МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

М.И. Сумин

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А.Н. ТИХОНОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.01 “Математика”,
02.03.01 “Математика и компьютерные науки”

Нижний Новгород
2016

УДК 517.983.54+519.853
ББК В102.164+В161.8
С89

С89 Сумин М.И. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А.Н. ТИХОНОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. — 35 с.

Рецензент: к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ИИТММ **А.Л. Калашников**

В учебно-методическом пособии рассматриваются элементы теории методов решения некорректно поставленных задач, имеющей важное значение в развитии современного естествознания и лежащей в основе получения многих новых знаний об окружающем нас мире. Подробно излагается классический метод регуляризации А.Н. Тихонова применительно к решению оптимизационных задач. Приводится достаточно обширный вспомогательный материал, лежащий в основе методов решения некорректных задач.

Предназначено для знакомства студентов старших курсов бакалавриата с основами теории методов решения некорректных задач.

УДК 517.983.54+519.853
ББК В102.164+В161.8

Введение

Настоящее учебно-методическое пособие посвящено изучению методов регуляризации для решения некорректных задач. Некорректно поставленные задачи возникают естественным образом при решении самых разнообразных прикладных задач, а также при исследованиях в области математической теории. Некорректно поставленные задачи или, другими словами, задачи, неустойчивые по отношению к погрешностям в их исходных данных, отличаются тем, что сколь угодно малые изменения в этих исходных данных могут приводить и приводят к произвольно большим изменениям решений таких задач.

Важнейшим классом некорректных задач, возникающих в самых разнообразных приложениях, служит обширнейший класс оптимизационных задач, для которых свойство неустойчивости по отношению к возмущениям их исходных данных является характерным. Настоящее учебно-методическое пособие знакомит читателей с методом регуляризации А.Н. Тихонова для решения задач оптимизации общего вида в гильбертовом пространстве.

Пособие состоит из двух основных разделов. В первом из них излагаются базовые понятия теории некорректных оптимизационных задач и необходимые теоретические факты. Второй посвящен знакомству с собственно методом регуляризации А.Н. Тихонова для решения задач оптимизации и оптимального управления.

При написании учебно-методического пособия существенным образом использовались книги:

[3] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

[4] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002,

а также учебное пособие:

[18] Сумин М.И. Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов: Учебное пособие. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2009.

Глава 1

Базовые понятия теории некорректных оптимизационных задач и необходимые теоретические факты

Первая глава учебного пособия посвящена знакомству с основными понятиями теории некорректных оптимизационных задач задач. В ней, прежде всего, вводятся и обсуждаются определения корректно и некорректно поставленных оптимизационных задач, приводятся примеры некорректных задач. Глава завершается весьма подробным обсуждением необходимых для понимания основного материала теоретических сведений из теории функций, функционального анализа, интегральных и дифференциальных уравнений, нелинейного анализа и теории оптимизации.

1.1. Необходимые теоретические сведения из различных математических дисциплин

В основе теории и методов решения некорректных задач лежат самые различные факты из теории функций, функционального анализа, теории интегральных и дифференциальных уравнений, нелинейного анализа и теории оптимизации. В данном разделе формулируются все необходимые факты для изучения теории и методов решения некорректных задач в рамках настоящего пособия.

1.1.1. Необходимые сведения из теории функций

Напомним сначала необходимые определения и факты из теории функций вещественной переменной (см., например, [7, 12]).

Определение 1.1.1. *Конечная функция $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, называется абсолютно-непрерывной, если каковы бы ни были система интервалов*

$$(\alpha_i, \beta_i) \subset [a, b], \quad \alpha_i < \beta_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, n, \ \ \bigcap_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i) = \emptyset,$$

и натуральное n, по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\sum\limits_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i) \leqslant \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n}|z(\beta_i) - z(\alpha_i)| \leqslant \varepsilon$.

Хорошо известен следующий критерий абсолютной непрерывности.

Лемма 1.1.1. *Непрерывная функция $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, является абсолютно-непрерывной тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде*

$$z(s) = z(a) + \int_a^s f(s)ds,$$

где f – суммируемая на $[a, b]$ функция, т.е. $f \in L_1(a, b)$.

Непосредственным следствием этой леммы являются следующие две.

Лемма 1.1.2. *Если функция $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, абсолютно-непрерывна, то она имеет при почти всех $s \in [a, b]$ производную $z'(s)$, причем эта производная суммируема на $[a, b]$.*

Лемма 1.1.3. *Для абсолютно-непрерывной функции $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, имеет место равенство*

$$z(s) = z(a) + \int_a^s z'(s)ds.$$

1.1.2. Необходимые сведения из функционального анализа

Примем прежде всего некоторые стандартные для функционального анализа обозначения.

Пусть Z, U – линейные нормированные пространства, $A : Z \to U$ – линейный ограниченный оператор. В этом случае, как известно, вся совокупность линейных ограниченных операторов из Z в U, которая обозначается через $L(Z, U)$, образует также линейное нормированное пространство с нормой

$$\|A\| \equiv \|A\|_{Z\to U} \equiv \sup_{\|z\|\neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|} = \sup_{\|z\|\leqslant 1} \frac{\|Az\|}{\|z\|},$$

а расстояние между двумя линейными ограниченными операторами A_1, A_2 задается формулой

$$\rho(A_1, A_2) \equiv \|A_1 - A_2\|.$$

Через $D(A)$ и $R(A)$ обозначаем соответственно область определения и область значений оператора $A : Z \to U$. Оператор $A : Z \to U$ называется инъективным, если из равенства $Az_1 = Az_2$ следует, что $z_1 = z_2$.

Приводимые ниже классические определения и факты могут быть найдены в стандартных учебниках по функциональному анализу [5, 7, 10, 22].

Определение 1.1.2. *Множество M из линейного нормированного пространства называется компактным (компактом), если из любой бесконечной последовательности его элементов можно выделить сходящуюся к некоторой его точке подпоследовательность.*

Определение 1.1.3. *Оператор $A : Z \to U$ называется вполне непрерывным, если замыкание $\operatorname{cl} AX \equiv \overline{AX}$ образа ограниченного множества $X \subset Z$ является компактным множеством.*

Центральное внимание в пособии мы уделяем так называемым абстрактным (операторным) уравнениям первого рода на паре гильбертовых пространств Z, U

$$Az = u,$$

где $A \in L(Z, U)$, $u \in U$ – заданные оператор и элемент. В случае разрешимости такого уравнения для некоторой правой части $u \in U$ минимальное по норме среди всех его решений называется нормальным, оно существует и единственно (см. ниже необходимые сведения из теории оптимизации).

Везде ниже знак $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будет использоваться для обозначения скалярного произведения в гильбертовом пространстве.

Определение 1.1.4. *Пусть H – гильбертово пространство. Последовательность $z_n \in H$, $n = 1, 2, \ldots$, называется слабо сходящейся к элементу $z_0 \in H$, если для любого элемента $z \in H$ выполняется предельное соотношение $\langle z_n, z \rangle \to \langle z_0, z \rangle$, $n \to \infty$. Указанную слабую сходимость будем обозначать символом $z_n \xrightarrow{w} z_0$.*

Теорема 1.1.1. *Замкнутое выпуклое множество M, принадлежащее гильбертову пространству H, является слабо замкнутым, т.е. любая принадлежащая ему слабо сходящаяся последовательность $z_n \in M$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к некоторой его точке $z_0 \in M$.*

Теорема 1.1.2. *Ограниченное замкнутое выпуклое множество M в гильбертовом пространстве H является слабо компактным, т.е. из любой принадлежащей ему бесконечной последовательности $z_n \in M$, $n = 1, 2, \ldots$, можно извлечь слабо сходящуюся к некоторой его точке $z_0 \in M$ подпоследовательность $z_{n_k} \in M$, $k = 1, 2, \ldots$.*

Определение 1.1.5. *Функционал $f : H \to R^1$, заданный на гильбертовом пространстве H называется полунепрерывным (слабо полунепрерывным) снизу в точке $z_0 \in H$, если из сходимости $z_n \longrightarrow z_0$ ($z_n \xrightarrow{w} z_0$) следует неравенство $\varliminf\limits_{n\to\infty} f(z_n) \geqslant f(z_0)$.*

Оказывается справедливой следующая важная

Лемма 1.1.4. *Выпуклый непрерывный функционал в гильбертовом пространстве в каждой точке слабо полунепрерывен снизу.*

Вспомним здесь еще один важный для нас факт из функционального анализа, который сформулируем также в виде леммы.

Лемма 1.1.5. (*H-свойство гильбертова пространства*). *Из слабой сходимости $z_n \xrightarrow{w} z_0, n \to \infty$ и сходимости норм $\|z_n\| \to \|z_0\|, n \to \infty$, в гильбертовом пространстве H следует сильная сходимость $\|z_n - z_0\| \to 0, n \to \infty$ (топологии слабой и сильной сходимости на единичной сфере гильбертова пространства совпадают).*

Наиважнейшее значение для нас будет иметь также понятие производной в смысле Фреше функционала в гильбертовом пространстве. Напомним соответствующее определение.

Определение 1.1.6. *Производной в смысле Фреше (или градиентом) нелинейного функционала $f : H \to R^1$ на гильбертовом пространстве H называется элемент $f'[z] \in H$, для которого справедливо равенство*

$$f(z + h) - f(z) = \langle f'[z], h \rangle + o(\|h\|),$$

где $o(\|h\|)/\|h\| \to 0$ при $\|h\| \to 0$, $\langle z_1, z_2 \rangle$ – скалярное произведение в пространстве H.

Справедлива следующая лемма, обобщающая хорошо известную теорему классического конечномерного анализа.

Лемма 1.1.6. *Если функционал $f : H \to R^1$, заданный на гильбертовом пространстве H, дифференцируем в смысле Фреше в точке $z_0 \in H$ и достигает в ней минимального значения на H, то $f'(z_0) = 0$.*

Нам понадобится также следующая теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

Теорема 1.1.3. *Пусть $f : H \to R^1$ – линейный непрерывный функционал на гильбертовом пространстве H. Тогда найдется такой единственный элемент $z_f \in H$, что справедливо представление: $f(z) \equiv \langle z_f, z\rangle \; \forall\, z \in H$.*

В теории методов регуляризации часто (см., например, [20]) в качестве функционального пространства, в котором ищется решение некорректной задачи, используется гильбертово пространство $W_2^1(a,b)$ (классов эквивалентности) функций $f : (a,b) \to R^1$, суммируемых с квадратом и имеющих суммируемые с квадратом обобщенные в смысле Соболева производные первого порядка $f' : (a,b) \to R^1$. Скалярное произведение в нем задается равенством

$$\langle f_1, f_2\rangle \equiv \int_a^b (f_1(s)f_2(s) + f_1'(s)f_2'(s))ds.$$

В связи с пространством $W_2^1(a,b)$, напомним, что суммируемая на (a,b) функция f' называется обобщенной производной первого порядка в смысле Соболева суммируемой на (a,b) функции f, если для любой бесконечно дифференцируемой и финитной на (a,b) (т.е. равной нулю вне некоторого отрезка $[c,d] \subset (a,b)$) функции φ имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\frac{d\varphi}{dx}dx = -\int_a^b f'(x)\varphi(x)dx.$$

В данном учебном пособии в качестве пространства решений в силу одномерности интервала (a,b) нам будет удобнее вместо пространства $W_2^1(a,b)$ использовать гильбертово пространство абсолютно-непрерывных функций $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, (обычные) производные которых существуют для почти всех $s \in (a,b)$ и суммируемы с квадратом, т.е. $z' \in L_2[a,b]$, а скалярное произведение задается равенством

$$\langle z_1, z_2\rangle \equiv \int_a^b (z_1(s)z_2(s) + z_1'(s)z_2'(s))ds.$$

Это гильбертово пространство обозначим через $V_2^1[a,b]$. Скалярное произведение $\langle z_1, z_2\rangle$ стандартным образом порождает, очевидно, норму в пространстве $V_2^1[a,b]$: $\|z\| \equiv \sqrt{\langle z, z\rangle}$. Подчеркнем, что при определении пространства $V_2^1[a,b]$ используется лишь понятие обычной производной функции одного переменного. Заметим также, что в каждом классе эквивалентности $f \in W_2^1(a,b)$ присутствует ровно одна абсолютно-непрерывная на $[a,b]$ функция $f \in V_2^1[a,b]$ и, наоборот, каждая абсолютно-непрерывная на $[a,b]$ функция $f \in V_2^1[a,b]$ порождает класс эквивалентности (функцию) $f \in W_2^1[a,b]$.

1.1.3. Необходимые сведения из теории интегральных уравнений

При рассмотрении интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода важно иметь предсталение о том когда и как оно разрешимо. В то же время, теория интегральных уравнений 1-го рода, как правило, не излагается сколь-нибудь подробно в современных доступных книгах по интегральным уравнениям. С этой целью сформулируем и докажем здесь классическую теорему Пикара (см., например, [8, 15, 16]) существования и единственности решения линейного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$\int\limits_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{1.1.1}$$

Решение этого уравнения будем искать в классе $L_2[a,b]$. Будем считать, что правая часть $u(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, суммируема с квадратом, а ядро $K(\cdot,\cdot)$ непрерывно в прямоугольнике $\Pi \equiv \{a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant s \leqslant b\}$ и является симметрическим, т.е. выполняется равенство $K(x,s) = K(s,x)$. Заметим при этом, что всякое интегральное уравнение вида

$$\int\limits_a^b \bar{K}(x,s)z(s)ds = \bar{u}(x), \quad c \leqslant x \leqslant d, \tag{1.1.2}$$

может быть сведено к уравнению вида (1.1.1) с симметрическим ядром (см., например, [8, 15], а также [16, с. 56]). Действительно, умножим равенство (1.1.2) на $\bar{K}(x,y)$ и проинтегрируем по x от c до d. Тогда можем записать

$$u(y) = \int\limits_c^d \bar{K}(x,y)\bar{u}(x)dx = \int\limits_c^d \bar{K}(x,y)\int\limits_a^b \bar{K}(x,s)z(s)dsdx =$$

$$= \int\limits_c^d \int\limits_a^b \bar{K}(x,y)\bar{K}(x,s)z(s)dsdx =$$

$$= \int\limits_a^b (\int\limits_c^d \bar{K}(x,y)\bar{K}(x,s)dx)z(s)ds = \int\limits_a^b K(y,s)z(s)ds,$$

где

$$K(y,s) \equiv \int\limits_c^d \bar{K}(x,y)\bar{K}(x,s)dx$$

и справедливо равенство $K(y,s) = K(s,y)$, $a \leqslant y, s \leqslant b$.

Будем также считать это симметрическое ядро замкнутым (полным) (см. [8, 15, 16]). Ядро $K(\cdot,\cdot)$ мы называем замкнутым в классе $L_2(a,b)$, если каждая функция $\omega(\cdot)$ из этого класса, удовлетворяющая тождеству

$$\int\limits_a^b K(x,s)\omega(s)ds = 0, \quad a \leqslant s \leqslant b,$$

необходимо равна нулю почти всюду в интервале (a, b).

Последнее означает, в частности, что однородное ($u(x) = 0$, $a \leqslant x \leqslant b$) уравнение (1.1.1) имеет лишь тривиальное решение в классе $L_2[a, b]$.

Для формулировки теоремы Пикара нам потребуются следующие понятия (см. [8, 15, 21]).

Определение 1.1.7. *Фундаментальными числами и фундаментальными функциями ядра $K(\cdot, \cdot)$ называются числа λ_i и функции $\varphi_i \in L_2[a, b]$, $\varphi_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots$ такие, что*

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int\limits_a^b K(x, s)\varphi_i(s)ds, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Оказывается, для замкнутости ядра $K(\cdot, \cdot)$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующая система всех фундаментальных функций образовывала замкнутую в $L_2[a, b]$ ортонормированную систему (см. [8, 15, 21]). Напомним при этом, что ортонормированная система функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ из $L_2[a, b]$ называется замкнутой, если не существует никакой функции из $L_2[a, b]$, ортогональной ко всем функциям системы. При этом, как известно из теории рядов Фурье, для того, чтобы ортогональная и нормированная система φ_1, φ_2, $\dots, \varphi_n$, $\dots$ из $L_2[a, b]$ была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f \in L_2(a, b)$ выполнялось равенство Парсеваля

$$\int\limits_a^b f^2(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2,$$

где

$$c_i \equiv \int\limits_a^b f(x)\varphi_i(x)dx.$$

Напомним также одновременно, что для ортонормированной системы функций φ_1, φ_2, $\dots, \varphi_n$, $\dots$ из $L_2[a, b]$ и любой суммируемой на (a, b) с квадратом функции f справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqslant \int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Напомним, наконец, необходимую при доказательстве теоремы Пикара классическую теорему Фишера–Рисса.

Теорема 1.1.4. *Пусть заданы замкнутая ортонормированная система функций φ_1, φ_2, $\dots, \varphi_n$, $\dots$ из $L_2[a, b]$ и последовательность чисел a_1, $a_2, \dots, a_n, \dots$ такая, что ряд $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \dots$ сходится. Тогда существует единственная функция $f \in L_2[a, b]$, которая имеет числа a_i, $i = 1, 2, \dots$ своими коэффициентами Фурье относительно данной ортонормированной системы функций.*

После формулировки необходимых классических фактов мы можем сформулировать и доказать следующую теорему Пикара.

Теорема 1.1.5. *Интегральное уравнение (1.1.1) в случае симметрического и замкнутого ядра имеет единственное в классе $L_2[a, b]$ решение тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\lambda_1^2 u_1^2 + \lambda_2^2 u_2^2 + \dots + \lambda_n^2 u_n^2 + \dots,$$

где λ_i – фундаментальные числа ядра $K(\cdot,\cdot)$, u_i – коэффициенты Фурье правой части $u(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, по системе фундаментальных функций ядра $K(\cdot,\cdot)$, $i = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Покажем сначала необходимость сформулированного условия. Пусть $z \in L_2(a, b)$ – решение уравнения (1.1.1). Тогда имеем

$$u_i = \int_a^b u(x)\varphi_i(x)dx = \int_a^b \int_a^b K(x,s)\varphi_i(x)z(s)dxds = \tag{1.1.3}$$

$$= \frac{1}{\lambda_i}\int_a^b \varphi_i(s)z(s)ds,$$

так как

$$\int_a^b K(x,s)\varphi_i(x)dx = \frac{1}{\lambda_i}\varphi_i(s).$$

Равенство (1.1.3) можем записать в виде

$$\int_a^b \varphi_i(s)z(s)ds = \lambda_i u_i.$$

Таким образом, числа $\lambda_i u_i$ есть коэффициенты Фурье функции $z \in L_2(a, b)$ и в силу неравенства Бесселя ряд из квадратов коэффициентов $\lambda_i^2 u_i^2$ с необходимостью должен быть сходящимся. При этом очевидно

$$z(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \varphi_i(s),$$

причем ряд сходится в среднем.

Для доказательства достаточности сформулированного условия предположим, что ряд

$$\lambda_1^2 u_1^2 + \lambda_2^2 u_2^2 + \dots + \lambda_n^2 u_n^2 + \dots$$

сходится. Тогда по теореме Фишера–Рисса существует функция $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, и притом единственная в классе $L_2(a, b)$, удовлетворяющая равенствам

$$\int_a^b \varphi_i(s)z(s)ds = \lambda_i u_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

т.е. представимая в виде сходящегося в среднем ряда

$$z(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \varphi_i(s).$$

Покажем, что эта функция z и представляет собой решение уравнения (1.1.1), причем единственное в силу замкнутости ядра. Пусть

$$u^1(x) \equiv \int_a^b K(x,s) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \varphi_i(s)ds.$$

Можем записать

$$u_k^1 \equiv \int\limits_a^b u^1(x)\varphi_k(x)dx = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x,s)\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i u_i \varphi_i(s)ds\varphi_k(x)dx.$$

Меняя порядок интегрирования и суммирования, имеем

$$u_k^1 = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i u_i \int\limits_a^b \varphi_k(x)(\int\limits_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i u_i \int\limits_a^b \varphi_k(x)\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}dx = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \int\limits_a^b \varphi_k(x)\varphi_i(x)dx = u_k,$$

$$k = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, у функций $u(\cdot)$ и $u^1(\cdot)$ оказались одни и те же коэффициенты Фурье, откуда, в силу замкнутости системы функций $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots, \varphi_n,\ \ldots$ следует, что функции $u(\cdot)$ и $u^1(\cdot)$ совпадают почти всюду на (a,b). Так как они одновременно и непрерывны, то, стало быть, $u(x) = u^1(x)$ при всех $x \in [a,b]$. Теорема Пикара доказана.

1.1.4. Необходимые сведения из теории линейных алгебраических систем

Рассмотрим произвольную линейную алгебраическую систему

$$Az = u, \;\; z \in Z = R^n, \;\; u \in U = R^m, \tag{1.1.4}$$

где $z \equiv (z_1, \ldots, z_n)^*$, $u \equiv (u_1, \ldots, u_m)^*$ – векторы-столбцы, A – $(m \times n)$-матрица с элементами $a_{i,j}$, $A \equiv \{a_{i,j}\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Здесь n, m – любые фиксированные натуральные числа. Как хорошо известно, система (1.1.4) может быть однозначно разрешимой, вырожденной (и иметь бесчисленное множество решений) и несовместной. Метод регуляризации Тихонова (см. [18], [20]) подразумевает, что искомое решение исходного уравнения первого рода понимается в классическом смысле (равенство $Az^0 = u$ понимается как обычное равенство в пространстве U). Поэтому в случае несовместности системы (1.1.4) становится совершенно непонятно, какое отношение этот метод может иметь к ее "решению". Ситуация кардинально меняется, если ввести понятие обобщенного решения системы (1.1.4), которое имеет смысл для любой такой системы (с любыми n, m) и совпадает с классическим в случае его существования. Речь здесь идет о нормальном решении системы (1.1.4), имеющем смысл как в случае ее совместности, так и несовместнсти. Для введения понятия нормального решения прежде всего нам необходимо вспомнить классический результат из линейной алгебры, каковым является следующая теорема Фредгольма.

Теорема 1.1.6. *Система, состоящая из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $A\xi = b$, совместна тогда и только тогда, когда каждое решение транспонированной однородной системы $A^*\eta = 0$ ортогонально правой части b исходной системы.*

Напомним, что нормальной системой относительно исходной системы (1.1.4) называется система
$$A^*Az = A^*u. \tag{1.1.5}$$
Ее главным свойством является то, что она всегда совместна какова бы ни была исходная система (1.1.4).

Лемма 1.1.7. *Система (1.1.5) всегда совместна какова бы ни была матрица A.*

Доказательство. Матрица A^*A – симметрична и по этой причине транспонированная однородная система для системы (1.1.5) имеет вид
$$A^*Ay = 0.$$
Для любого решения этой системы имеют место равенства, последовательно вытекающие одно из другого
$$0 = y^*A^*Ay \Rightarrow (Ay)^*(Ay) = 0 \Rightarrow$$
$$Ay = 0 \Rightarrow u^*Ay = 0 \Rightarrow (u^*Ay)^* = 0 \Rightarrow$$
$$(Ay)^*u = 0 \Rightarrow y^*A^*u = 0.$$
Последнее из них означает, что для системы (1.1.5) выполнено условие теоремы Фредгольма и, стало быть, она совместна.

Определение 1.1.8. *Псевдорешением линейной алгебраической системы (1.1.4) или, другими словами, решением системы (1.1.4) по методу наименьших квадратов (МНК) называется вектор, минимизирующий невязку $|Az - u|^2$ на всем пространстве R^n.*

Понятно, что в случае совместности системы (1.1.4) множество всех ее псевдорешений совпадает со множеством всех ее решений в классическом смысле.

Лемма 1.1.8. *Псевдорешения всегда существуют.*

Доказательство. Функция $f(z) \equiv |Az - u|^2$ является, очевидно, выпуклой и непрерывно дифференцируемой на R^n. Непосредственное вычисление ее градиента дает
$$f'(z) = 2(A^*Az - A^*u).$$
Поскольку критерием оптимальности в случае выпуклой и непрерывно дифференцируемой функции является зануление ее градиента, то необходимым и достаточным условием того, чтобы некоторая точка z_0 минимизировала невязку $f(z)$, является равенство
$$A^*Az - A^*u = 0.$$
Но такая система, являющаяся нормальной для линейной алгебраической системы (1.1.4), всегда совместна и, значит, по этой причине псевдорешения всегда существуют.

Более того, любое обычное решение нормальной системы (1.1.5) зануляет градиент выпуклой непрерывно дифференцируемой невязки $f(z) \equiv |Az - u|^2$ и, значит, минимизирует ее, т.е. является псевдорешением системы (1.1.4). И, наоборот, любое псевдорешение системы (1.1.4), минимизируя выпуклую невязку, зануляет ее градиент и, тем самым, является решением в обычном смысле нормальной системы (1.1.5). Таким образом, справедлива

Лемма 1.1.9. *Множество всех псевдорешений системы (1.1.4) и множество всех решений в обычном смысле нормальной системы (1.1.5) совпадают.*

Обозначим через F_A совокупность всех псевдорешений системы (1.1.4). Очевидно, множество F_A как множество всех обычных решений линейной нормальной системы (1.1.5), выпукло и замкнуто. Поэтому сильно выпуклая функция $|z|^2$, $z \in F_A$ достигает на нем минимума, причем только в одной точке (см. раздел 1.1.7). Это обстоятельство приводит нас к следующему важному определению.

Определение 1.1.9. *Нормальным решением системы (1.1.4) называется псевдорешение z^0 с минимальным (евклидовым) модулем*

$$|z^0|^2 = \min_{z \in F_A} |z|^2.$$

Таким образом, предшествующие этому определению рассуждения приводят к следующим двум важным леммам.

Лемма 1.1.10. *Нормальное решение для любой линейной алгебраической системы (1.1.4) существует и единственно.*

Лемма 1.1.11. *Нормальные решения линейных алгебраических систем (1.1.4) и (1.1.5) совпадают, причем нормальное решение системы (1.1.5) является ее решением в обычном смысле.*

Итак, в силу последней леммы поиск нормального решения системы (1.1.4) можно заменить поиском нормального обычного решения совместной нормальной системы (1.1.5).

1.1.5. Необходимые сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(x, u(t), t), \;\; x(0) = x_0, \;\;\; t \in [0, T], \;\; x \in R^n, \tag{1.1.6}$$

в которой правая часть $f: \; R^n \times R^m \times [0, T]$ удовлетворяет условию: функции f, $\nabla_x f$ измеримы в смысле Лебега на $R^n \times R^m \times R^1$ по совокупности (x, u, t) и непрерывны на $R^n \times R^m$ при почти всех $t \in [0, T]$. Здесь $u(\cdot)$ – заданная на отрезке $[0, T]$ и измеримая по Лебегу векторная функция со значениями в R^m. Такие векторные функции называются, в соответствии со сложившейся в математической теории оптимального управления традицией, управлениями. Обычно в качестве класса допустимых управлений рассматриваются те управления, которые принимают свои значения в некотором компактном множестве $U \subset R^m$. Класс таких допустимых управлений обозначим через $\mathcal{D}$.

Поскольку в теории оптимального управления используются абсолютно-непрерывные решения обыкновенных дифференциальных уравнений, то рассмотрим сначала необходимые определения и факты из теории таких решений.

Определение 1.1.10. *Абсолютно-непрерывная функция $x: \; [0, T] \to R^n$ называется соответствующим управлению $u(t)$, $t \in [0, T]$, абсолютно-непрерывным решением векторного обыкновенного дифференциального уравнения в (1.1.6), если при* *почти всех* $t \in [0,T]$ *имеет место равенство*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t).$$

Если к тому же выполняется и начальное условие (1.1.6), то эта функция называется соответствующим управлению $u(t),\ t \in [0,T]$, *абсолютно-непрерывным решением задачи Коши (1.1.6).*

Наиважнейшее значение в теории оптимального управления имеют две следующие теоремы – теорема устойчивости и теорема глобального существования решения.

Теорема 1.1.7. *Если управлению* $u^0 \in \mathcal{D}$ *отвечает (единственное) абсолютно-непрерывное решение* $x[u^0],\ t \in [0,T]$, *задачи Коши (1.1.6), то существует такое число* $\varepsilon^* > 0$, *что для любого управления* $u \in \mathcal{D}$, *для которого выполняется неравенство*

$$\|f(x[u^0](\cdot), u^0(\cdot), \cdot) - f(x[u^0](\cdot), u(\cdot), \cdot)\|_{1,[0,T]} \leqslant \varepsilon^*,$$

существует (единственное) решение $x[u],\ t \in [0,T]$, *задачи Коши (1.1.6) и справедлива априорная оценка*

$$|x[u] - x[u^0]|^{(0)}_{[0,T]} \leqslant$$
$$\leqslant \mu \|f(x[u^0](\cdot), u^0(\cdot), \cdot) - f(x[u^0](\cdot), u(\cdot), \cdot)\|_{1,[0,T]},$$

в которой постоянная $\mu > 0$ *не зависит от* $u \in \mathcal{D}$.

Теорема 1.1.8. *Если*

$$|f(x,u,t)| \leqslant K(1+|x|)\ \ \forall\, x \in R^n,\ u \in U,\ t \in [0,T], \quad K > 0, \tag{1.1.7}$$

то решение задачи Коши (1.1.6) существует (единственное) на отрезке $[0,T]$ *при любом управлении* $u \in \mathcal{D}$. *Все эти решения на отрезке* $[0,T]$ *равномерно по* $u \in \mathcal{D}$ *ограничены:*

$$|x[u]|^{(0)}_{[0,T]} \leqslant |\xi| + KT\exp\{KT\}\ \ \forall\, u \in \mathcal{D}.$$

Замечание 1.1.1. *Легко видеть, что условие (1.1.7) заведомо выполняется, например для аффинных по* x *уравнений*

$$\dot{x} = A(t)x + \bar{B}(u(t), t)$$

с непрерывной по t $(n \times n)$*-матрицей и непрерывной по* (u,t) *функцией* $\bar{B} : R^m \times [0,T] \to R^n$. *В частности, функция* $\bar{B}$ *может быть аффинна по* u: $\bar{B}(u,t) \equiv B(t)u + c(t)$, *где можно для простоты считать* B *непрерывной по* t $(n \times m)$*-матрицей,* c *– непрерывной* n*-мерной векторной функцией.*

Более подробные необходимые сведения о свойствах существования, единственности и устойчивости абсолютно-непрерывных решений обыкновенных дифференциальных уравнений можно найти, например, в [1, 17].

1.1.6. Необходимые сведения из выпуклого, а также нелинейного (негладкого) анализа

Приводимые ниже определения и факты из выпуклого и нелинейного (негладкого) анализа могут быть найдены в [6, 13, 14, 23]. Заметим, что ниже без дополнительных оговорок мы будем заданные на гильбертовом пространстве функционалы называть также, когда это удобно, функциями.

Определение 1.1.11. *Функционал $f : D \to R^1$, заданный на выпуклом множестве D гильбертова пространства H, называется выпуклым, если $\forall\, z_1,\ z_2 \in D,\ \alpha \in [0,1]$ справедливо неравенство*

$$f(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) \leqslant \alpha f(z_1) + (1-\alpha) f(z_2).$$

Если в последнем неравенстве знак $\leqslant$ сменить на $\geqslant$, то функционал f называется вогнутым на D.

В выпуклом, да и в негладком (нелинейном) анализе оказалось очень удобным соглашение о том, что функции могут принимать и бесконечные значения, а именно $+\infty$. Последнее не противоречит данному выше определению. Выпуклый функционал $f : D \to R^1$ с учетом этого замечания можно считать заданным на всем пространстве H, допуская в этом случае для него значения $+\infty$ и сохраняя обозначение функции f:

$$f(z) = \begin{cases} f(z),\ z \in D, \\ +\infty,\ z \in H,\ z \notin D. \end{cases}$$

С учетом отмеченного обстоятельства данное выше определение можно переписать так.

Определение 1.1.12. *Функционал $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$ называется выпуклым, если $\forall\, z_1,\ z_2 \in H,\ \alpha \in [0,1]$, справедливо неравенство*

$$f(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) \leqslant \alpha f(z_1) + (1-\alpha) f(z_2).$$

Если функционал f принимает хотя бы в одной точке конечное значение, то он называется собственным.

Наиважнейшее значение в выпуклом и нелинейном анализе имеют понятия надграфика и эффективного множества функции.

Определение 1.1.13. *Пусть в гильбертовом пространстве H задан функционал $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$. Надграфиком f называется множество*

$$\operatorname{epi} f \equiv \{(z, \alpha) \in H \times R^1 :\ f(z) \leqslant \alpha\}.$$

Определение 1.1.14. *Пусть в гильбертовом пространстве H задан функционал $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$. Эффективным множеством f называется множество*

$$\operatorname{dom} f \equiv \{z \in H :\ f(z) < +\infty\}.$$

Справедливы следующие наиважнейшие свойства, с помощью которых ниже мы свяжем дифференциальные свойства функций с понятиями нормалей к их надграфикам.

Лемма 1.1.12. *Функционал $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$, заданный на гильбертовом пространстве H, является выпуклым тогда и только тогда, когда его надграфик $\operatorname{epi} f$ есть выпуклое множество.*

Лемма 1.1.13. *Функционал $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$, заданный на гильбертовом пространстве H, является полунепрерывным снизу тогда и только тогда, когда его надграфик $\operatorname{epi} f$ есть замкнутое множество.*

Определение 1.1.15. *Функционал $f : D \to R^1$, заданный на выпуклом множестве D гильбертова пространства H, называется сильно выпуклым (сильно* *вогнутым) с постоянной $\varkappa > 0$, если $\forall\, z_1,\, z_2 \in D,\ \ \alpha \in [0,1]$, справедливо неравенство*

$$f(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) \overset{(\geqslant)}{\leqslant} \alpha f(z_1) + (1-\alpha)f(z_2) \overset{(+)}{-} \varkappa\alpha(1-\alpha)\|z_1 - z_2\|^2.$$

Оказывается, выпуклость функционала определяет автоматически некоторые его важные дополнительные свойства. Справедлива, в частности,

Лемма 1.1.14. *Предположим, что на выпуклом множестве D гильбертова пространства H задан выпуклый ограниченный функционал f. Если внутренность $\operatorname{int} D$ множества D не пуста, то f – локально липшицев (а, значит, и непрерывный) функционал на $\operatorname{int} D$. Напомним одновременно, что функционал называется локально липшицевым на множестве D, если он удовлетворяет условию Липшица в окрестности любой точки $z \in D$ (при этом, вообще говоря, постоянная Липшица зависит от точки z).*

Следующие две леммы представляют собой соответственно первый и второй критерии сильной выпуклости в классе дифференцируемых функций.

Лемма 1.1.15. *Функционал $f : H \to R^1$, заданный на гильбертовом пространстве H и дифференцируемый по Фреше на выпуклом множестве $D \subset H$, является сильно выпуклым на D с постоянной $\varkappa > 0$ тогда и только тогда, когда справедливо неравенство*

$$f(z_2) \geqslant f(z_1) + \langle f'(z_1), z_2 - z_1\rangle + \frac{\varkappa}{2}\|z_2 - z_1\|^2 \ \forall\, z_1,\, z_2 \in D.$$

Лемма 1.1.16. *Функционал $f : H \to R^1$, заданный на гильбертовом пространстве H и дифференцируемый по Фреше на выпуклом множестве $D \subset H$, является сильно выпуклым на D с постоянной $\varkappa > 0$ тогда и только тогда, когда справедливо неравенство*

$$\langle f'(z_2) - f'(z_1), z_2 - z_1\rangle \geqslant 2\varkappa\|z_2 - z_1\|^2 \ \forall\, z_1,\, z_2 \in D.$$

В следующей лемме сформулировано важное характеристическое свойство сильно выпуклых функций, заключающееся в возможности для них оценить сверху отклонение некоторой точки от точки минимума функции через отклонение ее значений в этих точках.

Лемма 1.1.17. *Пусть на выпуклом замкнутом множестве D гильбертова пространства H задан сильно выпуклый с постоянной $\varkappa > 0$ функционал $f : D \to R^1$ и $z^* \in D$ – его точка минимума на этом множестве. Тогда для любой точки $z \in D$ справедлива оценка*

$$\varkappa\|z - z^*\|^2 \leqslant f(z) - f(z^*).$$

1.1.7. Необходимые сведения из теории оптимизации

Приводимые в данном разделе факты из теории оптимизации и теории двойственности могут быть найдены в [2, 3, 4, 6, 11, 13, 14, 19]. Прежде всего введем следующие традиционные для теории оптимизации обозначения. Символы $\operatorname*{argmin}_{z\in D} f(z)$, $\operatorname*{argmax}_{z\in D} f(z)$ представляют собой стандартные обозначения множеств точек минимума и максимума функции f на множестве D:

$$\operatorname*{argmin}_{z\in D} f(z) \equiv \{z^* \in D :\ f(z^*) = \min_{z\in D} f(z)\},$$

$$\underset{z \in D}{\operatorname{argmax}} f(z) \equiv \{z^* \in D : f(z^*) = \max_{z \in D} f(z)\}.$$

Начнем со следующих двух фактов, касающихся наиважнейших свойств экстремальных точек сильно выпуклых функционалов.

Теорема 1.1.9. *Непрерывный сильно выпуклый функционал на выпуклом замкнутом множестве гильбертова пространства достигает минимального значения, причем это значение достигается в единственной точке.*

Важным для нас следствием этой теоремы является

Следствие 1.1.1. *Если операторное уравнение*

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U,$$

где Z, U – гильбертовы пространства, $A : Z \to U$ – линейный непрерывный оператор, $u \in U$ – заданный элемент, разрешимо, то оно имеет единственное нормальное, т.е. минимальное по норме, решение. Это нормальное решение является решением задачи минимизации

$$\|z\|^2 \to \min, \quad z \in \{y \in Z : Ay = u\}.$$

Теорема 1.1.10. *Пусть задан сильно выпуклый функционал f на выпуклом замкнутом множестве D гильбертова пространства Z. Тогда из сходимости $f(z_n) \to \min_{z \in D} f(z)$ следует сходимость $\|z_n - z^*\| \to 0, n \to \infty$, где $z^* = \underset{z \in D}{\operatorname{argmin}} f(z)$.*

Глава 2

Метод регуляризации А.Н. Тихонова в оптимизации и оптимальном управлении

Метод регуляризации А.Н. Тихонова [20] для решения операторных уравнений первого рода подразумевают переход на определенном этапе решения к рассмотрению соответствующей оптимизационной задачи, являющейся в силу линейности уравнений квадратичной задачей минимизации. Однако, как и в случае уравнений первого рода, главной проблемой при решении оптимизационных задач является неустойчивость по отношению к погрешностям в их исходных данных. Другими словами, главной особенностью оптимизационных задач является их некорректность. В настоящем разделе мы остановим свое внимание на методе А.Н. Тихонова или, другими словами, методе стабилизации, применительно к более сложной ситуации линейно-выпуклых оптимизационных задач общего вида, вообще говоря, не являющихся задачами квадратичной оптимизации.

2.1. Некорректные оптимизационные задачи

Начнем изложение с определения наиважнейших базовых понятий и рассмотрим при этом ряд простых иллюстративных примеров.

2.1.1. Общие соображения и примеры

Прежде всего с целью строгого изучения вопросов, связанных с неустойчивостью оптимизационных задач, введем ряд важных понятий. Рассмотрим для этого задачу минимизации самого общего вида

$$f(z) \to \inf, \quad z \in \mathcal{D}, \tag{2.1.1}$$

где $\mathcal{D}$ – некоторое заданное множество, а $f : \mathcal{D} \to R^1$ – заданная на нем функция (функционал). Мы будем различать, как и в [4, 20] две принципиально разные ситуации, касающиеся формальной задачи минимизации (2.1.1).

Первая ситуация или, другими словами, постановка задачи связывается с так называемой задачей первого типа. Мы говорим о задаче первого типа тогда, когда имеем в виду поиск величины $f^* \equiv \inf\limits_{z\in\mathcal{D}} f(z)$, являющейся нижней гранью или, как еще принято говорить, значением задачи (2.1.1). В этом случае главным для нас является лишь построение минимизирующей последовательности в задаче (2.1.1), т.е. последовательности элементов $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, для которой выполняется предельное соотношение $f(z^i) \to f^*$, $i \to \infty$. Одновременно при этом нас не интересует, достигается ли нижняя грань f^* в каких-либо точках допустимого множества $\mathcal{D}$ или нет.

Вторая ситуация связывается с так называемой задачей второго типа. В этом случае мы интересуемся не только поиском нижней грани f^* для задачи (2.1.1) и конструированием соответствующей минимизирующей последовательности, но и поиском ее решения $z^* \in \mathcal{D}^* \equiv \{u \in \mathcal{D} : f(z) = f^*\}$, т.е. точки, в которой функция f принимает минимальное значение на множестве $\mathcal{D}$ и выполняется равенство $f(z^*) = f^*$. Подчеркнем, что гарантировать заранее в случае любой наперед заданной задачи (2.1.1) существование такой точки z^* нельзя. Существование точки, в которой достигается минимальное значение, зависит как от свойств множества $\mathcal{D}$, так и от свойств заданной на нем функции f.

К сожалению, получить точные решения задач первого и второго типа, т.е найти значение f^*, в случае задачи первого типа, и найти минимизирующий элемент z^*, в случае задачи второго типа, в практических задачах удается лишь в редких ситуациях. Поэтому, опять же в соответствии с [4, 20] дадим другие, более приближенные к практическим ситуациям формулировки задач первого и второго типов.

Задача первого типа. По заданной точности $\varepsilon > 0$ найти приближение f_ε^* к величине f^* такое, что

$$|f_\varepsilon^* - f^*| \leqslant \varepsilon. \tag{2.1.2}$$

Прежде, чем формулировать задачу второго типа, заметим, что в качестве интересующего нас приближенного решения задачи, т.е. приближения к некоторой точке z^*, разумно рассматривать любую точку $z_\varepsilon \in \mathcal{D}$, близкую в некотором подходящем смысле ко множеству $\mathcal{D}^*$ и для которой выполняется неравенство $|f(z_\varepsilon) - f^*| \leqslant \varepsilon$. Так как при постановке задачи (2.1.1) мы до сих пор не предполагали, что на множестве $\mathcal{D}$ введено понятие расстояния, то нам следует, прежде всего, точно определить как понимать близость точки z_ε к множеству $\mathcal{D}^*$. С целью определения такой близости введем на множестве $\mathcal{D}$ метрику и будем оценивать близость точки z_ε ко множеству $\mathcal{D}^*$ в этой метрике. Итак, пусть $\mathcal{D}$ – метрическое пространство с метрикой $d(\cdot,\cdot)$, а в качестве расстояния от точки $z_\varepsilon \in \mathcal{D}$ до множества $\mathcal{D}^*$ будем понимать, как это обычно принято, величину $d(z_\varepsilon, \mathcal{D}^*) \equiv \inf\limits_{z\in\mathcal{D}^*} d(z_\varepsilon, z)$.

Задача второго типа. По заданным точностям $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найти точку $z_{\varepsilon,\delta} \in \mathcal{D}$ такую, что

$$|f(z_{\varepsilon,\delta}) - f^*| \leqslant \varepsilon, \quad d(z_{\varepsilon,\delta}, \mathcal{D}^*) \leqslant \delta. \tag{2.1.3}$$

В "одной и той" же задаче минимизации (2.1.1) на множестве $\mathcal{D}$ могут быть введены, вообще говоря, разные метрики. Выбор подходящей метрики на $\mathcal{D}$ в практических задачах не является делом произвола. Он определяется спецификой конкретной задачи, особенностями ее исследования.

Для приближенного решения задачи первого типа достаточно с помощью того или иного алгоритма построить какую-либо минимизирующую последовательность (точнее говоря, достаточно большое количество ее элементов), такую, что

$$z^i \in \mathcal{D},\ i = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{i\to\infty} f(z^i) = f^*, \tag{2.1.4}$$

и в качестве искомой величины f^*_ε, удовлетворяющей неравенству (2.1.2), взять значение $f(z^i)$ с достаточно большим номером i. Можно надеяться, что представится возможность воспользоваться последовательностью (2.1.4) и при решении задачи второго типа. Как часто и бывает на практике, в качестве искомого приближения $z_{\varepsilon,\delta}$, удовлетворяющего соотношениям (2.1.3), представляется разумным также взять точку z^i с достаточно большим номером i. Однако на этом пути нас ожидают некоторые трудности принципиального характера, связанные с ответом на вопрос: будет ли такая точка z^i близка ко множеству $\mathcal{D}^*$ в выбранной и требуемой в данной прикладной задаче метрике. Рассмотрим несколько простых иллюстративных примеров.

Пример 2.1.1. *Пусть* $\mathcal{D} = R^1$*;* $f(z) = z^2(1+z^4)^{-1}$ *при* $z \geqslant 0$*,* $f(z) = 0$ *при* $z < 0$*. Очевидно, здесь нижняя грань* $f^* = 0$*, множество решений* $\mathcal{D}^* = \{z \in R^1 : z \leqslant 0\}$*. Последовательность* $z^k = k,\ k = 1, 2, \ldots$ *является минимизирующей, так как* $\lim\limits_{k\to\infty} f(z^k) = 0$*, но она не сходится к* $\mathcal{D}^*$ *в метрике* R^1 *и, более того,* $d(z^k, \mathcal{D}^*) = k \to \infty$*.*

Пример 2.1.2. *Пусть требуется минимизировать функционал*

$$f(u) \equiv \int\limits_0^1 x^2[u](t)dt,$$

где $x[u](\cdot)$ *– решение задачи Коши*

$$\dot{x} = u(t),\ \ x(0) = 0,\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

управление $u(t)$*,* $0 \leqslant t \leqslant 1$*, принадлежит множеству*

$$\mathcal{D} \equiv \{u \in L_\infty(0,1) : u(t) \in [-1,1]\,\text{почти всюду на}\ (0,1)\}.$$

Метрика на этом множестве пусть совпадает либо с метрикой $L_2(0,1)$*, либо с метрикой* $L_\infty(0,1)$*. Очевидно, в этой задаче* $f^* = 0$*, причем нижняя грань* f^* *достигается на управлении, равном нулю, и только на нем. Последовательность* $u^k(t) \equiv \sin(2\pi kt)$*,* $0 \leqslant t \leqslant 1$*,* $k = 1, 2, \ldots$*, является минимизирующей для этой задачи. Действительно,*

$$x[u^k](t) = (2\pi k)^{-1}[1 - \cos(2\pi kt)],\ k = 1, 2, \ldots,$$

и

$$0 \leqslant f(u^k) = (3/8)\pi^{-2}k^{-2} \to 0,\ \ k \to \infty.$$

Однако, последовательность u^k*,* $k = 1, 2, \ldots$*, не сходится к* $u^*(t) \equiv 0$ *ни в норме* $L_2(0,1)$*, так как имеет место равенство* $\|u^k - u^*\|_{L_2(0,1)} = \int\limits_0^1 \sin^2(2\pi kt)dt = 1/2$*, ни, тем более, в норме* $L_\infty(0,1)$*.*

Пример 2.1.3. *Рассмотрим задачу минимизации функционала* $f(u) \equiv \int\limits_0^1 u^2(t)dt$ *на множестве* $\mathcal{D} \equiv C[0,1]$*. Здесь* $f^* = 0$ *и* $\mathcal{D}^*$ *состоит из единственной точки*

$u^* = 0$. *Возьмем произвольную минимизирующую последовательность*

$$u^k \in C[0,1], \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} \int_0^1 (u^k(t))^2 dt = 0.$$

Тогда

$$\|u^k - u^*\|_{L_2(0,1)} = \int_0^1 (u^k(t))^2 dt \to 0$$

при $k \to \infty$. *Это означает, что любая минимизирующая последовательность в рассматриваемой задаче будет сходиться к оптимальной точке по норме* $L_2(0,1)$. *В то же время существуют минимизирующие последовательности, которые не сходятся к* u^* *по норме* $C[0,1]$. *Примером такой последовательности является*

$$v^k(t) \equiv \begin{cases} 1 - |2kt - 1|, & 0 \leqslant t < 1/k, \\ 0, & 1/k \leqslant t \leqslant 1,\ k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

В самом деле, $\|v^k - u^*\|_{L_2(0,1)} = 1/(3k) \to 0$ *при* $k \to \infty$, *а* $\|v^k - u^*\|_{C[0,1]} = 1 \nrightarrow 0$.

Пример 2.1.4. *Пусть* $f(u) \equiv \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |u(t)|$, $\mathcal{D} = C[0,1]$. *Тогда нижняя грань* $f^* = 0$, *а множество* $\mathcal{D}^*$ *состоит из одного элемента* $u^*(t) \equiv 0$. *Здесь любая минимизирующая последовательность, очевидно, сходится к* u^* *по норме* $C[0,1]$. *Однако, если мы захотим построить последовательность* u^k, $k = 1, 2, \ldots$, *сходящуюся к* u^*, *например, равномерно на* $[0,1]$ *вместе со своей производной, то должны быть внимательными при выборе минимизирующей последовательности, так как не все из них будут удовлетворять последним требованиям. Например, им удовлетворяет последовательность* $u^k(t) = \sin(kt)/(k^2)$, $k = 1, 2, \ldots$, *но, в то же время, у минимизирующей последовательности* $v^k(t) = \sin(kt)/(k^{1/2})$, $k = 1, 2, \ldots$ *производная* $\dot{v}^k$ *не сходится к нулю по норме* $C[0,1]$.

Приведенные простые примеры показывают, что свойства задач минимизации вида (2.1.1), связанные с понятиями задач первого и второго типов, кардинальным образом зависят от того, как введена метрика на множестве $\mathcal{D}$. В одних задачах любая минимизирующая последовательность будет сходиться к оптимальной точке $z^* \in \mathcal{D}^*$ в нужной метрике, в других – могут существовать минимизирующие последовательности, не обладающие таким свойством. Помимо того, "одна и та же" задача может обладать указанным свойством в одной метрике и не обладать им при выборе другой метрики на множестве $\mathcal{D}$.

Таким образом, в зависимости от выбора метрики задача (2.1.1) может быть отнесена к одному из двух классов задач, которые принято называть корректно поставленными и соответственно некорректно поставленными задачами минимизации.

Определение 2.1.1. *Задача* (*2.1.1*) *называется корректно поставленной* (*в метрике* d), *если: 1*) $f^* \equiv \inf\limits_{z\in\mathcal{D}} f(z) > -\infty$ *и множество* $\mathcal{D}^*$ *непусто; 2*) *любая минимизирующая последовательность в этой задаче сходится в метрике* d *ко множеству* $\mathcal{D}^*$.

Если нарушено хотя бы одно из двух условий, содержащихся в определении 2.1.1, то задачу (2.1.1) называют некорректной в широком смысле слова. В дальнейшем нас будут интересовать методы решения задач второго типа, для которых условие 1) определения 2.1.1 предполагается всегда выполненным, а некорректность задачи минимизации (2.1.1) будем понимать в следующем более узком смысле.

Определение 2.1.2. *Задачу (2.1.1) будем называть некорректно поставленной (в метрике d), если: 1) $f^* > -\infty$, $\mathcal{D}^* \neq \emptyset$; 2) существует минимизирующая последовательность в этой задаче, не сходящаяся в метрике d к множеству $\mathcal{D}^*$.*

В смысле этих определений задача из примера 2.1.1 является некорректной в евклидовой метрике; задача из примера 2.1.2 некорректна в метрике пространств $L_2(0,1)$, $L_\infty(0,1)$; задача из примера 2.1.3 некорректна в метрике $C[0,1]$, но, в то же время, корректна в метрике $L_2(0,1)$.

Конечно, не следует думать, что в теории оптимизации все задачи являются некорректными. В частности, корректной, как легко показать, является задача минимизации квадратичного функционала

$$\Phi_\eta(z) \equiv \|A^h z - u^\delta\|^2 \to \min, z \in M$$

с компактным множеством M из гильбертова пространства Z.

Действительно, при фиксированных h, δ эта задача корректна потому, что, во-первых, решение у нее существует (напомним, что непрерывный функционал $\Phi_\eta(z) \equiv \|A^h z - u^\delta\|^2$, $z \in M$ на компактном множестве M гильбертова пространства достигает нижней грани), и, во-вторых, любая минимизирующая последовательность $z^i \in M,\ i = 1, 2, \dots$, в этой задаче сходится ко множеству $M^*_{h,\delta}$ ее точек минимума, т.е. $\min\limits_{z^* \in M^*_{h,\delta}} \|z^i - z^*\| \to 0,\ i \to \infty$. Последний факт легко доказывается с помощью рассуждений от противного. Более того, с помощью аналогичных рассуждений, основанных на компактности множества M, легко доказывается и то, что при $(h,\delta) \to 0$ имеет место также и предельное соотношение $\min\limits_{z^* \in M^*} \|z^*_{h,\delta} - z^*\| \to 0$, где $z^*_{h,\delta}$ – произвольно выбираемый из множества $M^*_{h,\delta}$ элемент.

В то же время, имеются широкие классы важных с прикладной точки зрения оптимизационных задач, являющихся некорректно поставленными в нужных для приложений метриках. Некорректными в евклидовой метрике являются многие задачи минимизации функций конечного числа переменных на неограниченных множествах. Громадное число задач оптимального управления некорректно поставлены в метриках тех банаховых пространств, которые наиболее часто используются в приложениях. Некоторые важные некорректные экстремальные задачи, к которым сводятся задачи решения уравнений первого рода в гильбертовых пространствах, были рассмотрены в учебном пособии [18].

Корректно поставленные задачи минимизации хороши тем, что в них в качестве решения задачи второго типа можно взять один из членов произвольной минимизирующей последовательности (2.1.4) с достаточно большим номером. Для некорректных задач аналогичные действия могут привести к ошибочным результатам, так как в этом случае нет никаких гарантий того, что полученная тем или иным методом минимизирующая последовательность непременно будет сходиться в метрике d к множеству $\mathcal{D}^*$.

Это означает, что для приближенного решения некорректных задач требуются специальные методы, позволяющие гарантированно конструировать минимизирующие последовательности, сходящиеся в метрике d к множеству $\mathcal{D}^*$. Такие методы существуют и их принято называть методами регуляризации. В следующих разделах данной главы мы опишем несколько таких методов, остановившись подробнее на методе, который был предложен совсем недавно и который основан на теории двойственности – одном из основных разделов общей теории оптимизации.

2.1.2. Постановка оптимизационной задачи в гильбертовом пространстве

Вернемся к задаче (2.1.1) и будем считать для упрощения изложения, что множество $\mathcal{D} \subset Z$, где Z – гильбертово пространство с метрикой d. Методы регуляризации для решения задачи (2.1.1), о которых мы расскажем ниже, сохраняют силу при значительно более слабых предположениях об исходных данных задачи, нежели те, которые будут сделаны. Это позволит нам кратко остановиться лишь на принципиально важных моментах этих методов.

Таким образом, основной задачей, которую мы будем рассматривать в данном разделе, будет задача минимизации

$$f^0(z) \to \inf, \quad z \in \mathcal{D} \subset Z, \tag{2.1.5}$$

в которой множество $\mathcal{D}$ считаем выпуклым и замкнутым множеством гильбертова пространства Z. Функцию (или, другими словами, функционал) $f^0 : \mathcal{D} \to R^1$ будем считать непрерывной и выпуклой на $\mathcal{D}$. Предположим, что задача (2.1.5) имеет решение, т.е. множество $\mathcal{D}^*$ непусто и обозначим через z^0 нормальное, т.е. минимальное по норме, решение этой задачи.

Предположим, что вместо точной функции f нам известно ее приближение f^δ, $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ – некоторое достаточно малое число, причем

$$|f^\delta(z) - f^0(z)| \leqslant \delta(1 + \|z\|^2) \quad \forall\, z \in \mathcal{D}. \tag{2.1.6}$$

Первые три метода регуляризации, на которых мы кратко остановимся, являются классическими достаточно давно известными методами регуляризации. Это метод стабилизации или метод Тихонова, метод невязки и метод квазирешений. Изложим их в упрощенном виде применительно к задаче минимизации общего вида (2.1.5). Подробные доказательства значительно более общих результатов для методов стабилизации, невязки и квазирешений могут быть найдены в [4].

2.2. Метод Тихонова или метод стабилизации

2.2.1. Основная конструкция метода Тихонова

Основной конструкцией метода Тихонова, который часто называют еще методом стабилизации, как и в случае решения абстрактного уравнения первого рода [18], является сглаживающая функция (функционал) или функция Тихонова

$$T_\alpha^\delta(z) \equiv f^\delta(z) + \alpha\|z\|^2, \;\; z \in \mathcal{D}, \tag{2.2.1}$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации. Слагаемое $\alpha\|z\|^2$, как и ранее, носит название стабилизирующего слагаемого. Рассмотрим вспомогательную задачу минимизации

$$T_\alpha^\delta(z) \to \inf, \;\; z \in \mathcal{D}. \tag{2.2.2}$$

Для приближенного решения этой задачи могут использоваться различные численные методы [4]. Предположим, что в результате конечного числа итераций одного из таких методов (это число свое для каждого δ) в нашем распоряжении имеется точка $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ такая, что

$$T_\alpha^\delta \equiv \min_{z\in\mathcal{D}} T_\alpha^\delta(z) \leqslant T_\alpha^\delta(z_\alpha^{\delta,\varepsilon}) \leqslant T_\alpha^\delta + \varepsilon, \tag{2.2.3}$$

где величина $\varepsilon > 0$ характеризует точность решения задачи минимизации (2.2.2). Следует сказать, что, вообще говоря, задача минимизации (2.2.2) при каждой фиксированной паре δ, α обладает, как правило, значительно большим "запасом устойчивости" нежели исходная задача (2.1.5) и в огромном числе случаев является корректно поставленной. Однако, тот факт, что задача минимизации (2.2.2) обладает большим "запасом устойчивости", чем исходная задача, сам по себе еще не гарантирует того, что элементы $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$, определяемые соотношениями (2.2.3), будут сходиться в метрике гильбертова пространства Z. Это связано с тем, что, очевидно, чем меньше значение параметра α, тем меньше стабилизирующее слагаемое $\alpha\|z\|^2$ и одновременно тем меньше "запас устойчивости" задачи минимизации (2.2.2). Оказывается, для получения элементов $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ таких, что при $\delta \to 0$, $\alpha \to 0$, $\varepsilon \to 0$ они сходятся ко множеству $\mathcal{D}^*$, уменьшение "запаса устойчивости" следует компенсировать согласованным изменением величин α, ε и величины δ, характеризующей ошибку исходных данных. Произвол в выборе α, ε может привести к тому, что даже в самых простейших ситуациях элементы $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ не будут сходиться ко множеству $\mathcal{D}^*$ при $\delta \to 0$, $\alpha \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

2.2.2. Сходимость метода Тихонова

Условия согласования указанных величин δ, ε, α и одновременно обоснование метода стабилизации дается в следующей теореме.

Теорема 2.2.1. *Пусть выполняются условия согласования*

$$\frac{\varepsilon+\delta}{\alpha} \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \delta \to 0, \quad \alpha \to 0.$$

Тогда элементы $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ сходятся в метрике d пространства Z ко множеству решений исходной задачи (2.1.5). Более того, справедливо предельное соотношение

$$z_\alpha^{\delta,\varepsilon} \to z^0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \delta \to 0, \quad \alpha \to 0.$$

Доказательство. Из оценки (2.1.6) и определения функции Тихонова (2.2.1) следует

$$|f^0(z) + \alpha\|z\|^2 - T_\alpha^\delta(z)| \leqslant \delta(1 + \|z\|^2), \quad z \in \mathcal{D}. \tag{2.2.4}$$

Тогда $T_\alpha^\delta(z) \geqslant f^0(z) + \alpha(1 - \delta/\alpha)\|z\|^2 - \delta$ при всех $z \in \mathcal{D}$. Следовательно, в силу условия согласования, можем записать $T_\alpha^\delta(z) \geqslant f^{0*} - \delta$ для любого $z \in \mathcal{D}$ и, без ограничения общности, при всех $\delta \in [0, \delta_0]$, $\alpha > 0$. Таким образом, величину $T_\alpha^{\delta*}$ можно считать конечной, без ограничения общности, при всех таких δ, α. Из определения нижней грани и конечности $T_\alpha^{\delta*}$ следует существование элементов $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ таких, что выполняются неравенства (2.2.3).

Покажем, что для указанного семейства элементов $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ выполняются соотношения

$$f(z_\alpha^{\delta,\varepsilon}) \leqslant f^{0*} + \beta, \quad \|z_\alpha^{\delta,\varepsilon}\|^2 \leqslant \|z^0\|^2 + \gamma, \tag{2.2.5}$$

где $\beta > 0$, $\beta \to 0$, $\gamma \to 0$.

Пусть $z^* \in \mathcal{D}^*$ – произвольная точка. Принимая во внимание соотношения (2.2.3), (2.2.4), можем записать следующую цепочку неравенств

$$f^{0*} = f^0(z^*) \leqslant f^0(z_\alpha^{\delta,\varepsilon}) \leqslant f^0(z_\alpha^{\delta,\varepsilon}) + \alpha\|z_\alpha^{\delta,\varepsilon}\|^2 \leqslant \tag{2.2.6}$$

$$\leqslant T_\alpha^\delta(z_\alpha^{\delta,\varepsilon}) + \delta(1 + \|z_\alpha^{\delta,\varepsilon}\|^2) \leqslant T_\alpha^{\delta*} + \varepsilon + \delta(1 + \|z_\alpha^{\delta,\varepsilon}\|^2) \leqslant$$

$$\leqslant T_\alpha^\delta(z^*) + \varepsilon + \delta(1 + \|z_\alpha^{\delta,\varepsilon}\|^2) \leqslant$$

$$\leqslant f^0(z^*) + \alpha\|z^*\|^2 + \delta(1 + \|z^*\|^2) + \varepsilon + \delta(1 + \|z_\alpha^{\delta,\varepsilon}\|^2) \leqslant$$

$$\leqslant f^0(z_\alpha^{\delta,\varepsilon}) + (\alpha + \delta)\|z^*\|^2 + \delta\|z_\alpha^{\delta,\varepsilon}\|^2 + \varepsilon + 2\delta.$$

Отсюда имеем

$$\alpha\|z_\alpha^{\delta,\varepsilon}\|^2 \leqslant (\alpha + \delta)\|z^*\|^2 + \delta\|z_\alpha^{\delta,\varepsilon}\|^2 + \varepsilon + 2\delta$$

или

$$\|z_\alpha^{\delta,\varepsilon}\|^2 \leqslant [(1 + \delta/\alpha)\|z^*\|^2 + 2(\varepsilon/\alpha + \delta/\alpha)](1 - \delta/\alpha)^{-1}.$$

Учитывая произвольность $z^* \in \mathcal{D}^*$, отсюда получаем вторую из оценок (2.2.5) с $\gamma = 2[\delta/\alpha(\|z^0\|^2 + 1) + \varepsilon/\alpha](1 - \delta/\alpha)^{-1} \to 0$ при выполнении условий согласования доказываемой теоремы.

Возвращаясь далее к цепочке неравенств (2.2.6), с учетом произвольности $z^* \in \mathcal{D}^*$ и только что доказанной оценки, имеем

$$f^{0*} \leqslant f^0(z_\alpha^{\delta,\varepsilon}) \leqslant f^{0*} + \beta$$

с $\beta = \alpha[(1 + \delta/\alpha)\|z^0\|^2 + \delta/\alpha(\|z^0\|^2 + \gamma + 2)] + \varepsilon \to 0$ при выполнении условий согласования доказываемой теоремы, т.е. первая из оценок (2.2.5) также доказана.

Предположим теперь, что утверждение теоремы не верно. Это означает, что существует такая последовательность $z^k \equiv z_{\alpha_k}^{\delta_k,\varepsilon_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, $(\varepsilon_k + \delta_k)/\alpha_k \to 0$, $\varepsilon_k \to 0$, $\delta_k \to 0$, $\alpha_k \to 0$, $k \to \infty$, что $\|z^k - z^0\| \geqslant \nu > 0$, где ν – некоторое фиксированное число. В силу второй оценки (2.2.5), слабой компактности замкнутого шара (см. теорему 1.1.2) и слабой замкнутости выпуклого замкнутого множества (см. теорему 1.1.1) в гильбертовом пространстве считаем без ограничения общности, что последовательность z^k, $k = 1, 2, \ldots$, слабо сходится при $k \to \infty$ к некоторому элементу $z_* \in \mathcal{D}$. Тогда, в силу слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве (см. лемму 1.1.4), во-первых, с учетом первой оценки (2.2.5), имеем оценку $f(z_*) \leqslant f^*$, и, во-вторых, с учетом второй оценки (2.2.5) можем записать

$$\|z_*\| \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|z^k\| \leqslant \limsup_{k\to\infty} \|z^k\| \leqslant \|z^0\|,$$

откуда в силу единственности нормального решения получаем равенство $z_* = z^0$ и одновременно предельное соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} \|z^k\| = \|z^0\|$. Поэтому можно утверждать, что последовательность z^k, $k = 1, 2, \ldots$, слабо сходится к нормальному решению z^0 и одновременно нормы элементов z^k сходятся при $k \to \infty$ к норме $\|z^0\|$. Вспоминая здесь опять H-свойство гильбертова пространства (см. лемму 1.1.5), заключаем, что $\|z^k - z^0\| \to 0$ при $k \to \infty$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

2.2.3. Метод Тихонова в задачах квадратичной конечномерной минимизации

Посмотрим как метод стабилизации применяется к решению задач квадратичной минимизации, частным случаем которых являются задачи решения линейных алгебраических систем и интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

Начнем с задачи минимизации квадратичной функции

$$f(z) = |Az - u|^2 \tag{2.2.7}$$

на множестве $\mathcal{D} = R^n$, где матрица $A = \{a_{i,j}\}$ имеет порядок $(m \times n)$, u – заданный вектор из R^m. Естественно, эта задача тесно связана с линейной алгебраической системой

$$Az = u. \tag{2.2.8}$$

Точнее, если система (2.2.8) разрешима, то $f^* = 0$, причем эта нижняя грань достигается. Если же $f^* = f(z^*) > 0$, то точку z^* называют квазирешением системы (2.2.8). Вопросы существования квазирешений и нормальных квазирешений для линейных алгебраических систем подробно рассматриваются во вспомогательном разделе 1.1.4.

Рассмотрим задачу отыскания точки $z^0 \in \mathcal{D}^*$, наименее удаленной от начала координат, т.е. нормального решения задачи (2.2.7). Так как $\mathcal{D}^*$ – выпуклое замкнутое множество, $|z|^2$, $z \in R^n$ – сильно выпуклая функция, то такое нормальное решение z^0, как мы уже хорошо знаем, существует и единственно.

Пусть вместо точных матрицы $A^0 = \{a^0_{i,j}\}$ и правой части u^0 известны лишь их приближения A^δ, u^δ, причем

$$|A^\delta - A^0| \leqslant \sigma(\delta), \;\; |u^\delta - u^0| \leqslant \sigma(\delta), \;\; \sigma(\delta) \to 0, \;\; \delta \to 0. \tag{2.2.9}$$

Задача определения нормального решения (2.2.7), как хорошо известно (см., например, [18]), является некорректной.

Оценим далее погрешность

$$f^\delta(z) - f^0(z) \equiv |A^\delta z - u^\delta|^2 - |A^0 z - u^0|^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |f^\delta(z) - f^0(z)| &= |((A^\delta - A^0)z + (u^0 - u^\delta), (A^\delta + A^0)z - (u^0 + u^\delta))| \leqslant \\ &\leqslant (\sigma(\delta)|z| + \sigma(\delta))((|A^\delta| + |A^0|)|z| + |u^0| + |u^\delta|) \leqslant \\ &\leqslant \sigma(\delta)(1 + |z|)[(2|A^0| + \sigma(\delta))|z| + 2|u^0| + \sigma(\delta)] \leqslant \\ &\leqslant \sigma(\delta)(1 + |z|)2(|A^0| + |u^0| + \sigma(\delta)). \end{aligned}$$

Но $1+|z| \leqslant 2(1+|z|^2)$. Поэтому $|f^\delta(z) - f^0(z)| \leqslant \psi(\delta)(1+|z|^2)$, где (см. оценку (2.1.6)) $\psi(\delta) \equiv 4[|A^0| + |u^0| + \sigma(\delta)]\sigma(\delta)$, $z \in R^n$.

Составим функцию Тихонова

$$T^\delta_\alpha(z) \equiv |A^\delta z - u^\delta|^2 + \alpha|z|^2, \;\; z \in R^n.$$

Пусть в нашем распоряжении имеется точка $z^{\delta,\varepsilon}_\alpha \in R^n$ такая, что

$$T^\delta_\alpha(z^{\delta,\varepsilon}_\alpha) \leqslant \inf_{z \in R^n} T^\delta_\alpha(z) + \varepsilon.$$

Такая точка получается в результате работы какого-либо конкретного метода минимизации (см., например, [4]).

Если величины ε, α, $\sigma(\delta)$ будут стремиться к нулю, причем согласованным образом

$$\lim_{\delta\to 0,\,\varepsilon\to 0,\,\alpha\to 0} \frac{\varepsilon+\sigma(\delta)}{\alpha} = 0,$$

то в соответствии с теоремой 2.2.1 элементы $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ будут сходиться к нормальному решению z^0 задачи (2.2.7) с точными исходными данными A^0, u^0. Так как функция f^δ квадратичная и сильно выпуклая, то для определения точки $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ можно воспользоваться условием

$$(T_\alpha^\delta)'(z_\alpha^{\delta,\varepsilon}) = 2(A^{\delta *}A^\delta z_\alpha^{\delta,\varepsilon} - A^{\delta *}u^\delta + \alpha z_\alpha^{\delta,\varepsilon}) = 0,$$

т.е.

$$A^{\delta *}A^\delta z_\alpha^{\delta,\varepsilon} + \alpha z_\alpha^{\delta,\varepsilon} = A^{\delta *}u^\delta.$$

При этом, так как выбранная таким образом точка $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ удовлетворяет условию

$$T_\alpha^\delta(z_\alpha^{\delta,\varepsilon}) \leqslant \inf_{z\in R^n} T_\alpha^\delta(z) + \varepsilon$$

с $\varepsilon = 0$, то для сходимости $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ к z^0 достаточно выполнения условия согласования $\lim\limits_{\delta\to 0,\,\alpha\to 0} \sigma(\delta)/\alpha \to 0$.

2.2.4. Метод Тихонова в задачах квадратичной минимизации в бесконечномерном пространстве

Рассмотрим далее задачу минимизации функционала

$$f(z) \equiv \int_c^d (\int_a^b A(x,s)z(s)ds - u(x))^2 dx \tag{2.2.10}$$

на множестве $\mathcal{D} = L_2(a,b)$, где $u \in L_2(c,d)$, $A \in L_2(\Pi)$ и, как и ранее, $\Pi \equiv \{c \leqslant x \leqslant d;\ a \leqslant s \leqslant b\}$, a, b, c, d – заданные числа. Эта задача тесно связана с интегральным уравнением Фредгольма первого рода

$$\int_a^b A(x,s)z(s)ds = u(x),\ \ c \leqslant x \leqslant d, \tag{2.2.11}$$

и является некорректной в метрике $L_2(a,b)$ (см., например, [18]). Как известно, задача (2.2.11) в общем случае не имеет решения при произвольно выбранной функции $u \in L_2(c,d)$ (см., например, [18]). По этой причине можно утверждать, что в задаче (2.2.10) не при всех $u \in L_2(c,d)$ достигается нижняя грань. Поэтому, чтобы задача второго типа имела смысл для функции f в (2.2.10), предположим, что при заданных точных $A^0 \in L_2(\Pi)$, $u^0 \in L_2(c,d)$ множество $\mathcal{D}^* \equiv \{z \in L_2(a,b) :\ f^0(z) = f^{0*}\}$ с

$$f^0(z) \equiv \int_c^d (\int_a^b A^0(x,s)z(s)ds - u^0(x))^2 dx$$

не пусто. Так как f^0 выпуклый и непрерывный в метрике $L_2(a,b)$ функционал, то множество $\mathcal{D}^*$ выпукло и замкнуто в этой метрике.

Будем далее предполагать, что вместо точных исходных данных A^0, u^0 известны лишь их приближения $A^\delta \in L_2(\Pi)$, $u^\delta \in L_2(c,d)$, $\delta \in [0,\delta_0]$, где $\delta_0 > 0$ – некоторое достаточно малое число, такие, что

$$\|A^\delta - A^0\|_{L_2(\Pi)} \leqslant \sigma(\delta), \quad \|u^\delta - u^0\| \leqslant \sigma(\delta), \tag{2.2.12}$$

$$\sigma(\delta) \to 0, \ \ \delta \to 0.$$

Тогда вместо точного функционала f^0 мы имеем его приближение

$$f^\delta(z) \equiv \int_c^d (\int_a^b A^\delta(x,s)z(s)ds - u^\delta(x))^2 dx.$$

С помощью выкладок, подобных тем, которые были сделаны в аналогичной ситуации предыдущего примера минимизации функции $|Az-u|^2$, $z \in R^n$, можно показать, что

$$|f^\delta(z) - f^0(z)| \leqslant 4\sigma(\delta)(\|A^0\|_{L_2(\Pi)} + \|u^0\| + \sigma(\delta))(1 + \|z\|^2). \tag{2.2.13}$$

Это значит, что выполняется неравенство

$$|f^\delta(z) - f^0(z)| \leqslant \psi(\delta)(1 + |z|^2),$$

где (см. неравенство (2.1.6))

$$\psi(\delta) = 4\sigma(\delta)(\|A^0\|_{L_2(\Pi)} + \|u^0\| + \sigma(\delta)).$$

Составим функционал Тихонова

$$T_\alpha^\delta(z) \equiv \int_c^d (\int_a^b A^\delta(x,s)z(s)ds - u^\delta(x))^2 dx + \alpha\|z\|^2.$$

Пусть опять в нашем распоряжении имеется некоторая точка $z_\alpha^{\delta,\varepsilon} \in L_2(a,b)$ такая, что

$$T_\alpha^\delta(z_\alpha^{\delta,\varepsilon}) \leqslant \inf_{z\in L_2(a,b)} T_\alpha^\delta(z) + \varepsilon.$$

Такая точка получается в результате работы какого-либо конкретного метода минимизации (см., например, [4]).

Если величины ε, α, σ будут стремиться к нулю, причем согласованным образом

$$\lim_{\delta\to 0,\, \alpha\to 0,\, \varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon + \sigma(\delta)}{\alpha} = 0,$$

то в соответствии с теоремой 2.2.1 элементы $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ будут сходиться в метрике $L_2(a,b)$ к нормальному решению z^0 задачи (2.2.7) с точными исходными данными A^0, u^0, т.е.

$$\lim_{\delta\to 0,\, \alpha\to 0,\, \varepsilon\to 0} \|z_\alpha^{\delta,\varepsilon} - z^0\| = 0.$$

Так как в рассматриваемой задаче функционал T_α^δ сильно выпуклый и квадратичный (а, значит, и дифференцируемый по Фреше), то функция $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ может быть определена из уравнения Эйлера, являющегося следствием равенства нулю его производной Фреше в этой точке

$$(T_\alpha^\delta)'(z_\alpha^{\delta,\varepsilon}) = 0.$$

Запишем это выражение для уравнения Эйлера

$$\int_c^d A^\delta(x,\xi)\int_a^b A^\delta(x,s) z_\alpha^{\delta,\varepsilon}(s)dsdx + \alpha z_\alpha^{\delta,\varepsilon}(\xi) =$$

$$= \int_c^d A^\delta(x,\xi)u^\delta(x)dx, \quad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

Таким образом, метод стабилизации привел к интегральному уравнению Фредгольма второго рода для определения экстремали $z_\alpha^{\delta,\varepsilon} \in L_2(a,b)$ сглаживающего функционала T_α^δ. Так как в этом случае $\varepsilon = 0$, то для сходимости $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ к z^0 в метрике $L_2(a,b)$ достаточно выполнения условия согласования $\lim\limits_{\delta\to 0,\, \alpha\to 0} \sigma(\delta)/\alpha \to 0$. Заметим, что, так как в рассмотренном процессе регуляризации не использовалась информация о производных точного решения z^0, то его принято называть регуляризацией нулевого порядка.

Рассмотрим теперь процесс регуляризации первого порядка для той же задачи (2.2.10), в которой в качестве множества $\mathcal{D}$ возьмем гильбертово пространство $V_2^1[a,b]$ абсолютно-непрерывных функций $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, производные которых суммируемы с квадратом, т.е. $z'(\cdot) \in L_2(a,b)$. Напомним, что скалярное произведение в $V_2^1[a,b]$ задается равенством

$$(z_1, z_2) \equiv \int_a^b (z_1(s)z_2(s) + z_1'(s)z_2'(s))ds$$

и порождает норму $\|z\| \equiv \sqrt{(z,z)}$.

Считаем, что задача (2.2.10) с выбранным $\mathcal{D}$ разрешима в $V_2^1[a,b]$. Из непрерывности функционала f^0, соответствующего точным исходным данным $A^0 \in L_2(\Pi)$, $u^0 \in L_2(a,b)$, в метрике $L_2(a,b)$ следует его непрерывность и в более сильной метрике $V_2^1[a,b]$. Поэтому из выпуклости f^0 следует выпуклость и замкнутость в метрике $V_2^1[a,b]$ множества $\mathcal{D}^*$ с вновь выбранным $\mathcal{D}$. Таким образом, нормальное решение в новой задаче с точными данными существует и единственно в $V_2^1[a,b]$.

Считая, что погрешности в задании точных данных A^0, u^0 по-прежнему удовлетворяют оценкам (2.2.12), и пользуясь неравенством $\|z\|_{L_2(a,b)} \leqslant \|z\|_{V_2^1[a,b]}$, из оценки (2.2.13) получаем в новой ситуации

$$|f^\delta(z) - f^0(z)| \leqslant 4\sigma(\delta)(\|A^0\|_{L_2(\Pi)} + \|u^0\| + \sigma(\delta))(1 + \|z\|^2_{V_2^1[a,b]}),$$

т.е. и в этом случае выполняется неравенство

$$|f^\delta(z) - f^0(z)| \leqslant \psi(\delta)(1 + |z|^2),$$

где (см. неравенство (2.1.6)) с

$$\psi(\delta) = 4\sigma(\delta)(\|A^0\|_{L_2(\Pi)} + \|u^0\| + \sigma(\delta)).$$

Составим функционал Тихонова (сглаживающий функционал)

$$T_\alpha^\delta(z) \equiv \int_c^d (\int_a^b A^\delta(x,s)z(s)ds - u^\delta(x))^2 dx +$$

$$+\alpha \int_a^b (z^2(s) + (z'(s))^2) ds, \ \ z \in V_2^1[a,b].$$

Пусть, как и ранее, в нашем распоряжении имеется элемент $z_\alpha^{\delta,\varepsilon} \in V_2^1[a,b]$ такой, что

$$T_\alpha^\delta(z_\alpha^{\delta,\varepsilon}) \leqslant \inf_{z \in V_2^1[a,b]} T_\alpha^\delta(z) + \varepsilon.$$

Такая точка опять же получается в результате работы какого-либо конкретного метода минимизации (см., например, [4]).

Если величины ε, α, $\sigma(\delta)$ будут стремиться к нулю, причем согласованным образом

$$\lim_{\delta\to 0,\, \alpha\to 0,\, \varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon + \sigma(\delta)}{\alpha},$$

то в соответствии с теоремой 2.2.1 элементы $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ будут сходиться в метрике $V_2^1[a,b]$ к нормальному решению z^0 задачи (2.2.7) с точными исходными данными A^0, u^0, т.е.

$$\lim_{\delta\to 0,\, \alpha\to 0,\, \varepsilon\to 0} \|z_\alpha^{\delta,\varepsilon} - z^0\|_{V_2^1[a,b]} = 0. \tag{2.2.14}$$

Так как в рассматриваемой новой задаче функционал T_α^δ сильно выпуклый и квадратичный (а, значит, и дифференцируемый по Фреше), то функция $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ может быть определена из уравнения Эйлера, являющегося следствием равенства нулю его производной Фреше в этой точке $z_\alpha^{\delta,\varepsilon} \in V_2^1[a,b]$

$$(T_\alpha^\delta)'(z_\alpha^{\delta,\varepsilon}) = 0.$$

Запишем это выражение для уравнения Эйлера

$$\alpha z'' - \alpha z = \int_c^d A^\delta(x,s)(\int_a^b A^\delta(x,s)z(s)ds - u^\delta(x))dx,$$

$$z'(a) = z'(b) = 0.$$

Таким образом, метод стабилизации в новой ситуации привел к интегро-дифференциальному уравнению для определения экстремали $z_\alpha^{\delta,\varepsilon} \in L_2(a,b)$ сглаживающего функционала T_α^δ. Так как в этом случае $\varepsilon = 0$, то для сходимости $z_\alpha^{\delta,\varepsilon}$ к z^0 в метрике $V_2^1[a,b]$ достаточно выполнения условия согласования $\lim\limits_{\delta\to 0,\, \alpha\to 0} \sigma(\delta)/\alpha \to 0$.

В отличие от регуляризации нулевого порядка для задачи (2.2.10), когда в качестве множества решений используется пространство $L_2(a,b)$, и сходимость приближенных решений получается лишь в метрике этого пространства, в новой ситуации пространства решений $V_2^1[a,b]$ из соответствующей сходимости приближенных решений (2.2.14) вытекает при указанном условии согласования сходимость

$$\|z_\alpha^{\delta,\varepsilon} - z^0\|_{C[a,b]} \to 0, \tag{2.2.15}$$

составляющая главное отличие регуляризации первого порядка от регуляризации нулевого порядка и являющаяся следствием “внутреннего” устройства гильбертова пространства $V_2^1[a,b]$ и более сильной априорной информации о точном решении исходной задачи. Достаточно подробное обоснование того, что из сходимости (2.2.14) в метрике $V_2^1[a,b]$ следует равномерная сходимость (2.2.15), можно найти в [18].

2.2.5. Метод Тихонова в задачах оптимального управления

Рассмотрим далее простейшую задачу оптимального управления или, другими словами, задачу минимизации

$$f(u) \equiv |x[u](T) - y|^2 + \int_0^T |x[u](t) - z(t)|^2 dt \to \min, \tag{2.2.16}$$

$$u \in \mathcal{D} \subset L_2^m(0,T) \equiv \overbrace{L_2(0,T) \times \cdots \times L_2(0,T)}^{m},$$

где $y \in R^n$ – заданный вектор, $z \in L_2^n(0,T)$ – заданная функция, $x[u](t),\ 0 \leqslant t \leqslant T$ – абсолютно-непрерывное решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + c(t),\ \ t \in [0,T], \quad x(0) = x_0,$$

$x_0 \in R^n$ – заданный вектор начального состояния управляемой системы, $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2^m(0,T) :\ u(t) \in U \text{ п.в. на } (0,T)\}$ – множество допустимых управлений, $U \subset R^m$ – заданное выпуклое компактное множество управляющих параметров, $A(t) = \{a_{i,j}(t)\}$ – функциональная матрица порядка $n \times n$, $B(t) = \{b_{i,j}(t)\}$ – функциональная матрица порядка $n \times m$, $c(t) \equiv (c_1(t), \ldots, c_n(t))$, функции $a_{i,j}(\cdot)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $b_{i,j}(\cdot)$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$, $f_j(\cdot)$, $j = 1,\ldots,n$ есть элементы пространства $L_\infty(0,T)$.

Заметим, прежде всего, что задача минимизации (2.2.16) имеет решение. Действительно, функционал f является выпуклым непрерывным функционалом на выпуклом замкнутом множестве $\mathcal{D}$ гильбертова пространства $L_2^m(0,T)$. Его выпуклость является простым следствием выпуклости функции вида $\varphi(x) \equiv |x-y|^2,\ x \in R^n$ и равенства

$$x[\alpha u + (1-\alpha)v](t) = \alpha x[u](t) + (1-\alpha)x[v](t),\ \ t \in [0,T],$$

справедливого, в силу аффинности по u правой части дифференциального уравнения $A(t)x + B(t)u + c(t)$, при любом $\alpha \in R^1$ и любых двух управлениях u, $v \in \mathcal{D}$. Непрерывность же функционала $f : \mathcal{D} \to R^1$ вытекает из теоремы о непрерывной зависимости абсолютно-непрерывного решения $x[u]$ от управления $u \in \mathcal{D}$ (см. теорему 1.1.7 в разделе 1.1.5). Таким образом существование решения задачи (2.2.16) есть следствие слабой полунепрерывности снизу на выпуклом замкнутом множестве непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве (лемма 1.1.4 в разделе 1.1.2). Естественно, множество $\mathcal{D}^*$ всех решений задачи (2.2.16), как и в предыдущих примерах, является выпуклым и замкнутым.

Покажем, что задача минимизации (2.2.16) является, вообще говоря, некорректно поставленной в смысле введенного выше определения 2.1.2. С этой целью положим $n = m = 1$, $T = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $A(\cdot) = 0$, $B(\cdot) = 1$, $c = 0$, $U = [-1,1]$. Тогда, как легко заметить, в задаче (2.2.16) имеется единственное оптимальное управление $u(t) \equiv 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. В то же время, любая слабо в $L_2(0,T)$ сходящаяся к нулю последовательность допустимых управлений, не сходящаяся сильно, будет минимизирующей в задаче последовательностью, не сходящейся ко множеству $\mathcal{D}^*$. Непосредственной проверкой, которая предоставляется читателю, можно убедиться, что одной из таких последовательностей является, например, последовательность управлений u_s, $s = 1,2,\ldots$, принимающих значения ± 1 с "равномерно учащающимися" переключениями, задаваемых равенствами

$$u_s(t) \equiv \begin{cases} 1,\ \frac{2k}{2s} \leqslant t < \frac{2k+1}{2s}, \\ -1,\ \frac{2k+1}{2s} \leqslant t < \frac{2k+2}{2s},\ k = 0,1,\ldots,s-1. \end{cases}$$

Предположим, что вместо точных исходных данных, т.е. функциональных матриц A^0, B^0, векторных функций z, f^0, векторов x_0^0, y_0 нам известны их приближения A^δ, B^δ, z^δ, f^δ, x_0^δ, y^δ, $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ – некоторое достаточно малое число, с элементами из тех же пространств, причем

$$\|a_{i,j}^\delta - a_{i,j}^0\|_{\infty,(0,T)} \leqslant \sigma(\delta), \ \ \|b_{i,j}^\delta - b_{i,j}^0\|_{\infty,(0,T)} \leqslant \sigma(\delta),$$

$$\|z_i^\delta - z_i^0\|_{\infty,(0,T)} \leqslant \sigma(\delta), \ \ \|f_j^\delta - f_j^0\|_{\infty,(0,T)} \leqslant \sigma(\delta),$$

$$|x_0^\delta - x_0^0| \leqslant \sigma(\delta), \ \ |y^\delta - y^0| \leqslant \sigma(\delta), \ \ \sigma(\delta) \to 0, \ \ \delta \to 0.$$

Пусть $x^\delta[u](t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, – абсолютно-непрерывное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущенными исходными данными

$$\dot{x} = A^\delta(t)x + B^\delta(t)u(t) + f^\delta(t), \ \ t \in [0, T], \ \ \ x(0) = x_0^\delta.$$

Тогда, в силу теоремы существования и устойчивости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. теорему 1.1.7), можно утверждать, что справедливы следующие оценки

$$\|x^\delta[u]\|_{[0,T]}^{(0)} \equiv \max_{t\in[0,T]} |x^\delta[u](t)| \leqslant C,$$

$$\|\Delta x^\delta[u]\|_{[0,T]}^{(0)} \equiv \|x^\delta[u] - x^0[u]\|_{[0,T]}^{(0)} \leqslant C_1\sigma(\delta), \ \ k = 1, 2, \ldots,$$

в которых постоянные C, $C_1 > 0$ не зависят от $u \in \mathcal{D}$ и от δ.

Применяя эти оценки, можем записать

$$|f^\delta(u) - f^0(u)| =$$
$$= |\langle \Delta x^\delta[u](T) - (y^\delta - y^0), x^\delta[u](T) + x^0[u](T) - (y^\delta + y^0)\rangle| +$$
$$+ \int_0^T |\langle \Delta x^\delta[u](t) - (z^\delta(t) - z^0(t)),$$
$$x^\delta[u](t) + x^0[u](t) - (z^\delta(t) + z^0(t))\rangle| dt \leqslant 4C(C_1 + 1)(T + 1)\sigma(\delta).$$

Составим опять функционал Тихонова

$$T_\alpha^\delta(u) \equiv |x^\delta[u](T) - y^\delta|^2 + \int_0^T |x^\delta[u](t) - z^\delta(t)|^2 dt + \alpha\|u\|_{2,(0,T)}^2.$$

Пусть опять в нашем распоряжении имеется точка $u_\alpha^{\delta,\varepsilon} \in \mathcal{D}$ такая, что

$$T_\alpha^\delta(u_\alpha^{\delta,\varepsilon}) \leqslant \inf_{u\in\mathcal{D}} T_\alpha^\delta(u) + \varepsilon.$$

Такая точка получается в результате работы какого-либо конкретного метода минимизации (см., например, [4]).

Если величины ε, α, $\sigma(\delta)$ будут стремиться к нулю, причем согласованным образом

$$\lim_{\delta\to0,\, \alpha\to0,\, \varepsilon\to0} \frac{\varepsilon + \sigma(\delta)}{\alpha} = 0,$$

то в силу теоремы 2.2.1 управления $u_\alpha^{\delta,\varepsilon}$, $k = 1, 2, \ldots$ будут сходиться в метрике $L_2(a, b)$ к нормальному решению u^0 задачи (2.2.16) с точными исходными данными A^0, B^0, f^0, x_0^0, y^0, z^0, т.е.

$$\lim_{\delta\to0,\, \alpha\to0,\, \varepsilon\to0} \|u_\alpha^{\delta,\varepsilon} - u^0\|_{2,(0,T)} = 0.$$

Список литературы

[1] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. – 432 с.

[2] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. – 520 с.

[3] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. – 400 с.

[4] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

[5] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. – 752 с.

[6] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. – 280 с.

[7] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. – 544 с.

[8] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1976. – 216 с.

[9] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. – 408 с.

[10] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. – 520 с.

[11] Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990. – 488 с.

[12] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. – 480 с.

[13] Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988. – 264 с.

[14] Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. – 512 с.

[15] Привалов И.И. Интегральные уравнения. М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 248 с.

[16] Смирнов Н.С. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. Л.: ГРОТЛ, 1936. – 124 с.

[17] Сумин М.И. Элементы математической теории оптимального управления. Часть 1. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в задаче с нефиксированным временем и функциональными ограничениями: Методическая разработка для студентов механико-математического факультета. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2001. – 48 с.

[18] Сумин М.И. Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов: Учебное пособие. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2009.

[19] Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. – 328 с.

[20] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. – 288 с.

[21] Толстов Г.П. Ряды Фурье.М.: Наука, 1980. – 384 с.

[22] Функциональный анализ (сер. “Справочная математическая библиотека”) / Под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972. – 544 с.

[23] Loewen P.D. Optimal control via nonsmooth analysis. CRM Proceedings and Lecture Notes. V.2. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993. – 153 p.

Оглавление

Михаил Иосифович **Сумин**

Метод регуляризации А.Н. Тихонова для решения оптимизационных задач

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского".
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.