МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

М.И. Сумин

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НА КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.01 “Математика”,
02.03.01 “Математика и компьютерные науки”

Нижний Новгород
2016

УДК 517.983.54+519.853
ББК В102.164+В161.8
С89

С89 Сумин М.И. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НА КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. — 37 с.

Рецензент: к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ИИТММ **А.Л. Калашников**

В учебно-методическом пособии рассматриваются элементы теории методов решения некорректно поставленных задач, имеющей важное значение в развитии современного естествознания и лежащей в основе получения многих новых знаний об окружающем нас мире. Подробно излагается классический метод регуляризации на компактных множествах для решения операторных уравнений первого рода. Приводится достаточно обширный вспомогательный материал, лежащий в основе методов решения некорректных задач.

Предназначено для знакомства студентов старших курсов бакалавриата с основами теории методов решения некорректных задач.

УДК 517.983.54+519.853
ББК В102.164+В161.8

Введение

Хорошо известно, что некорректно поставленные задачи возникают естественным образом при решении самых разнообразных прикладных задач, а также при исследованиях в области математической теории. Некорректно поставленные задачи или, другими словами, задачи, неустойчивые по отношению к погрешностям в их исходных данных, характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения в этих исходных данных могут приводить и приводят к произвольно большим изменениям приближенных решений таких задач.

По-видимому, наиболее известным методом решения некорректных задач является так называемый метод регуляризации А.Н. Тихонова. Он широко применяется для решения операторных уравнений первого рода, с которыми приходится неизбежно сталкиваться при исследовании разнообразных некорректных задач естествознания, естественным образом сводящихся во многих случаях к решению подобных уравнений, являющихся, как правило, неустойчивыми по отношению к ошибкам входных данных. Он широко применяется также для решения многих задач оптимизации, оптимального управления, возникающих в самых различных приложениях.

Настоящее учебное пособие посвящено изложению основ метода регуляризации на компактных множествах для решения операторных уравнений первого рода. Как видно из названия этого метода, он также ориентирован на приближенное решение неустойчивых операторных уравнений первого рода. Однако по своей основной идее и по своим основным конструкциям он принципиально отличается от метода регуляризации А.Н. Тихонова и предполагает, прежде всего, что при решении указанных операторных уравнений используется априорная информация о принадлежности точного решения исходного операторного уравнения тому или иному компактному множеству в гильбертовом пространстве, которому принадлежат решения этого уравнения.

Пособие состоит из двух основных разделов. В первом из них приводятся базовые понятия теории некорректных задач и необходимые теоретические факты. Второй посвящен изложению собственно метода регуляризации на компактных множествах для решения операторных уравнений первого рода

При написании учебного пособия существенным образом использовалось учебное пособие:

[19] Сумин М.И. Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов: Учебное пособие. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2009.

Глава 1

Базовые понятия теории некорректных задач и необходимые теоретические факты

Первая глава учебного пособия посвящена для удобства читателей краткому напоминанию основных понятий теории некорректных задач, к которым относятся определения корректно и некорректно поставленных задач, а также понятие регуляризирующего оператора (алгоритма). Многие подробности, связанные с этим центральными в теории некорректных задач понятиями, а также различные примеры некорректных задач можно найти в пособии [19]. Глава завершается весьма подробным обсуждением необходимых для понимания основного материала теоретических сведений из теории функций, функционального анализа, интегральных и дифференциальных уравнений, нелинейного анализа и теории оптимизации.

1.1. Понятия корректно и некорректно поставленных задач

Определим прежде всего понятия корректно и некорректно поставленных задач. По сложившейся традиции это будет удобно сделать на примере классической задачи решения так называемых абстрактных (операторных) уравнений первого рода, к которым сводятся очень многие математические задачи.

1.1.1. Определения корректно и некорректно поставленных задач

Рассмотрим абстрактное уравнение первого рода

$$Az = u, \quad z \in Z, \;\; u \in U, \tag{1.1.1}$$

которое с подходящими пространствами (конечномерными, функциональными) Z, U, а также с некоторым оператором $A:\; Z \to U$ возникает в различного рода исследованиях. Решение этого уравнения в наиболее важных и интересных случаях является по своей природе неустойчивым по отношению к ошибкам исходных данных – оператора A и “правой части” u или, другими словами, задача решения этого уравнения является некорректно поставленной. Введем строгое с математической точки зрения понятие некорректно поставленной задачи. Для этого определим сначала, следуя Ж. Адамару [29], корректно поставленную или, короче, корректную задачу. Пусть в уравнении (1.1.1) Z, U – метрические пространства, $A : Z \to U$ – непрерывный оператор. Задачу определения z из уравнения первого рода (1.1.1) будем называть корректно поставленной, если:

1) уравнение (1.1.1) разрешимо для всех $u \in U$;

2) решение единственно;

3) решение устойчиво по возмущению правой части, т.е. малым в метрике пространства U возмущениям правой части u соответствуют и малые в метрике пространства Z возмущения решения z.

В качестве приближенного решения в корректных задачах, если вместо "точной" правой части u имеется ее приближение u_δ, $u_\delta \to u$, $\delta \to 0$, благодаря предельному соотношению $z_\delta \to z$, $\delta \to 0$, принимается элемент $z_\delta = A^{-1}u_\delta$.

Под некорректной задачей решения уравнения (1.1.1) понимается любая такая задача, в которой не выполняется хотя-бы одно из перечисленных трех условий корректности. В огромном числе случаев при этом не выполняются условия 1) и 3). Тогда элемент $z_\delta = A^{-1}u_\delta$, даже если он и определен, не может служить в качестве приближения к z, так как z_δ при сколь угодно малых δ может как угодно сильно отличаться от точного решения z.

1.2. Понятие регуляризирующего оператора (алгоритма). Понятие априорной информации

Основным объектом нашего внимания далее будет операторное уравнение первого рода

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U, \tag{1.2.1}$$

где Z, U – гильбертовы пространства, $A : Z \to U$ – линейный непрерывный оператор. Мы предполагаем, что уравнение (1.2.1) разрешимо классическим образом, не предполагая, вообще говоря, заранее, что такое решение единственно. Среди всех решений мы выделяем нормальное, т.е. минимальное по норме пространства Z среди всех решений. Как известно (см., например, [19]), таким образом определенное нормальное решение всегда существует и единственно. Везде ниже нашей основной задачей и будет задача приближенного нахождения этого решения.

Заметим, что с самой общей абстрактной точки зрения типичным примером некорректной задачи (1.2.1) является задача с вполне непрерывным оператором A (см. раздел 1.3.2), поскольку в этом случае, как хорошо известно, не выполняются сразу первое и третье условия корректности задачи (1.2.1) по Адамару (см. раздел 2.2).

1.2.1. Понятие регуляризирующего оператора (алгоритма)

Итак, пусть у нас имеется операторное уравнение с точными исходными данными

$$A^0 z = u^0, \quad z \in Z, \quad u^0 \in U, \tag{1.2.2}$$

где Z, U – гильбертовы пространства, $A^0 : Z \to U$ – линейный непрерывный оператор, $u^0 \in U$ – некоторый заданный элемент, которое будем считать разрешимым.

Обозначим через z^0 нормальное решение уравнения (1.2.2). Оператор A^0 и правая часть u^0 представляют собой соответственно точный оператор и точную правую часть (именно об этом и говорит верхний индекс 0), однако они точно не известны, а известны только их приближения: линейный непрерывный оператор $A^h : Z \to U$ и правая часть $u^\delta \in U$ вместе с оценками их отклонения от A^0 и u^0 соответственно

$$\|A^h - A^0\| \equiv \sup_{\|z\| \leqslant 1} \|(A^h - A^0)z\| = \sup_{z \neq 0} \frac{\|(A^h - A^0)z\|}{\|z\|} \leqslant h,$$

$$\|u^\delta - u^0\| \leqslant \delta,$$

где $h \in (0, h_0)$, $\delta \in (0, \delta_0)$, h_0, δ_0 – некоторые фиксированные положительные числа. Из сказанного в разделе 1.1 следует, что в качестве приближения к какому-либо решению z_0 (например, нормальному z^0) уравнения (1.2.2) нельзя брать формально элемент $(A^h)^{-1}u^\delta$, так как он может просто не существовать (не выполняется первое условие определения корректности по Адамару) или в случае формального существования может как угодно сильно в норме Z отличаться от z_0 (не выполняется третье условие определения корректности по Адамару).

Понятие регуляризирующего оператора (алгоритма) является центральным понятием в теории регуляризации неустойчивых задач и было введено А.Н. Тихоновым в 1963 г. [21, 22]. Приведем достаточно общее определение регуляризирующего оператора (см. [24, 25]).

Определение 1.2.1. *Зависящий от параметра $\eta \equiv (h, \delta)$ оператор (алгоритм) $R(A, u, \eta)$, вообще говоря, многозначный, определенный на элементах пространства линейных непрерывных операторов $L(Z, U)$ и пространства U и имеющий в качестве значений множества элементов пространства Z (т.е. действующий во множество 2^Z), называется регуляризирующим (относительно элемента u^0 и оператора A^0), если*

1) существуют числа h_1, $\delta_1 > 0$ такие, что оператор R определен при всякой паре $\eta = (h, \delta)$, $h \in (0, h_1)$, $\delta \in (0, \delta_1)$ для любого оператора $A \in L(Z, U)$ и любого элемента $u \in U$ таких, что

$$\|A - A^0\| \leqslant h, \quad \|u - u^0\| \leqslant \delta;$$

2) имеет место предельное соотношение

$$\|z^\eta - z^0\| \to 0,$$

если только $z^\eta \in R(A^h, u^\delta, \eta)$ (т.е. z^η выбирается из множества $R(A^h, u^\delta, \eta)$ произвольным образом), где A^h, u^δ – любая такая пара исходных данных, для которой выполняются оценки

$$\|A^h - A^0\| \leqslant h < h_1, \quad \|u^\delta - u^0\| \leqslant \delta < \delta_1.$$

Можно сообразить, что важность определения регуляризирующего оператора состоит в том, что, если у нас такой оператор имеется, то в качестве приближения к решению z^0 уравнения (1.2.2) с приближенно известной информацией об исходных данных A^0, h^0,

$$\|A^h - A^0\| \leqslant h, \quad \|u^\delta - u^0\| \leqslant \delta,$$

следует просто взять любой элемент $z^\eta \in R(A^h, u^\delta, \eta)$, так как тогда в соответствии с определением регуляризирующего алгоритма будет иметь место предельное соотношение

$$\|z^\eta - z^0\| \to 0, \quad \eta \to 0.$$

Таким образом, главным вопросом теперь становится вопрос существования регуляризирующих в смысле определения 1.2.1 операторов (алгоритмов) для решения задачи (1.2.2), неустойчивой к ошибкам исходных данных. Ответу на этот важнейший вопрос будет посвящена глава 2 данного пособия, где мы рассмотрим метод регуляризации на коипактных множествах для решения операторного уравнения первого рода вида (1.2.2), который является устойчивым по отношению к ошибкам в исходных данных регуляризирующим алгоритмом. Ввиду ограниченности объема пособия будем рассматривать уравнение (1.2.2) лишь на паре гильбертовых пространств без каких-либо дополнительных ограничений на искомое решение. Несмотря на указанное сужение класса задач, он содержит много важных для приложений конкретных неустойчивых задач.

1.2.2. Понятие априорной информации

При решении некорректных задач мы неизбежно сталкиваемся с таким наиважнейшим в теории некорректных задач понятием, как понятие априорной информации. Для эффективного решения некорректной задачи очень важно знать *a priori* какими естественными и физически оправданными с точки зрения данной конкретной задачи свойствами обладает ее предполагаемое решение. При решении любой прикладной задачи такая априорная информация имеется. Она может выражаться в самых разнообразных формах. Это может быть естественное для представителей конкретных наук знание о той или иной гладкости искомых функций (для физиков является обычным утверждение о том, что физически оправданное решение не может быть "устроено слишком плохо"), их априорной принадлежности тому или иному классу функций и т.п. Любая такая априорная информация, трансформированная математиком в адекватную для данной конкретной задачи математическую "форму", может привести к успешному решению этой прикладной задачи, причем успех и эффективность такого решения напрямую зависят от "качества" взаимодействия представителей конкретных естественных наук с математиками – специалистами в области методов решения некорректных задач. В данном пособии понятие априорной информации приобретает особое значение, так как именно априорная информация о принадлежности искомого решения некоторому компактному множеству в гильбертовом пространстве, которому принадлежат решения исходного операторного уравнения, является определяющей для конструкций изучаемого метода регуляризации на компактах.

1.3. Необходимые теоретические сведения из различных математических дисциплин

В основе теории и методов решения некорректных задач лежат самые различные факты из теории функций, функционального анализа, теории интегральных и дифференциальных уравнений, нелинейного анализа и теории оптимизации. В данном разделе формулируются все необходимые факты для изучения теории и методов решения некорректных задач в рамках настоящего пособия.

1.3.1. Необходимые сведения из теории функций

Напомним сначала необходимые определения и факты из теории функций вещественной переменной (см., например, [11, 14]).

Определение 1.3.1. *Конечная функция $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, называется абсолютно-непрерывной, если каковы бы ни были система интервалов*

$$(\alpha_i, \beta_i) \subset [a, b], \quad \alpha_i < \beta_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n, \;\; \bigcap_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i) = \emptyset,$$

и натуральное n, по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\sum\limits_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) \leqslant \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n} |z(\beta_i) - z(\alpha_i)| \leqslant \varepsilon$.

Хорошо известен следующий критерий абсолютной непрерывности.

Лемма 1.3.1. *Непрерывная функция $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, является абсолютно-непрерывной тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде*

$$z(s) = z(a) + \int_a^s f(s) ds,$$

где f – суммируемая на $[a, b]$ функция, т.е. $f \in L_1(a, b)$.

Непосредственным следствием этой леммы являются следующие две.

Лемма 1.3.2. *Если функция $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, абсолютно-непрерывна, то она имеет при почти всех $s \in [a, b]$ производную $z'(s)$, причем эта производная суммируема на $[a, b]$.*

Лемма 1.3.3. *Для абсолютно-непрерывной функции $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, имеет место равенство*

$$z(s) = z(a) + \int_a^s z'(s) ds.$$

Ниже нам будет нужен также классический принцип выбора Хелли (см., например, [14]). Для его формулировки введем следующее

Определение 1.3.2. *Пусть на сегменте $[a, b]$ задана конечная функция f, а сам сегмент разбит на части точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$. Точная верхняя грань всевозможных сумм (по всевозможным разбиениям сегмента) $V = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ называется полным изменением (полной вариацией) функции f на сегменте $[a, b]$ и обозначается через $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$. Если $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < +\infty$, то говорят, что f есть функция с конечным изменением на $[a, b]$.*

Справедливы следующие классические свойства функций с конечным изменением, которые понадобятся ниже.

Лемма 1.3.4. *Полная вариация функции на $[a, b]$ складывается из ее полных вариаций на $[a, s^*]$ и на $[s^*, b]$.*

Лемма 1.3.5. *Для того, чтобы функция $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, была функцией с конечным изменением, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде разности двух неубывающих функций. В частности, двумя такими функциями являются функции*

$$\pi(x) \equiv \overset{x}{\underset{a}{V}} (f), \;\; a < x \leqslant b, \; \pi(a) = 0,$$

$$v(x) \equiv \pi(x) - f(x), \;\; a \leqslant x \leqslant b,$$

для которых справедливо равенство

$$f(x) = \pi(x) - v(x), \; a \leqslant x \leqslant b.$$

Лемма 1.3.6. *Пусть x_1, $x_2, \dots$, $a < x_i < b$, $i = 1, 2, \dots$ – последовательность, состоящая из всех точек разрыва функции $f(x)$, $a < x < b$ (число их не более чем счетно). Функция $s(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, задаваемая равенствами*

$$s(a) = 0, \;\; s(x) = [f(a+0) - f(a)] + \sum_{x_i < x} [f(x_i + 0) - f(x_i - 0)] +$$

$$+ [f(x) - f(x-0)], \; a < x \leqslant b,$$

называется функцией скачков функции с конечным изменением $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Лемма 1.3.7. *Функция с конечным изменением f представляется в виде суммы двух функций ограниченной вариации $f = f_1 + f_2$, первая из которых непрерывна, а вторая – функция скачков.*

Наконец, сформулируем непосредственно сам принцип выбора Хелли.

Теорема 1.3.1. *Пусть на сегменте $[a, b]$ задано бесконечное семейство функций $F = \{f\}$. Если все функции семейства и их полные изменения ограничены одним и тем же числом*

$$|f(x)| \leqslant K, \;\; \overset{b}{\underset{a}{V}} (f) \leqslant K,$$

то из семейства F можно выделить последовательность f_i, $i = 1, 2, \dots$, сходящуюся в каждой точке сегмента $[a, b]$ к некоторой функции с конечным изменением.

1.3.2. Необходимые сведения из функционального анализа

Примем прежде всего некоторые стандартные для функционального анализа обозначения.

Пусть Z, U – линейные нормированные пространства, $A : Z \to U$ – линейный ограниченный оператор. В этом случае, как известно, вся совокупность линейных ограниченных операторов из Z в U, которая обозначается через $L(Z, U)$, образует также линейное нормированное пространство с нормой

$$\|A\| \equiv \|A\|_{Z \to U} \equiv \sup_{\|z\| \neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|} = \sup_{\|z\| \leqslant 1} \frac{\|Az\|}{\|z\|},$$

а расстояние между двумя линейными ограниченными операторами A_1, A_2 задается формулой

$$\rho(A_1, A_2) \equiv \|A_1 - A_2\|.$$

Через $D(A)$ и $R(A)$ обозначаем соответственно область определения и область значений оператора $A : Z \to U$. Оператор $A : Z \to U$ называется инъективным, если из равенства $Az_1 = Az_2$ следует, что $z_1 = z_2$.

Приводимые ниже классические определения и факты могут быть найдены в стандартных учебниках по функциональному анализу [9, 11, 13, 28].

Определение 1.3.3. *Множество M из линейного нормированного пространства называется компактным (компактом), если из любой бесконечной последовательности его элементов можно выделить сходящуюся к некоторой его точке подпоследовательность.*

Определение 1.3.4. *Оператор $A : Z \to U$ называется вполне непрерывным, если замыкание $\mathrm{cl}\, AX \equiv \overline{AX}$ образа ограниченного множества $X \subset Z$ является компактным множеством.*

Центральное внимание в пособии мы уделяем так называемым абстрактным (операторным) уравнениям первого рода на паре гильбертовых пространств Z, U

$$Az = u,$$

где $A \in L(Z,U)$, $u \in U$ – заданные оператор и элемент. В случае разрешимости такого уравнения для некоторой правой части $u \in U$ минимальное по норме среди всех его решений называется нормальным, оно существует и единственно (см. ниже необходимые сведения из теории оптимизации).

Везде ниже знак $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будет использоваться для обозначения скалярного произведения в гильбертовом пространстве.

Определение 1.3.5. *Пусть H – гильбертово пространство. Последовательность $z_n \in H$, $n = 1, 2, \dots,$ называется слабо сходящейся к элементу $z_0 \in H$, если для любого элемента $z \in H$ выполняется предельное соотношение $\langle z_n, z\rangle \to \langle z_0, z\rangle$, $n \to \infty$. Указанную слабую сходимость будем обозначать символом $z_n \xrightarrow{w} z_0$.*

Теорема 1.3.2. *Замкнутое выпуклое множество M, принадлежащее гильбертову пространству H, является слабо замкнутым, т.е. любая принадлежащая ему слабо сходящаяся последовательность $z_n \in M$, $n = 1, 2, \dots,$ сходится к некоторой его точке $z_0 \in M$.*

Теорема 1.3.3. *Ограниченное замкнутое выпуклое множество M в гильбертовом пространстве H является слабо компактным, т.е. из любой принадлежащей ему бесконечной последовательности $z_n \in M$, $n = 1, 2, \dots,$ можно извлечь слабо сходящуюся к некоторой его точке $z_0 \in M$ подпоследовательность $z_{n_k} \in M$, $k = 1, 2, \dots$.*

Определение 1.3.6. *Функционал $f : H \to R^1$, заданный на гильбертовом пространстве H называется полунепрерывным (слабо полунепрерывным) снизу в точке $z_0 \in H$, если из сходимости $z_n \longrightarrow z_0$ ($z_n \xrightarrow{w} z_0$) следует неравенство $\varliminf\limits_{n\to\infty} f(z_n) \geqslant f(z_0)$.*

Оказывается справедливой следующая важная

Лемма 1.3.8. *Выпуклый непрерывный функционал в гильбертовом пространстве в каждой точке слабо полунепрерывен снизу.*

Вспомним здесь еще один важный для нас факт из функционального анализа, который сформулируем также в виде леммы.

Лемма 1.3.9. (*H-свойство гильбертова пространства*). *Из слабой сходимости $z_n \xrightarrow{w} z_0, n \to \infty$ и сходимости норм $\|z_n\| \to \|z_0\|, n \to \infty$, в гильбертовом про-*

странстве H следует сильная сходимость $\|z_n - z_0\| \to 0, n \to \infty$ (топологии слабой и сильной сходимости на единичной сфере гильбертова пространства совпадают).

Наиважнейшее значение для нас будет иметь также понятие производной в смысле Фреше функционала в гильбертовом пространстве. Напомним соответствующее определение.

Определение 1.3.7. *Производной в смысле Фреше (или градиентом) нелинейного функционала $f: H \to R^1$ на гильбертовом пространстве H называется элемент $f'[z] \in H$, для которого справедливо равенство*

$$f(z+h) - f(z) = \langle f'[z], h \rangle + o(\|h\|),$$

где $o(\|h\|)/\|h\| \to 0$ при $\|h\| \to 0$, $\langle z_1, z_2 \rangle$ – скалярное произведение в пространстве H.

Справедлива следующая лемма, обобщающая хорошо известную теорему классического конечномерного анализа.

Лемма 1.3.10. *Если функционал $f : H \to R^1$, заданный на гильбертовом пространстве H, дифференцируем в смысле Фреше в точке $z_0 \in H$ и достигает в ней минимального значения на H, то $f'(z_0) = 0$.*

Нам понадобится также следующая теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

Теорема 1.3.4. *Пусть $f : H \to R^1$ – линейный непрерывный функционал на гильбертовом пространстве H. Тогда найдется такой единственный элемент $z_f \in H$, что справедливо представление: $f(z) \equiv \langle z_f, z \rangle \; \forall z \in H$.*

В теории методов регуляризации часто (см., например, [24]) в качестве функционального пространства, в котором ищется решение некорректной задачи, используется гильбертово пространство $W_2^1(a,b)$ (классов эквивалентности) функций $f : (a,b) \to R^1$, суммируемых с квадратом и имеющих суммируемые с квадратом обобщенные в смысле Соболева производные первого порядка $f' : (a,b) \to R^1$. Скалярное произведение в нем задается равенством

$$\langle f_1, f_2 \rangle \equiv \int_a^b (f_1(s) f_2(s) + f_1'(s) f_2'(s)) ds.$$

В связи с пространством $W_2^1(a,b)$, напомним, что суммируемая на (a,b) функция f' называется обобщенной производной первого порядка в смысле Соболева суммируемой на (a,b) функции f, если для любой бесконечно дифференцируемой и финитной на (a,b) (т.е. равной нулю вне некоторого отрезка $[c,d] \subset (a,b)$) функции φ имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = - \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx.$$

В данном учебном пособии в качестве пространства решений в силу одномерности интервала (a,b) нам будет удобнее вместо пространства $W_2^1(a,b)$ использовать гильбертово пространство абсолютно-непрерывных функций $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, (обычные) производные которых существуют для почти всех $s \in (a,b)$ и суммируемы с квадратом, т.е. $z' \in L_2[a,b]$, а скалярное произведение задается равенством

$$\langle z_1, z_2 \rangle \equiv \int\limits_a^b (z_1(s)z_2(s) + z_1'(s)z_2'(s))ds.$$

Это гильбертово пространство обозначим через $V_2^1[a,b]$. Скалярное произведение $\langle z_1, z_2 \rangle$ стандартным образом порождает, очевидно, норму в пространстве $V_2^1[a,b]$: $\|z\| \equiv \sqrt{\langle z, z \rangle}$. Подчеркнем, что при определении пространства $V_2^1[a,b]$ используется лишь понятие обычной производной функции одного переменного. Заметим также, что в каждом классе эквивалентности $f \in W_2^1(a,b)$ присутствует ровно одна абсолютно-непрерывная на $[a,b]$ функция $f \in V_2^1[a,b]$ и, наоборот, каждая абсолютно-непрерывная на $[a,b]$ функция $f \in V_2^1[a,b]$ порождает класс эквивалентности (функцию) $f \in W_2^1[a,b]$.

1.3.3. Необходимые сведения из теории интегральных уравнений

При рассмотрении интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода важно иметь предсталение о том когда и как оно разрешимо. В то же время, теория интегральных уравнений 1-го рода, как правило, не излагается сколь-нибудь подробно в современных доступных книгах по интегральным уравнениям. С этой целью сформулируем и докажем здесь классическую теорему Пикара (см., например, [12, 17, 18]) существования и единственности решения линейного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$\int\limits_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{1.3.1}$$

Решение этого уравнения будем искать в классе $L_2[a,b]$. Будем считать, что правая часть $u(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, суммируема с квадратом, а ядро $K(\cdot,\cdot)$ непрерывно в прямоугольнике $\Pi \equiv \{a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant s \leqslant b\}$ и является симметрическим, т.е. выполняется равенство $K(x,s) = K(s,x)$. Заметим при этом, что всякое интегральное уравнение вида

$$\int\limits_a^b \bar{K}(x,s)z(s)ds = \bar{u}(x), \quad c \leqslant x \leqslant d, \tag{1.3.2}$$

может быть сведено к уравнению вида (1.3.1) с симметрическим ядром (см., например, [12, 17], а также [18, с. 56]). Действительно, умножим равенство (1.3.2) на $\bar{K}(x,y)$ и проинтегрируем по x от c до d. Тогда можем записать

$$u(y) = \int\limits_c^d \bar{K}(x,y)\bar{u}(x)dx = \int\limits_c^d \bar{K}(x,y) \int\limits_a^b \bar{K}(x,s)z(s)dsdx =$$

$$= \int\limits_c^d \int\limits_a^b \bar{K}(x,y)\bar{K}(x,s)z(s)dsdx =$$

$$= \int\limits_a^b (\int\limits_c^d \bar{K}(x,y)\bar{K}(x,s)dx)z(s)ds = \int\limits_a^b K(y,s)z(s)ds,$$

где

$$K(y,s) \equiv \int\limits_c^d \bar{K}(x,y)\bar{K}(x,s)dx$$

и справедливо равенство $K(y,s) = K(s,y)$, $a \leqslant y, s \leqslant b$.

Будем также считать это симметрическое ядро замкнутым (полным) (см. [12, 17, 18]). Ядро $K(\cdot,\cdot)$ мы называем замкнутым в классе $L_2(a,b)$, если каждая функция $\omega(\cdot)$ из этого класса, удовлетворяющая тождеству

$$\int\limits_a^b K(x,s)\omega(s)ds = 0, \quad a \leqslant s \leqslant b,$$

необходимо равна нулю почти всюду в интервале (a,b).

Последнее означает, в частности, что однородное ($u(x) = 0$, $a \leqslant x \leqslant b$) уравнение (1.3.1) имеет лишь тривиальное решение в классе $L_2[a,b]$.

Для формулировки теоремы Пикара нам потребуются следующие понятия (см. [12, 17, 27]).

Определение 1.3.8. *Фундаментальными числами и фундаментальными функциями ядра $K(\cdot,\cdot)$ называются числа λ_i и функции $\varphi_i \in L_2[a,b]$, $\varphi_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots$ такие, что*

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int\limits_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Оказывается, для замкнутости ядра $K(\cdot,\cdot)$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующая система всех фундаментальных функций образовывала замкнутую в $L_2[a,b]$ ортонормированную систему (см. [12, 17, 27]). Напомним при этом, что ортонормированная система функций φ_1, φ_2, $\ldots$, φ_n, $\ldots$ из $L_2[a,b]$ называется замкнутой, если не существует никакой функции из $L_2[a,b]$, ортогональной ко всем функциям системы. При этом, как известно из теории рядов Фурье, для того, чтобы ортогональная и нормированная система $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ \ldots$ из $L_2[a,b]$ была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f \in L_2(a,b)$ выполнялось равенство Парсеваля

$$\int\limits_a^b f^2(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2,$$

где

$$c_i \equiv \int\limits_a^b f(x)\varphi_i(x)dx.$$

Напомним также одновременно, что для ортонормированной системы функций φ_1, φ_2, $\ldots, \varphi_n$, $\ldots$ из $L_2[a,b]$ и любой суммируемой на (a,b) с квадратом функции f

справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqslant \int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Напомним, наконец, необходимую при доказательстве теоремы Пикара классическую теорему Фишера–Рисса.

Теорема 1.3.5. *Пусть заданы замкнутая ортонормированная система функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ из $L_2[a,b]$ и последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ такая, что ряд $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + \ldots$ сходится. Тогда существует единственная функция $f \in L_2[a,b]$, которая имеет числа a_i, $i = 1, 2, \ldots$ своими коэффициентами Фурье относительно данной ортонормированной системы функций.*

После формулировки необходимых классических фактов мы можем сформулировать и доказать следующую теорему Пикара.

Теорема 1.3.6. *Интегральное уравнение (1.3.1) в случае симметрического и замкнутого ядра имеет единственное в классе $L_2[a,b]$ решение тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\lambda_1^2 u_1^2 + \lambda_2^2 u_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 u_n^2 + \ldots,$$

где λ_i – фундаментальные числа ядра $K(\cdot,\cdot)$, u_i – коэффициенты Фурье правой части $u(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, по системе фундаментальных функций ядра $K(\cdot,\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Покажем сначала необходимость сформулированного условия. Пусть $z \in L_2(a,b)$ – решение уравнения (1.3.1). Тогда имеем

$$u_i = \int\limits_a^b u(x)\varphi_i(x)dx = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x,s)\varphi_i(x)z(s)dxds = \tag{1.3.3}$$

$$= \frac{1}{\lambda_i} \int\limits_a^b \varphi_i(s)z(s)ds,$$

так как

$$\int\limits_a^b K(x,s)\varphi_i(x)dx = \frac{1}{\lambda_i}\varphi_i(s).$$

Равенство (1.3.3) можем записать в виде

$$\int\limits_a^b \varphi_i(s)z(s)ds = \lambda_i u_i.$$

Таким образом, числа $\lambda_i u_i$ есть коэффициенты Фурье функции $z \in L_2(a,b)$ и в силу неравенства Бесселя ряд из квадратов коэффициентов $\lambda_i^2 u_i^2$ с необходимостью должен быть сходящимся. При этом очевидно

$$z(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \varphi_i(s),$$

причем ряд сходится в среднем.

Для доказательства достаточности сформулированного условия предположим, что ряд

$$\lambda_1^2 u_1^2 + \lambda_2^2 u_2^2 + \dots + \lambda_n^2 u_n^2 + \dots$$

сходится. Тогда по теореме Фишера–Рисса существует функция $z(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, и притом единственная в классе $L_2(a,b)$, удовлетворяющая равенствам

$$\int_a^b \varphi_i(s) z(s) ds = \lambda_i u_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

т.е. представимая в виде сходящегося в среднем ряда

$$z(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \varphi_i(s).$$

Покажем, что эта функция z и представляет собой решение уравнения (1.3.1), причем единственное в силу замкнутости ядра. Пусть

$$u^1(x) \equiv \int_a^b K(x,s) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \varphi_i(s) ds.$$

Можем записать

$$u_k^1 \equiv \int_a^b u^1(x)\varphi_k(x)dx = \int_a^b \int_a^b K(x,s) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \varphi_i(s) ds \varphi_k(x) dx.$$

Меняя порядок интегрирования и суммирования, имеем

$$u_k^1 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \int_a^b \varphi_k(x) (\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s) ds) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \int_a^b \varphi_k(x) \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} dx = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_i(x) dx = u_k,$$

$$k = 1, 2, \dots .$$

Таким образом, у функций $u(\cdot)$ и $u^1(\cdot)$ оказались одни и те же коэффициенты Фурье, откуда, в силу замкнутости системы функций φ_1, φ_2, $\dots, \varphi_n$, $\dots$ следует, что функции $u(\cdot)$ и $u^1(\cdot)$ совпадают почти всюду на (a,b). Так как они одновременно и непрерывны, то, стало быть, $u(x) = u^1(x)$ при всех $x \in [a,b]$. Теорема Пикара доказана.

1.3.4. Необходимые сведения из выпуклого анализа

Приводимые ниже определения и факты из выпуклого и нелинейного (негладкого) анализа могут быть найдены в [10, 15, 16, 30]. Заметим, что ниже без дополнительных оговорок мы будем заданные на гильбертовом пространстве функционалы называть также, когда это удобно, функциями.

Определение 1.3.9. *Функционал $f : D \to R^1$, заданный на выпуклом множестве D гильбертова пространства H, называется выпуклым, если $\forall\, z_1,\ z_2 \in D,\ \alpha \in [0,1]$ справедливо неравенство*

$$f(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) \leqslant \alpha f(z_1) + (1-\alpha)f(z_2).$$

Если в последнем неравенстве знак $\leqslant$ сменить на $\geqslant$, то функционал f называется вогнутым на D.

В выпуклом, да и в негладком (нелинейном) анализе оказалось очень удобным соглашение о том, что функции могут принимать и бесконечные значения, а именно $+\infty$. Последнее не противоречит данному выше определению. Выпуклый функционал $f : D \to R^1$ с учетом этого замечания можно считать заданным на всем пространстве H, допуская в этом случае для него значения $+\infty$ и сохраняя обозначение функции f:

$$f(z) = \begin{cases} f(z),\ z \in D, \\ +\infty,\ z \in H,\ z \notin D. \end{cases}$$

С учетом отмеченного обстоятельства данное выше определение можно переписать так.

Определение 1.3.10. *Функционал $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$ называется выпуклым, если $\forall\, z_1,\ z_2 \in H,\ \alpha \in [0,1]$, справедливо неравенство*

$$f(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) \leqslant \alpha f(z_1) + (1-\alpha)f(z_2).$$

Если функционал f принимает хотя бы в одной точке конечное значение, то он называется собственным.

Наиважнейшее значение в выпуклом и нелинейном анализе имеют понятия надграфика и эффективного множества функции.

Определение 1.3.11. *Пусть в гильбертовом пространстве H задан функционал $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$. Надграфиком f называется множество*

$$\operatorname{epi} f \equiv \{(z,\alpha) \in H \times R^1 : f(z) \leqslant \alpha\}.$$

Определение 1.3.12. *Пусть в гильбертовом пространстве H задан функционал $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$. Эффективным множеством f называется множество*

$$\operatorname{dom} f \equiv \{z \in H : f(z) < +\infty\}.$$

Справедливы следующие наиважнейшие свойства, с помощью которых ниже мы свяжем дифференциальные свойства функций с понятиями нормалей к их надграфикам.

Лемма 1.3.11. *Функционал $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$, заданный на гильбертовом пространстве H, является выпуклым тогда и только тогда, когда его надграфик $\operatorname{epi} f$ есть выпуклое множество.*

Лемма 1.3.12. *Функционал $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$, заданный на гильбертовом пространстве H, является полунепрерывным снизу тогда и только тогда, когда его надграфик* $\mathrm{epi}\, f$ *есть замкнутое множество.*

Определение 1.3.13. *Функционал $f : D \to R^1$, заданный на выпуклом множестве D гильбертова пространства H, называется сильно выпуклым (сильно вогнутым) с постоянной $\varkappa > 0$, если $\forall\, z_1,\, z_2 \in D,\ \alpha \in [0,1]$, справедливо неравенство*

$$f(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) \overset{(\geqslant)}{\leqslant} \alpha f(z_1) + (1-\alpha) f(z_2) \overset{(+)}{-} \varkappa\alpha(1-\alpha)\|z_1 - z_2\|^2.$$

Оказывается, выпуклость функционала определяет автоматически некоторые его важные дополнительные свойства. Справедлива, в частности,

Лемма 1.3.13. *Предположим, что на выпуклом множестве D гильбертова пространства H задан выпуклый ограниченный функционал f. Если внутренность* $\mathrm{int}\, D$ *множества D не пуста, то f – локально липшицев (а, значит, и непрерывный) функционал на* $\mathrm{int}\, D$. *Напомним одновременно, что функционал называется локально липшицевым на множестве D, если он удовлетворяет условию Липшица в окрестности любой точки $z \in D$ (при этом, вообще говоря, постоянная Липшица зависит от точки z).*

При конечно-разностной аппроксимации компактных множеств в $L_2[a,b]$ в методе регуляризации на компактах нам понадобятся некоторые сведения о многогранниках в R^n. Приведем необходимые определения и результаты.

Определение 1.3.14. *Векторы $z_j \in R^n,\ j = 1,\ldots,l$, назовем выпукло независимыми, если ни один из них не является выпуклой комбинацией остальных.*

Определение 1.3.15. *Выпуклым многогранником в R^n называется выпуклая оболочка $C\{z_j\}_{j=1}^l$ конечного числа точек $z_j \in R^n$, $j = 1,\ldots,l$.*

Определение 1.3.16. *Точка $z \in C\{z_j\}_{j=1}^l$ называется вершиной выпуклого многогранника $C\{z_j\}_{j=1}^l$, если существует такой вектор $b \in R^n$, что для произвольного вектора $x \in C\{z_j\}_{j=1}^l$ справедливо неравенство $\langle b, x - z\rangle \geqslant 0$ и равенство достигается лишь при $x = z$.*

Нам понадобятся далее следующие две леммы.

Лемма 1.3.14. *Пусть $M \equiv C\{z_j\}_{j=0}^l \subset R^n$ – выпуклый многогранник. Пусть t – его вершина. Тогда существует целое p, $0 \leqslant p \leqslant l$ такое, что $z_p = t$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение не верно, т.е. t – вершина многогранника, но отличная от точек z_j, $j = 0,1,\ldots,l$. Так как $t \in M$, то $t = \sum\limits_{i=0}^{l} \alpha_i z_i$ с $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 0,1,\ldots,l$, $\sum\limits_{i=0}^{l} \alpha_i = 1$. Одновременно, поскольку t – вершина, то найдется вектор $b \in R^n$ такой, что $\langle b, z - t\rangle \geqslant 0$ для любых $z \in M$, причем знак равенства достигается лишь при $z = t$. Поэтому $\langle b, z_i - t\rangle > 0$, $i = 0,1,\ldots,l$, и мы можем записать

$$0 = \langle b, t - t\rangle = \langle b, t - \sum_{i=0}^{l} \alpha_i z_i\rangle = \sum_{i=0}^{l} \alpha_i \langle b, t - z_i\rangle < 0.$$

Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 1.3.15. *Пусть $M \equiv C\{z_j\}_{j=0}^l \subset R^n$ – выпуклый многогранник. Тогда для того, чтобы элемент $z_0 \in C\{z_j\}_{j=0}^l$ являлся вершиной этого многогранника, необ-*

ходимо и достаточно, чтобы этот элемент z_0 не являлся выпуклой комбинацией остальных z_i, $i = 1, \dots, l$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $z_0 = 0$.

Необходимость. Пусть z_0 – вершина M, т.е. существует такой вектор $b \in R^n$, что $\langle b, z - z_0\rangle = \langle b, z\rangle \geqslant 0$, причем равенство достигается лишь при $z = 0$. Тогда имеют место строгие неравенства $\langle b, z_i\rangle > 0$, $i = 1, \dots, l$. Предположим, что $z_0 = 0 = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i z_i$ с $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, l$, $\sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i = 1$. Тогда имеем

$$0 = \langle b, z_0\rangle = \langle b, \sum_{i=1}^{l} \alpha_i z_i\rangle = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \langle b, z_i\rangle > 0.$$

Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть $z_0 \notin C\{z_j\}_{j=1}^{l}$. Поскольку множество $C\{z_j\}_{j=1}^{l}$ – выпуклое и замкнутое в R^n, то функция $|z|^2$, $z \in R^n$ достигает на нем своего минимума в единственной точке $b \in R^n$, причем $b \neq 0$. Покажем, что имеют место строгие неравенства $\langle b, z_i\rangle > 0$, $i = 1, \dots, l$.

Предположим, что это не так. Тогда для некоторого индекса p, $1 \leqslant p \leqslant l$, выполнено неравенство $\langle b, z_p\rangle \leqslant 0$. Найдем минимум $|z|^2$ на отрезке $\{z \in R^n : z = \lambda b + (1-\lambda) z_p, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$. Легко сообразить, что этот минимум достигается при

$$\lambda = \lambda^* = \frac{\langle z_p, z_p\rangle - \langle b, z_p\rangle}{\langle z_p, z_p\rangle - 2\langle b, z_p\rangle + \langle b, b\rangle},$$

так как в этой точке минимум указаной функции достигается на всей прямой $\{z \in R^n : z = \lambda b + (1-\lambda) z_p, -\infty < \lambda < +\infty\}$, а в силу неравенства $\langle b, z_p\rangle \leqslant 0$ она попадает в интервал $(0, 1)$. Последнее обстоятельство противоречит тому, что $|z|^2$ достигает минимума на $C\{z_j\}_{j=1}^{l}$ в точке b. Итак, показано, что $\langle b, z_i\rangle > 0$, $i = 1, \dots, l$.

Пусть далее $z \neq 0$ – произвольный элемент из M. Тогда $z = \sum\limits_{i=0}^{l} \alpha_i z_i$ с $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 0, \dots, l$, $\sum\limits_{i=0}^{l} \alpha_i = 1$. Поскольку $z_0 = 0$, то $z = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i z_i$, причем $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, l$ и $0 < \sum\limits_{i=0}^{l} \alpha_i \leqslant 1$. Учитывая последние обстоятельства, можем записать

$$\langle b, z\rangle = \langle b, \sum_{i=1}^{l} \alpha_i z_i\rangle = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \langle b, z_i\rangle > 0.$$

Таким образом, показано, что z_0 – вершина M. Лемма доказана.

Следствием этих двух важных лемм является

Лемма 1.3.16. *Всякий выпуклый многогранник есть выпуклая оболочка своих вершин.*

Доказательство. Пусть задан выпуклый многогранник $M \equiv C\{z_j\}_{j=0}^{l} \subset R^n$ и пусть одна из образующих точек, например z_0, не является его вершиной. Тогда согласно лемме 1.3.15 эта точка является выпуклой комбинацией остальных z_j, $j =$

$1, \ldots, l$, т.е. $z_0 = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i z_i$, $\sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, l$. Пусть $z \in M$ – произвольная точка, т.е. $z = \sum\limits_{i=0}^{l} \beta_i z_i$, $\sum\limits_{i=0}^{l} \beta_i = 1$, $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, l$. Тогда можем записать

$$z = \sum_{i=0}^{l} \beta_i z_i = \beta_0 \sum_{i=1}^{l} \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^{l} \beta_i z_i = \sum_{i=1}^{l} (\beta_0 \alpha_i + \beta_i) z_i,$$

причем очевидно имеем соотношения $\beta_0 \alpha_i + \beta_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, l$ и $\sum\limits_{i=1}^{l} (\beta_0 \alpha_i + \beta_i) = 1$, т.е. мы представили произвольную точку $z \in M$ в виде выпуклой комбинации только образующих точек z_i, $i = 1, \ldots, l$. Таким образом, повторяя, если потребуется, эту операцию конечное число раз, мы легко убеждаемся в справедливости леммы. Лемма доказана.

Из этих важных лемм непосредственно следует алгоритм, позволяющий установить, дает ли некоторый набор векторов $z_i \in R^n$, $i = 0, 1, \ldots, l$, все вершины заданного выпуклого многогранника $M \subset R^n$. Этот алгоритм заключается в проверке следующих двух условий:

1) любой вектор $z \in M$ можно представить в виде выпуклой комбинации z_i, $i = 0, 1, \ldots, l$;

2) векторы z_i, $i = 0, 1, \ldots, l$, выпукло независимы.

Глава 2

Метод регуляризации на компактных множествах для решения операторных уравнений первого рода

В данном разделе излагаются основы метода регуляризации на компактных множествах для решения операторных уравнений первого рода. С одной стороны, на этот метод можно смотреть как на разновидность общего метода для решения операторных уравнения, называемого методом квазирешений. предложенного В.К. Ивановым в работах [6, 7] и развитого, в частности, в монографии [8]. С другой стороны, основная идея метода регуляризации на компактах берет свое начало с классической работы А.Н. Тихонова, опубликованной в 1943 г. [23] задолго до появления упомянутых работ В.К. Иванова. Примерно через двадцать лет после указанной работы А.Н. Тихонова ее основная идея получила дальнейшее замечательное развитие в работах самого А.Н. Тихонова и его учеников (см., например, книгу [25] и библиографию к ней).

2.1. Общая идея метода квазирешений

Пусть имеется операторное уравнение первого рода

$$A^0 z = u^0, \quad z \in Z, \quad u^0 \in U, \tag{2.1.1}$$

где Z, U – гильбертовы пространства, $A^0 : Z \to U$ – линейный непрерывный оператор, $u^0 \in U$ – некоторый заданный элемент, которое будем считать разрешимым. Предположим, что существует единственное решение z^0 уравнения (2.1.1). Оператор A^0 и правая часть u^0 представляют собой соответственно точный оператор и точную правую часть (именно об этом и говорит верхний индекс 0), однако они не известны, а известны только их приближения: линейный непрерывный оператор $A^h : Z \to U$ и правая часть $u^\delta \in U$ вместе с оценками их отклонения от A^0 и u^0 соответственно

$$\|A^h - A^0\| \leqslant h, \quad \|u^\delta - u^0\| \leqslant \delta.$$

Пусть также из некоторых соображений известно, что точное решение z^0 принадлежит некоторому множеству $M \subset Z$. Значит вместо задачи (2.1.1) нас интересует задача

$$A^0 z = u^0, \quad z \in M, \quad u^0 \in U. \tag{2.1.2}$$

Тогда естественно ввести следующее

Определение 2.1.1. *Квазирешением уравнения (2.1.2) (или уравнения (2.1.1)) на множестве M называется любой такой элемент $z^* \in M$, который минимизирует невязку $\|A^0 z - u^0\|$, $z \in M$:*

$$\|A^0 z^* - u^0\| = \min_{z \in M} \|A^0 z - u^0\|. \tag{2.1.3}$$

В связи с введенным определением возникает общая идея аппроксимации решения z^0 уравнения (2.1.1) квазирешениями. При этом, конечно, в первую очередь нужно уметь "правильно" выбирать соответствующие множества M.

Однако, если бы мы не предположили заранее, что элемент z^*, удовлетворяющий соотношению (2.1.3), существует, то такого элемента при сделанных предположениях относительно оператора A^0, правой части u^0, пространства Z и множества M могло бы и не существовать. Для того, чтобы "исключить" возможность несуществования квазирешения задачи (2.1.2) предположим, что множество M представляет собой компакт в пространстве Z. Тогда, очевидно, квазирешение уравнения (2.1.2) существует и без предположения о разрешимости уравнения (2.1.1) и принадлежности этого решения множеству M. Более того, очевидно, что в случае компактности M существуют квазирешения и возмущенного уравнения

$$A^h z = u^\delta, \quad z \in M, \quad u^\delta \in U, \tag{2.1.4}$$

которые мы будем обозначать через $z^{*\eta}$, $\eta \equiv (h, \delta)$. Одновременно при этом предположении оказывается, что точное решение z^0 исходного уравнения (2.1.1), принадлежащее компакту $M \subset Z$, можно эффективно аппроксимировать квазирешениями $z^{*\eta}$ возмущенного уравнения (2.1.4). Такой метод аппроксимации точного решения z^0 квазирешениями $z^{*\eta}$ традиционно и называется в теории методов решения некорректных задач методом квазирешений.

Впервые идея приближенного решения некорректных задач на компактных или, как еще говорят, на специальных множествах была выдвинута А.Н. Тихоновым в 1943 г. в работе [23]. В этой работе было сформулировано понятие условно корректной задачи или задачи, корректной по Тихонову.

2.2. Понятие условной корректности. Множество корректности. Примеры множеств корректности в виде конкретных компактов

Сформулируем понятие условно корректной или корректной по Тихонову задачи на примере абстрактного уравнения (1.2.2), заметив одновременно, что на самом деле это понятие применимо для значительно более широкого класса задач, нежели класс задач, сводящихся к линейному операторному уравнению (1.2.2).

Определение 2.2.1. *Задача (1.2.2) называется условно корректной на паре гильбертовых пространств, если:*

1) априори известно, что решение задачи (1.2.2) существует и принадлежит заданному множеству корректности $M \subset Z$;

2) оператор A^0 взаимнооднозначно отображает множество M на $A^0 M$;

3) обратный оператор $(A^0)^{-1}$ непрерывен на $A^0 M \subset U$.

В отличие от корректных по Адамару (абсолютно корректных) задач, в задачах условно корректных: 1) снимается требование на разрешимость задачи во всем пространстве; 2) условие непрерывности $(A^0)^{-1}$ на всем пространстве заменяется условием непрерывности $(A^0)^{-1}$ на образе множества корректности.

Известна следующая классическая теорема об ограниченности оператора, обратного к линейному ограниченному инъективному оператору [1, с. 27], [28, с. 105].

Теорема 2.2.1. *Пусть $A : Z \to U$ – линейный непрерывный инъективный оператор с $D(A) = Z$, $R(A) \subset U$, Z, U – банаховы пространства. Для того чтобы обратный оператор из $R(A)$ в Z был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{R(A)} = R(A)$.*

Важным для нас следствием этой теоремы является то, что в случае инъективного оператора A^0 с неограниченным обратным $(A^0)^{-1}$ образ $R(A^0) = A^0 Z$ не может быть замкнутым и, следовательно, уравнение (1.2.2) не может быть разрешимо на всем пространстве U. В частности, например, обычное интегральное уравнение Фредгольма первого рода с замкнутым ядром (см. раздел 1.3.3), интегрируемым с квадратом ($A^0 : L_2 \to L_2$), заведомо неразрешимо во всем пространстве правых частей, так как оператор прямой задачи A^0 вполне непрерывен и не имеет непрерывного обратного.

Таким образом, для некорректных задач (1.2.2), для которых $(A^0)^{-1}$ неограничен на $R(A^0)$, характерно нарушение сразу двух условий корректности по Адамару (разрешимости и непрерывности обратного оператора)

В связи со сказанным возникает естественный вопрос: как можно задавать множество корректности в задаче (1.2.2). Ответ на этот вопрос дает следующая простая, но очень важная с точки зрения различных приложений хорошо известная [23]

Лемма 2.2.1. *Пусть Z, U – банаховы пространства, оператор A^0 непрерывно и взаимооднозначно отображает компакт $M \subset Z$ на $A^0 M \subset U$. Тогда обратный оператор $(A^0)^{-1}$ непрерывен на $A^0 M$.*

Доказательство. Пусть $u^0 \in A^0 M \subset U$. Тогда существует элемент $z^0 \in M$ такой, что $A^0 z^0 = u^0$. Докажем, что обратный оператор $(A^0)^{-1}$ непрерывен в точке u^0. Предположим, что это не так. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ и последовательность $z_n \in M$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что выполняется неравенство $\|z_n - z^0\| \geqslant \varepsilon$, $n = 1, 2, \dots$, и одновременно $\|u_n - u^0\| \to 0$, $n \to \infty$, где $u_n = A^0 z_n$. Так как M – компакт, то из последовательности z_n, $n = 1, 2, \dots$, можно выделить сходящуюся подпоследовательность z_{n_k}, $k = 1, 2, \dots$, причем в силу замкнутости M предел этой последовательности $\bar{z} \in M$. Ясно, что $\bar{z} \neq z^0$. В то же время, мы имеем предельное соотношение $\|u_{n_k} - u^0\| \to 0$, $k \to \infty$, откуда в силу непрерывности оператора A^0 получаем $A^0 \bar{z} = u^0$, что противоречит взаимной однозачности оператора $A^0 : M \to A^0 M$. Лемма доказана.

Таким образом, из этой леммы вытекает, что в качестве множества корректности в задаче (1.2.2) может быть взят компакт $M \subset Z$. Это важное и простое следствие абстрактной леммы 2.2.1 нашло разнообразные применения в различных естественно-научных приложениях [1, 3, 4, 25].

При рассмотрении множеств корректности мы вплотную сталкиваемся с таким наиважнейшим в теории некорректных задач понятием как понятие априорной информации. Приведем важные примеры компактных множеств или, другими словами, примеры задания априорной информации в конкретных гильбертовых пространствах.

1. Во-первых, вспомним хорошо известный факт, состоящий в том, что любое замкнутое ограниченное множество в конечномерном пространстве представляет собой компакт. Этот простой классический пример компактности до появления современных эффективных методов регуляризации служил основой для большинства применяемых в различных приложениях методов приближенного решения конкретных некорректных задач. Прием, применяемый при этом, состоял в следующем. В том случае, когда из физических представлений было "примерно" ясно, как должно вести себя искомое решение, т.е. другими словами, исходя из априорных представлений о решении конкретной задачи, искомые исследователями функции параметризовались конечным числом параметров. Говоря более строгим языком, искомые функции вкладывались априори в некоторый класс функций, зависящих от конечного числа параметров. Если при этом область изменения параметров была ограничена, то таким образом определенное множество корректности компактно в Z. Очень часто при такой параметризации удавалось обойтись малым числом параметров, что при относительно невысокой точности задания исходных данных приводило зачастую к удовлетворительным для исследователей приближениям. Подобный способ задания множества корректности можно отнести к классу методов регуляризации, объединенных таким общим названием, как регуляризация по здравому смыслу.

2. Пусть в задаче (1.2.2) пространство Z совпадает с пространством $L_2(a, b)$. Рассмотрим реализующуюся в ряде прикладных задач ситуацию, когда существует априорная информация о характере искомого решения такая, как его ограниченность и монотонность. Пусть для определенности мы имеем множество $Z\!\downarrow_C$ ограниченных на отрезке $[a, b]$ невозрастающих функций таких, что $z \in Z\!\downarrow_C$, если $0 \leqslant z(s) \leqslant C$, $z(s_1) \geqslant z(s_2)$, $s_1 \leqslant s_2$, $s, s_1, s_2 \in [a, b]$.

Лемма 2.2.2. *Множество $Z\!\downarrow_C$ есть компакт в $L_2(a, b)$.*

Доказательство. Этот факт легко доказывается на основе принципа выбора Хелли (см. раздел 1.3.1, а также, например, [14]). Действительно, пусть задана последовательность функций $z_1(s), z_2(s), \ldots, z_n(s), \ldots,\ a \leqslant s \leqslant b$ из $Z\!\downarrow_C$. Тогда согласно теореме Хелли существует такая функция $z \in Z\!\downarrow_C$ и такая последовательность индексов n_k, что в каждой точке $s \in [a, b]$

$$\lim_{k\to\infty} z_{n_k}(s) = z(s).$$

В свою очередь, из этой сходимости в каждой точке и равномерной ограниченности функций z_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$, следует, в силу классической теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, сходимость этой последовательности в $L_2[a, b]$, естественно, к той же самой функции z. Таким образом, $Z\!\downarrow_C$ – компакт в $L_2[a, b]$.

3. Рассмотрим ситуацию, когда пространство Z совпадает с $L_2(a, b)$ и существует априорная информация о характере искомого решения такая, как его выпуклость или вогнутость. Для определенности обозначение $\overset{\vee}{Z}_C$ мы будем использовать для класса выпуклых на отрезке $[a, b]$ функций таких, что $0 \leqslant z(s) \leqslant C$, $s \in [a, b]$, а обозначение $\hat{Z}_C$ – для класса вогнутых на отрезке $[a, b]$ функций таких, что $0 \leqslant z(s) \leqslant C$, $s \in [a, b]$.

Лемма 2.2.3. *Множество $\overset{\vee}{Z}_C$ есть компакт в $L_2(a, b)$.*

Доказательство. Покажем, что функции из множества $\overset{\vee}{Z}_C$ имеют равномерно ограниченные полные вариации. Если выпуклая функция z, заданная на отрезке

$[a,b]$, достигает минимума в некоторой точке $s^* \in [a,b]$, то в силу выпуклости функции она не возрастает на участке $[a,s^*]$ и не убывает на участке $[s^*,b]$. Так как при этом полная вариация функции на $[a,b]$ складывается из ее полных вариаций на $[a,s^*]$ и на $[s^*,b]$ (см. раздел 1.3.1, а также [14, гл. VIII, §3]), а каждая из этих вариаций ограничена числом C, то в рассматриваемом случае полная вариация функции ограничена числом $2C$. Если же выпуклая функция не достигает минимума на $[a,b]$, то в силу ее непрерывности на открытом множестве (a,b) (см. раздел 1.3.4 и, например, [20, гл. 3, §3, п.4]) функция $\bar{z}(s) \equiv \{\lim\limits_{s\to a+0} z(s),\ s=a,\ z(s),\ s\in(a,b),\ \lim\limits_{s\to b-0} z(s),\ s=b\}$ является непрерывной монотонной на $[a,b]$ и достигает минимума либо в точке a, либо в точке b. Предположим для определенности, что этот минимум достигается в точке a, заметив, что для точки b рассуждения аналогичны. Тогда, как известно (см. раздел 1.3.1, а также [14, гл. VIII, §3]) функция z представляется в виде суммы двух функций ограниченной вариации $z = z_1 + z_2$, первая из которых непрерывна и ее полная вариация на $[a,b]$ совпадает с полной вариацией на $[a,b]$ монотонной функции $\bar{z}$, т.е. ограничена сверху числом C, а вторая – функция скачков, полная вариация которой на $[a,b]$ в рассматриваемом случае равна $z(a)-z(a+0)+z(b)-z(b-0) \leqslant C$. Тогда получаем

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(z) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(z_1) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(z_2) \leqslant (z(b-0)-z(a+0)) +$$

$$+(z(a)-z(a+0)+z(b)-z(b-0)) \leqslant 2C.$$

Таким образом, множество $\overset{\vee}{Z}_C$ является множеством равномерно ограниченных функций, полные вариации которых также равномерно ограничены. Дальнейшее доказательство, основанное на теореме Хелли, ничем не отличается от доказательства предыдущей леммы, если заметить, что поточечный предел выпуклых функций также является выпуклой функцией.

Естественно, что доказав лемму 2.2.3, мы можем утверждать, что справедлива и

Лемма 2.2.4. *Множество $\hat{Z}_C$ есть компакт в $L_2(a,b)$.*

4. Из анализа предыдущих двух случаев задания априорной информации вытекает, что множество $\hat{Z}\downarrow_C$ ограниченных на отрезке $[a,b]$ невозрастающих вогнутых функций таких, что $z \in \hat{Z}\downarrow_C$, если $0 \leqslant z(s) \leqslant C$, $z(s_1) \geqslant z(s_2)$, $s_1 \leqslant s_2$, $s, s_1, s_2 \in [a,b]$ также представляет собой компакт в $L_2(a,b)$.

5. И, наконец, можно привести еще один способ задания априорной информации в виде компакта в $L_2(a,b)$, который является более общим способом по сравнению с тремя приведенными выше. Если мы введем множество V_c функций на отрезке $[a,b]$, которые равномерно ограничены снизу нулем и сверху постоянной $C > 0$ и полные вариации которых также равномерно ограничены величиной C, то рассуждая как и при доказательстве леммы 2.2.2 и учитывая при этом, что поточечный предел функций, полные вариации которых ограничены некоторым числом, также есть функция, полная вариация которой ограничена тем же самым числом, мы можем легко получить, что множество V_C также есть компакт в $L_2(a,b)$.

Естественно, можно привести и другие примеры компактов. В частности, например, это можно сделать, разбивая отрезок $[a,b]$ на несколько подотрезков и задавая одним из вышеприведенных способов априорную информацию о решении на каждом подотрезке.

2.3. Регуляризация на компактах в гильбертовом пространстве

Рассмотрим далее общий способ построения регуляризирующего оператора для приближенного решения уравнения (1.2.2) на основе знания множества корректности, представляющего собой компакт в Z, являющийся естественной модификацией классического метода квазирешений раздела 2.1.

Пусть оператор A^0 в этом уравнении является инъективным. Пусть также его единственное и одновременно нормальное решение $z^0 \in M \subset Z$, причем M – компакт. Тогда рассмотрим множество $Z_M(\eta)$, задаваемое по формуле

$$Z_M(\eta) \equiv \{z \in M : \|A^h z - u^\delta\| \leqslant C_0 h + \delta\},$$

$$C_0 \equiv \sup_{z \in M} \|z\| < +\infty.$$

Множество $Z_M(\eta)$ не пусто, так как, очевидно, всегда имеет место включение $z^0 \in Z_M(\eta)$, которое является следствием оценки

$$\|A^h z^0 - u^\delta\| \leqslant \|A^h z^0 - u^0 + u^0 - u^\delta\| =$$

$$= \|A^h z^0 - A^0 z^0 + u^0 - u^\delta\| \leqslant h\|z^0\| + \delta \leqslant C_0 h + \delta.$$

Определим для каждой пары исходных данных (A^h, u^δ), $A^h \in L(Z, U)$, $u^\delta \in U$ таких, что

$$\|A^h - A^0\| \leqslant h, \quad \|u^\delta - u^0\| \leqslant \delta,$$

при каждом $\eta = (h, \delta)$, $h > 0$, $\delta > 0$, $0 < h < h_0$, $0 < \delta < \delta_0$, h_0, δ_0 – некоторые положительные величины, многозначный оператор (алгоритм) $R(A^h, u^\delta, \eta)$ по формуле

$$R(A^h, u^\delta, \eta) \equiv Z_M(\eta). \tag{2.3.1}$$

Покажем, что так определенный оператор является регуляризирующим. Докажем для этого следующую лемму.

Лемма 2.3.1. *Пусть z_η – произвольно выбранный элемент из множества $Z_M(\eta)$. Тогда $z_\eta \to z^0$ при $\eta \to 0$.*

Доказательство. Заметим, во-первых, что величина C_0 конечна в силу компактности M. Так как $z_\eta \in Z_M(\eta)$, то

$$\|A^0 z_\eta - A^0 z^0\| \leqslant$$

$$\leqslant \|A^0 z_\eta - A^h z_\eta\| + \|A^h z_\eta - u^\delta\| + \|u^\delta - u^0\| \leqslant 2(hC_0 + \delta).$$

Следовательно, при $\eta \to 0$ имеет место предельное соотношение

$$\|A^0 z_\eta - A^0 z^0\| \to 0,$$

откуда в силу непрерывности обратного оператора (см. лемму 2.2.1) $(A^0)^{-1} : A^0 M \to M$ вытекает

$$z_\eta \to z^0, \quad \eta \to 0.$$

На основании этой леммы может быть легко доказана

Теорема 2.3.1. *Многозначный оператор (алгоритм) R, задаваемый формулой (2.3.1), является регуляризирующим.*

Доказательство. Условие 1) определения регуляризирующего оператора 1.2.1 выполняется, если взять в качестве чисел h_1, δ_1 соответственно числа h_0, δ_0. Выполнимость условия 2), в свою очередь, непосредственно вытекает из доказанной выше леммы.

В качестве ошибки фиксированного приближения $z_\eta \in M$ к точному решению $z^0 \in M$ задачи (1.2.2) с приближенно заданными исходными данными A^h, u^δ естественно использовать величину

$$\varepsilon(\eta) = \sup_{z \in Z_M(\eta)} \|z_\eta - z\|,$$

так как, очевидно,

$$\|z_\eta - z^0\| \leqslant \varepsilon(\eta),$$

а в силу леммы 2.3.1 имеем предельное соотношение $\varepsilon(\eta) \to 0$, $\eta \to 0$.

Таким образом, существование конкретного регуляризирующего алгоритма для решения задачи (1.2.2) доказано.

Зададимся теперь следующим основным вопросом. Как находить элементы z_η, приближающие точное решение z^0. Конструктивный ответ на этот вопрос лежит в области методов оптимизации. Действительно, легко заметить, что в качестве элемента $z_\eta \in Z_M(\eta)$ можно взять любой элемент $z \in M$, удовлетворяющий неравенству

$$\|A^h z - u^\delta\|^2 \leqslant (C_0 h + \delta)^2. \tag{2.3.2}$$

Это означает, что любой такой элемент получается в результате процесса решения задачи минимизации функционала

$$\Phi_\eta(z) \equiv \|A^h z - u^\delta\|^2, \;\; z \in Z$$

на компакте M, т.е. решения задачи минимизации

$$\Phi_\eta(z) \to \min, \;\; z \in M. \tag{2.3.3}$$

При этом, естественно, процесс минимизации следует вести лишь до уровня $(C_0 h + \delta)^2$. Любой элемент $z \in M$, полученный в результате такого процесса минимизации и удовлетворяющий неравенству (2.3.2), можно считать приближенным решением задачи (1.2.2).

2.4. Особенности регуляризирующего алгоритма на компактных множествах в пространстве суммируемых с квадратом функций

В качестве конкретных компактных множеств M при решении некорректной задачи 2.1.1 выступают, как правило, выпуклые компактные множества. Такими выпуклыми компактными множествами в пространстве $Z = L_2(a,b)$ являются, например, рассмотренные выше множества $Z\!\downarrow_C$, $\overset{\vee}{Z}_C$, $\hat{Z}_C$, $\hat{Z}\!\downarrow_C$ (выпуклость этих множеств очевидна). В случае же выпуклости M задача минимизации (2.3.3) является хорошо изученной и поддающейся эффективному и устойчивому решению задачей минимизации квадратичного функционала Φ_η на выпуклом компакте M (см. ниже раздел 2.5 и, например, [2]). Более того, оказывается, что сходимость регуляризованных приближенных решений z_η к точному решению z^0 бывает, как правило, за счет "индивидуальных" свойств компакта M, "лучше", чем "основная" сходимость по норме пространства Z. Для пояснения этого утверждения, не конкретизируя оператор A^0, возьмем в качестве Z "одно из наиболее популярных" в приложениях пространство $L_2(a,b)$, а в качестве M рассмотрим компакты $Z{\downarrow}_C$, $\hat{Z}_C$, $\widehat{Z{\downarrow}}_C$. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.4.1. *Пусть $M = Z{\downarrow}_C$, оператор A^0 взаимнооднозначно отображает $Z{\downarrow}_C$ на $A^0 Z{\downarrow}_C$. Пусть, кроме того, $z^0 \in C[a,b] \cap Z{\downarrow}_C$, $[\gamma,\sigma]$ – произвольный сегмент из интервала (a,b). Если $z_{\eta_n} \in Z_M(\eta_n) \equiv Z{\downarrow}_C\ (\eta_n)$ и $\eta_n \to 0$, $n \to \infty$, то*

$$\|z_{\eta_n} - z^0\|_{C[\gamma,\sigma]} \to 0, \;\; n \to \infty.$$

Доказательство. Покажем сначала, что последовательность $z_{\eta_n}(s)$, $n = 1,2,\ldots$, при $n \to \infty$ сходится к $z^0(s)$ в каждой точке $s \in (a,b)$. Согласно принципу выбора Хелли (см. раздел 1.3.1) из последовательности z_{η_n}, $n = 1,2,\ldots$, можно выбрать подпоследовательность функций $z_{\eta_{n_k}} \equiv z_{n_k}$, $k = 1,2,\ldots$, сходящихся в каждой точке $s \in [a,b]$ к некоторой функции $\bar{z} \in Z{\downarrow}_C$. Можем записать оценку

$$\|A^0\bar{z} - u^0\| \leqslant \|A^0\bar{z} - A^0 z_{n_k}\| + \|A^0 z_{n_k} - A^{h_{n_k}} z_{n_k}\| +$$

$$+\|A^{h_{n_k}} z_{n_k} - u^{\delta_{n_k}}\| + \|u^{\delta_{n_k}} - u^0\| \leqslant \|A^0\bar{z} - A^0 z_{n_k}\| + 2(h_{n_k} C_0 + \delta_{n_k}).$$

Отсюда, так как элементы z_{n_k}, $k = 1,2,\ldots$ равномерно ограничены в $L_2(a,b) = Z$, имеет место предельное соотношение $\|z_{n_k} - \bar{z}\| \to 0,\ k \to \infty$, а оператор A^0 непрерывен, после перехода к пределу при $k \to \infty$ следует, что $A^0\bar{z} = u^0$. Поэтому в силу взаимной однозначности оператора A^0 мы получаем равенство в пространстве $L_2(a,b)$: $\bar{z} = z^0$. Другими словами, мы доказали, что $\bar{z}(s) = z^0(s)$ при почти всех $s \in [a,b]$. Так как при этом функции z^0, $\bar{z} \in Z{\downarrow}_C$, а функция z^0 еще и непрерывна на $[a,b]$, то можно утверждать, что, на самом деле, мы имеем равенство $\bar{z}(s) = z^0(s)$ в каждой точке интервала (a,b). Действительно, предположим, что это не так и что $\bar{z}(s_0) \neq z^0(s_0)$ в некоторой точке $s_0 \in (a,b)$. Пусть для определенности $\bar{z}(s_0) = z^0(s_0) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Так как z^0 – непрерывная функция, то существует $\delta > 0$ такое, что $|z^0(s_0) - z^0(s)| \leqslant \varepsilon/2$ для всех $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$. Так как $\bar{z} \in Z{\downarrow}_C$, то можем записать для любой точки $s \in (s_0, s_0 + \delta)$

$$\bar{z}(s) - z^0(s) = (\bar{z}(s) - \bar{z}(s_0)) + (\bar{z}(s_0) - z^0(s_0)) + (z^0(s_0) - z^0(s)) \leqslant$$

$$\leqslant (\bar{z}(s) - \bar{z}(s_0)) - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Последнее неравенство противоречит тому, что $\bar{z}(s) = z^0(s)$ почти всюду на $[a,b]$. Итак, $\bar{z}(s) = z^0(s)$ в каждой внутренней точке $s \in (a,b)$.

Из приведенных выше рассуждений, на самом деле, следует, что вся последовательность функций z_{η_n}, $n = 1,2,\ldots$, сходится в каждой точке $s \in (a,b)$ к z^0. Действительно, если это не так, то найдется такая точка $\bar{s} \in (a,b)$ и такая подпоследовательность n_k, $k = 1,2,\ldots$, последовательности $n = 1,2,\ldots$, что

$$|z_{\eta_{n_k}}(\bar{s}) - z^0(\bar{s})| > \varepsilon > 0,$$

где ε не зависит от k. Но тогда на основании вышеприведенных рассуждений мы из последовательности n_k, $k = 1, 2, \dots$ можем, в свою очередь, выбрать такую подпоследовательность n_{k_l}, $l = 1, 2, \dots$, для которой имеет место предельное соотношение $z_{\eta_{n_{k_l}}}(\bar{s}) \to z^0(\bar{s}),\ l \to \infty$, что противоречит последнему строгому неравенству.

Покажем, с целью завершения доказательства, что последовательность z_{η_n}, $n = 1, 2, \dots$, сходится равномерно на любом отрезке $[\gamma, \sigma] \subset (a, b)$. Из равномерной непрерывности функции z^0 на отрезке $[\gamma, \sigma]$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для произвольной пары точек s_1, $s_2 \in [\gamma, \sigma]$ выполняется неравенство $|z^0(s_1) - z^0(s_2)| < \varepsilon/4$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$.

Разобьем отрезок $[\gamma, \sigma]$ точками $\gamma = s_1 < s_2 < \dots < s_m = \sigma$ таким образом, что $|s_{i+1} - s_i| < \delta(\varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots, m-1$. Выберем номер $N(\varepsilon)$ так, чтобы для любой точки разбиения s_i, $i = 1, \dots m$ при $n > N(\varepsilon)$ выполнялись неравенства

$$|z_{\eta_n}(s_i) - z^0(s_i)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Пусть далее $s \in (s_{i-1}, s_i)$. Можем записать следующие оценки в силу монотонности функций z_{η_n}, z^0

$$z_{\eta_n}(s) - z^0(s) \geqslant z_{\eta_n}(s_i) - z^0(s_{i-1}) =$$

$$= (z_{\eta_n}(s_i) - z^0(s_i)) + (z^0(s_i) - z^0(s_{i-1})) \geqslant -\frac{\varepsilon}{2},$$

$$z_{\eta_n}(s) - z^0(s) \leqslant z_{\eta_n}(s_{i-1}) - z^0(s_i) =$$

$$= (z_{\eta_n}(s_{i-1}) - z^0(s_{i-1})) + (z^0(s_{i-1}) - z^0(s_i)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

из которых следует неравенство $|z_{\eta_n}(s) - z^0(s)| \leqslant \varepsilon/2$, как только $n > N(\varepsilon)$. Учитывая произвол в выборе $\varepsilon > 0$, можно считать, что теорема доказана.

Замечание 2.4.1. *Заметим, что функция z_{η_n}, аппроксимирующая в метрике $C[\gamma, \sigma]$ непрерывную на $[\gamma, \sigma]$ функцию z^0, не является, вообще говоря, непрерывной.*

Замечание 2.4.2. *Результат теоремы 2.4.1 переносится на случай когда мы используем априорную информацию о кусочной непрерывности точного решения z^0. В этом случае сходимость приближений z_{η_n} к z^0 будет равномерной на каждом замкнутом сегменте $[\gamma, \sigma]$, не содержащем точек a, b и точек разрыва функции z^0.*

Справедливы также аналогичные приведенным выше теоремы в случае компактов $\hat{Z}_C$, $\hat{Z}\!\!\downarrow_C$.

Теорема 2.4.2. *Пусть $M = \hat{Z}_C$, оператор A^0 взаимнооднозначно отображает $\hat{Z}_C$ на $A^0 \hat{Z}_C$, $[\gamma, \sigma]$ – произвольный сегмент из интервала (a, b). Если $z_{\eta_n} \in Z_M(\eta_n) \equiv \hat{Z}_C (\eta_n)$ и $\eta_n \to 0$, $n \to \infty$, то*

$$\|z_{\eta_n} - z^0\|_{C[\gamma,\sigma]} \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Теорема 2.4.3. *Пусть $M = \hat{Z}\!\!\downarrow_C$, оператор A^0 взаимнооднозначно отображает $\hat{Z}\!\!\downarrow_C$ на $A^0 \hat{Z}\!\!\downarrow_C$, $[\gamma, \sigma]$ – произвольный сегмент из интервала (a, b). Если $z_{\eta_n} \in Z_M(\eta_n) \equiv \hat{Z}\!\!\downarrow_C (\eta_n)$ и $\eta_n \to 0$, $n \to \infty$, то*

$$\|z_{\eta_n} - z^0\|_{C[\gamma,\sigma]} \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Необходимые подробности и комментарии, связанные с доказательствами этих теорем могут быть найдены, например, в [25, 26].

С помощью изложенного алгоритма регуляризации на компактных множествах были успешно решены многие важные задачи, связанные с различными естественно-научными приложениями (см., например, [3, 4]).

2.5. Применение метода регуляризации на компактных множествах для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода

Рассмотрим как с помощью описанной выше схемы регуляризации на компактных множествах может быть построено непосредственное численное решение уравнения Фредгольма первого рода

$$A^0[z](x) \equiv \int_a^b K^0(x,s)z(s)ds = u^0(x), \;\; c \leqslant x \leqslant d, \tag{2.5.1}$$

где $K^0(\cdot,\cdot)$ – непрерывное в заданном прямоугольнике $\Pi \equiv \{c \leqslant x \leqslant d;\ a \leqslant s \leqslant b\}$ ядро, а в качестве пространств Z, U взяты соответственно пространства $L_2(a,b)$, $L_2(c,d)$. Считаем, что ядро K^0 обладает свойствами, обеспечивающими единственность решения исходного уравнения и взаимную однозначность отображения $A^0 : Z \to A^0Z$. В случае симметрического ядра для этого достаточно считать его замкнутым (см. раздел 1.3.3 и, например, [17]).

Вместо уравнения (2.5.1) в нашем распоряжении имеется его приближение

$$A^h[z](x) \equiv \int_a^b K^h(x,s)z(s)ds = u^\delta(x), \;\; c \leqslant x \leqslant d, \tag{2.5.2}$$

где $h \in [0,h_0]$, $\delta \in [0,\delta_0]$, h_0, $\delta_0 > 0$ – некоторые числа, ядро $K^h \in C[\Pi]$ и справедливы оценки

$$\|u^\delta - u^0\| \leqslant \delta, \;\; \|K^h - K^0\|_{L_2(\Pi)} \leqslant h.$$

Покажем, что из оценки $\|K^h - K^0\|_{L_2(\Pi)} \leqslant h$ следует оценка $\|A^h - A^0\| \leqslant h$, необходимая для применения при решении уравнения (2.5.1) описанной выше абстрактной схемы. Действительно, можем записать очевидную оценку

$$\|A^h - A^0\|^2 = \sup_{\|z\|\leqslant 1} \|(A^h - A^0)z\|^2 = \tag{2.5.3}$$

$$= \sup_{\|z\|\leqslant 1} \int_c^d (\int_a^b (K^h(x,s) - K^0(x,s))z(s)ds)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|z\|\leqslant 1} \int_c^d (\int_a^b (K^h(x,s) - K^0(x,s)))^2 ds dx \int_a^b z^2(s)ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_c^d \int_a^b (K^h(x,s) - K^0(x,s))^2 ds dx \leqslant h^2,$$

из которой и следует доказываемая оценка для разности норм операторов.

Задача минимизации (2.3.3) в случае выбранного конкретного операторного уравнения примет вид

$$\Phi_\eta(z) = \int_c^d (\int_a^b K^h(x,s)z(s)ds - u^\delta(x))^2 dx \to \min, \tag{2.5.4}$$

$$z \in M \subset L_2(a,b).$$

Возьмем для определенности в качестве компактного множества M множество $Z{\downarrow}_C$, после чего задача (2.3.3) примет совсем конкретный вид

$$\Phi_\eta(z) = \int_c^d (\int_a^b K^h(x,s)z(s)ds - u^\delta(x))^2 dx \to \min, \tag{2.5.5}$$

$$z \in Z{\downarrow}_C \subset L_2(a,b).$$

Это классическая в теории численных методов оптимизации задача минимизации квадратичного функционала на ограниченном, выпуклом, замкнутом множестве в $L_2(a,b)$ [2].

2.6. Конечно-разностная аппроксимация

Перейдем к дискретному аналогу задачи (2.5.5). Введем для этого сетки по x и по s. Будем считать их равномерными соответственно с шагами h_x и h_s

$$c = x_1 < x_2 < \dots < x_m = d, \;\; a = s_1 < s_2 < \dots < s_n = b,$$

$$x_i = x_1 + (i-1)h_x, \; i = 1, \dots, m, \; s_j = s_1 + (j-1)h_s, \; j = 1, \dots, n.$$

Применяя для простоты формулу прямоугольников, получаем дискретный конечно-разностный аналог $\hat{\Phi}_\eta$ функционала Φ_η, представляющий собой квадратичную функцию n переменных – функцию от $z = (z_1, \dots, z_n)^*$

$$\hat{\Phi}_\eta(z) \equiv \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n K^h_{i,j} z_j h_s - u_i^\delta \right]^2 h_x, \;\; z \in R^n.$$

Здесь приняты обозначения

$$K^h_{i,j} \equiv K^h(x_i, s_j), \; j = 2, \dots, n-1; \; K^h_{i,j} \equiv \frac{K^h(x_i, s_j)}{2}, \; j = 1, n,$$

$$z_j \equiv z(s_j), \;\; u_i^\delta \equiv u^\delta(x_i).$$

В свою очередь, множество $Z{\downarrow}_C$ монотонных, неотрицательных, ограниченных сверху постоянной $C > 0$ функций на $[a,b]$ заменим его естественным конечно-разностным аналогом из n-мерного пространства R^n векторов $z = (z_1, \dots, z_n)^*$

$$M{\downarrow}_C \equiv \{ z \in R^n : \; z_{i+1} - z_i \leqslant 0, \; i = 1, \dots, n-1,$$

$$0 \leqslant z_i \leqslant C, \; i = 1, \dots, n \}.$$

Таким образом, сформулированная выше задача бесконечномерной минимизации (2.5.5) заменена задачей конечномерной квадратичной минимизации

$$\hat{\Phi}_\eta(z) \to \min, \;\; z \in M\!\!\downarrow_C . \tag{2.6.1}$$

Можно утверждать, что множество $M\!\!\downarrow_C$ представляет собой замкнутый выпуклый ограниченный многогранник в R^n (см. раздел 1.3.4). Мы укажем также ниже все его вершины, знание которых важно для организации конкретного вычислительного процесса.

В соответствии с результатами вспомогательного раздела 1.3.4 алгоритм проверки того, что дает ли набор векторов $z_i \in R^n$, $i = 0, 1, \ldots, l$ все вершины некоторого выпуклого многогранника $M \subset R^n$, заключается в проверке следующих двух условий:

1) любой вектор $z \in M$ можно представить в виде выпуклой комбинации z_i, $i = 0, 1, \ldots, l$;

2) векторы z_i, $i = 0, 1, \ldots, l$ выпукло независимы.

Проверка этих двух условий для множества $M\!\!\downarrow_C$ приводит к следующей теореме.

Теорема 2.6.1. *Множество $M\!\!\downarrow_C$ представляет собой выпуклый многогранник в R^n с вершинами $T^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, имеющими вид*

$$T^{(0)} = 0, \;\; T_i^{(j)} = C,\, i \leqslant j;\, T_i^{(j)} = 0,\, i > j,$$

$$i = 1, \ldots, n, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что линейная независимость векторов $T^{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$, является очевидным фактом. Покажем, что любой вектор $z \in M\!\!\downarrow_C$ можно представить в виде выпуклой комбинации указанных выше векторов $T^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Так как векторы $T^{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$ образуют базис в R^n, то существуют такие числа α_j, $j = 1, \ldots, n$, что $z = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j T^{(j)}$. Введем функцию $\delta_k : R^n \to R^1$ по формуле $\delta_k z \equiv z_{k+1} - z_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда можем записать

$$\delta_k z = \alpha_k \delta_k T^{(k)} = \alpha_k(-C), \;\; k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

откуда выводим

$$\alpha_k = \frac{\delta_k z}{\delta_k T^{(k)}} = \frac{z_{k+1} - z_k}{-C}, \;\; k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Поскольку $z \in M\!\!\downarrow_C$, то $\delta_k z \leqslant 0$, т.е. $\alpha_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Кроме того, так как $z_n = \alpha_n C$, то $\alpha_n = z_n / C \geqslant 0$.

Рассмотрим далее равенство $z = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j T^{(j)}$ для первой компоненты. Имеем $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j C = z_1$. Поэтому $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j = z_1/C \leqslant 1$. Так как $T^{(0)} = 0$, то

$$z = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j T^{(j)},$$

причем $\alpha_j \geqslant 0$, $j = 0,1,\ldots,n$, $\sum\limits_{j=0}^{n}\alpha_j = 1$, где в качестве α_0 взята величина $\alpha_0 = 1-\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j \geqslant 0$. Таким образом показано, что любой вектор $z \in M{\downarrow}_C$ можно представить в виде выпуклой комбинации векторов $T^{(j)}$, $j = 0,1,\ldots,n$.

Покажем, наконец, что векторы $T^{(j)}$, $j = 0,1,\ldots,n$ выпукло независимы. Так как векторы $T^{(j)}$, $j = 1,\ldots,n$, линейно независимы, то ясно, что $T^{(0)} = 0$ не может быть выпуклой комбинацией $T^{(j)}$, $j = 1,\ldots,n$. Предположение о том, что один из этих векторов $T^{(j)}$, $j = 1,\ldots,n$, является выпуклой комбинацией всех остальных вершин, также приводит к линейной зависимости векторов $T^{(j)}$, $j = 1,\ldots,n$. Действительно, если, например,

$$T^{(1)} = \alpha_0 T^{(0)} + \sum_{j=2}^{n}\alpha_j T^{(j)},$$

$$\alpha_0 \geqslant 0,\ \alpha_j \geqslant 0,\ j = 2,\ldots,n,\ \ \alpha_0 + \sum_{j=2}^{n}\alpha_j = 1,$$

то

$$0 = \alpha_0 T^{(0)} = -T^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}\alpha_j T^{(j)},$$

откуда и следует, что все векторы $T^{(j)}$, $j = 1,\ldots,n$, являются линейно зависимыми. Полученное противоречие, завершает проверку двух, полученных выше на основе леммы 1.3.16, условий 1), 2), а, вместе с тем, и доказательство теоремы.

Если же в качестве множества M в задаче (2.5.4) взять компакт $\hat{Z}_C \subset L_2(a,b)$, то в силу обычной дифференцируемости при почти всех $s \in (a,b)$ одномерной вогнутой (выпуклой) на (a,b) функции и монотонности ее субдифференциала (см. раздел 1.3.4) за его дискретный конечно-разностный аналог естественно принять множество

$$\hat{M}_C \equiv \{z \in R^n :\ z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1} \leqslant 0,\ \ i = 2,\ldots,n-1,$$

$$0 \leqslant z_i \leqslant C,\ \ i = 1,\ldots,n\}.$$

Наконец, если в качестве множества M в задаче (2.5.4) взять компакт $\hat{Z}{\downarrow}_C \subset L_2(a,b)$, то за его дискретный конечно-разностный аналог естественно принять множество

$$\hat{M}{\downarrow}_C \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} & z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1} \leqslant 0, & i = 2,...,n-1 \\ z : z \in R^n, & z_{i+1} - z_i \leqslant 0, & i = 1,...,n-1 \\ & 0 \leqslant z_i \leqslant C, & i = 1,...,n \end{array} \right\}.$$

В последних двух случаях теоремы, аналогичные последней теореме, доказательства которых также заключаются в проверке сформулированных выше двух условий 1), 2), могут быть найдены в [25, 26]. Они выглядят следующим образом.

Теорема 2.6.2. *Множество* $\hat{M}_C$ *представляет собой выпуклый многогранник в* R^n *с вершинами* $T^{(i,j)}$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, *имеющими вид*

$$T^{(0,0)} = 0,$$

$$T_k^{(i,j)} = \begin{cases} \frac{k-1}{i-1}C, \ k < i; \\ C, \ \ i \leqslant k \leqslant j; \\ \frac{n-k}{n-j}C, \ k > j, \ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n. \end{cases}$$

Теорема 2.6.3. *Множество* $\hat{M}{\downarrow}_C$ *является выпуклым многогранником в* R^n *с вершинами* $T^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, *имеющими вид*

$$T^{(0)} = 0, \, T_i^{(j)} = \begin{cases} C, \ i \leqslant j; \\ \dfrac{n-i}{n-j}C, \ i > j, \ \ j = 1, 2, ..., n. \end{cases} \tag{2.6.2}$$

2.7. Применение метода условного градиента для решения некорректных задач на компактных множествах

Информация о явном задании вершин в случае многогранников $M{\downarrow}_C$, $\hat{M}_C$, $\hat{M}{\downarrow}_C$ может быть эффективно использована для решения конечномерной квадратичной задачи выпуклой минимизации

$$\hat{\Phi}_\eta(z) \to \min, \ \ z \in \hat{M} \tag{2.7.1}$$

со множеством $\hat{M}$, совпадающим либо с $M{\downarrow}_C$, либо с $\hat{M}_C$, либо с $\hat{M}{\downarrow}_C$, например, следующим образом на основе классического метода условного градиента (см., например, [2]).

Начальное приближение $z^0 \in \hat{M}$ в соответствии с этим методом выбирается произвольным образом. Если же элемент $z^k \in \hat{M}$ уже построен, то алгоритм перехода к $z^{k+1} \in \hat{M}$ происходит в два этапа.

На первом из них определяется вспомогательный элемент $\bar{z}^k \in \hat{M}$ из решения вспомогательной задачи линейного программирования

$$(\hat{\Phi}'_\eta(z^k), z) \to \min, \ \ \ z \in \hat{M}.$$

Именно решение этой задачи линейного программирования эффективно проводится благодаря информации о вершинах многогранника $\hat{M}$. Это объясняется тем, что количество этих вершин относительно невелико и поэтому указанное решение организуется на основе тривиального перебора всех вершин.

На втором этапе, как известно, строится следующее приближение к решению z^{k+1} по формуле

$$z^{k+1} = z^k + \lambda_k(\bar{z}^k - z^k)$$

с шаговым множителем $\lambda_k \in [0, 1]$, который может находиться, например, из решения одномерной задачи минимизации

$$\hat{\Phi}_\eta(z^k + \lambda(\bar{z}^k - z^k)) \to \min, \ \ \ \lambda \in [0, 1].$$

Решение же последней задачи в случае квадратичной функции $\hat{\Phi}_\eta(\cdot)$ проводится, естественно, без особого труда посредством вычисления с помощью хорошо известной из школьной математики формулы. Таким образом, информация о вершинах многогранника $\hat{M}$, эффективно использованная при решении вспомогательной задачи первого этапа, определяет и эффективность всего метода условного градиента для решения квадратичной задачи (2.7.1). Подчеркнем, что именно на этом пути были решены различные важные обратные некорректные задачи естествознания (см., например, [1, 3, 4, 25]).

Подробности применения метода условного градиента для численного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода вместе с обсуждением его программной реализации можно найти в книгах [25, 26], а также в учебно-методическом пособии [5].

Список литературы

[1] Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1989. – 200 с.

[2] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

[3] Гончарский А.В., Черепащук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978. – 336 с.

[4] Гончарский А.В., Черепащук А.М., Ягола А.Г. Некорректные задачи астрофизики. М.: Наука, 1985. – 352 с.

[5] Зотов Ю.Н., Кутерин Ф.А., Сумин М.И. Применение методов регуляризации для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (с программным комплексом и описанием лабораторных работ). Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2008. – 84 с.

[6] Иванов В.К. О линейных некорректных задачах // Докл. АН СССР. – 1962. – Т.145. є.2. – С. 270–272.

[7] Иванов В.К. О приближенных решениях операторных уравнений первого рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1966. – Т. 6. є 6. – С. 1089–1094.

[8] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. – 206 с.

[9] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. – 752 с.

[10] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. – 280 с.

[11] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. – 544 с.

[12] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1976. – 216 с.

[13] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. – 520 с.

[14] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. – 480 с.

[15] Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988. – 264 с.

[16] Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. – 512 с.

[17] Привалов И.И. Интегральные уравнения. М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 248 с.

[18] Смирнов Н.С. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. Л.: ГРОТЛ, 1936. – 124 с.

[19] Сумин М.И. Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов: Учебное пособие. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2009.

[20] Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. – 328 с.

[21] Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. – 1963. – Т.151. є 3. – С. 501–504.

[22] Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. – 1963. – Т.153. є 1. – С. 49–52.

[23] Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН. Нов. сер. – 1943. – Т.39. є 5. – С. 195–198.

[24] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. – 288 с.

[25] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. – 200 с.

[26] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. – 232 с.

[27] Толстов Г.П. Ряды Фурье.М.: Наука, 1980. – 384 с.

[28] Функциональный анализ (сер. “Справочная математическая библиотека”) / Под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972. – 544 с.

[29] Hadamard J. Le problème de Caucy et les èquations aux derivees partielles linèaires hyperbolicues. Paris: Hermann, 1932 [Рус. перевод: Адамар Ж. – Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. – 352 с.].

[30] Loewen P.D. Optimal control via nonsmooth analysis. CRM Proceedings and Lecture Notes. V.2. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993. – 153 p.

Оглавление

Введение **3**

Глава 1. Базовые понятия теории некорректных задач и необходимые теоретические факты **4**

1.1. Понятия корректно и некорректно поставленных задач . . . 4

1.1.1. Определения корректно и некорректно поставленных задач . . . 4

1.2. Понятие регуляризирующего оператора (алгоритма). Понятие априорной информации . . . 5

1.2.1. Понятие регуляризирующего оператора (алгоритма) . . . 5

1.2.2. Понятие априорной информации . . . 7

1.3. Необходимые теоретические сведения из различных математических дисциплин . . . 7

1.3.1. Необходимые сведения из теории функций . . . 8

1.3.2. Необходимые сведения из функционального анализа . . . 9

1.3.3. Необходимые сведения из теории интегральных уравнений . . . 12

1.3.4. Необходимые сведения из выпуклого анализа . . . 16

Глава 2. Метод регуляризации на компактных множествах для решения операторных уравнений первого рода **20**

2.1. Общая идея метода квазирешений . . . 20

2.2. Понятие условной корректности. Множество корректности. Примеры множеств корректности в виде конкретных компактов . . . 21

2.3. Регуляризация на компактах в гильбертовом пространстве . . . 25

2.4. Особенности регуляризирующего алгоритма на компактных множествах в пространстве суммируемых с квадратом функций . . . 26

2.5. Применение метода регуляризации на компактных множествах для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода . . . 29

2.6. Конечно-разностная аппроксимация . . . 30

2.7. Применение метода условного градиента для решения некорректных задач на компактных множествах . . . 33

Список литературы **35**

Михаил Иосифович **Сумин**

Метод регуляризации на компактных множествах для решения операторных уравнений первого рода

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского".
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.