сглаживающего функционала, использующих знание градиента.

Итак, численное нахождение элемента $z_\eta^\alpha \in V_2^1[a,b]$ можно организовать как на основе того или иного метода минимизации сглаживающего функционала с использованием найденного выше выражения для его градиента, так и на основе решения краевой задачи (2.5.11). Для решения последней эффективным является, например, метод прогонки [21, с. 34].

Приближенное численное нахождение элемента z_η^α можно организовать и так. Перейдем с помощью той или иной квадратурной формулы к конечно-разностной аппроксимации сглаживающего функционала M_η^α. Применяя, например, формулу прямоугольнков и задаваясь равномерными сетками

$$c = x_1 < x_2 < \cdots < x_m = d, \;\; a = s_1 < s_2 < \cdots < s_n = b,$$

соответственно на отрезках $[c,d]$ и $[a,b]$ с шагами h_x и h_s, имеем следующие аппроксимации для интегралов:

$$\int_c^d (\int_a^b K^h(x,s)z(s)ds - u^\delta(x))^2 dx \;\; \sim \;\; \sum_{i=1}^m [\sum_{j=1}^n K_{i,j}^h z_j h_s - u_i^\delta]^2 h_x$$

$$\int_a^b z^2(s)ds \;\; \sim \;\; \sum_{j=1}^n z_j^2 h_s, \;\; \int_a^b (z'(s))^2 ds \;\; \sim \;\; \sum_{j=2}^n (z_j - z_{j-1})^2 h_s^{-1},$$

где приняты обозначения:

$$z(s_j) \equiv z_j, \;\; u^\delta(x_i) \equiv u_i^\delta, \;\; K_{i,j}^h \equiv K^h(x_i, s_j).$$

Теперь сглаживающий функционал M_η^α в конечно-разностной форме выглядит так (черта над функционалом означает переход к конечно-разностной форме)

$$\bar{M}_\eta^\alpha(z) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{m}[\sum_{j=1}^{n} K_{i,j}^{h} z_j h_s - u_i^{\delta}]^2 h_x + \alpha(\sum_{j=1}^{n} z_j^2 h_s + \sum_{j=2}^{n}(z_j - z_{j-1})^2 h_s^{-1}).$$

Здесь $\bar{M}_\eta^\alpha(z)$, $z = (z, \dots, z_n)^* \in R^n$ является уже выпуклой квадратичной функцией переменных $z_1, \dots, z_n$. Точка минимума этой функции удовлетворяет, естественно, системе n линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\bar{M}_\eta^\alpha(z) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Расписывая эти равенства подробнее, имеем

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\bar{M}_\eta^\alpha(z) = h_x h_s \sum_{k=1}^{n}[\sum_{i=1}^{m} K_{i,k}^{h} K_{i,1}^{h}] z_k +$$

$$+\alpha h_s z_1 - \alpha\frac{z_2 - z_1}{h_s} - \sum_{i=1}^{m} K_{i,1}^{h} u_i^{\delta} h_x = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\bar{M}_\eta^\alpha(z) = h_x h_s \sum_{k=1}^{n}[\sum_{i=1}^{m} K_{i,k}^{h} K_{i,j}^{h}] z_k +$$

$$+\alpha h_s z_j - \alpha\frac{z_{j-1} - 2z_j + z_{j+1}}{h_s} - \sum_{i=1}^{m} K_{i,j}^{h} u_i^{\delta} h_x = 0,$$

$$j = 2, \dots, n-1,$$

$$\frac{\partial}{\partial z_n}\bar{M}_\eta^\alpha(z) = h_x h_s \sum_{k=1}^{n}[\sum_{i=1}^{m} K_{i,k}^{h} K_{i,n}^{h}] z_k +$$

$$+\alpha h_s z_n - \alpha\frac{z_{n-1} - z_n}{h_s} - \sum_{i=1}^{m} K_{i,n}^{h} u_i^{\delta} h_x = 0.$$

Введя обозначения

$$h_x \sum_{i=1}^{m} K_{i,k}^{h} K_{i,j}^{h} \equiv b_{j,k}, \quad \sum_{i=1}^{m} K_{i,j}^{h} u_i^{\delta} h_x \equiv f_j,$$

последние n равенств можно переписать в компактной матричной форме

$$(B + \alpha C)z = f, \tag{2.5.12}$$

где

$$B \equiv \{b_{j,k}\}, \; j,k = 1, \dots, n, \quad f = (f_1, \dots, f_n)^*,$$

$$C \equiv \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{h_s^2} & -\frac{1}{h_s^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h_s^2} & 1 + \frac{1}{h_s^2} & -\frac{1}{h_s^2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{h_s^2} & 1 + \frac{1}{h_s^2} \end{pmatrix}.$$

Решение системы (2.5.12) дает конечно-разностную аппроксимацию элемента z_η^α. Следует отметить, что к системе уравнений (2.5.12) мы можем прийти и в том случае, когда будем записывать конечно-разностную аппроксимацию уравнения Эйлера.

Итак, мы обсудили, по сути дела, три разных подхода к приближенному нахождению того элемента, который минимизирует сглаживающий функционал M_η^α. Первый способ заключается в непосредственной минимизации сглаживающего функционала и переход к конечно-разностной форме происходит здесь в соотношениях, определяющих выбранный метод минимизации в функциональном пространстве на основе явной формулы для градиента (в данном случае – в пространстве $V_2^1[a,b]$). Второй – в конечно-разностной аппроксимации краевой задачи (2.5.11) для интегродифференциального уравнения Эйлера и последующем решении получающейся при этом линейной алгебраической системы. И, наконец, третий – в переходе к конечноразностной аппроксимации сразу в сглаживающем функционале и последующем решении уже конечномерной задачи минимизации.

Список литературы

[1] Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1989. – 200 с.

[2] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. – 520 с.

[3] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. – 400 с.

[4] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

[5] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. – 512 с.

[6] Гончарский А.В., Черепащук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978. – 336 с.

[7] Гончарский А.В., Черепащук А.М., Ягола А.Г. Некорректные задачи астрофизики. М.: Наука, 1985. – 352 с.

[8] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. – 752 с.

[9] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. – 280 с.

[10] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. – 544 с.

[11] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1976. – 216 с.

[12] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. – 520 с.

[13] Математическая энциклопедия Т.1. М.: Советская энциклопедия, 1977. – 1152 стб.

[14] Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990. – 488 с.

[15] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. – 480 с.

[16] Некорректные задачи естествознания / Под ред. А.Н. Тихонова, А.В. Гончарского. М.: Изд-во МГУ, 1987. – 304 с.

[17] Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988. – 264 с.

[18] Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. – 512 с.

[19] Преображенский Н.Г., Пикалов В.В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. Новосибирск: Наука, 1982. – 238 с.

[20] Привалов И.И. Интегральные уравнения. М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 248 с.

[21] Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1982. – 272 с.

[22] Смирнов Н.С. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. Л.: ГРОТЛ, 1936. – 124 с.

[23] Сумин М.И. Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов: Учебное пособие. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2009. – 289 с.

[24] Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. – 328 с.

[25] Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. – 1963. – Т.151. є 3. – С. 501–504.

[26] Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. – 1963. – Т.153. є 1. – С. 49–52.

[27] Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН. Нов. сер. – 1943. – Т.39. є 5. – С. 195–198.

[28] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. – 288 с.

[29] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987. – 160 с.

[30] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. – 200 с.

[31] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. – 232 с.

[32] Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной математике. М.: Наука, 1984. – 192 с.

[33] Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. М.: Машиностроение, 1990. – 264 с.

[34] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. – 724 с.

[35] Толстов Г.П. Ряды Фурье.М.: Наука, 1980. – 384 с.

[36] Функциональный анализ (сер. “Справочная математическая библиотека”) / Под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972. – 544 с.

[37] Ekeland I. On the Variational Principle // J. Math. Anal. Appl. – 1974. – V.47. No.2. – P. 324–353.

[38] Hadamard J. Le problème de Caucy et les èquations aux derivees partielles linèaires hyperbolicues. Paris: Hermann, 1932 [Рус. перевод: Адамар Ж. – Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. – 352 с.].

[39] Loewen P.D. Optimal control via nonsmooth analysis. CRM Proceedings and Lecture Notes. V.2. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993. – 153 p.

Оглавление

Михаил Иосифович **Сумин**

Метод регуляризации А.Н. Тихонова для решения операторных уравнений первого рода

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского".
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.