

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского

# **ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ММО-СИСТЕМАХ СОТОВОЙ СВЯЗИ**

Учебное пособие

Рекомендовано учёным советом радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии», специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем» и специальности 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы»

Нижний Новгород  
2020

УДК 621.396(075.8)  
ББК 32.884Я73  
П 82

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор **В.Г. Гавриленко**  
д.т.н., профессор **А.Г. Рындык**

**П 82 ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В МІМО-СИСТЕМАХ СОТОВОЙ СВЯЗИ.** Авторы: Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Елохин А.В., Сорокин И.С.: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 134 с.

Рассматриваются вопросы теории пространственной обработки сигналов в антенных решетках МІМО-систем сотовой связи при обслуживании одного и произвольного числа пользователей. Излагаются сведения об оценке многоканальной импульсной характеристики многолучевого МІМО-канала с замираниями сигналов. Большое внимание уделяется основным характеристикам МІМО-систем связи – шенноновской спектральной эффективности, вероятности битовой ошибки и пропускной способности.

Учебное пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии», специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем» и специальности 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы».

Ответственный за выпуск:  
зам. председателя методической комиссии радиофизического факультета  
ННГУ, д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 621.396(075.8)  
ББК 32.884Я73

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2020

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Системы связи с одной антенной решеткой .....</b>	<b>9</b>
1.1. Системы с разнесенным приемом (SIMO-системы).....	9
1.1.1. Когерентный прием сигналов.....	9
1.1.2. Вероятность битовой ошибки.....	12
1.1.3. Спектральная эффективность.....	16
1.2. Системы с разнесенной передачей (MISO-системы).....	17
1.2.1. Разнесенная передача из двух антенн.....	17
1.2.2. Разнесенная передача при произвольном числе антенн .....	21
<b>Глава 2. Спектральная эффективность MIMO-системы .....</b>	<b>25</b>
2.1. Статистические свойства канальной матрицы.....	25
2.2. MIMO-система без обратной связи .....	31
2.3. MIMO-система с обратной связью .....	35
2.4. Влияние корреляционных свойств пространственного канала.....	41
<b>Глава 3. Пространственное кодирование и декодирование в MIMO-системах .....</b>	<b>46</b>
3.1. MIMO-системы без обратной связи .....	46
3.1.1. Нелинейный МП-приемник.....	48
3.1.2. Линейные ZF- и МСКО-приемники.....	53
3.2. MIMO-системы с обратной связью .....	57
3.2.1. Формирование независимых собственных подканалов.....	57
3.2.2. Минимизация вероятности битовой ошибки.....	63
3.2.3. Пропускная способность MIMO-системы .....	67
3.2.4. Пороговый метод минимизации вероятности битовой ошибки .....	69
3.3. Ортогональное пространственно-временное блочное кодирование.....	73
<b>Глава 4. Оценка импульсной характеристики многолучевого канала .....</b>	<b>77</b>
4.1. Система связи с одной приемной антенной .....	77
4.2. Система связи произвольным числом приемных антенн.....	88
4.3. Оценка числа собственных подканалов MIMO-системы.....	95
<b>Глава 5. Пространственное разделение пользователей в MIMO-системах .....</b>	<b>98</b>
5.1. Передача информации двум пользователям без пространственного разделения .....	98
5.1.1. Релеевский канал .....	98
5.1.2. Статический канал.....	102
5.2. Пространственное разделение двух пользователей.....	103
5.2.1. Проекционный метод .....	103

5.2.2. Энергетический выигрыш за счет разделения пользователей .....	107
5.3. Пространственное разделение произвольного числа пользователей.....	109
5.3.1. Проекционный метод .....	109
5.3.2. Спектральная эффективность .....	113
5.3.3. Вероятность битовой ошибки.....	117
<b>Приложение. Некоторые сведения из теории векторно-матричного анализа .....</b>	<b>123</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>130</b>
<b>Список сокращений .....</b>	<b>133</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Главными проблемами в быстро развивающейся области беспроводных систем связи являются увеличение скорости передачи данных и повышение качества обслуживания пользователей (уменьшение вероятности ошибки). Это особенно актуально в мобильных (сотовых) системах связи, работающих в условиях сложного пространственного канала. Многолучевой характер распространения сигналов и движение пользователя среди окружающих его предметов приводят к замираниям сигналов с различными статистическими свойствами.

Скорость передачи данных возрастает при расширении частотной полосы или увеличении излучаемой мощности. Однако эти традиционные пути имеют свои пределы. Выделяемые стандартами полосы радиочастотных диапазонов ограничены, стоимость отдельных частотных каналов очень высокая, а уровень мощности ограничен требованиями биологической защиты и, как правило, тоже не может быть существенно увеличен. Таким образом, задачи увеличения скорости передачи данных и уменьшения вероятности ошибки необходимо решать в условиях жестких ограничений на частотную полосу и мощность передающих устройств.

Качество и скорость передачи информации можно повысить с помощью разнесенного в пространстве приема сигналов несколькими антеннами или разнесенной передачи, то есть за счет использования приемной или передающей антенной решетки (АР) [1–5]. При этом на базовых станциях (БС) могут размещаться АР с достаточно большим числом антенн, расстояния между которыми (разнесение антенн) можно выбрать таким, чтобы замирания сигналов в различных антеннах были бы слабо коррелированными между собой.

Однако наиболее перспективным является использование АР на обоих концах линии связи (на БС и у пользователя) [4–8]. Такие системы называются ММО-системами (Multiple-Input Multiple-Output) и активно внедряются в стандарты современных и перспективных систем связи. Они позволяют эффективно бороться с замираниями сигналов и увеличить скорость передачи данных за счет использования различных методов пространственной обработки сигналов, обеспечивающих передачу и прием параллельных потоков информации.

Наиболее простой способ пространственной обработки (пространственного кодирования) сигналов заключается в неадаптивном формировании параллельных потоков (подканалов) для передачи данных, число которых совпадает с числом передающих антенн. В таких системах передатчик не обладает информацией о пространственном канале, поэтому они называются ММО-системами без обратной связи. При их использовании только прием сигналов является согласованным со случайным пространственным каналом. Сигнал на входе каждой приемной антенны является линейной комбинацией (смесью) сигналов от всех передающих антенн. Поэтому необходимо применять специальные методы пространственной обработки (разделения) сигналов перед их демодуляцией и детектированием. Основными методами являются: максимально правдоподобная оценка переданных данных, обращение канальной матрицы (матрицы ко-

эффицентом передачи между передающими и приемными антеннами) и оценка по минимуму среднеквадратической ошибки (СКО) [5–7].

В ММО-системах с обратной связью канальная матрица оценивается приемником, и затем эта информация сообщается передатчику (считается, что передатчик «знает» канал). При этом появляется возможность адаптивного пространственного кодирования и декодирования сигналов, которое реализуется на основе использования сингулярного разложения канальной матрицы и заключается в адаптивном формировании параллельных подканалов для передачи данных. В качестве весовых векторов для создания этих подканалов используются собственные векторы канальной матрицы, и поэтому они называются собственными подканалами. Данные подканалы являются независимыми между собой и адаптивно согласованными со случайным пространственным каналом, как на прием, так и на передачу. Поэтому ММО-системы с собственными подканалами обеспечивают наибольшую спектральную эффективность при заданной мощности передатчика и в заданной частотной полосе. Более того, независимость собственных подканалов дает возможность представить ММО-систему как совокупность одноканальных систем, что значительно упрощает детектирование переданных сигналов.

К методам пространственного кодирования сигналов в ММО-системах относится ортогональное блочное кодирование [5–7]. Информационная последовательность символов разделяется на блоки, которые подвергаются линейной обработке (кодированию). В результате разные антенны передают ортогональные последовательности данных, что позволяет разделить символы в приемной АР с помощью простого линейного преобразования.

Для демодуляции и детектирования принятых сигналов в ММО-системе связи необходимо оценить набор многоканальных импульсных характеристик (ИХ), каждая из которых соответствует некоторой передающей антенне и всем приемным антеннам. Для этой цели используются обучающие (известные) последовательности сигналов. Обычно используются максимально правдоподобные методы оценки ИХ или методы, основанные на поиске минимума СКО [2,3]. При этом всегда имеются ошибки оценивания, обусловленные влиянием собственных шумов и конечной длиной обучающей последовательности.

Особенностью систем мобильной связи является разное число передающих и приемных антенн. Как правило, число антенн на БС существенно превышает число антенн у пользователя. Имея большее число антенн, БС обладает возможностью одновременного обслуживания многих пользователей за счет их пространственного разделения. Физический принцип такого разделения основан на адаптивном формировании системы ортогональных лучей для передачи информации разным пользователям. Пространственное разделение пользователей может значительно увеличить пропускную способность (ПС) системы связи, так как может использоваться дополнительно к любому из известных методов разделения: временному, частотному или кодовому.

Данное учебное пособие содержит достаточно подробные сведения из теории пространственной обработки сигналов в современных ММО-системах со-товой связи.

**В первой главе** рассматриваются методы уменьшения влияния замираний сигналов, которые заключаются в использовании АР для разнесенного приема (SМО-система) или разнесенной передачи (MISO-система) сигналов. Приводятся выражения для ОСШ при когерентном суммировании сигналов, принятых АР. На основе этих результатов получены вероятности битовой ошибки и спектральная эффективность в релейском канале с различными статистическими свойствами замираний сигналов в приемных антеннах. Рассмотрена эффективность разнесенной передачи с ортогональным блочным кодированием при двух передающих (схема Аламоути) и произвольном числе приемных антенн.

**Во второй главе** анализируются статистические свойства канальной матрицы коэффициентов передачи, и исследуется спектральная эффективность ММО-систем без обратной связи или с обратной связью, когда передающая АР не имеет или имеет информацию о канале. Рассматривается также влияние корреляционных свойств замираний сигналов на спектральную эффективность ММО-систем.

**Третья глава** посвящена основным методам пространственного кодирования и декодирования сигналов в ММО-системах. Для систем без обратной связи рассматриваются максимально правдоподобная оценка переданных данных, обращение канальной матрицы и оценка по минимуму СКО. Подробно анализируются особенности формирования независимых собственных подканалов и вероятность битовой ошибки в ММО-системах с обратной связью. Изучаются методы совместной оптимизации скорости передачи данных и вероятности битовой ошибки, основанные на использовании для передачи данных не всех, а наиболее мощных собственных подканалов. Рассматривается ортогональное блочное кодирование передаваемой информации.

**В четвертой главе** рассматриваются основные методы оценки ИХ многолучевого канала с помощью обучающей последовательности заданной длины. Приводятся результаты для SISO-системы с одной передающей и одной приемной антеннами. В SМО-системе с несколькими приемными антеннами необходимо оценить многоканальную ИХ (ИХ для каждой антенны), которую удобно представить в виде матрицы. При этом проблема заключается не только в нахождении значений многоканальной ИХ, но в оценке ранга соответствующей матрицы. Полученные результаты обобщаются на случай ММО-системы с несколькими передающими и приемными антеннами, когда канал можно характеризовать набором многоканальных ИХ для каждой передающей антенны.

Пространственному разделению пользователей в ММО-системах посвящена **пятая глава**. Отдельно рассматривается передача информации двум пользователям без их разделения и анализируется взаимная помеха, которую они создают друг другу. Для большей наглядности рассматривается не только много-

лучевой релеевский, но и гауссов шумовой канал без замираний сигналов. Описывается проекционный метод, обеспечивающий пространственное разделение этих пользователей, и показан энергетический выигрыш за счет исключения взаимной помехи. Приводятся результаты для агрегатной спектральной эффективности и вероятности битовой ошибки в ММО-системе, обслуживающей произвольное число пользователей.

Материал для пособия сформирован на основе отечественных и зарубежных литературных данных, а также с использованием материалов оригинальных работ авторов [10–19, 29–33].



## ГЛАВА 1. СИСТЕМЫ СВЯЗИ С ОДНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКОЙ

Рассматриваются системы связи, в которых используется разнесенный прием или разнесенная передача (РП) для борьбы с замираниями сигналов, которые обусловлены многолучевым распространением радиоволн в пространственном канале связи.

Для обеспечения максимального выходного ОСШ при разнесенном приеме используется метод когерентного суммирования сигналов, принятых отдельными антеннами. Ортогональное пространственно-временное блочное кодирование является эффективным методом разнесенной передачи. Наиболее распространенной является схема РП, предложенная Аламоути (Alamouti).

### 1.1. Системы с разнесенным приемом (SIMO-системы)

#### 1.1.1. Когерентный прием сигналов

Рассмотрим систему связи, которая использует одну передающую антенну и  $N$ -элементную приемную АР с произвольным расположением антенн (пространственный разнесенный прием) (рис. 1.1). Будем считать взаимные задержки в пространственном канале малыми по сравнению с длительностью символов, что выполняется в сетях третьего (3G) и четвертого поколений (4G). При этом пространственный канал связи является частотно-неселективным и описывается вектором-столбцом  $\mathbf{H} = (h_1, h_2, \dots, h_N)^T$  ( $(\cdot)^T$  – знак транспонирования) комплексных коэффициентов передачи для каждой приемной антенны.

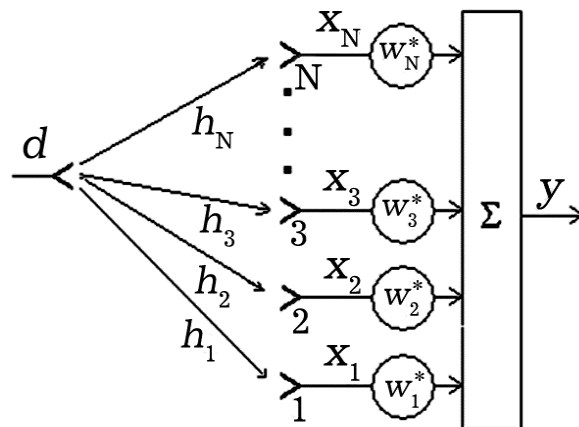


Рис. 1.1. Разнесенный прием сигналов

Если передается символ  $d$  единичной амплитуды, то вектор комплексных амплитуд принятых сигналов  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$  равен

$$\mathbf{X} = \sqrt{P_0} \mathbf{H} d + \mathbf{Z}, \quad (1.1.1)$$

где  $P_0$  – средняя мощность передатчика,  $\mathbf{Z}=(z_1, z_2, \dots, z_N)^T$  – вектор гауссовых собственных шумов приемных устройств с нулевым средним и мощностью  $\sigma_0^2$ . Вследствие некоррелированности собственных шумов их корреляционная матрица  $\langle \mathbf{Z}\mathbf{Z}^H \rangle = \sigma_0^2 \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица,  $(\cdot)^H$  – эрмитово сопряжение, которое представляет собой одновременное транспонирование и комплексное сопряжение. В (1.1.1) и далее предполагается, что дисперсия коэффициентов передачи  $h_p$  равна единице ( $\langle |h_p|^2 \rangle = 1$ ). Это означает, что энергетические потери в канале пространственном канале не учитываются и средняя принимаемая мощность в приемных антеннах будет равна передаваемой мощности.

Принятые сигналы суммируются с комплексными весовыми коэффициентами, которые объединим в весовой вектор  $\mathbf{W}=(w_1, w_2, \dots, w_N)^T$ . Тогда комплексная амплитуда результирующей сигнал равен

$$y = \mathbf{W}^H \mathbf{X} = \mathbf{W}^H \sqrt{P_0} \mathbf{H}d + \mathbf{W}^H \mathbf{Z}. \quad (1.1.2)$$

Найдем выходное ОСШ. Нетрудно получить из (1.1.2), что

$$\rho = \rho_0 \frac{(\mathbf{W}^H \mathbf{H})(\mathbf{H}^H \mathbf{W})}{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}, \quad (1.1.3)$$

где  $\rho_0 = P_0 / \sigma_0^2$  – среднее ОСШ на символ в одной приемной антенне.

ОСШ не зависит от нормировки весового вектора  $\mathbf{W}$ . Удобно нормировать вектор  $\mathbf{W}$  так, что  $\mathbf{W}^H \mathbf{W} = 1$ . В результате для ОСШ будем иметь

$$\rho = \rho_0 |\mathbf{W}^H \mathbf{H}|^2. \quad (1.1.4)$$

Из (1.1.4) следует, что для обеспечения максимума ОСШ вектор  $\mathbf{W}$  должен быть параллелен вектору  $\mathbf{H}$  коэффициентов передачи, так как скалярное произведение  $(\mathbf{W}^H \mathbf{H})$  векторов  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{H}$  будет наибольшим, когда они параллельны друг другу:  $\mathbf{W} = \alpha \mathbf{H}$ , где из условия нормировки весового вектора  $\alpha = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1/2}$ . В этом случае обеспечивается согласованный (когерентный) прием сигналов, принятых отдельными антеннами. В результате выходное ОСШ будет равно

$$\rho = \rho_0 \mathbf{H}^H \mathbf{H} = \rho_0 (\langle |h_1|^2 \rangle + \langle |h_2|^2 \rangle + \dots + \langle |h_N|^2 \rangle). \quad (1.1.5)$$

Отсюда следует, что при оптимальном весовом суммировании выходное ОСШ представляет собой сумму ОСШ в каждой антенне.

Плотность вероятности ОСШ  $\rho$  зависит от статистических свойств замираний сигналов. Рассмотрим некоторые случаи.

**Некоррелированные релеевские замирания сигналов одинаковой мощности.** Если дисперсия канальных коэффициентов являются одинаковыми во всех антеннах (ветвях разнесения), то из (1.1.5) следует, что ОСШ  $\rho$  имеет хи-квадрат-распределение с  $2N$  степенями свободы вида [21]:

$$f(\rho) = \frac{1}{(N-1)! \rho_0^N} \rho^{N-1} \exp\left(-\frac{\rho}{\rho_0}\right). \quad (1.1.6)$$

На рис. 1.2 показано хи-квадрат-распределение для разного числа  $N$  приемных антенн ( $N=1, 2$  и  $4$ ) при  $\rho_0=1$  (сплошные кривые). Среднее ОСШ равно  $\langle \rho \rangle = \rho_0 N$ . Поэтому с ростом  $N$  соответствующие кривые сдвигаются вправо. Более того, видно, что вероятность глубоких замираний выходного сигнала (малых ОСШ) значительно уменьшается.

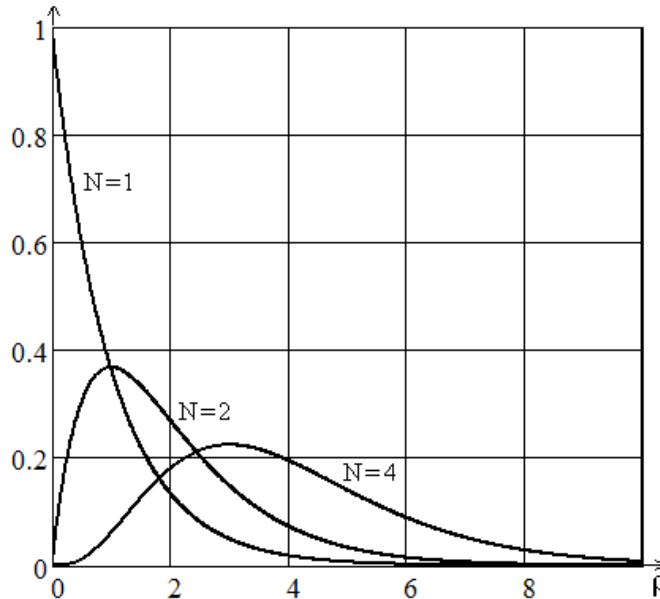


Рис. 1.2. Плотность вероятности ОСШ для разных  $N$  при когерентном суммировании антенн

**Коррелированные релеевские замирания сигналов одинаковой мощности.** Если коэффициенты передачи для всех антенн флуктуируют одинаково («дружные» флуктуации), то можно считать, что эти коэффициенты не зависят от номера антенны, и записать, что  $|h_p|=|h|$  и  $\langle |h_p|^2 \rangle = 1$  ( $p=1,2,\dots, N$ ). Тогда из (1.1.5) нетрудно найти для ОСШ выражение

$$\rho = \rho_0 N |h|^2. \quad (1.1.7)$$

В случае приема на одну антенну ( $N=1$ ) ОСШ равно  $\rho = \rho_0 |h|^2$ , поэтому из (1.1.7) следует, что случай полностью коррелированных замираний идентичен случаю приема на одну антенну, но имеющую в  $N$  раз большее усиление. При этом ОСШ  $\rho$  будет иметь экспоненциальную плотность вероятности с параметром  $N\rho_0$ , которую можно записать как

$$f(\rho) = \frac{1}{N\rho_0} \exp\left(-\frac{\rho}{N\rho_0}\right). \quad (1.1.8)$$

### 1.1.2. Вероятность битовой ошибки

Будем рассматривать сигналы двоичной фазовой модуляции (ФМ). При этом учтем, что вероятность битовой ошибки одинакова для сигналов двоичной и квадратурной фазовых модуляций (КАМ) в зависимости от отношения  $E_b/N_0$ , где  $E_b$  – энергия на один бит информации, а  $N_0$  – спектральная плотность мощности шума [2,3]. Если рассматривать вероятность битовой ошибки в зависимости от ОСШ, то одинаковая вероятность будет достигаться для квадратурной фазовой модуляции при ОСШ, большем в два раза (на 3 дБ), чем для двоичной модуляции.

Рассмотрим случаи некоррелированных и коррелированных замираний сигналов в разных приемных антеннах.

**Некоррелированные замирания сигналов.** Вероятность битовой ошибки ( $BER$ ) определяется отношением среднего числа неправильно принятых бит к общему числу переданных бит. Так как ОСШ  $\rho$  является случайной величиной, необходимо, используя плотность вероятности  $f(\rho)$ , выполнить усреднение битовой ошибки, которая возникает из-за шума при ОСШ  $\rho$ .

Следовательно, чтобы найти битовую ошибку при передаче через релеевский канал, необходимо вычислить интеграл

$$BER = \int_0^{\infty} f(\rho) BER(\rho) d\rho, \quad (1.1.9)$$

где  $BER(\rho)$  – вероятность битовой ошибки в гауссовом шумовом канале без замираний при ОСШ, равном  $\rho$ .

Известно (см. например, [2, 3, 28, 33]), что для сигналов двоичной ФМ

$$BER(\rho) = \frac{1}{2} [1 - \Phi(\sqrt{2\rho})], \quad (1.1.10)$$

где  $\Phi(x)$  – интеграл вероятности вида

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp(-0.5 t^2) dt. \quad (1.1.11)$$

Вероятность битовой ошибки в системе с разнесенным приемом зависит от статистических свойств замираний сигналов в приемных антеннах. Чтобы найти вероятность  $BER$  битовой ошибки, необходимо функцию  $f(\rho)$  из (1.1.6) подставить в (1.1.9) и учесть (1.1.10). В результате будем иметь, что

$$BER = \int_0^{\infty} \frac{1}{(N-1)! \rho_0^N} \rho^{N-1} \exp\left(-\frac{\rho}{\rho_0}\right) \frac{1}{2} [1 - \Phi(\sqrt{\rho})] d\rho. \quad (1.1.12)$$

После интегрирования получим выражение для вероятности битовой ошибки в явном виде [1]

$$BER = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 + 1}} \left[ 1 + \sum_{l=1}^{N-1} \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} \frac{1}{(\rho_0 + 1)^l} \right], \quad (1.1.13)$$

где  $(2l-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2l-1)$ ;  $(2l)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2l$ .

При произвольном числе антенн и больших ОСШ ( $\rho_0 \gg 1$ ) формула (1.1.13) упрощается и принимает следующий вид [4]:

$$BER = \frac{(2N-1)!}{N!(N-1)!} \left( \frac{1}{4\rho_0} \right)^N. \quad (1.1.14)$$

Отсюда следует, что вероятность ошибки уменьшается обратно пропорционально ОСШ в степени, равной числу приемных антенн, то есть  $BER \sim \rho_0^{-N}$ . Поэтому в логарифмическом масштабе кривые вероятности ошибок имеют линейную асимптотику при больших ОСШ с углом наклона прямых, равным  $(-N)$ . Этот угол называется порядком разнесения при приеме на АР.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) мощность сигнала стремится к нулю ( $\rho_0 \rightarrow 0$ ), то есть имеется только собственный шум. Вероятность ошибки стремится к  $1/2$  ( $BER \rightarrow 1/2$ );

б) одна приемная антенна ( $N=1$ ). Из (1.1.13) имеем, что

$$BER = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 + 1}} \right). \quad (1.1.15)$$

в) две приемные антенны ( $N=2$ ). Из (1.1.13) имеем, что

$$BER = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 + 1}} \left( 1 + \frac{1}{2(\rho_0 + 1)} \right) \right]. \quad (1.1.16)$$

При больших ОСШ ( $\rho_0 \gg 1$ ) получим, что

$$BER \approx \frac{3}{16\rho_0^2}; \quad (1.1.17)$$

г) четыре приемные антенны ( $N=4$ ). Из (1.1.13) найдем, что

$$BER = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 + 1}} \left( 1 + \frac{1}{2(\rho_0 + 1)} + \frac{3}{8(\rho_0 + 1)^2} + \frac{5}{16(\rho_0 + 1)^3} \right) \right]. \quad (1.1.18)$$

При больших ОСШ ( $\rho_0 \gg 1$ )

$$BER \approx 0.14\rho_0^{-4}; \quad (1.1.19)$$

д) восемь приемных антенн ( $N=8$ ). При больших ОСШ ( $\rho_0 \gg 1$ ) имеем

$$BER \approx 0.1\rho_0^{-8}. \quad (1.1.20)$$

Кривые вероятности ошибок в зависимости от ОСШ для разного числа антенн ( $N=1, 2, 4$  и  $8$ ) представлены на рис. 1.3.

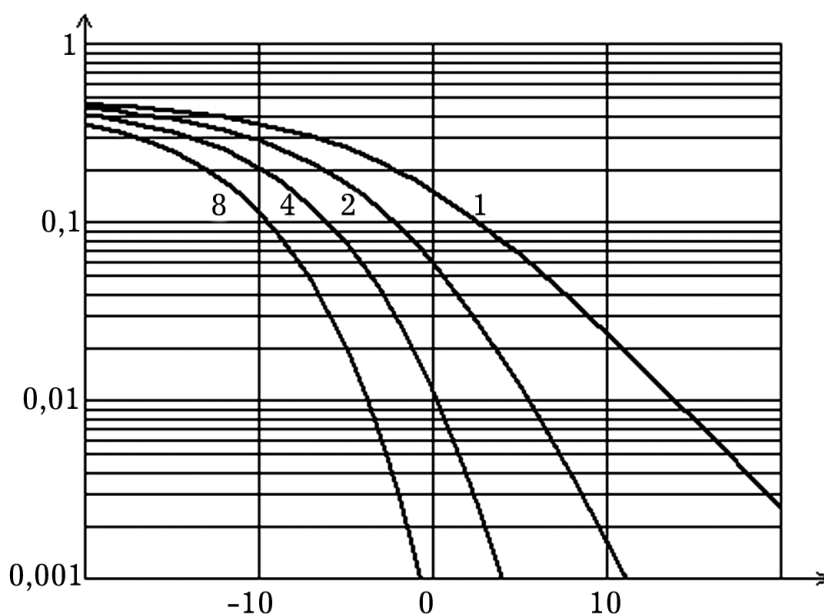


Рис. 1.3. Вероятность ошибки в зависимости от ОСШ,  $N=1, 2, 4$  и  $8$

Оценим ОСШ, необходимое для обеспечения заданной вероятности ошибки, например равной 0.01. Результаты оценки показаны в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Число антенн	Требуемое ОСШ, дБ	Выигрыш в ОСШ, дБ	Выигрыш за счет усиления, дБ	Выигрыш за счет разнесения, дБ
$N=1$	13.8	-	-	-
$N=2$	5.4	8.4	3	5.4
$N=4$	0.2	13.6	6	7.6
$N=8$	-3.7	17.5	9	8.5

Видно, что с ростом числа антенн ОСШ значительно уменьшается, то есть имеет место энергетический выигрыш, обеспечиваемый двумя факторами. Первый связан с увеличением среднего уровня принимаемого сигнала за счет использования  $N$  приемных антенн (выигрыш за счет усиления). Второй – с уменьшением вероятности глубоких замираний при приеме на множество антенн, когда вероятность одновременного замирания сигналов во всех антеннах уменьшается с ростом их числа (выигрыш за счет разнесенного приема).

**Коррелированные замирания сигналов.** Как отмечалось выше, случай полностью коррелированных замираний идентичен случаю приема на одну антенну, но имеющую в  $N$  раз большее усиление. Учитывая выражение (1.1.15) для BER при  $N=1$ , получим, что вероятность битовой ошибки будет равна

$$BER = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{N\rho_0}{N\rho_0 + 1}} \right). \quad (1.1.21)$$

При достаточно большом ОСШ ( $N\rho_0 \gg 1$ ) имеем

$$BER \approx \frac{1}{4N\rho_0}. \quad (1.1.22)$$

В логарифмическом масштабе кривая вероятности ошибок имеет линейную асимптотику при больших ОСШ с углом наклона прямых, равным  $(-1)$ . Следовательно, порядок разнесения в случае полностью коррелированных релеевских замираний сигналов равен единице и не зависит от числа антенн. Вероятность ошибки в зависимости от ОСШ для коррелированных релеевских замираний при разном числе антенн ( $N=1, 2, 4$  и  $8$ ) представлена на рис. 1.4. Видно, что с увеличением  $N$  кривые сдвигаются влево на 3 дБ.

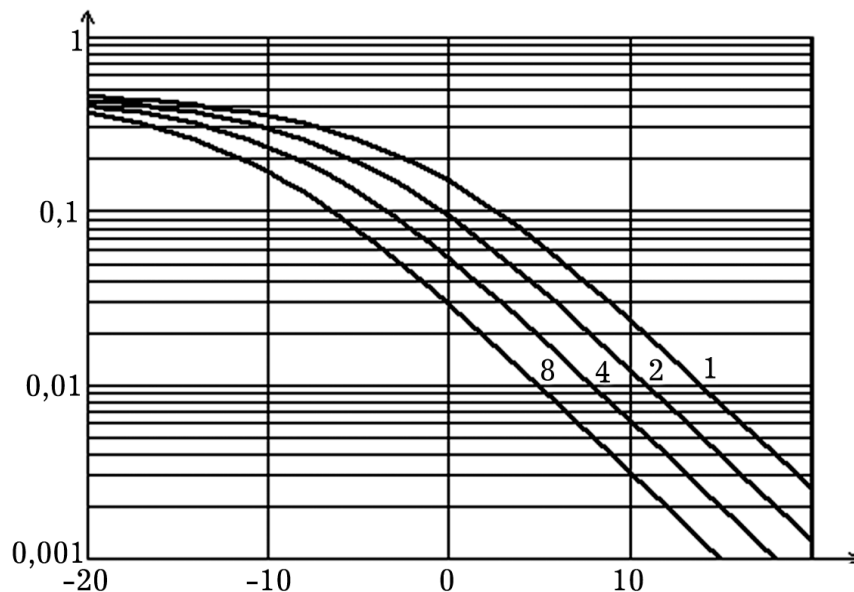


Рис. 1.4. Вероятность ошибки в зависимости от ОСШ,  $N=1, 2, 4$  и  $8$

Рассмотрим теперь случай произвольным образом коррелированных релеевских замираний в двух приемных антеннах. Предположим, что замирания сигналов имеют одинаковую дисперсию и коррелированы с произвольным действительным коэффициентом корреляции  $r$ .

Для вероятности битовой ошибки будем иметь

$$BER = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{(1+r)}{2r} \sqrt{\frac{\rho_0(1+r)}{\rho_0(1+r)+1}} + \frac{(1-r)}{2r} \sqrt{\frac{\rho_0(1-r)}{\rho_0(1-r)+1}} \right]. \quad (1.1.23)$$

Результаты расчета вероятности ошибки при различных коэффициентах корреляции  $r$  приведены на рис. 1.5. Видно, что при увеличении  $r$  мощность, необходимая для обеспечения заданной вероятности ошибки, возрастает. Однако это возрастание является неравномерным. Зафиксируем вероятность на уровне 0.01. Тогда увеличение мощности составляет 0.5; 3 и 6 дБ при коэффициенте корреляции, равном 0.5; 0.9 и 1.0, соответственно. То есть увеличение коэффициента корреляции от 0 до 0.9 эквивалентно с точки зрения энергетических потерь увеличению коэффициента корреляции от 0.9 до 1.0. Таким образом, можно считать, что корреляция сигналов не приводит к заметным потерям, если коэффициент корреляции не превышает  $\approx 0.7$ .

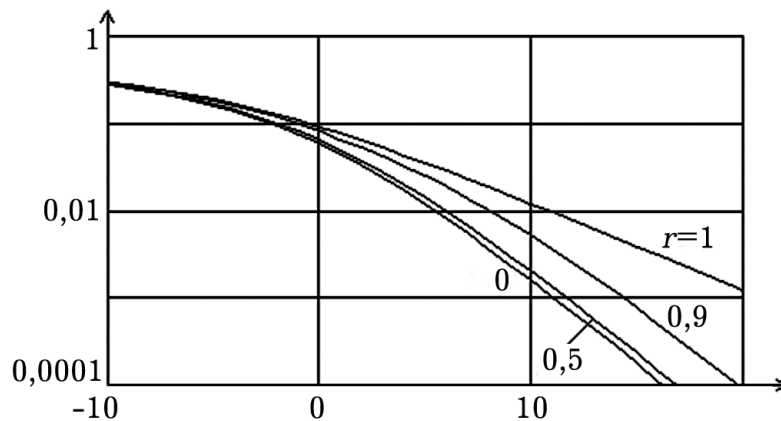


Рис. 1.5. Вероятность ошибки в зависимости от ОСШ для разных коэффициентов корреляции

### 1.1.3. Спектральная эффективность

Спектральная эффективность (СЭ)  $C$  (бит/(сек·Гц)) SIMO-системы, приведенная к единичной полосе частот, определяется ОСШ  $\rho$  и равна  $C = \log_2(1 + \rho)$ . При когерентном суммировании сигналов в приемных антеннах в релейском некоррелированном канале ОСШ определяется выражением (1.1.5). При этом ОСШ имеет хи-квадрат-распределение с  $2N$  степенями свободы вида (1.1.6). Для СЭ будем иметь

$$C = \log_2(1 + \rho) = \log_2 \left( 1 + \rho_0 \sum_{p=1}^N |h_p|^2 \right). \quad (1.1.24)$$

Таким образом, СЭ является случайной величиной и полностью характеризуется своей плотностью вероятности или интегральной функцией распределения. Однако получить аналитическое выражение для СЭ при ОСШ  $\rho$  с плотно-



стью вероятности (1.1.6) не представляется возможным. Поэтому, часто ограничиваются средней СЭ.

На рис. 1.6 показана средняя СЭ (бит/(сек·Гц)) SIMO-системы в релейском некоррелированном канале при разном числе приемных антенн ( $N=1, 2, 4$  и  $8$ ) в зависимости от среднего ОСШ  $\rho_0$ . Видно, что средняя СЭ растет с увеличением числа антенн.

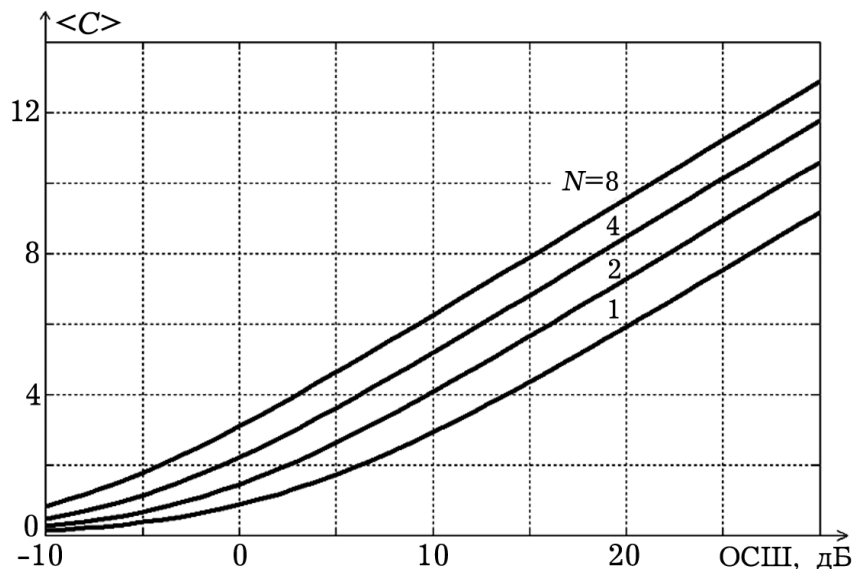


Рис. 1.6. Средняя СЭ SIMO-системы в релейском некоррелированном канале в зависимости от среднего ОСШ при  $N=1, 2, 4$  и  $8$

## 1.2. Системы с разнесенной передачей (MISO-системы)

### 1.2.1. Разнесенная передача из двух антенн

Наиболее популярным методом разнесенной передачи (РП) является ортогональная РП предложенная Аламоути (Alamouti) [24]. Принципиальная схема системы приема и передачи приведена на рис. 1.7. Модулированные импульсы разделяются на блоки по два последовательных импульса в каждом и поступают на пространственно-временной (ПВ) кодер, в котором фаза каждого из импульсов изменяется (кодируется) специальным образом и затем излучается обеими антеннами.

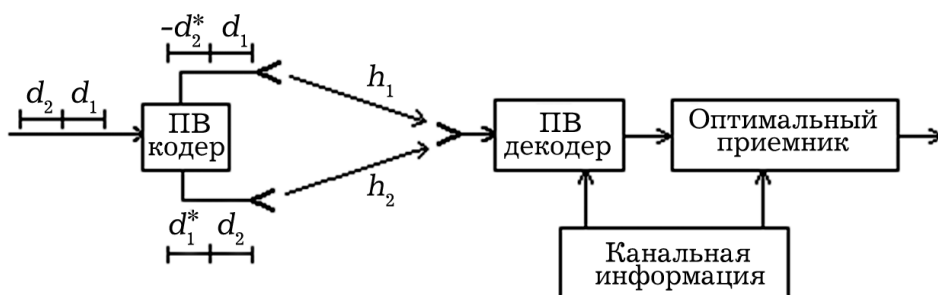


Рис. 1.7. Схема пространственно-временной разнесенной передачи

Пусть имеется два импульса  $d_1$  и  $d_2$ . Тогда в первый момент времени первая антенна излучает импульс  $d_1$ , а вторая – импульс  $d_2$ , а во второй момент времени излучаются импульсы  $-d_2^*$  и  $d_1^*$ , соответственно. Так как одновременно излучаются два разных сигнала, то они одновременно приходят в приемную антенну и их необходимо разделить. Для этого используется ПВ-декодер с линейной обработкой сигналов.

Матрица пространственно-временного блочного кода для схемы Аламоути имеет вид

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2^* \\ d_2 & d_1^* \end{pmatrix}. \quad (1.2.1)$$

Здесь два столбца соответствуют двум моментам времени, а две строки – двум передающим антеннам.

Такой код является ортогональным, так как выполняется условие ортогональности (1.2.10), которое принимает вид  $\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{D}}^H = (|d_1|^2 + |d_2|^2)\mathbf{I}$ .

Отметим также, что входной и выходной блоки состоят из двух сигналов и имеют длительность  $2T_s$  каждый, поэтому скорость кодирования также равна единице ( $R_{s,t}=1$ ).

Длительность импульса в системах связи обычно значительно меньше времени изменения канальных коэффициентов. Следовательно, их можно считать неизменными за время передачи двух соседних символов  $d_1$  и  $d_2$ . Поэтому на выходе приемной антенны в первый и второй моменты времени будем иметь смесь двух сигналов и шума:

$$x(1) = \sqrt{\frac{P_0}{2}}(h_1d_1 + h_2d_2) + z(1), \quad x(2) = \sqrt{\frac{P_0}{2}}(-h_1d_2^* + h_2d_1^*) + z(2) \quad (1.2.2)$$

где множитель  $P_0/2$  учитывает разделение мощности  $P_0$  между передающими антеннами.

Сформируем двумерный вектор  $\mathbf{X}=[x(1), x^*(2)]^T$  принятых сигналов. Тогда выражения (1.2.2) и (1.2.2) можно переписать в виде

$$\mathbf{X} = \sqrt{\frac{P_0}{2}}\mathbf{H}_{eff}\mathbf{D} + \mathbf{Z}, \quad (1.2.3)$$

где

$$\mathbf{H}_{eff} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z(1) \\ z^*(2) \end{pmatrix}, \quad (1.2.4)$$

Здесь  $\mathbf{H}_{eff}$  – эффективная канальная матрица. Важно отметить, что матрица  $\mathbf{H}_{eff}$  является ортогональной, то есть  $\mathbf{H}_{eff}^H\mathbf{H}_{eff} = (|h_1|^2 + |h_2|^2)\mathbf{I}$ . Отсюда получим, что

матрица  $\mathbf{H}_{eff}^H = (|h_1|^2 + |h_2|^2) \mathbf{H}_{eff}^{-1}$ , то есть матрица  $\mathbf{H}_{eff}^H$  пропорциональна обратной матрице  $\mathbf{H}_{eff}^{-1}$ .

Пространственно-временной декодер обеспечивает разделение сигналов  $d_1$  и  $d_2$  с помощью простой линейной обработки, которую можно задать матрицей  $\mathbf{H}_{eff}^H$  вместо обратной матрицы  $\mathbf{H}_{eff}^{-1}$ . В результате получим, что выходной вектор  $\mathbf{Y}=[y(1), y(2)]^T$  равен

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}_{eff}^H \mathbf{X}. \quad (1.2.5)$$

Подставляя (1.2.3) в (1.2.5), получим

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\frac{P_0}{2}} (|h_1|^2 + |h_2|^2) \mathbf{D} + \tilde{\mathbf{Z}}, \quad (1.2.6)$$

где выходной вектор шумов равен  $\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{H}_{eff}^H \mathbf{Z}$ .

Корреляционная матрица выходных шумов является диагональной и равна

$$\langle \tilde{\mathbf{Z}} \tilde{\mathbf{Z}}^H \rangle = \mathbf{H}_{eff}^H \langle \mathbf{Z} \mathbf{Z}^H \rangle \mathbf{H}_{eff} = \sigma_0^2 (|h_1|^2 + |h_2|^2) \mathbf{I}. \quad (1.2.7)$$

Нормируем вектор  $\mathbf{Y}$  в (1.2.6) так, чтобы средняя мощность выходных шумов была равна  $\sigma_0^2$ . Тогда получим вместо (1.2.6), что

$$\mathbf{Y} = \sqrt{P_0} \tilde{h} \mathbf{D} + \mathbf{Z}, \quad \tilde{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|h_1|^2 + |h_2|^2}, \quad (1.2.8)$$

где  $\tilde{h}$  представляет собой эффективный канальный коэффициент передачи для каждого из двух символов  $d_1$  и  $d_2$ . Теперь две передающие антенны можно заменить одной эквивалентной антенной и считать  $\tilde{h}$  канальным коэффициентом для этой антенны.

Из (1.2.7) и (1.2.8) следует, что декодер обеспечивает разделение переданных символов  $d_1$  и  $d_2$  с помощью линейного преобразования, а выходные собственные шумы являются статистически независимыми. Поэтому возможно независимое детектирование принятых символов.

Для каждого из символов  $d_1$  и  $d_2$  ОСШ одинаково и равно

$$\rho = \rho_0 |\tilde{h}|^2 = \frac{1}{2} \rho_0 (|h_1|^2 + |h_2|^2). \quad (1.2.9)$$

Из (1.2.9) следует, что РП по схеме Аламоути обеспечивает когерентное суммирование случайных канальных коэффициентов  $h_1$  и  $h_2$ . Так как дисперсию флуктуаций канальных коэффициентов мы считаем равной единице ( $\langle |h_{1(2)}|^2 \rangle = 1$ ), то из (1.2.9) получим, что среднее ОСШ  $\langle \rho_1 \rangle = \langle \rho_2 \rangle = \rho_0$ .

Следовательно, при использовании пространственно-временной разнесенной передачи ОСШ остается таким же, как и при отсутствии разнесения. Это означает, что выигрыш в ОСШ за счет усиления AP, состоящей в данном случае из двух антенн, компенсируется разделением мощности между антеннами.

Сравним РП из двух антенн с разнесенным приемом на две антенны. Соответствующие ОСШ даются выражениями (1.1.5) при  $N=2$  и (1.2.9). Можно видеть, что среднее ОСШ при разнесенном приеме в два раза (на 3 дБ) больше, чем при РП, а закон распределения ОСШ является одинаковым (хи-квадрат-распределение с  $2N=4$  степенями свободы). Следовательно, РП обеспечивает порядок разнесения, равный двум (числу передающих антенн). Однако для достижения одинаковой вероятности битовой ошибки средняя мощность должна быть увеличена в два раза.

Сравним эффективность РП с эффективностью передачи из одной антенны (неразнесенная передача) на основе вероятности ошибки передачи фреймов [13]. Будем рассматривать структуру фрейма для прямого канала (БС → пользователь) в CDMA-системах стандарта IS-95 [4].

Информация в CDMA-системах передается фреймами. Каждый фрейм имеет длительность 20 мс и состоит из 192 бит: 172 бита данных, 12 бит циклического избыточного кода и 8 хвостовых бит. Биты этого кода являются двоичной сверткой бит данных с соответствующим генераторным полиномом и служат для определения пользователем правильности принятого фрейма. Сопоставляя принятый код с кодом, вычисленным на основе принятых бит данных, можно определить, правильно или неправильно был принят фрейм. Вероятность того, что фрейм принят неверно, при условии равенства принятого и вычисленного циклических избыточных кодов составляет  $2^{-12}$ . Это означает, что фрейм считается принятым неправильно, если хотя бы один бит в нем декодирован ошибочно. Нулевые хвостовые биты добавляются в конец фрейма для обнуления всех ячеек декодера после завершения обработки фрейма.

Последовательность бит поступает на помехоустойчивый сверточный кодер, построенный на основе линейного сдвигового регистра, с длиной кодового ограничения  $K=9$ . На каждый входной бит формируется два выходных бита, то есть скорость кодирования равна 1/2. Генераторные полиномы кодера в восьмеричной системе равны 5618 и 7538.

В случае медленных замираний сигналов возможны следующие друг за другом ошибки (пакеты ошибок). Для борьбы с такими ошибками используется интерливер (перемежитель), который осуществляет перестановку входных бит во фрейме. Входные биты записываются в столбцы матрицы интерливера, а выходные биты формируются путем считывания строк этой матрицы. Число кодированных бит во фрейме равно 384, и матрица интерливера имеет размерность  $(24 \times 16)$ . Затем биты поступают на модулятор, который использует бинарную фазовую модуляцию в косинусной и синусной квадратурах, что эквивалентно квадратурной фазовой модуляции.

Принятые сигналы поступают на оптимальный приемник (так называемый РАКЕ-приемник [2,4]), состоящий из набора оптимальных фильтров (корреляторов) и сумматора лучей (ветвей разнесения). После РАКЕ-приемника обеспечивается обратная перестановка символов в деинтерливере и их декодирование в декодере Витерби, который реализует алгоритм максимального правдоподобия на основе «мягкой» метрики [2,3,9].

Рассмотрим однолучевой релейский канал с частотной дисперсией, обусловленной движением пользователя, которую будем характеризовать максимальной частотой Доплера  $f_d$ . На рис. 1.8 дана фреймовая ошибка в зависимости от ОСШ, для неразнесенной и разнесенной передачи. Частота Доплера  $f_d=10$  Гц. Видно, что ОСШ, требуемое для обеспечения фреймовой ошибки, равной 0.01, уменьшается с 16 до 10.2 дБ за счет применения РП.

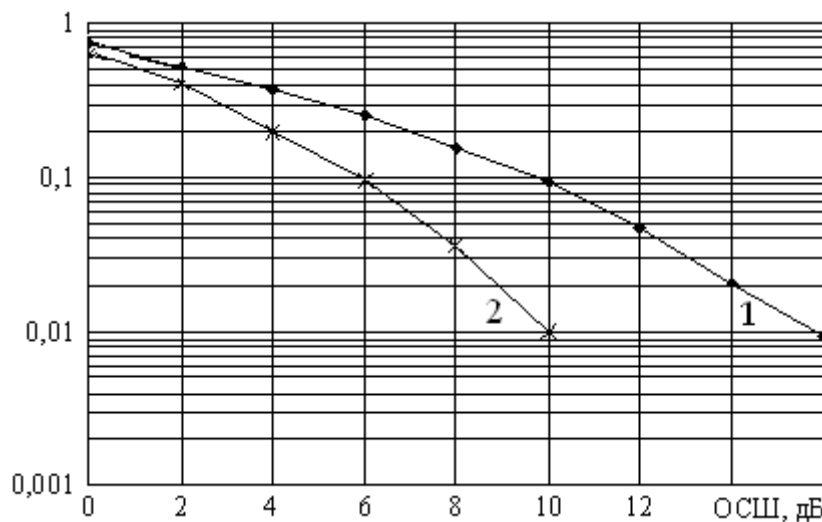


Рис. 1.8. Вероятность фреймовой ошибки для неразнесенной и пространственно-временной РП (кривые 1 и 2 соответственно)

### 1.2.2. Разнесенная передача при произвольном числе антенн

Рассмотрим ортогональное пространственно-временное блочное кодирование. Блочный код считается ортогональным, если [5,7]:

– выходные сигналы кодера представляют собой линейную комбинацию входных сигналов и их комплексно-сопряженных величин;

– матрица  $\tilde{\mathbf{D}}$  кодированных сигналов, передаваемых из  $M$  антенн, удовлетворяет условию ортогональности, при котором

$$\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{D}}^H = \left( |d_1|^2 + |d_2|^2 + \dots + |d_{n_s}|^2 \right) \mathbf{I}_M, \quad (1.2.10)$$

где  $\mathbf{I}_M$  – тождественная матрица размерности  $M \times M$ ,  $n_s$  – число передаваемых символов. Условие (1.2.10) означает, что строки матрицы  $\tilde{\mathbf{D}}$  ортогональны между собой. При этом разные антенны передают ортогональные последователь-

ности данных. Условие (1.2.10) ортогональности существенно упрощает декодирование.

Рассмотрим ортогональные блочные коды при произвольном числе  $M$  передающих антенн [5,7] для действительных (одномерных) и комплексных (двумерных) сигналов.

**Действительные сигналы.** К таким сигналам относятся сигналы двоичной фазовой модуляции (2-ФМ). Ортогональные блочные коды с единичной скоростью ( $R_{s-t}=1$ ), то есть без задержки в передаче данных, существуют при произвольном числе  $M$  передающих антенн. Если  $M$  четное, то можно сформировать такие коды, для которых матрица  $\tilde{\mathbf{D}}$  кодированных сигналов является квадратной, а при нечетном  $M$  матрица  $\tilde{\mathbf{D}}$  становится прямоугольной.

Некоторые примеры ортогональных кодов для разного числа антенн:

$$M=2 \quad \tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 \\ d_2 & d_1 \end{pmatrix}, \quad (1.2.11)$$

$$M=3 \quad \tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 \\ d_2 & d_1 & d_4 & -d_3 \\ d_3 & -d_4 & d_1 & d_2 \end{pmatrix}, \quad (1.2.12)$$

$$M=4 \quad \tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 \\ d_2 & d_1 & d_4 & -d_3 \\ d_3 & -d_4 & d_1 & d_2 \\ d_4 & d_3 & -d_2 & d_1 \end{pmatrix}, \quad (1.2.13)$$

$$M=5 \quad \tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 & -d_5 & -d_6 & -d_7 & -d_8 \\ d_2 & d_1 & -d_4 & d_3 & -d_6 & d_5 & d_8 & -d_7 \\ d_3 & d_4 & d_1 & -d_2 & -d_7 & -d_8 & d_5 & d_6 \\ d_4 & -d_3 & d_2 & d_1 & -d_8 & d_7 & -d_6 & d_5 \\ d_5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 \end{pmatrix}. \quad (1.2.14)$$

Нетрудно убедиться в том, что все эти коды удовлетворяют условию (1.2.10) ортогональности и обеспечивают передачу данных с единичной скоростью без задержки. Например, матрица  $\tilde{\mathbf{D}}$  при  $M=5$  состоит из 8 столбцов и 5 строк, что соответствует кодированию блока, состоящего из 8 символов  $d_1, d_2, \dots, d_8$ , и дальнейшей передаче за 8 моментов времени с помощью 5 антенн. Следовательно, скорость кодирования  $R_{s-t}=1$ .

**Комплексные сигналы.** Ранее рассматривались двумерные сигналы квадратурной фазовой модуляции (4-ФМ) и квадратурной амплитудной модуляции (16- и 64-КАМ). Если число передающих антенн больше двух ( $M>2$ ), то не су-

ществует ортогональных блочных кодов с единичной скоростью, поэтому всегда имеется задержка в передаче данных. Известные коды обеспечивают скорость  $R_{s-t}=1/2$ , то есть длительность передаваемого блока удваивается. Исключением являются случаи трех ( $M=3$ ) и четырех ( $M=4$ ) передающих антенн, когда можно обеспечить большую скорость кодирования, равную  $R_{s-t}=3/4$ .

Введем параметр  $\alpha^2=1/2$  и рассмотрим примеры этих кодов:

**$M=3, R_{s-t}=3/4$**

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2^* & \alpha d_3^* & \alpha d_3^* \\ d_2 & d_1^* & \alpha d_3^* & -\alpha d_3^* \\ \alpha d_3 & \alpha d_3 & \alpha^2(-d_1 - d_1^* + d_2 - d_2^*) & \alpha^2(d_2 + d_2^* + d_1 - d_1^*) \end{pmatrix}; \quad (1.2.15)$$

**$M=4, R_{s-t}=3/4$**

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2^* & \alpha d_3^* & \alpha d_3^* \\ d_2 & d_1^* & \alpha d_3^* & -\alpha d_3^* \\ \alpha d_3 & \alpha d_3 & \alpha^2(-d_1 - d_1^* + d_2 - d_2^*) & \alpha^2(d_2 + d_2^* + d_1 - d_1^*) \\ \alpha d_3 & -\alpha d_3 & \alpha^2(-d_2 - d_2^* + d_1 - d_1^*) & -\alpha^2(d_1 + d_1^* + d_2 - d_2^*) \end{pmatrix}; \quad (1.2.16)$$

**$M=3, R_{s-t}=1/2$**

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 & d_1^* & -d_2^* & -d_3^* & -d_4^* \\ d_2 & d_1 & d_4 & -d_3 & d_2^* & d_1^* & d_4^* & -d_3^* \\ d_3 & -d_4 & d_1 & d_2 & d_3^* & -d_4^* & d_1^* & d_2^* \end{pmatrix}; \quad (1.2.17)$$

**$M=4, R_{s-t}=1/2$**

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 & d_1^* & -d_2^* & -d_3^* & -d_4^* \\ d_2 & d_1 & d_4 & -d_3 & d_2^* & d_1^* & d_4^* & -d_3^* \\ d_3 & -d_4 & d_1 & d_2 & d_3^* & -d_4^* & d_1^* & d_2^* \\ d_4 & d_3 & -d_2 & d_1 & d_4^* & d_3^* & -d_2^* & d_1^* \end{pmatrix}. \quad (1.2.18)$$

Эти коды удовлетворяют условию (1.2.10) ортогональности и имеют задержку в передаче данных. Например, матрица  $\tilde{\mathbf{D}}$  в (1.2.18) для  $M=4$  состоит из 8 столбцов и 4 строк и соответствует кодированию блока, состоящего из 4 символов  $d_1, d_2, d_3$  и  $d_4$ , и передаче за 8 моментов времени. Следовательно, скорость кодирования  $R_{s-t}=1/2$ .

Чтобы найти СЭ и вероятность битовой ошибки при использовании в MISO-системе ортогональных блочных кодов, найдем ОСШ после декодирования. Эффективный коэффициент передачи будет равен

$$\tilde{h} = \sqrt{\frac{1}{M}} \sqrt{|h_1|^2 + |h_2|^2 + \dots + |h_M|^2} = \sqrt{\frac{1}{M}} \sqrt{\sum_{j=1}^M |h_j|^2}. \quad (1.2.19)$$

Теперь для ОСШ получим

$$\rho = \rho_0 |\tilde{h}|^2 = \frac{\rho_0}{M} \sum_{j=1}^M |h_j|^2. \quad (1.2.20)$$

Сравним ОСШ (1.2.20) для ортогонального блочного кодирования в MISO-системе с  $M$  передающими антеннами с ОСШ (1.1.5) в SIMO-системе с разнесенным приемом на  $M$  антенн. Для этого в (1.1.5) нужно заменить  $N$  на  $M$ . Видно, что ОСШ подчиняются одинаковому закону распределения (хи-квадрат-распределение с  $2M$  степенями свободы). Однако среднее ОСШ в MISO-системе будет в  $1/M$  раз меньше из-за деления мощности между передающими антеннами.

Одинаковый закон распределения приводит к тому, что MISO-система с ортогональным блочным кодированием обеспечивает (аналогично SIMO-системе) максимальный порядок разнесения, равный общему числу  $M$  некоррелированных ветвей разнесения. Следовательно, при достаточно больших ОСШ вероятность битовой ошибки в MISO-системе уменьшается обратно пропорционально  $M$ . Меньшее (в  $1/M$  раз) среднее ОСШ в MISO-системе по сравнению с SIMO-системой приводит к тому, что кривые вероятности битовой ошибки в MISO-системе будут смещены на  $10 \lg(M)$  дБ вправо по сравнению с соответствующими кривыми для SIMO-системы (см. рис. 1.3 для некоррелированного релейского канала). Например, если  $M=2$ , то кривые для вероятности ошибки будут сдвинуты на 3 дБ по сравнению с кривыми на рис. 1.3, а при  $M=4$  и сдвиг кривых увеличивается до 6 дБ.

Таким образом, ортогональное пространственно-временное блочное кодирование обеспечивает максимальный порядок разнесения. Однако скорость передачи данных ( $R_{s-t}$ ) либо сохраняется (число передающих антенн  $M=2$ ), либо уменьшается ( $M>2$ ) по сравнению с системой без разнесенной передачи.



## ГЛАВА 2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ MIMO-СИСТЕМЫ

MIMO-системы можно разделить на два класса: без обратной связи и с обратной связью. К первому из них относятся MIMO-системы, в которых на передающей стороне отсутствует информация о коэффициентах передачи  $h_{nm}$  сигналов из  $m$ -ой передающей антенны в  $n$ -ую приемную антенну (передатчик «не знает» канал). Поэтому только прием сигналов является адаптивным. Вторым классом составляют MIMO-системы, в которых передатчик обладает информацией о коэффициентах передачи  $h_{nm}$  (передатчик «знает» канал). Тогда возможна адаптивная пространственная обработка сигналов не только на прием, но и на передачу. Однако для этого в системе должна быть реализована обратная связь от приемника к передатчику.

Систему связи часто характеризуют спектральной эффективностью (СЭ), которую также называют шенноновской пропускной способностью. Спектральная эффективность выражается в бит/(сек·Гц) и равна максимально возможному числу бит, которые можно передать без ошибки за одну секунду в единичной полосе частот. Удобство использования этой характеристики заключается в том, что она определяется только статистическими свойствами замираний сигналов и средней мощностью передатчика и не зависит от способа кодирования и модуляции данных.

В настоящей главе рассматривается СЭ MIMO-системы, когда передатчик имеет или не имеет информацию о пространственном канале. Как мы увидим, важную роль играет матрица  $\mathbf{H}$  коэффициентов передачи между передающими и приемными антеннами. Поэтому значительное внимание уделяется анализу статистических свойств этой матрицы.

### 2.1. Статистические свойства канальной матрицы

Рассмотрим MIMO-систему с  $M$  передающими и  $N$  приемными антеннами. Коэффициенты передачи  $h_{nm}$  сигналов из  $m$ -ой передающей антенны в  $n$ -ую приемную антенну образуют канальную матрицу  $\mathbf{H}$  размерности  $N \times M$ . Амплитуды и фазы коэффициентов  $h_{nm}$  в общем случае являются случайными величинами из-за интерференции рассеянных сигналов. Для городских условий характерно значительное ослабление (вплоть до исчезновения) прямого сигнала. В этом случае на приемную антенну приходит достаточно большое число рассеянных (переотраженных) сигналов. Фаза коэффициента  $h_{nm}$  равномерно распределена в пределах  $[0 \div 2\pi]$ , а амплитуда подчиняется релейскому распределению. Такой канал называют релейским, и он характеризуется наиболее глубокими замираниями сигналов. Для пригородных и сельских условий более типичной является ситуация, когда наряду с рассеянными сигналами в приемник поступает прямой сигнал с постоянной амплитудой. При этом амплитуда суммарного сигнала является случайной и подчиняется райсовскому распределению.

нию (райсовский канал). Без ограничения общности будем считать мощность канальных коэффициентов равной единице, то есть  $\langle |h_{nm}|^2 \rangle = 1$ .

В общем случае прямоугольная канальная матрица  $\mathbf{H}$  может быть представлена в виде сингулярного разложения [34]:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{0.5}\mathbf{V}^H, \quad (2.1.1)$$

где  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K\}$  – диагональная матрица собственных чисел  $\lambda_i$  матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  или матрицы  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ ; матрица  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_K)$  размерности  $(M \times K)$  состоит из собственных векторов матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ ; матрица  $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_K)$  размерности  $(N \times K)$  составлена из собственных векторов матрицы  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ ;  $K$  – ранг матрицы  $\mathbf{H}$ . Часто собственные числа ранжируют так, что  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_K$ .

Матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  и  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$  эрмитовы, не отрицательно определенные. Поэтому их собственные числа являются действительными и неотрицательными. Некоторые из них могут быть равны нулю. Важно отметить, что ненулевые собственные числа этих матриц совпадают между собой. Число отличных от нуля собственных чисел равно рангу  $K$  матрицы  $\mathbf{H}$ . В общем случае, ранг равен или меньше минимального числа передающих или приемных антенн:  $K \leq \min\{M, N\}$ . В условиях некоррелированных релеевских замираний сигналов матрица  $\mathbf{H}$  имеет полный ранг  $K = \min\{M, N\}$ . В случае одной передающей и одной приемной антенны ( $M=N=1$ ) матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  и  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$  вырождаются в число  $|h_{11}|^2$ .

Собственные векторы  $\mathbf{V}_i$  и  $\mathbf{U}_i$  образуют ортонормированные векторные системы и связаны следующими соотношениями:  $\mathbf{U}_i = \lambda_i^{-0.5}\mathbf{H}\mathbf{V}_i$  и  $\mathbf{V}_i = \lambda_i^{-0.5}\mathbf{H}^H\mathbf{U}_i$ . Матрица  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  имеет размерность  $N \times N$ , а размерность матрицы  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$  равна  $M \times M$ . Поэтому в случае с большим числом передающих антенн ( $M > N$ ) удобнее использовать матрицу  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ , а при  $M < N$  – матрицу  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ . Вследствие ортонормированности векторных систем  $\{\mathbf{U}_i\}$  и  $\{\mathbf{V}_i\}$  справедливы условия:  $\mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{I}_N$  и  $\mathbf{V}\mathbf{V}^H = \mathbf{I}_M$ , где  $\mathbf{I}_N, \mathbf{I}_M$  – единичные (тождественные) матрицы размерности  $N \times N$  или  $M \times M$ , соответственно.

Как мы увидим ниже, основные характеристики MIMO-системы зависят от статистических свойств собственных чисел  $\lambda_i$ . В случае некоррелированных релеевских замираний сигналов  $K$ -мерная совместная плотность вероятности  $f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K)$  неранжированных по величине собственных чисел  $\lambda_i$  матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  (при  $M \geq N$ ) или матрицы  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$  (при  $M < N$ ) имеет вид [25]

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K) = \frac{1}{aK!} \cdot \exp\left(-\sum_{i=1}^K \lambda_i\right) \cdot \prod_{i=1}^K (\lambda_i^{K_1-K}) \cdot \prod_{i < j}^K (\lambda_i - \lambda_j)^2, \quad (2.1.2)$$

где  $K_1 = \max\{N, M\}$ ,  $a$  – нормирующий множитель.

Одномерная плотность вероятности неранжированного собственного числа будет равна [25]:

$$f_\lambda(\lambda) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(i)!}{(i+q)!} [L_i^q(\lambda)]^2 \lambda^q \exp(-\lambda), \quad (2.1.3)$$

где  $q = |M - N|$ ,  $L_i^q(\lambda)$  – полином Лагерра  $i$ -го порядка.

Выражение (2.1.3) значительно упрощается в случае одинакового числа передающих и приемных антенн ( $M=N$ ), когда матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  и  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$  совпадают между собой. Если ввести в рассмотрение нормированную канальную матрицу  $N^{-1}\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  (или  $N^{-1}\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ ), то плотность вероятности неранжированного собственного числа этой матрицы не зависит от числа антенн, и определяется простым выражением [35]

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4-a}{a}}, \quad 0 < a \leq 4. \quad (2.1.4)$$

Отсюда следует, что плотность вероятности неранжированных собственных чисел канальной матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  (или  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ ) будет равна

$$f_\lambda(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \sqrt{\frac{4N-\lambda}{\lambda}}, \quad 0 < \lambda \leq 4N. \quad (2.1.5)$$

На рис. 2.1 показана интегральная функция распределения неранжированного собственного числа матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  (или  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ ) для ММО-системы с одинаковым числом передающих и приемных антенн ( $M=N=2$ ,  $M=N=4$  и  $M=N=6$ ). Видно, что разброс собственных чисел наибольший для  $M=N=6$ .

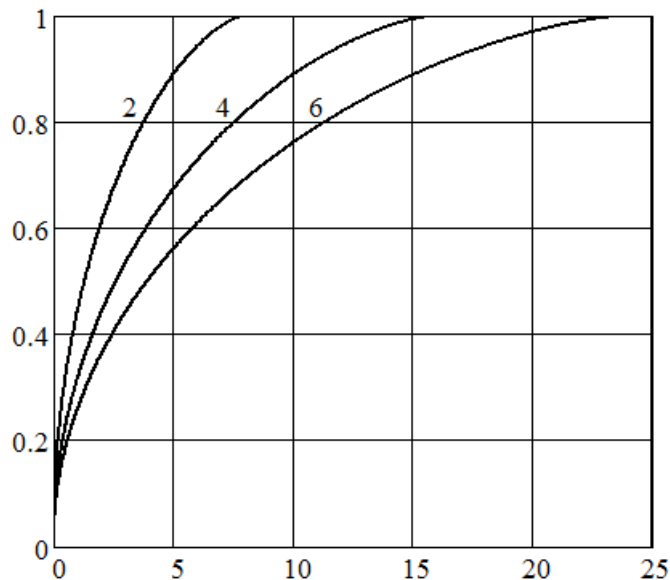


Рис. 2.1. Функция распределения неранжированного собственного числа при  $M=N=2, 4, 6$  (кривые 2,4,6, соответственно).

Аналитические выражения для плотности вероятности ранжированных собственных чисел в условиях некоррелированных релейских замираний сигналов известны только в некоторых случаях.

В частности, если имеется одинаковое (но произвольное) число передающих и приемных антенн ( $M=N$ ), то наименьшее собственное число  $\lambda_{min}=\lambda_K$  подчиняется экспоненциальному распределению вида

$$f_{\lambda_K}(\lambda) = K \exp(-K\lambda). \quad (2.1.6)$$

Отсюда следует, что среднее значение минимального собственного числа  $\langle \lambda_{min} \rangle = 1/K$ , то есть является обратно пропорциональным рангу матрицы  $\mathbf{H}$ .

Другой известный случай относится к ММО-системе с двумя собственными подканалами, то есть к системе с произвольным числом  $M$  передающих антенн и двумя приемными антеннами ( $N=2$ ) или к системе с двумя передающими антеннами ( $M=2$ ) и произвольным числом  $N$  приемных антенн. Для таких систем матрица  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  имеет два собственных числа, плотности вероятностей которых определяются следующими выражениями [18,32]:

$$f_{\lambda_1}(\lambda) = \frac{\lambda^{M-2} e^{-\lambda}}{(M-1)!} \left[ \lambda^2 - 2(M-1)\lambda + M(M-1) - \sum_{m=0}^{M-2} \frac{m(m-2M+1) + M(M-1)}{m!} \lambda^m \right], \quad (2.1.7)$$

$$f_{\lambda_2}(\lambda) = \frac{\lambda^{M-2} e^{-2\lambda}}{(M-1)!} \sum_{m=0}^{M-2} \frac{m(m-2M+1) + M(M-1)}{m!} \lambda^m. \quad (2.1.8)$$

Например, для плотности вероятности собственных чисел имеем, что:  
 $M=2, N=2$

$$f_{\lambda_1}(\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)e^{-\lambda} - 2e^{-2\lambda}, \quad (2.1.9)$$

$$f_{\lambda_2}(\lambda) = 2e^{-2\lambda}; \quad (2.1.10)$$

$M=3, N=2$  или  $M=2, N=3$

$$f_{\lambda_1}(\lambda) = 0.5\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^{-\lambda} - \lambda(\lambda + 3)e^{-2\lambda}, \quad (2.1.11)$$

$$f_{\lambda_2}(\lambda) = \lambda(\lambda + 3)e^{-2\lambda}; \quad (2.1.12)$$

$M=4, N=2$  или  $M=2, N=4$

$$f_{\lambda_1}(\lambda) = \frac{1}{6}\lambda^2(\lambda^2 - 6\lambda + 12)e^{-\lambda} - \frac{1}{6}\lambda^2(\lambda^2 + 6\lambda + 12)e^{-2\lambda}, \quad (2.1.13)$$

$$f_{\lambda_2}(\lambda) = \frac{1}{6} \lambda^2 (\lambda^2 + 6\lambda + 12) e^{-2\lambda}. \quad (2.1.14)$$

На рис. 2.2 показаны функции распределения максимального собственного числа  $\lambda_1$  для системы с двумя приемными антеннами ( $N=2$ ) при разном числе передающих антенн ( $M=2, 3, 4$ ). Аналогичные функции для минимального собственного числа  $\lambda_2$  даны на рис. 2.3.

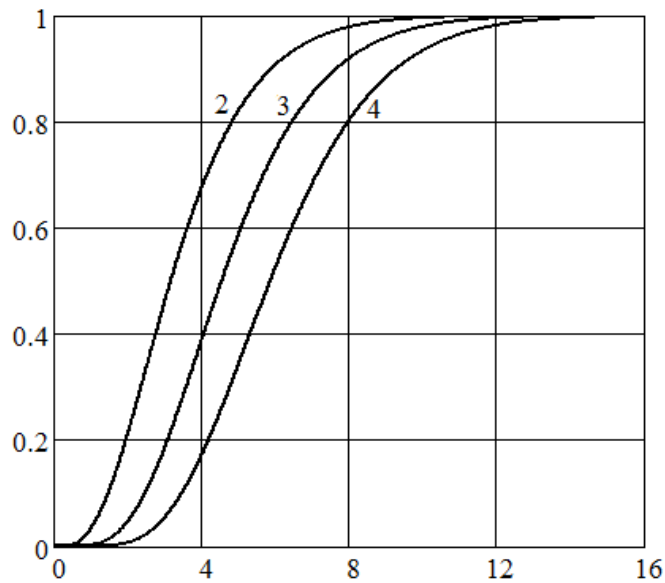


Рис. 2.2. Функции распределения собственного числа  $\lambda_1$  при  $M=2, 3, 4$  и  $N=2$  (кривые 2,3,4, соответственно)

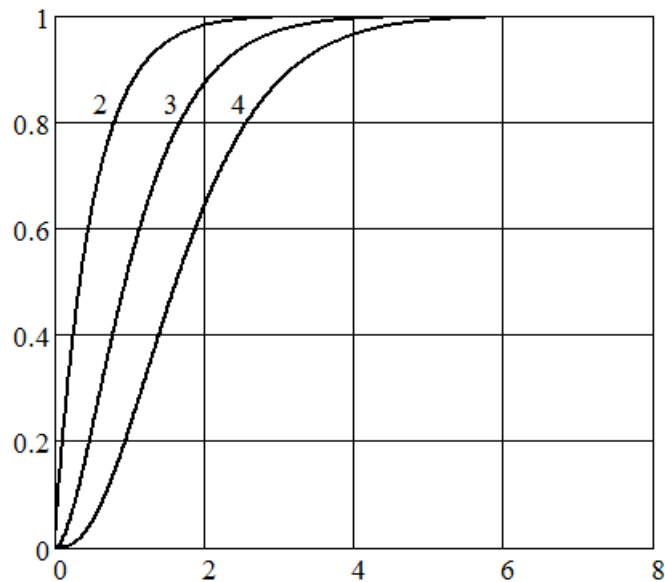


Рис. 2.3. Функции распределения собственного числа  $\lambda_2$  при  $M=2, 3, 4$  и  $N=2$  (кривые 2,3,4, соответственно)

Из рисунков видно, что функция распределения собственного числа  $\lambda_1$  смещается в область больших значений  $\lambda_1$  с ростом числа передающих антенн.

Среднее значение  $\langle \lambda_1 \rangle$  равно 3.5, 4.88 и 6.19 при  $M=2, 3, 4$ , соответственно. Функция распределения второго собственного числа  $\lambda_2$  также смещается в область больших значений  $\lambda_2$ . Среднее значение  $\langle \lambda_2 \rangle$  равно 0.5, 1.13 и 1.81 при  $M=2, 3, 4$ , соответственно.

Аналогичные кривые для собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и  $\lambda_4$  в случае четырех передающих и приемных антенн ( $M=N=4$ ) показаны на рис. 2.4.

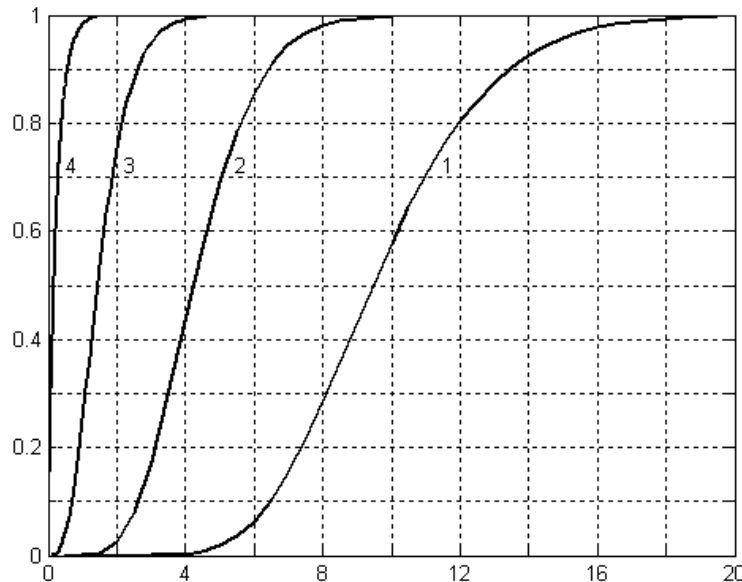


Рис. 2.4. Функции распределения собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и  $\lambda_4$  при  $M=N=4$  (кривые 1,2,3,4, соответственно)

Из сравнения рис. 2.4 с рис. 2.2 и рис. 2.3 видно, что разброс собственных чисел увеличивается по сравнению со случаем  $M=N=2$ . Например, отношение медианных значений собственных чисел к медианному значению минимального собственного числа составляет: 3.6 ( $M=4, N=2$ ); 8.9 ( $M=N=2$ ); 53.7, 24.5 и 8.3 ( $M=N=4$ ). Отметим также, что разброс собственных чисел является наибольшим при одинаковом числе передающих и приемных антенн.

Введем в рассмотрение норму матрицы  $\mathbf{H}$ , квадрат которой равен

$$\|\mathbf{H}\|^2 = Sp(\mathbf{H}\mathbf{H}^H) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |h_{ij}|^2, \quad (2.1.15)$$

где  $Sp(\cdot)$  – след матрицы.

Квадрат нормы матрицы  $\mathbf{H}$  можно выразить через собственные числа матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  или  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$  в виде  $\|\mathbf{H}\|^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_K$ .

В некогерентном релейском канале квадрат нормы матрицы  $\mathbf{H}$  подчиняется хи-квадрат-распределению с  $2MN$  степенями свободы вида

$$f_{\|\mathbf{H}\|^2}(x) = \frac{x^{MN-1}}{(MN-1)!} \cdot \exp(-x). \quad (2.1.16)$$

## 2.2. ММО-система без обратной связи

Найдем энтропию  $N$ -мерного вектора  $\mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ , компоненты которого являются случайными комплексными гауссовыми величинами с совместной плотностью вероятности  $p(\mathbf{X})$ . Будем считать, что средний вектор равен нулю ( $\langle \mathbf{X} \rangle = 0$ ), а корреляционная матрица его элементов  $\mathbf{R}_X = \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^H \rangle$ . Тогда многомерная гауссова функция плотности вероятности имеет вид [21]

$$p(\mathbf{X}) = \frac{1}{\det(\pi \mathbf{R}_X)} \exp(-\mathbf{X}^H \mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{X}), \quad (2.2.1)$$

Энтропия гауссова вектора равна [21]

$$H(\mathbf{X}) = \langle -\log_2 p(\mathbf{X}) \rangle = \left\langle \log_2 \frac{1}{p(\mathbf{X})} \right\rangle. \quad (2.2.2)$$

Подставляя (2.2.1) в (2.2.2), получим, что

$$\begin{aligned} H(\mathbf{X}) &= \langle \{ \log_2 [\det(\pi \mathbf{R}_X) \exp(\mathbf{X}^H \mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{X})] \} \rangle = \\ &= \log_2 [\det(\pi \mathbf{R}_X)] + (\log_2 e) \langle \mathbf{X}^H \mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{X} \rangle. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Квадратичную форму  $\mathbf{X}^H \mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{X}$  представим в виде  $\mathbf{X}^H \mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{X} = Sp(\mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{X}\mathbf{X}^H)$ . Тогда получим, что

$$\langle \mathbf{X}^H \mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{X} \rangle = \langle Sp(\mathbf{R}_X^{-1} \mathbf{X}\mathbf{X}^H) \rangle = Sp(\mathbf{R}_X^{-1} \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^H \rangle) = Sp(\mathbf{I}_N) = N. \quad (2.2.4)$$

Учтем, что  $N \log_2 e = \log_2 (e^N) = \log_2 \det(e\mathbf{I}_N)$ . Из (2.2.3) найдем, что

$$H(\mathbf{X}) = \log_2 [\det(\pi \mathbf{R}_X)] + \log_2 [\det(e\mathbf{I})] = \log_2 [\det(\pi \mathbf{R}_X) \det(e\mathbf{I}_N)]. \quad (2.2.5)$$

Для определителей произвольных матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  имеет место равенство  $\det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{B})$ . Тогда (2.2.5) упрощается и принимает вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \log_2 [\det(\pi e \mathbf{R}_X)]. \quad (2.2.6)$$

Теперь рассмотрим ММО-систему с  $M$  передающими и  $N$  приемными антеннами. На входе передающих антенн имеется  $M$ -мерный вектор  $\mathbf{D}=[d_1, d_2, \dots, d_M]^T$ , который называется вектором пространственного символа. Средняя мощность передаваемых сигналов  $d_i$  равна единице, поэтому их корреляционная матрица  $\mathbf{R}_D = \langle \mathbf{D}\mathbf{D}^H \rangle$  должна удовлетворять условию ограничения средней мощности, при котором  $Sp(\mathbf{R}_D) = M$ .

Если передатчику неизвестна информация о канале (передатчик не «знает» канальную матрицу  $\mathbf{H}$ ), то распределение мощности между  $M$  антеннами долж-

но быть равномерным. Тогда вектор  $\mathbf{X}$  сигналов на выходе приемных устройств будет равен

$$\mathbf{X} = \sqrt{P_0/M} \mathbf{H} \mathbf{D} + \mathbf{Z}, \quad (2.2.7)$$

где  $\mathbf{Z}$  –  $N$ -мерный вектор гауссовых шумов.

По определению СЭ  $C$  равна максимальному значению взаимной информации  $I(\mathbf{D}, \mathbf{X})$  между входными и выходными векторами по всем возможным вероятностям  $p(d_j)$  передаваемых символов, то есть

$$C = \arg \max_{p(d_j)} I(\mathbf{D}, \mathbf{X}). \quad (2.2.8)$$

Максимум СЭ достигается, если вероятности  $p(d_j)$  имеют гауссов вид [2,5].

Учтем далее, что взаимная информация равна  $I(\mathbf{D}, \mathbf{X}) = H(\mathbf{X}) - H(\mathbf{X}/\mathbf{D})$ , где  $H(\mathbf{X}/\mathbf{D})$  – энтропия вектора  $\mathbf{X}$  при условии переданного вектора  $\mathbf{D}$ .

Если на приемной стороне известна точная матрица  $\mathbf{H}$ , то неопределенность в выходном векторе  $\mathbf{X}$  будет обусловлена только наличием собственных шумов. Поэтому условная энтропия  $H(\mathbf{X}/\mathbf{D})$  равна энтропии гауссова шума  $H(\mathbf{Z})$ , то есть  $H(\mathbf{X}/\mathbf{D}) = H(\mathbf{Z})$  и для взаимной информации имеем  $I(\mathbf{D}, \mathbf{X}) = H(\mathbf{X}) - H(\mathbf{Z})$ . Это соотношение имеет ясный физический смысл: средняя взаимная информация о сообщении (вектор  $\mathbf{D}$ ), которую можно извлечь из выходного сигнала (вектор  $\mathbf{X}$ ), равна разности энтропий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Z}$ .

Собственные шумы приемных устройств имеют мощность  $\sigma_0^2$  и не коррелированы между собой, то есть их корреляционная матрица  $\mathbf{R}_Z = \langle \mathbf{Z} \mathbf{Z}^H \rangle = \sigma_0^2 \mathbf{I}_N$ . Тогда из (2.2.5) имеем, что

$$H(\mathbf{Z}) = \log_2 [\det(\pi e \sigma_0^2 \mathbf{I}_N)] = \log_2 (\pi e \sigma_0^2)^N. \quad (2.2.9)$$

Аналогично,  $H(\mathbf{X}) = \log_2 [\det(\pi e \mathbf{R}_X)]$ .

С помощью (2.2.7) найдем, что корреляционная матрица  $\mathbf{R}_X$  равна

$$\mathbf{R}_X = \langle (\sqrt{P_0/M} \mathbf{H} \mathbf{D} + \mathbf{Z})(\sqrt{P_0/M} \mathbf{H} \mathbf{D} + \mathbf{Z})^H \rangle = P_0/M \mathbf{H} \mathbf{R}_D \mathbf{H}^H + \sigma_0^2 \mathbf{I}_N. \quad (2.2.10)$$

Теперь получим, что СЭ ММО-системы

$$C = \log_2 [\det(\pi e \mathbf{R}_X)] - \log_2 [\det(\pi e \sigma_0^2 \mathbf{I}_N)] = \log_2 \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\rho_0}{M} \mathbf{H} \mathbf{R}_D \mathbf{H}^H \right) \right], \quad (2.2.11)$$

Учитывая статистическую независимость передаваемых символов  $d_1, d_2, \dots, d_M$ , имеем, что корреляционная матрица  $\mathbf{R}_D = \mathbf{I}_M$ . Поэтому для СЭ найдем, что

$$C = \log_2 \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\rho_0}{M} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right]. \quad (2.2.12)$$



Квадратную матрицу  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  размерности  $N \times N$  представим в виде разложения по собственным векторам:  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H$ , где  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K\}$  – диагональная матрица неотрицательных собственных чисел  $\lambda_i$  матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ ,  $(N \times K)$ -размерная матрица  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_K)$  состоит из собственных векторов матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ ,  $K$  – ранг матрицы  $\mathbf{H}$ . Тогда из (2.2.12) будем иметь

$$C = \log_2 \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\rho_0}{M} \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \right) \right] \quad (2.2.13)$$

Воспользуемся свойством определителей [23], из которого следует, что для прямоугольных матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  имеет место следующее равенство:  $\det(\mathbf{I}_m + \mathbf{A}_{mn}\mathbf{B}_{nm}) = \det(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}_{nm}\mathbf{A}_{mn})$ , где нижние индексы показывают размерность матриц. Полагая  $\mathbf{A} = \mathbf{U}$  и  $\mathbf{B} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H$  и учитывая, что матрица  $\mathbf{U}$  удовлетворяет условию  $\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{I}_N$ , получим, что

$$C = \log_2 \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\rho_0}{M} \mathbf{\Lambda} \right) \right], \quad \text{или} \quad C = \sum_{i=1}^K \log_2 \left( 1 + \frac{\rho_0}{M} \lambda_i \right) \quad (2.2.14)$$

Таким образом, СЭ ММО-системы определяется суммой СЭ отдельных подсистем при условии, что в каждую из них распределяется одинаковая мощность  $\rho_0/M$ , а коэффициент усиления пространственного канала для  $i$ -ой подсистемы равен собственному числу  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, K$ ).

**СЭ для отдельной реализации канала.** Рассмотрим случай, когда амплитуды всех коэффициентов  $h_{nm}$  (элементов матрицы  $\mathbf{H}$ ) равны единице, а фазы могут быть любыми. Пусть также число передающих и приемных антенн одинаково ( $M=N$ ). Тогда из (2.1.15) имеем, что  $Sp(\mathbf{H}\mathbf{H}^H) = M^2$  и матрица  $\mathbf{H}$  имеет полный ранг  $K=M$ . Чтобы СЭ была максимальной матрица  $\mathbf{H}$  должна быть ортогональной, для которой  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H = \mathbf{H}^H\mathbf{H} = M \mathbf{I}_N$ . Тогда СЭ равна  $C = M \cdot \log_2(1 + \rho_0)$ .

Таким образом, СЭ ММО-системы при ортогональной канальной матрице  $\mathbf{H}$  является максимальной и в  $M$  раз превышает СЭ системы с одной передающей и одной приемной антенной при одинаковой средней мощности.

**Средняя СЭ.** В общем случае СЭ ММО-системы представляет собой случайную величину и ее полной характеристикой является плотность вероятности или интегральная функция распределения. Однако часто ограничиваются средней СЭ или находят такое значение СЭ, которое будет обеспечиваться с заданной вероятностью.

В наиболее интересном случае некоррелированного релейского канала и одинакового числа передающих и приемных антенн ( $M=N$ ) для  $pq$ -го элемента матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  будем иметь при  $M \rightarrow \infty$ , что

$$(\mathbf{H}\mathbf{H}^H)_{pq} = \sum_{l=1}^M h_{pl} h_{ql}^* \rightarrow M \delta_{pq} \quad (2.2.15)$$

Отсюда следует, что при увеличении числа антенн ( $M \rightarrow \infty$ ) матрица  $\mathbf{H}$  стремится к ортогональной матрице:  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H \rightarrow M \mathbf{I}_N$ .

Теперь, подставляя (2.2.15) в (2.2.12), получим, что при увеличении числа антенн (при  $M=N \rightarrow \infty$ ) СЭ стремится к неслучайной величине

$$C \rightarrow M \cdot \log_2(1 + \rho_0). \quad (2.2.16)$$

Функция распределения СЭ в релейском канале показана на рис. 2.5 для разного числа антенн при ОСШ  $\rho_0=10$ . На рис. 2.6 приведена средняя СЭ в зависимости от среднего ОСШ  $\rho_0$  для разного числа антенн. В табл. 2.1 приведена средняя ( $\langle C \rangle$ ) СЭ ММО-системы с разным числом антенн при ОСШ  $\rho_0=10$  для релейского некоррелированного канала.

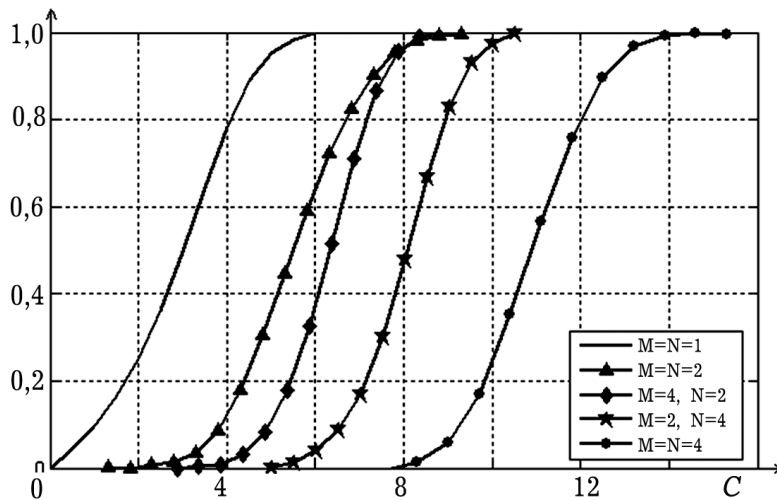


Рис. 2.5. Функция распределения СЭ в релейском канале,  $\rho_0=10$

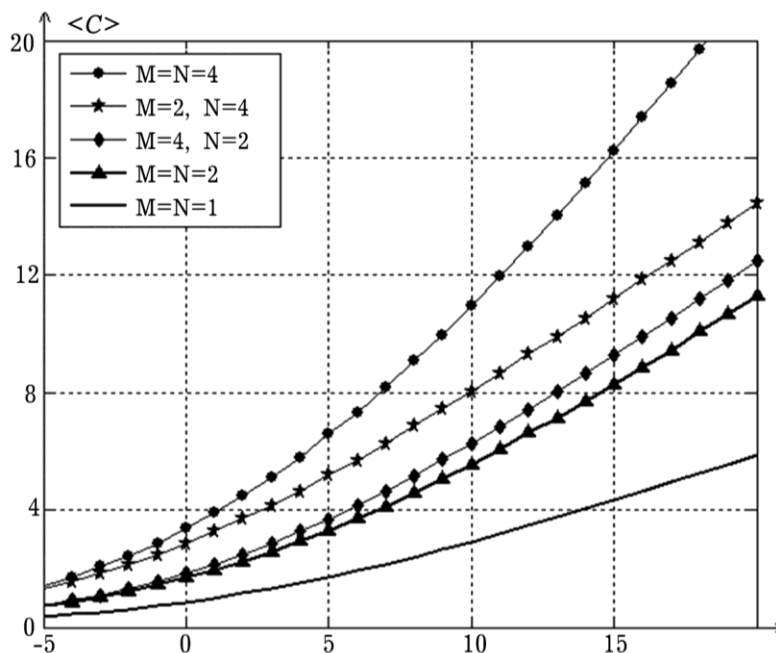


Рис. 2.6. Средняя СЭ ММО-системы без обратной связи в зависимости от ОСШ при разном числе передающих и приемных антенн

Таблица 2.1

$N/M$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2.90	3.18	3.27	3.32	3.34	3.35	3.37	3.39
2	4.05	5.55	6.05	6.27	6.40	6.50	6.55	6.60
3	4.72	7.02	8.24	8.82	9.18	9.39	9.55	9.66
4	5.19	8.03	9.84	10.93	11.61	12.01	12.30	12.50
5	5.53	8.79	11.09	12.64	13.65	14.32	14.82	15.17
6	5.82	9.42	12.08	13.99	15.40	16.36	17.10	17.60
7	6.05	9.92	12.85	15.12	16.83	18.11	19.12	19.81
8	6.25	10.34	13.53	16.06	18.07	19.64	20.85	21.80

Из приведенных данных следует, что если зафиксировать число антенн в ММО-системе, то средняя СЭ будет наибольшей при одинаковом числе передающих и приемных антенн ( $M=N$ ). СЭ уменьшается при неравном числе антенн. При этом система с большим числом передающих антенн ( $M>N$ ) имеет меньшую СЭ по сравнению с системой с обратным числом антенн ( $M<N$ ).

### 2.3. ММО-система с обратной связью

Предположим теперь, что передатчик в ММО-системе обладает канальной информацией, то есть «знает» канальную матрицу  $\mathbf{H}$ . Это означает, что матрица  $\mathbf{H}$  оценивается на приемной части системы, и затем информация о ней сообщается передатчику. Очевидно, что в такой системе должна быть обратная связь от приемника к передатчику.

СЭ ММО-системы с обратной связью также определяется суммой СЭ отдельных SISO-подсистем, число  $K$  которых равно рангу матрицы  $\mathbf{H}$ . Однако теперь возможно неравномерное распределение мощности между этими подсистемами, поэтому выражение (2.2.14) принимает следующий вид:

$$C = \sum_{i=1}^K \log_2(1 + \rho_i \lambda_i). \quad (2.3.1)$$

Таким образом, СЭ зависит от способа распределения полной мощности  $P_0$  между собственными подканалами. Максимальное значение СЭ достигается при «водоналивном» (water pouring, или water filling) правиле распределения мощности. Мощность в  $i$ -м подканале равна

$$p_i = k^{(0)} - \sigma_0^2 / \lambda_i, \quad (2.3.2)$$

где  $k^{(0)}$  находится из условия ограничения мощности  $p_1 + p_2 + \dots + p_K = P_0$ .

Величину  $k^{(0)} - \sigma_0^2 / \lambda_i$  в (2.3.2) можно интерпретировать как глубину воды до дна чаши, соответствующую  $i$ -му собственному подканалу, которая является разной для разных подканалов. Если в эту чашу налить определенное количество воды, эквивалентное мощности  $P_0$ , то вода (то есть мощность) распределится

по чаше так, чтобы достигнуть максимума СЭ. Чем глубже дно (больше коэффициент передачи  $\lambda_i$   $i$ -го собственного подканала), тем большая доля мощности распределяется в этот канал. Более того, если для некоторых подканалов дно окажется выше уровня воды, то есть  $\sigma_0^2/\lambda_i > k^{(0)}$  ( $i>m$ ), то в эти подканалы мощность не распределяется ( $p_i=0$ ) и они не используются для передачи данных. «Водоналивное» распределение мощности между собственными подканалами ММО-системы поясняется рис. 2.7.

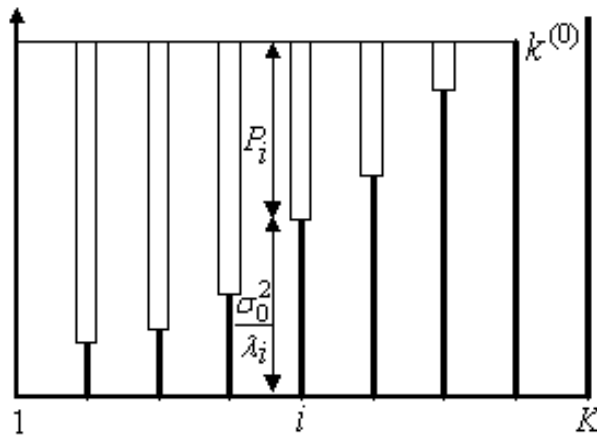


Рис. 2.7. «Водоналивное» распределение мощности между собственными подканалами ММО-системы

СЭ ММО-системы является случайной величиной, так как собственные числа  $\lambda_i$  в условиях флуктуирующего канала являются случайными. В табл. 2.2 приведена средняя СЭ ММО-системы с разным числом антенн при ОСШ  $\rho_0=10$  дБ [11] для релейского некоррелированного канала. Заметим, что СЭ является симметричной функцией от  $M$  и  $N$ . На рис. 2.8 приведена средняя СЭ в зависимости от среднего ОСШ  $\rho_0$  при оптимальном распределении мощности по собственным подканалам для разного числа антенн.

Таблица 2.2

$N/M$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2.9	4.1	4.7	5.2	5.5	5.8	5.8	6.2
2	4.1	5.7	7.0	8.1	8.8	9.4	9.9	10.3
3	4.7	7.0	8.6	10.0	11.1	12.1	12.9	13.5
4	5.2	8.1	10.0	11.5	12.9	14.1	15.1	16.1
5	5.5	8.8	11.1	12.9	14.4	15.8	17.0	18.2
6	5.8	9.4	12.1	14.1	15.8	17.3	18.7	19.9
7	5.8	9.9	12.9	15.1	17.0	18.7	20.2	21.6
8	6.2	10.3	13.5	16.1	18.2	19.9	21.6	23.1

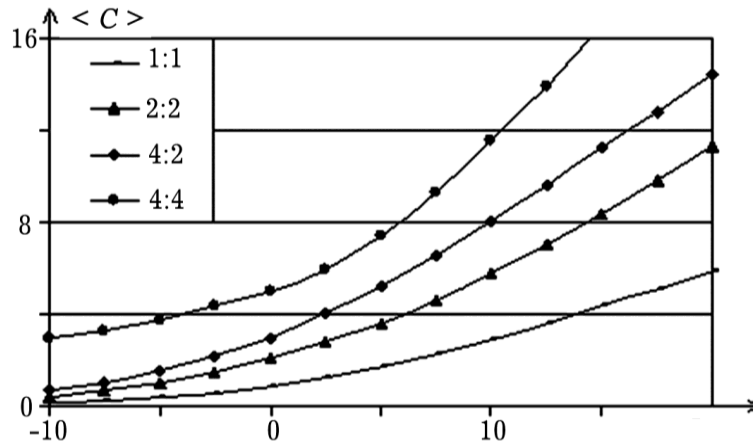


Рис. 2.8. Средняя СЭ системы с обратной связью в зависимости от ОСШ при разном числе антенн

Из приведенных данных следует, что средняя СЭ ММО-системы с одинаковым числом передающих и приемных антенн ( $M=N$ ) увеличивается практически пропорционально числу антенн. Увеличение числа только передающих (или приемных) антенн приводит к меньшему увеличению СЭ, поскольку при этом существует только один собственный подканал и параллельная передача информации становится невозможной.

**Приближенные способы вычисления СЭ.** Найти аналитическое выражение для средней СЭ ММО-системы в условиях релеевого канала не представляется возможным. Известна нижняя граница средней СЭ, равная [5]

$$\langle C \rangle \geq K \log_2 \left[ 1 + \frac{\rho_0}{M} \exp \left( \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \sum_{p=1}^{K_1-j} \frac{1}{p} - \gamma \right) \right], \quad (2.3.3)$$

где  $K = \min\{M, N\}$ ,  $K_1 = \max\{M, N\}$ ,  $\gamma = 0.5772$  – постоянная Эйлера.

Нижняя граница является более плотной в случае одинакового числа антенн ( $M=N$ ), когда (2.3.3) принимает вид

$$\langle C \rangle \geq M \log_2 \left[ 1 + \frac{\rho_0}{M} \exp \left( \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sum_{p=1}^{M-j} \frac{1}{p} - \gamma \right) \right]. \quad (2.3.4)$$

Формула (2.3.4) значительно упрощается при двух передающих и двух приемных антеннах. Имеем, что

$$\langle C \rangle \geq 2 \log_2 [1 + 0.5 \rho_0 \exp(0.5 - \gamma)]. \quad (2.3.5)$$

На рис. 2.9 показана средняя СЭ в зависимости от ОСШ  $\rho_0$  для одинакового числа передающих и приемных антенн, полученная по точной формуле (2.3.1), а также ее нижняя граница (2.3.4). Видно, что нижняя граница становится достаточно плотной при больших ОСШ  $\rho_0$ .

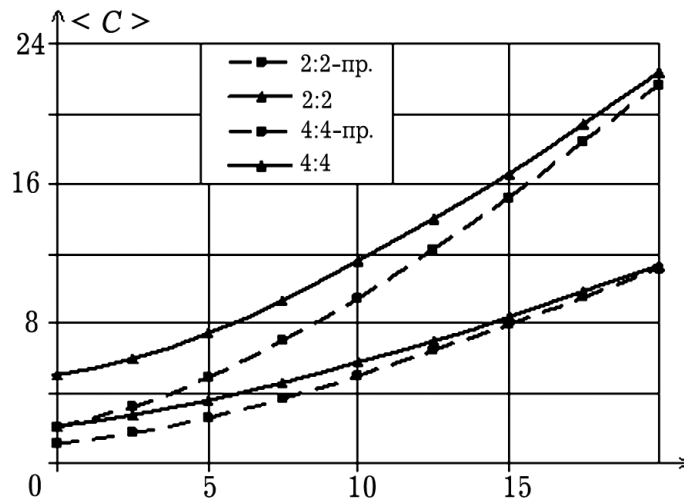


Рис. 2.9. Средняя СЭ в зависимости от ОСШ при  $M=N=2$  и  $M=N=4$ , полученная по точной формуле, и ее нижняя граница

При различном числе передающих и приемных антенн удобнее пользоваться другим способом приближенного вычисления средней СЭ. В случае достаточно больших  $M$  и  $N$  собственные числа ограничены неравенством [8]

$$\left(\sqrt{K_1} - \sqrt{K}\right)^2 < \lambda_i < \left(\sqrt{K_1} + \sqrt{K}\right)^2. \quad (2.3.6)$$

Отсюда следует, что если  $\max\{M, N\} \gg \min\{M, N\}$ , то все собственные числа группируются около числа  $K_1$ . Поэтому для оценок СЭ можно получить приближенную формулу вида

$$\langle C(\rho_0) \rangle \approx K \log_2 \left( 1 + \rho_0 \frac{K_1}{K} \right). \quad (2.3.7)$$

Приближенная формула (2.3.7) дает хорошее совпадение с точными данными даже при небольшом различии между  $M$  и  $N$ . Это видно из рис. 2.10, на котором показана средняя СЭ в зависимости от ОСШ  $\rho_0$  для  $M=4$  и  $M=8$  при  $N=2$ , полученная по точной (2.3.1) и приближенной (2.3.7) формулам.

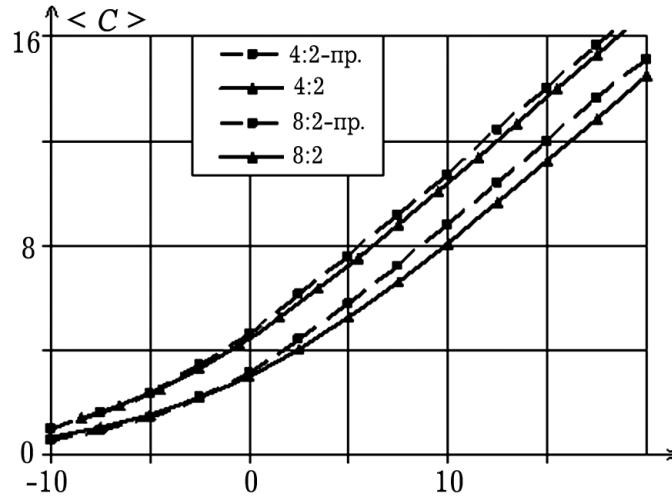


Рис. 2.10. Средняя СЭ в зависимости от ОСШ при  $M=4$  и  $M=8, N=2$ , полученная с помощью точной и приближенной формул

Сравним СЭ ММО-системы с адаптивной (передатчик «знает» канал) и неадаптивной (передатчик «не знает» канал) передачей в условиях некоррелированных релейских замираний сигналов. Если информация о канале отсутствует на передающей стороне, то мощность передатчика равномерно делится между  $M$  передающими антеннами. Тогда СЭ  $C_1$  будет определяться формулой (2.2.14), в которой нужно считать  $K=M$ .

Рассмотрим два случая. В первом из них передающих антенн не больше, чем приемных ( $M \leq N$ ), то есть число собственных подканалов равно  $M$ . Тогда СЭ  $C_2$  дается выражением (2.3.1), в котором нужно считать  $K=M$ . Сравнивая (2.3.1) и (2.2.14), можно сделать вывод о том, что уменьшение СЭ из-за неадаптивной передачи обусловлено заменой оптимального распределения мощности равномерным. Из «водоналивного» алгоритма следует, что с увеличением средней мощности оптимальное распределение приближается к равномерному. Поэтому при достаточно большой мощности  $C_1 \approx C_2$ .

Если передающих антенн больше, чем приемных ( $M > N$ ), то число собственных подканалов равно  $N$ . Обозначим  $\Delta C$  увеличение СЭ за счет адаптивной передачи. С помощью (2.2.14) при  $K=M$  и (2.3.1) при  $K=N$  и достаточно большой мощности (когда распределение мощности между собственными подканалами можно считать равномерным) получим, что

$$\Delta C = C_2 - C_1 \approx \sum_{i=1}^N \left[ \log_2 \left( 1 + \frac{\rho_0}{N} \lambda_i \right) - \log_2 \left( 1 + \frac{\rho_0}{M} \lambda_i \right) \right]. \quad (2.3.8)$$

При больших ОСШ  $\rho_0$  из (2.3.8) будем иметь

$$\Delta C \approx N \log_2 \left( \frac{M}{N} \right). \quad (2.3.9)$$

Отсюда следует, что при  $M > N$  знание канала передатчиком увеличивает СЭ тем больше, чем больше используется передающих антенн при одинаковом числе приемных антенн. Это объясняется тем, что равномерное деление мощности между большим числом  $M$  антенн в системе с не знающим канал передатчиком является менее эффективным для СЭ, чем оптимальное распределение мощности между меньшим числом  $N$  собственных подканалов.

Полученные результаты (2.3.8) и (2.3.9) для разных соотношений между числом передающих и приемных антенн можно представить одной формулой. В результате получим, что увеличение СЭ ММО-системы за счет знания канала передатчиком при ОСШ  $\rho_0 \gg 1$  равно

$$\Delta C \approx \min\{M, N\} \cdot \log_2 \left( \frac{M}{\min\{M, N\}} \right). \quad (2.3.10)$$

На рис. 2.11 показаны средние СЭ  $\langle C_1 \rangle$  и  $\langle C_2 \rangle$  ММО-системы в зависимости от ОСШ  $\rho_0$  в релейском канале при меньшем числе передающих антенн. Видно, что СЭ практически одинаковы. Аналогичные кривые при большем числе передающих антенн показаны на рис. 2.12. Видно, что знание канала передатчиком значительно увеличивает СЭ.

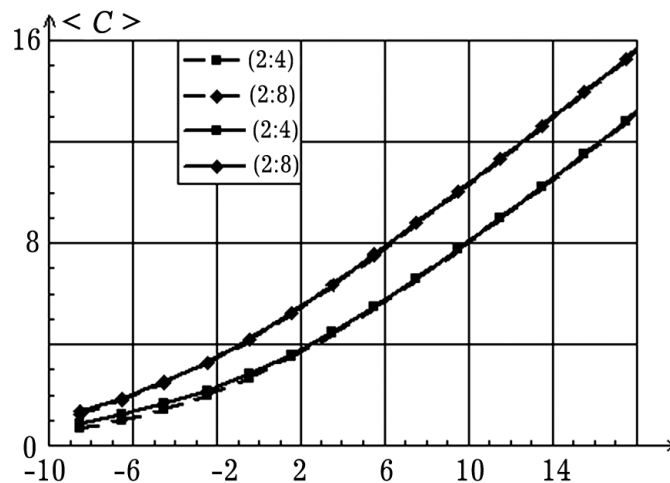


Рис. 2.11. Средние СЭ  $\langle C_2 \rangle$  и  $\langle C_1 \rangle$  в зависимости от ОСШ при  $M < N$  (сплошные и пунктирные кривые, соответственно)



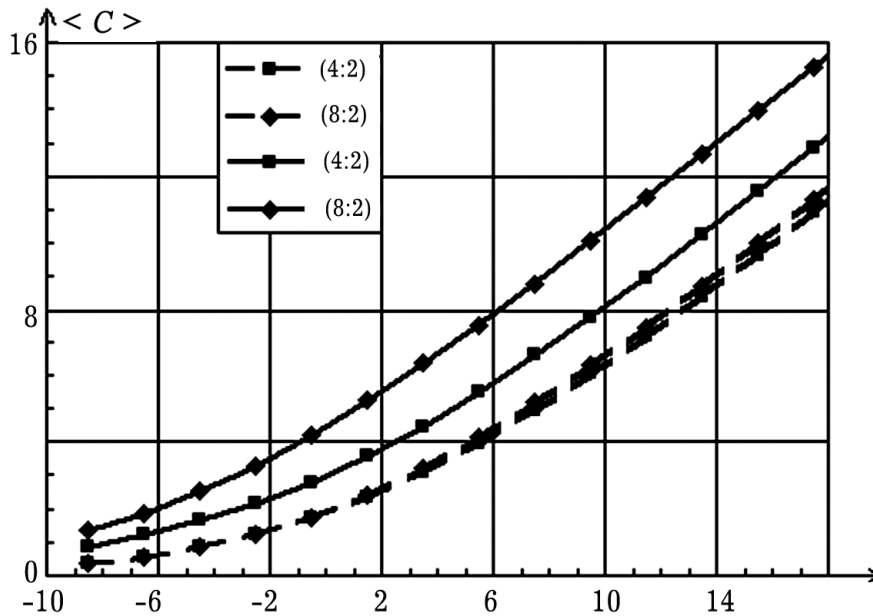


Рис. 2.12. Средние СЭ  $\langle C_2 \rangle$  и  $\langle C_1 \rangle$  в зависимости от ОСШ при  $M < N$  (сплошные и пунктирные кривые, соответственно)

#### 2.4. Влияние корреляционных свойств пространственного канала

Изучая свойства пространственного канала, мы видели, что коэффициент корреляции замираний сигналов в двух разнесенных на расстояние  $d$  антеннах зависит от угловой дисперсии в канале или, другими словами, от угловой ширины источника сигналов. При этом для источников с большей угловой дисперсией коэффициент корреляции уменьшается с расстоянием между антеннами в большей степени.

В городских условиях антенны пользователя обычно находятся вблизи земной поверхности, то есть среди рассеивателей, которые окружают эти антенны со всех сторон. Поэтому сигналы БС принимаются антеннами пользователя со всех направлений, то есть БС представляется протяженным источником с угловым размером  $\Delta_1 = 2\pi$ . В то же время антенны БС, как правило, располагаются достаточно высоко над окружающими зданиями. Следовательно, они принимают сигналы пользователя в некоторой угловой области шириной  $\Delta_2 \ll 2\pi$ . Это означает, что пространственный радиус корреляции сигналов для антенн пользователя меньше, чем для антенн БС.

Рассмотрим, как влияют корреляционные свойства пространственного канала на СЭ ММО-системы [10,15]. Пусть, например, отражатели сосредоточены только вокруг приемной АР. Тогда коэффициенты передачи  $h_{mn}$  будут не коррелированными для приемных антенн и коррелированными – для передающих. Если отражатели расположены возле обеих АР, то все коэффициенты передачи  $h_{mn}$  могут быть не коррелированными для элементов как передающей, так и приемной АР. Возможны и другие ситуации.

Рассмотрим четыре случая, отличающихся разными статистическими свойствами пространственного канала.

1. Пусть рассеиватели отсутствуют, то есть сигналы принимаются на фоне собственных шумов приемных устройств (статический канал без замираний сигналов или гауссов шумовой канал), а коэффициенты передачи  $h_{mn}$  являются неслучайными величинами.

Рассмотрим передающую и приемную АР с произвольно расположенными антеннами. Будем считать, что АР находятся на достаточно большом расстоянии друг относительно друга (в дальней зоне). Обозначим через  $\Phi_{tr}$  весовой вектор передающей АР, который формирует плоскую волну в направлении на приемную АР. Для этого вектора можно записать выражение вида

$$\Phi_{tr} = [\exp(j\psi_1), \exp(j\psi_2), \dots, \exp(j\psi_M)]^T. \quad (2.4.1)$$

Весовой вектор ( $\Phi_{rec}$ ) приемной АР, обеспечивающий согласованный прием этой плоской волны равен

$$\Phi_{rec} = [\exp(j\varphi_1), \exp(j\varphi_2), \dots, \exp(j\varphi_N)]^T. \quad (2.4.2)$$

Тогда для коэффициента передачи  $h_{mn}$  между  $m$ -ой передающей и  $n$ -ой приемной антеннами будем иметь

$$h_{mn} = \exp[j(\varphi_n + \psi_m)]. \quad (2.4.3)$$

При этом матрицу канальных коэффициентов можно записать через векторы плоских волн в виде  $\mathbf{H} = \Phi_{rec} \Phi_{tr}^H$ , то есть матрица  $\mathbf{H}$  определяется произведением вектора-столбца на вектор-строку. Такая матрица называется диадной и имеет ранг, равный единице. Следовательно, на ее основе может быть сформирован только один собственный подканал с нормированными весовыми векторами приемной и передающей АР, соответственно равными

$$\mathbf{U}_1 = N^{-0.5} \Phi_{rec}; \quad \mathbf{V}_1 = M^{-0.5} \Phi_{tr}. \quad (2.4.4)$$

Весовой вектор  $\mathbf{U}_1$  формирует плоскую волну в направлении на передающую АР, обеспечивая тем самым согласованный прием сигналов. Аналогично, весовой вектор  $\mathbf{V}_1$  формирует плоскую волну в направлении на приемную АР, то есть дает согласованную передачу сигналов.

Чтобы найти СЭ ММО-системы необходимо в соответствии с (2.3.1) вычислить собственные числа матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ . Имеем, что матрица  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H = \Phi_{rec} (\Phi_{tr}^H \Phi_{tr}) \Phi_{rec}^H = M \Phi_{rec} \Phi_{rec}^H$ , то есть является матрицей с единичным рангом. Нетрудно получить, что единственное отличное от нуля собственное число  $\lambda_1 = MN$ . Тогда СЭ ММО-системы будет равна

$$C(\rho_0) = \log_2(1 + \rho_0 MN). \quad (2.4.5)$$

Отметим, что когда рассеиватели отсутствуют, можно использовать понятия диаграммы направленности и коэффициента направленного действия АР. В (2.4.5)  $M$  и  $N$  имеют смысл максимальных коэффициентов направленного действия передающей и приемной АР, соответственно, а величина  $\rho_0 MN$  представляет собой ОСШ на выходе единственного собственного подканала. Весовой вектор  $\mathbf{V}_1$  в (2.4.5) обеспечивает формирование максимума диаграммы направленности передающей АР в направлении на приемную АР. Аналогично, весовой вектор  $\mathbf{U}_1$  в (2.4.5) формирует максимум диаграммы направленности приемной АР в направлении на передающую АР.

2. Предположим, что отражатели сосредоточены только вокруг приемной АР. Тогда можно считать, что коэффициенты передачи  $h_{mn}$  являются коррелированными для разных передающих антенн и некоррелированными для разных приемных антенн. Учтем, что номер столбца матрицы  $\mathbf{H}$  соответствуют номеру передающей антенны, а номер строки – номеру приемной антенны. Это означает, что элементы матрицы  $\mathbf{H}$  коррелированы по строке и не коррелированы по столбцу. Если первый столбец обозначить через вектор  $\mathbf{H}_1$ , то  $m$ -ый столбец (вектор  $\mathbf{H}_m$ ) можно выразить как  $\mathbf{H}_m = \exp(j\psi_m)\mathbf{H}_1$ . Следовательно, матрицу  $\mathbf{H}$  можно записать в виде

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \Phi_{tr}^H. \quad (2.4.6)$$

Имеем, что матрица  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H = \mathbf{H}_1(\Phi_{tr}^H \Phi_{tr})\mathbf{H}_1^H = M\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1^H$ , то есть является матрицей с единичным рангом. Нетрудно получить, что единственное отличное от нуля собственное число равно

$$\lambda_1 = M(|h_{11}|^2 + |h_{21}|^2 + \dots + |h_{N1}|^2). \quad (2.4.7)$$

Следовательно, можно сформировать только один собственный подканал с весовыми векторами приемной и передающей АР, соответственно равными

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{H}_1^H \mathbf{H}_1}} \mathbf{H}_1; \quad \mathbf{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{M}} \Phi_{tr}. \quad (2.4.8)$$

Весовой вектор  $\mathbf{U}_1$  обеспечивает согласованный с пространственным каналом прием многолучевого сигнала, а весовой вектор  $\mathbf{V}_1$  формирует плоскую волну в направлении на приемную АР, то есть дает согласованную передачу сигналов. Можно отметить, что весовой вектор  $\mathbf{V}_1$  в (2.4.8) обеспечивают формирование максимума диаграммы направленности передающей АР в направлении на приемную АР.

При этом СЭ является случайной и с учетом (2.3.1) и (2.4.7) равна

$$C(\rho_0) = \log_2 \left( 1 + \rho_0 M \sum_{n=1}^N |h_{n1}|^2 \right). \quad (2.4.9)$$

3. Пусть рассеиватели сосредоточены вокруг передающих антенн. Нетрудно видеть, что этот случай является аналогичным предыдущему. Для нахождения СЭ необходимо заменить в (2.4.9) число передающих антенн числом приемных антенн и наоборот. В результате получим, что

$$C(\rho_0) = \log_2 \left( 1 + \rho_0 N \sum_{m=1}^M |h_{1m}|^2 \right). \quad (2.4.10)$$

Три рассмотренных случая имеют разные статистические свойства канала связи. Однако их общим свойством является то, что возможно формирование только одного пространственного подканала. На рис. 2.13 показана средняя СЭ в зависимости от ОСШ для этих трех типов каналов при 4 передающих и 2 приемных антеннах ( $M=4; N=2$ ). Видно, что наибольшая СЭ достигается в первом случае, когда рассеиватели отсутствуют, то есть сигналы принимаются на фоне собственных шумов приемных устройств, а наименьшая – во втором случае, когда отражатели сосредоточены только вокруг приемной АР. Однако следует отметить, что во всех этих случаях СЭ отличаются друга от друга незначительно, что объясняется возможностью формирования только одного подканала.

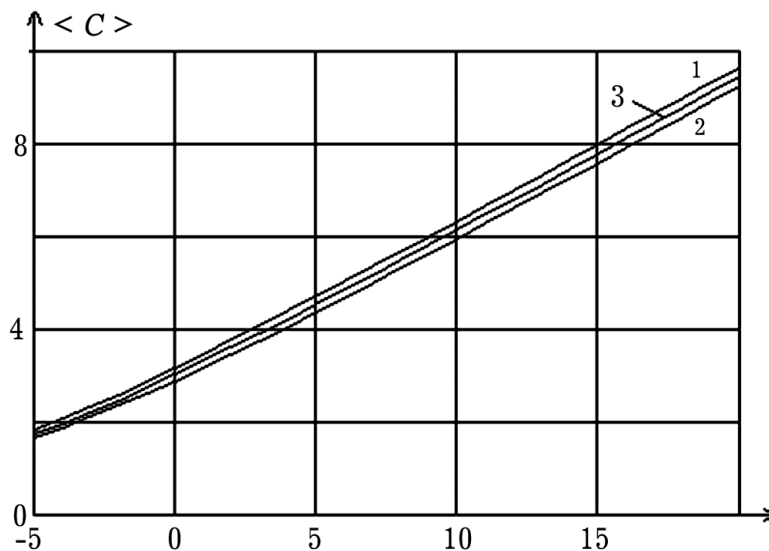


Рис. 2.13. Средняя СЭ в зависимости от ОСШ для трех моделей каналов (кривые 1, 2, 3 соответственно);  $M=4, N=2$

4. Рассмотрим случай, когда отражатели располагаются во всем пространстве между БС и пользователем и коэффициенты передачи  $h_{mn}$  являются независимыми величинами. При этом вероятность появления линейно зависимых строк или столбцов в матрице  $\mathbf{H}$  становится пренебрежимо малой. Поэтому матрица  $\mathbf{H}$  будет иметь ранг, равный минимальному числу элементов АР ( $K = \min\{M, N\}$ ), для передачи информации можно использовать  $K$  параллельных собственных подканалов.

На рис. 2.14 показана зависимость средней СЭ ММО-системы с обратной связью с четырьмя передающими и двумя приемными антеннами ( $M=4; N=2$ ) в

релеевском и гауссовом каналах. Видно, что СЭ в релеевском канале может быть даже больше, чем в гауссовом канале без замираний сигналов.

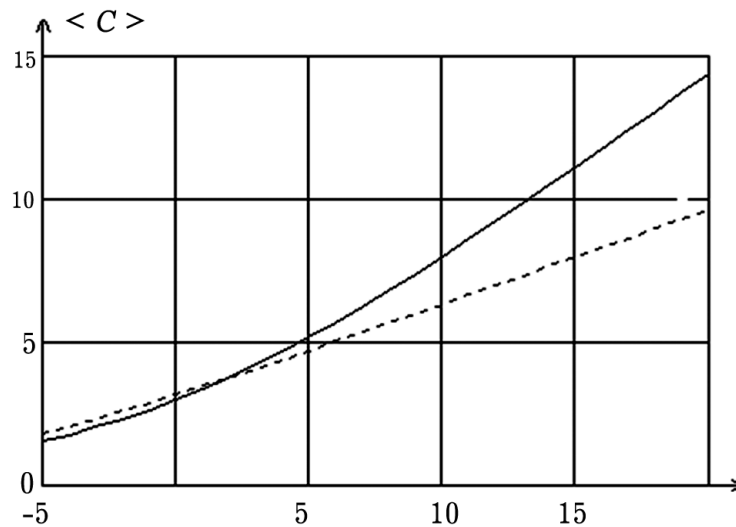


Рис. 2.14. Средняя СЭ в зависимости от ОСШ в релеевском (сплошная кривая) и гауссовом (пунктирная кривая) каналах,  $M=4$ ;  $N=2$

Этот неожиданный факт можно объяснить тем, что при малых ОСШ ( $\leq 3$  дБ) в условиях релеевских замираний формируется только один собственный подканал. При больших ОСШ ( $\geq 3$  дБ) формируются два собственных подканала. В то же время ранее показано, что в шумовом канале без замираний можно сформировать только один собственный подканал. Хотя его усиление будет больше, однако скорость передачи информации оказывается меньше, чем скорость передачи по двум параллельным каналам с меньшими усилениями.

## ГЛАВА 3. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ КОДИРОВАНИЕ И ДЕКОДИРОВАНИЕ В МІМО-СИСТЕМАХ

Использование МІМО-систем и соответствующих методов пространственной обработки (кодирования и декодирования) сигналов в передающей и приемной АР дает возможность эффективно бороться с замираниями сигналов и значительно увеличить скорость передачи данных. Такие системы разделяются на два основных вида: без обратной связи (передатчик «не знает» канал) и с обратной связью (передатчик «знает» канал).

В настоящей главе изучаются методы обработки сигналов в МІМО-системах. Для систем без обратной связи рассматриваются максимально правдоподобная оценка переданных данных, обращение канальной матрицы и оценка по минимуму СКО. Подробно анализируются особенности формирования независимых собственных подканалов и вероятность битовой ошибки в МІМО-системах с обратной связью. Рассматривается ортогональное блочное пространственно-временное кодирование информации.

### 3.1. МІМО-системы без обратной связи

Рассмотрим показанную на рис. 3.1 схему пространственно-временного кодирования в системах, использующих несколько ( $M$ ) передающих антенн.

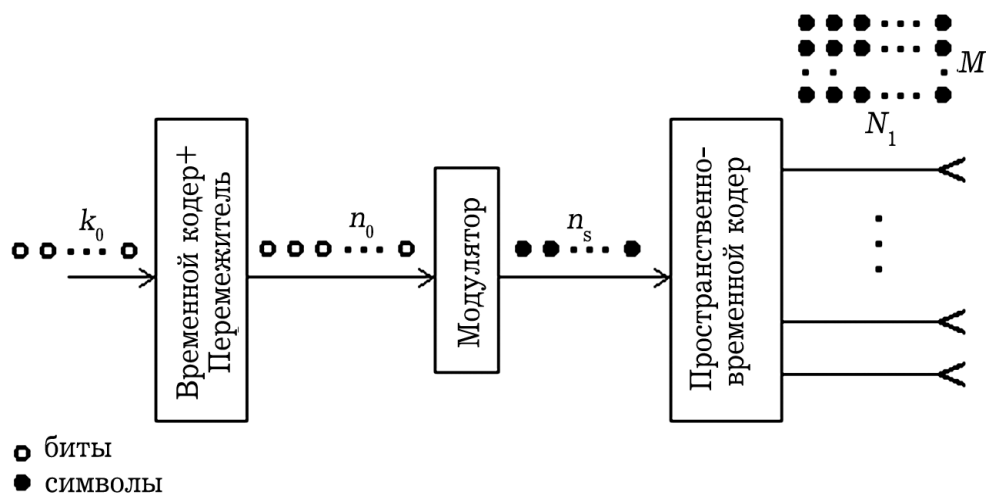


Рис. 3.1. Схема пространственно-временного кодирования

Входные информационные биты (блок из  $k_0$  бит) кодируются в помехоустойчивом кодере (временное кодирование). В результате получается большее число  $n_0$  ( $n_0 > k_0$ ) кодированных бит, которые перемешиваются в перемежителе (который часто называют *интерливером*) и затем отображаются в модуляторе в  $n_s = n_0 / k_b$  символов ( $k_b$  – уровень модуляции или битовая загрузка символа). Полученные символы поступают на вход пространственно-временного кодера, в котором также добавляется некоторое количество избыточных символов. В результате на выходе имеется  $MN_1$  символов ( $MN_1 > n_s$ ). Для увеличения скорости

передачи данных эти символы разделяются на  $M$  параллельных потоков из  $N_1$  символов каждый. Эти  $MN_1$  символов называются кодовым словом.

Длительность блока на выходе модулятора равна  $n_s T_s$ , где  $T_s$  – длительность импульса, а длительность кодового слова после кодирования составляет  $N_1 T_s$ . Следовательно, скорость  $R_{s-t}$  кодирования  $R_{s-t} = n_s / N_1$ .

Рассмотрим ММО-систему с  $M$  передающими и  $N$  приемными антеннами. Пусть  $\tilde{\mathbf{D}} = [\mathbf{D}(1), \mathbf{D}(2), \dots, \mathbf{D}(N_1)]$  –  $(M \times N_1)$ -размерная матрица сигналов на выходе пространственно-временного кодера (матрица пространственно-временного кодового слова), в которой  $i$ -ый столбец  $\mathbf{D}(i)$  – вектор сигналов, передаваемых в  $i$ -ый момент времени ( $i=1, 2, \dots, N_1$ ). Обозначим  $\tilde{\mathbf{X}} = [\mathbf{X}(1), \mathbf{X}(2), \dots, \mathbf{X}(N_1)]$  и  $\tilde{\mathbf{Z}} = [\mathbf{Z}(1), \mathbf{Z}(2), \dots, \mathbf{Z}(N_1)]$  –  $(N \times N_1)$ -размерные матрицы принятых сигналов и собственного шума,  $i$ -ый столбец которых состоит из  $N$ -мерных векторов сигналов и собственных шумов, принятых в  $i$ -ый момент времени. Строки в матрицах  $\tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Z}}$  соответствуют передающим антеннам.

В ММО-системе без обратной связи передатчик не имеет информации о пространственном канале. Пространственно-временной кодер становится пространственным, так как временное кодирование в нем отсутствует. Входной и выходной блоки кодера на рис. 3.1 состоят из  $M$  импульсов каждый. Однако длительность первого из них составляет  $MT_s$  (так как  $n_s = M$ ), а второго –  $T_s$  (так как  $N_1 = 1$  за счет параллельной передачи из  $M$  антенн). Следовательно, скорость кодера является максимальной и равной  $R_{s-t} = M$ .

Матрица  $\tilde{\mathbf{D}} = [\mathbf{D}(1), \mathbf{D}(2), \dots, \mathbf{D}(N_1)]$  пространственного кодового слова, а также матрицы  $\tilde{\mathbf{X}} = [\mathbf{X}(1), \mathbf{X}(2), \dots, \mathbf{X}(N_1)]$  и  $\tilde{\mathbf{Z}} = [\mathbf{Z}(1), \mathbf{Z}(2), \dots, \mathbf{Z}(N_1)]$  принятых сигналов и собственного шума переходят в векторы-столбцы.

Основная сложность при построении приемника в ММО-системе без обратной связи заключается в том, что в каждую приемную антенну поступает смесь всех символов  $d_1, d_2, \dots, d_M$ . В самом деле, сигнал в  $p$ -ой антенне будет равен

$$x_p = \sqrt{\frac{P_0}{M}} \sum_{q=1}^M h_{pq} d_q + z_p. \quad (3.1.1)$$

Поэтому необходимо применять специальные методы пространственной обработки (разделения) сигналов перед их демодуляцией и детектированием.

Основными методами обработки сигналов и соответствующими им приемниками в ММО-системах без обратной связи являются:

- максимально правдоподобный (МП) метод оценки переданных символов – нелинейный МП-приемник;
- метод обращения канальной матрицы  $\mathbf{H}$ , который принято называть Zero Forcing (ZF) метод – линейный ZF-приемник;
- метод оценки по минимуму среднеквадратической ошибки (МСКО) – линейный МСКО-приемник.

Схема ММО-системы с  $M$  передающими и  $N$  приемными антеннами, показана на рис. 3.2. Входные символы разделяются на  $M$  параллельных потоков (подканалов) и передаются через разные антенны, то есть обеспечивается одновременная передача  $M$  символов  $d_1, d_2, \dots, d_M$ . Так как на передающей стороне отсутствует информация о матрице  $\mathbf{H}$  коэффициентов передачи (передатчик «не знает» матрицу  $\mathbf{H}$ ), то распределение полной мощности  $P_0$  между антеннами должно быть равномерным, то есть в каждый подканал распределяется мощность  $P_0/M$ .

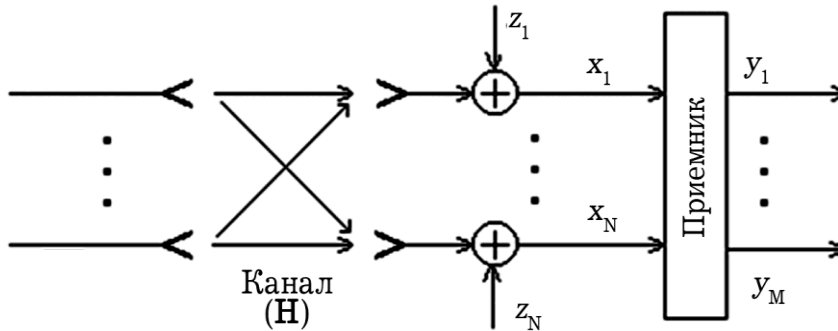


Рис. 3.2. ММО-система с параллельной передачей данных

### 3.1.1. Нелинейный МП-приемник

Рассмотрим МП-оценку пространственного символа  $\mathbf{D}=(d_1, d_2, \dots, d_M)^T$  в ММО-системе, то есть систему с МП-приемником. Совместная плотность вероятности  $p(\mathbf{Z})$   $N$ -мерного комплексного вектора  $\mathbf{Z}$  шумов при произвольной корреляционной матрице  $\mathbf{R}_Z=\langle\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H\rangle$  имеет вид (2.2.1). Подставим вектор  $\mathbf{Z}$  выходных собственных шумов из (2.2.7) в (2.2.1) и учтем, что в случае некоррелированных шумов корреляционная матрица  $\mathbf{R}_Z = \sigma_0^2 \mathbf{I}_N$ . Тогда плотность вероятности входного процесса  $\mathbf{X}$  при условии, что был передан пространственный символ  $\mathbf{D}$ , имеет вид:

$$p(\mathbf{X}/\mathbf{D}) = \frac{1}{\pi^N \sigma_0^{2N}} \exp[-\sigma_0^{-2} |\mathbf{X} - \sqrt{P_0/M} \mathbf{H} \mathbf{D}|^2]. \quad (3.1.2)$$

Выражение (3.1.2) является функцией правдоподобия для вектора  $\mathbf{D}$  и показывает, насколько правдоподобен вектор  $\mathbf{D}$  при векторе  $\mathbf{X}$  входного процесса. Для реализации МП-оценки необходимо выбрать такой вектор  $\hat{\mathbf{D}}$ , который обеспечит максимум функции (3.1.2).

Поиск максимума функции  $p(\mathbf{X}/\mathbf{D})$  в (3.2.2) эквивалентен отысканию минимума показателя степени. В результате для МП-оценки будем иметь

$$\hat{\mathbf{D}} = \arg \min_{\mathbf{D}} |\mathbf{X} - \sqrt{P_0/M} \mathbf{H} \mathbf{D}|^2. \quad (3.1.3)$$



Для реализации (3.1.3) приемник должен предварительно оценить канальную матрицу  $\mathbf{H}$ . Здесь мы будем предполагать, что эта матрица известна точно.

МП-приемник является оптимальным приемником и реализует обработку сигналов в соответствии с выражением (3.1.3), из которого следует, что такой приемник является нелинейным. Его практическая реализация сопряжена со значительными трудностями, особенно при использовании модуляций высокого уровня (16- и 64-КАМ) и достаточно большом числе  $M$  передающих антенн. Для модуляции с битовой загрузкой  $k_b$  бит/символ общее число возможных гипотез (вариантов) переданных символов  $d_1, d_2, \dots, d_M$  будет составлять  $2^{k_b M}$ . Например, если  $k_b=4$  (16-КАМ) и  $M=4$ , то имеется 65536 гипотез. Для каждой из них необходимо вычислить квадрат модуля разности в (3.1.3) и затем найти наименьшее значение.

Поэтому в MIMO-системах, в которых передающих антенн не больше, чем приемных ( $M \leq N$ ), часто используются квазиоптимальные линейные приемники, такие как ZF-приемник и МСКО-приемник, анализ которых приведен далее.

Вероятность битовой ошибки при использовании МП-приемника обратно пропорциональна ОСШ в степени  $N$  [5,6], то есть  $BER \sim \rho_0^{-N}$  ( $\rho_0 \gg 1$ ). Следовательно, такой приемник обеспечивает порядок разнесения, равный числу  $N$  приемных антенн.

На рис. 3.3 показана вероятность ошибки для МП-приемника в зависимости от ОСШ  $\rho_0$  для 4-ФМ сигналов и MIMO-системы с разным числом антенн:  $M=N=2$  и  $M=2, N=4$ . Видно, что наклон кривых является большим при четырех приемных антеннах, чем при двух.

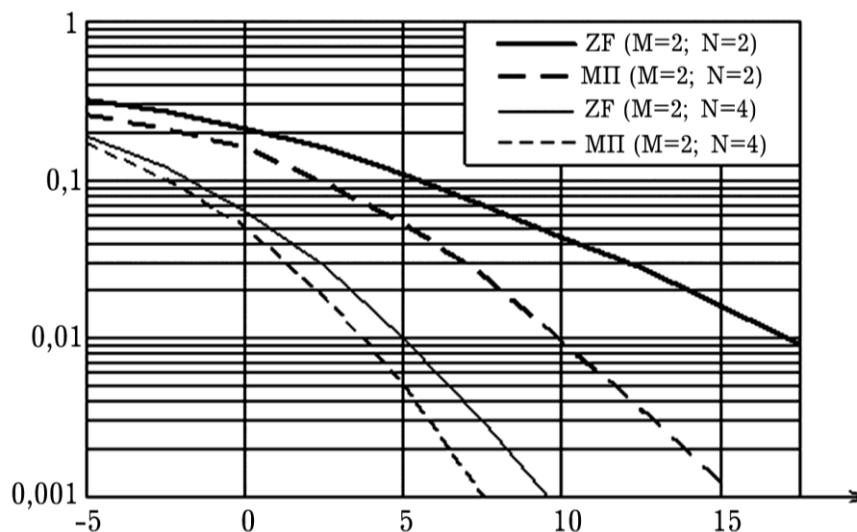


Рис. 3.3. Вероятность битовой ошибки в зависимости от ОСШ для МП- и ZF-приемников при  $M=N=2$  и  $M=2, N=4$

Рассмотрим два примера использования МП-приемника в системах с несколькими передающими и одной приемной антенной, которые часто называют системами с пространственным мультиплексированием.

1. Пусть имеется две передающие антенны. Число параллельных потоков данных равно двум, поэтому вектор пространственного символа состоит из двух компонент  $\mathbf{D}=[d_1, d_2]^T$ . Принятый сигнал равен

$$x = \sqrt{P_0/2}(h_1d_1 + h_2d_2) + z. \quad (3.1.4)$$

Предположим, что используется квадратурная фазовая модуляция (4-ФМ) с битовой загрузкой 2 бит/символ. На рис. 3.4 (сверху) показаны все возможные варианты (гипотезы) сигналов, которые можно передать из двух антенн. Сигналы из первой антенны умножаются на коэффициент передачи  $h_1$ , а сигналы из второй антенны – на  $h_2$ . Затем все сигналы суммируются в приемной антенне. В результате в соответствии с (3.1.4) имеется 16 гипотез, которые показаны сплошными кружками в нижней части рис. 3.4. Каждая из этих гипотез обозначена двумя индексами: первый соответствует возможному сигналу, переданному из первой антенны, а второй – из второй антенны. Для наглядности графического представления предположено, что каналные коэффициенты существенно различаются по амплитуде ( $|h_1| > |h_2|$ ). При этом все 16 гипотез разделены относительно друг друга. Очевидно, что на практике возможны различные ситуации и переданные из разных антенн сигналы могут «перемешиваться».

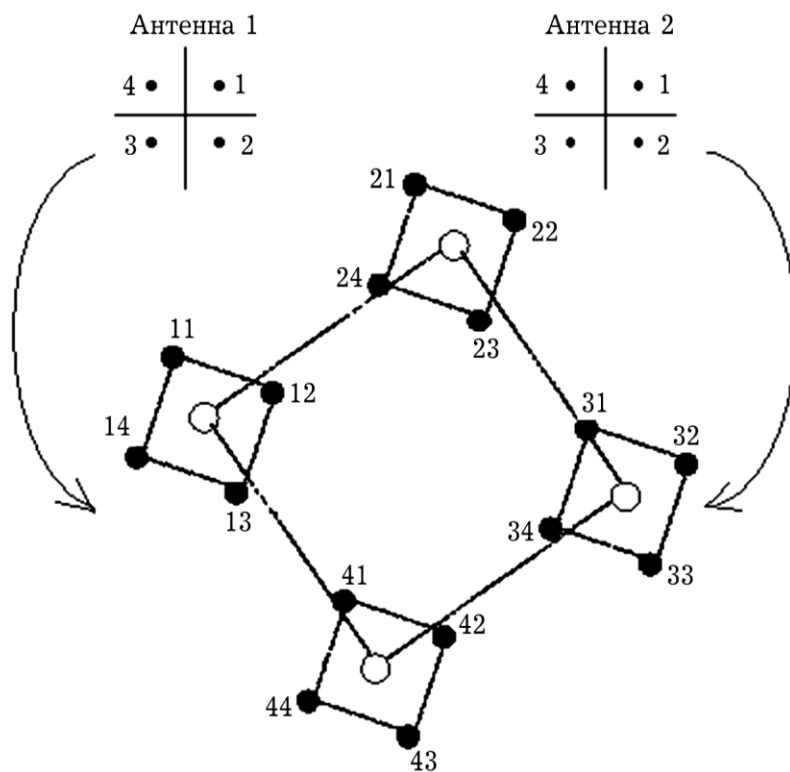


Рис. 3.4. Преобразование 4-ФМ сигналов в пространственном канале

МП-приемник оценивает символы в соответствии с выражением (3.1.3), которое для рассматриваемой схемы принимает вид

$$\hat{d}_1, \hat{d}_2 = \arg \min_{d_1, d_2} \left( \left| x - \sqrt{P_0/2} (h_1 d_1 + h_2 d_2) \right|^2 \right). \quad (3.1.5)$$

Таким образом, для каждой из 16 гипотез необходимо вычислить квадрат модуля разности в (3.1.5) и затем выбрать ту гипотезу, для которой оно имеет наименьшее значение. Символы, соответствующие данной гипотезе, принимаются в качестве переданных.

2. В случае произвольного числа  $M$  передающих антенн и одной приемной антенны одновременно передается  $M$  символов и формула (3.1.3) для МП-приемника принимает вид

$$\hat{d}_1, \hat{d}_2, \dots, \hat{d}_M = \arg \min_{d_1, d_2, \dots, d_M} \left( \left| x - \sqrt{P_0/M} (h_1 d_1 + h_2 d_2 + \dots + h_M d_M) \right|^2 \right). \quad (3.1.6)$$

На рис. 3.5 показана вероятность битовой ошибки в зависимости от ОСШ  $\rho_0$  для разного числа передающих антенн ( $M=1, 2, 3$  и  $4$ ) и 4-ФМ сигналов в релейском некоррелированном канале. С ростом числа антенн ОСШ, требуемое для обеспечения вероятности ошибки равной 0.01, увеличивается от 17 дБ ( $M=1$ ) до 25, 32 и 38 дБ ( $M=2, 3$  и  $4$ , соответственно). Следовательно, увеличение скорости передачи данных в 2, 3 или в 4 раза при сохранении вероятности ошибки приводит к дополнительным энергетическим затратам, составляющим 8, 15 и 21 дБ, соответственно.

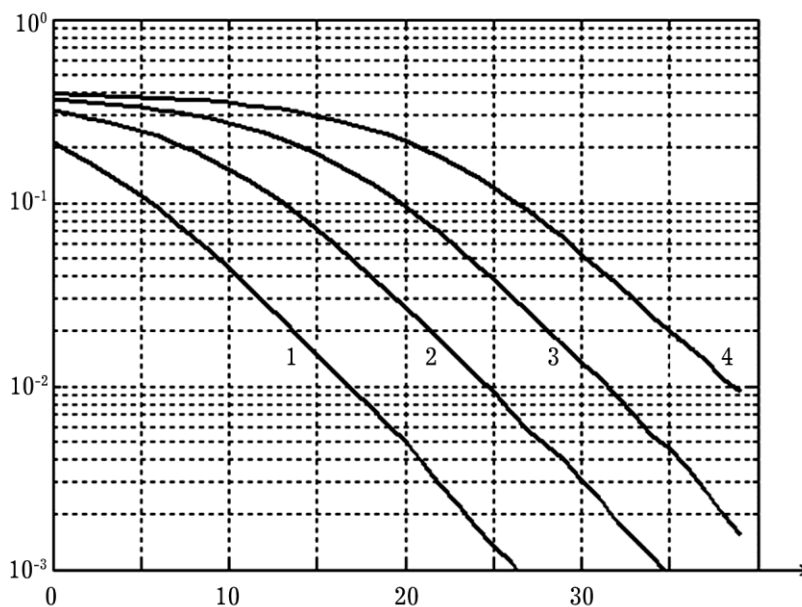


Рис. 3.5. Вероятность битовой ошибки в зависимости от ОСШ для 4-ФМ сигналов при  $M=1, 2, 3, 4$  (кривые 1, 2, 3, 4, соответственно)

Отметим, что вероятность битовой ошибки обратно пропорциональна ОСШ ( $BER \sim 1/\rho_0$ ) при  $\rho_0 \gg 1$  [5,6], поэтому в логарифмической шкале все кривые имеют одинаковый наклон, независимо от числа передающих антенн. Это объ-

ясняется тем, что каждый символ излучается только из одной антенны, и в данной системе с одной приемной антенной нет пространственного разнесения.

При увеличении числа антенн увеличивается скорость  $R_{\Sigma}$  передачи данных, равная произведению битовой загрузки символов ( $k_b$ ) и скорости ( $R_{s-t}$ ) пространственно-временного кодера  $R_{\Sigma}=k_b R_{s-t}$ . Представляет интерес сравнение вероятности битовой ошибки при одинаковой скорости  $R_{\Sigma}$ . Рассмотрим различные варианты выбора числа передающих антенн и типа модуляции, обеспечивающие одинаковую скорость  $R_{\Sigma}$ .

1. Скорость передачи  $R_{\Sigma}=2$ , которая обеспечивается в двух случаях:

а) передача 4-ФМ-сигналов ( $k_b=2$ ) из одной антенны ( $M=1$ );

б) передача 2-ФМ-сигналов ( $k_b=1$ ) из двух антенн ( $M=2$ ).

2. Скорость передачи  $R_{\Sigma}=4$ , которая обеспечивается в трех случаях:

а) 16-КАМ ( $k_b=4$ ) и  $M=1$ ;

б) 4-ФМ ( $k_b=2$ ) и  $M=2$ ;

в) 2-ФМ ( $k_b=1$ ) и  $M=4$ .

3. Скорость передачи  $R_{\Sigma}=6$ , которая достигается в двух случаях:

а) 64-КАМ ( $k_b=6$ ) и  $M=1$ ;

б) 4-ФМ ( $k_b=2$ ) и  $M=3$ .

На рис. 3.6 представлены кривые вероятности битовой ошибки в зависимости от ОСШ  $\rho_0$  для всех вариантов. Кривые пронумерованы двумя цифрами. Первая – число антенн, а вторая – битовая загрузка символов ( $k_b=1, 2, 4$  и  $6$  для 2-ФМ, 4-ФМ, 16-КАМ и 64-КАМ, соответственно). Цифры 2, 4 и 6 возле эллипсов показывают результирующую скорость  $R_{\Sigma}$  передачи данных. Видно, что кривые смещаются вправо при увеличении скорости передачи. Для фиксированной скорости ОСШ, необходимое для обеспечения заданной вероятности ошибки, увеличивается с ростом числа антенн и уменьшается с увеличением уровня модуляции. Все кривые в области больших ОСШ имеют одинаковый наклон, равный числу  $N$  приемных антенн (в данном случае одной антенне).

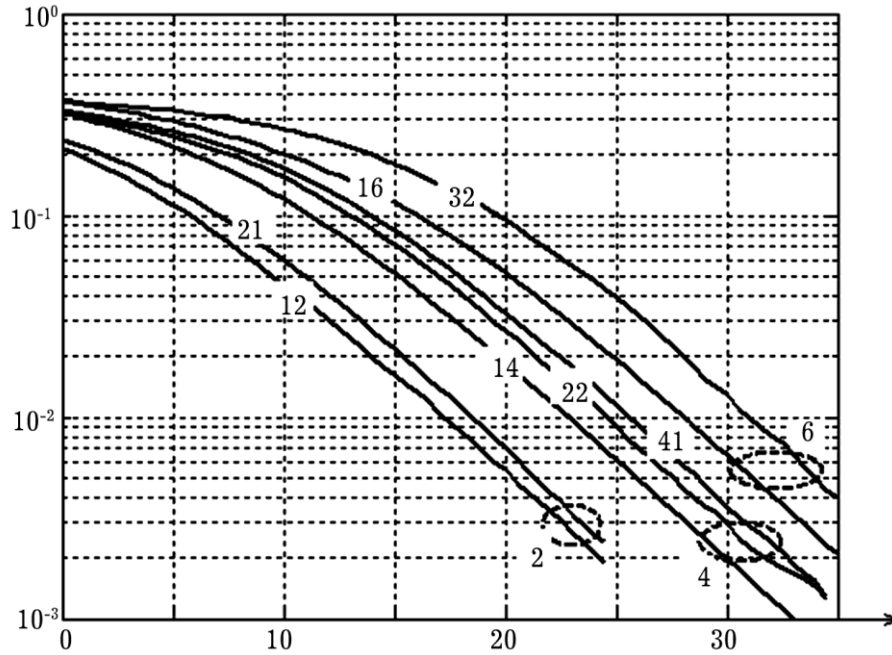


Рис. 3.6. Вероятность ошибки в зависимости от ОСШ. Первая цифра возле кривой – число антенн, а вторая – уровень модуляции. Цифры возле эллипсов – скорость передачи

### 3.1.2. Линейные ZF- и МСКО-приемники

**Линейный ZF-приемник.** На входе каждой приемной антенны имеется линейная комбинация всех передаваемых символов  $d_1, d_2, \dots, d_M$ . Линейный ZF-приемник обеспечивает разделение этих символов, если в MIMO-системе приемных антенн не меньше, чем передающих ( $N \geq M$ ).

ZF-приемник минимизирует функционал  $J_{ZF}(\mathbf{Y})$  по выходному вектору  $\mathbf{Y}$  (см. рис. 3.2), где [5]

$$J_{ZF}(\mathbf{Y}) = \left| \mathbf{X} - \sqrt{P_0/M} \mathbf{H} \mathbf{Y} \right|^2 = (\mathbf{X} - \sqrt{P_0/M} \mathbf{H} \mathbf{Y})^H (\mathbf{X} - \sqrt{P_0/M} \mathbf{H} \mathbf{Y}). \quad (3.1.7)$$

Дифференцируя этот функционал по вектору  $\mathbf{Y}^H$  и приравнивая производную к нулю, получим, что преобразование сигналов в приемнике на рис. 3.2 определяется матрицей  $\mathbf{F}^H = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$  [5].

Отсюда вектор сигнала на выходе ZF-приемника будет равен

$$\mathbf{Y} = \sqrt{M/P_0} \mathbf{F}^H \mathbf{X} = \sqrt{M/P_0} (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{X}. \quad (3.1.8)$$

Матрица  $\mathbf{F}^H = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$  называется псевдообратной матрицей к матрице  $\mathbf{H}$ . Таким образом, для разделения сигналов в приемных антеннах необходимо выполнить преобразование вектора  $\mathbf{X}$  принятых сигналов, описываемое матрицей  $\mathbf{F}^H$ . Очевидно, что такое преобразование является линейным. Отметим, что в

случае одинакового числа передающих и приемных антенн ( $N=M$ ) обратная матрица  $\mathbf{H}^{-1}$  существует и из (3.1.8) имеем, что  $\mathbf{Y}=\mathbf{H}^{-1}\mathbf{X}$ .

Для вектора  $\mathbf{X}$  в (3.1.8), получим, что

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D} + \sqrt{M/P_0}(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{Z}. \quad (3.1.9)$$

Выходные собственные шумы  $\tilde{\mathbf{Z}}$  имеют дисперсию, отличную от  $\sigma_0^2$  и коррелированы между собой. В самом деле, из (3.1.9) имеем, что шумовая корреляционная матрица равна

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{Z}}} = \langle \tilde{\mathbf{Z}} \tilde{\mathbf{Z}}^H \rangle = (M/P_0)(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \langle \mathbf{Z} \mathbf{Z}^H \rangle \mathbf{H}(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}. \quad (3.1.10)$$

Учитывая, что матрица  $\mathbf{R}_Z = \sigma_0^2 \mathbf{I}_N$ , из (3.1.10) найдем, что

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{Z}}} = (M/\rho_0)(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}. \quad (3.1.11)$$

Коррелированность шумов на выходе ZF-приемника приводит к коррелированности ОСШ  $\rho_i$  в разных информационных подканалах. Из (3.1.9) и (3.1.11) следует, что ОСШ  $\rho_i$  на выходе  $i$ -го подканала равно

$$\rho_i = \frac{\rho_0}{M[(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}]_{ii}}. \quad (3.1.12)$$

Отсюда следует, что в случае плохой обусловленности матрицы  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  (большой разброс собственных чисел этой матрицы) возможно значительное усиление мощности собственных шумов на выходе ZF-приемника.

При некоррелированных релеевских замираниях сигналов ОСШ  $\rho_i$  подчиняется хи-квадрат-распределению с  $2(N-M+1)$  степенями свободы и со средним значением  $\rho_0/M$  [27]. Чтобы записать это распределение, заменим в (1.1.6)  $\rho_0$  на  $\rho_0/M$  и  $N$  на  $N-M+1$ . В результате будем иметь

$$f(\rho_i) = \frac{M}{(N-M)! \rho_0} \left( \frac{M \rho_i}{\rho_0} \right)^{N-M} \exp\left( -\frac{M \rho_i}{\rho_0} \right). \quad (3.1.13)$$

Теперь для вероятности битовой ошибки ( $BER$ ) при использовании сигналов двоичной фазовой модуляции можно записать выражение в явном виде, если в (1.1.14) заменить  $\rho_0$  на  $\rho_0/M$  и  $N$  на  $N-M+1$ . В случае достаточно больших ОСШ ( $\rho_0 \gg M$ ) получим, что вероятность ошибки равна

$$BER = \frac{(2N-2M+1)!}{(N-M+1)!(N-M)!} \left( \frac{M}{4\rho_0} \right)^{N-M+1}. \quad (3.1.14)$$

Отсюда следует, что вероятность ошибки при использовании ZF-приемника уменьшается обратно пропорционально ОСШ в степени  $N-M+1$ , то есть  $BER \sim \rho_0^{-(N-M+1)}$ . Поэтому в логарифмическом масштабе при больших значениях ОСШ кривые вероятности ошибки имеют линейную асимптотику с углом наклона (называемым порядком разнесения), равным  $(N-M+1)$  и не зависящим от вида модуляции сигналов. Отметим также, что угол наклона для ZF-приемника меньше, чем для МП-приемника, при котором  $BER \sim \rho_0^{-N}$ .

На рис. 3.3 показана вероятность битовой ошибки в зависимости от ОСШ  $\rho_0$  для 4-ФМ сигналов и ММО-системы с разным числом антенн:  $M=N=2$  и  $M=2, N=4$ . Видно, что наклон кривых для ZF-приемника является меньшим, чем для МП-приемника. Поэтому для обеспечения одинаковой вероятности ошибки ОСШ должно быть большим для ZF-приемника, чем для МП-приемника. Для случая  $M=N=2$  вероятность битовой ошибки 0.01 достигается при ОСШ 10 дБ (МП-метод) и при ОСШ 17 дБ (ZF-метод), то есть потери при использовании ZF-приемника составляют 7 дБ. В то же время для  $M=2, N=4$  потери уменьшаются до 1.4 дБ. Это связано с тем, что при большем числе приемных антенн ( $N>M$ ) взаимная корреляция выходных шумов уменьшается, что приводит к уменьшению потерь при использовании неоптимального ZF-приемника по сравнению с оптимальным МП-приемником.

**Линейный МСКО-приемник** обеспечивает минимум среднеквадратичной ошибки (minimum mean-square error, MMSE) между вектором переданных символов и вектором выходных символов и может быть применен, если в ММО-системе приемных антенн не меньше, чем передающих ( $N \geq M$ ).

Обозначим  $\mathbf{Y} = \mathbf{F}^H \mathbf{X}$  и найдем матрицу  $\mathbf{F}^H$  из условия минимума МСКО-функционала  $J_{MMSE}$  (см. рис. 3.2) [5,19,40], где

$$J_{MMSE} = \langle |\mathbf{Y} - \mathbf{D}|^2 \rangle = \langle (\mathbf{F}^H \mathbf{X} - \mathbf{D})(\mathbf{F}^H \mathbf{X} - \mathbf{D})^H \rangle. \quad (3.1.15)$$

Функционал  $J_{MMSE}$  можно переписать в виде

$$J_{MMSE}(\mathbf{F}) = Sp\{\langle (\mathbf{F}^H \mathbf{X} - \mathbf{D})(\mathbf{F}^H \mathbf{X} - \mathbf{D})^H \rangle\}. \quad (3.1.16)$$

Продифференцируем функционал  $J_{MMSE}$  по матрице  $\mathbf{F}$  и приравняем производную к нулю. Учтем независимость матриц  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{F}^H$  и то, что первый множитель под знаком следа не зависит от матрицы  $\mathbf{F}$ . В результате будем иметь, что

$$dJ_{MMSE}(\mathbf{F})/d\mathbf{F} = \langle (\mathbf{F}^H \mathbf{X} - \mathbf{D})\mathbf{X}^H \rangle = \mathbf{0}, \quad (3.1.17)$$

Отсюда следует, что  $\langle (\mathbf{Y} - \mathbf{D})\mathbf{X}^H \rangle = \mathbf{0}$ . Таким образом, МСКО-приемник обеспечивает ортогональность входного вектора  $\mathbf{X}$  и вектора ошибки  $\mathbf{Y} - \mathbf{D}$ .

Учтем далее три следующих условия:

- собственные шумы в приемных антеннах не коррелированы;

- передаваемые символы в отдельных антеннах не коррелированы;
- передаваемые символы и собственные шумы статистически независимы.

В математической форме эти условия имеют вид

$$\langle \mathbf{Z}\mathbf{Z}^H \rangle = \sigma_0^2 \mathbf{I}_N, \quad \langle \mathbf{D}\mathbf{D}^H \rangle = \mathbf{I}_N, \quad \langle \mathbf{D}^H \mathbf{Z} \rangle = \mathbf{0}. \quad (3.1.18)$$

Теперь из (3.1.17) и (3.1.18) получим, что искомая матрица  $\mathbf{F}^H$  с точностью до постоянного множителя  $\sqrt{M/\rho_0}$  равна [5,19,40].

$$\mathbf{F}^H = \left( \mathbf{H}\mathbf{H}^H + \frac{M}{\rho_0} \mathbf{I}_N \right)^{-1} \mathbf{H}^H. \quad (3.1.19)$$

Отсюда

$$\mathbf{Y} = \left( \mathbf{H}^H \mathbf{H} + \frac{M}{\rho_0} \mathbf{I}_N \right)^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{X}. \quad (3.1.20)$$

Таким образом, МСКО-приемник выполняет линейное преобразование вектора  $\mathbf{X}$  принятых сигналов, описываемое матрицей  $\mathbf{F}^H$  в (3.1.19).

Вектор выходных шумов МСКО-приемника равен  $\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}^H \mathbf{Z}$ . Эти шумы имеют дисперсию, отличную от  $\sigma_0^2$ , и коррелированы между собой. В самом деле, учитывая некоррелированность входных собственных шумов, с помощью (3.1.18) и (3.1.20) для шумовой корреляционной матрицы будем иметь

$$\langle \tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{Z}}^H \rangle = \sigma_0^2 \left( \mathbf{H}^H \mathbf{H} + \frac{M}{\rho_0} \mathbf{I}_N \right)^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{H} \left( \mathbf{H}^H \mathbf{H} + \frac{M}{\rho_0} \mathbf{I}_N \right)^{-1}. \quad (3.1.21)$$

Из (3.1.20) следует, что МСКО-приемник не обеспечивает полное разделение сигналов, так как на выходе  $i$ -го подканала кроме сигнала  $d_i$  имеются сигналы от соседних подканалов, которые являются помехами.

Из сравнения формул (3.1.8) и (3.1.20) следует, что в случае достаточно больших ОСШ  $\rho_0$  сигналы на выходе ZF- и МСКО-приемников совпадают между собой. При малых ОСШ использование ZF-приемника может приводить к существенному усилению выходного шума. В то же время из (3.1.20) следует, что преобразование сигналов в МСКО-приемнике определяется матрицей  $\mathbf{H}^H$ , то есть выходной сигнал с точностью до не влияющего на ОСШ коэффициента (при малых  $\rho_0$ ) равен

$$\mathbf{Y} \approx \mathbf{H}^H \left( \sqrt{\frac{P_0}{M}} \mathbf{H}\mathbf{D} + \mathbf{Z} \right). \quad (3.1.22)$$



При этом реализуется согласованная обработка принятых сигналов, обеспечивающая максимальное выходное ОСШ.

Таким образом, МСКО-приемник является линейным, но не оптимальным. При достаточно больших ОСШ вероятность битовой ошибки пропорциональна  $BER \sim \rho_0^{-(N-M+1)}$  (аналогично ZF-приемнику), то есть обеспечивается порядок разнесения, равный  $(N-M+1)$  вместо  $N$  для оптимального МП-приемника.

### 3.2. ММО-системы с обратной связью

#### 3.2.1. Формирование независимых собственных подканалов

Рассмотрим ММО-систему с обратной связью, в которой передатчик обладает информацией о пространственном канале («знает» матрицу  $\mathbf{H}$ ). Так как временное кодирование отсутствует, то пространственно-временной кодер на рис. 3.1 становится только пространственным. Его скорость будет определяться не числом передающих антенн (как в ММО-системе без обратной связи), а рангом  $K$  матрицы  $\mathbf{H}$ . Поэтому входной блок кодера должен состоять из  $K$  импульсов, а выходной – из  $M$  импульсов, что соответствует числу передающих антенн. Длительность первого из них равна  $KT_s$  (так как  $n_s=K$ ), а второго –  $T_s$  (так как  $N_1=1$ ). Поэтому скорость пространственного кодера будет равна  $R_{s-t}=K$ .

Ранг матрицы  $\mathbf{H}$  не может быть больше минимального числа передающих ( $M$ ) или приемных ( $N$ ) антенн, то есть  $K \leq \min\{M, N\}$ . В случае некоррелированного релейского канала вероятность вырождения матрицы  $\mathbf{H}$  является ничтожно малой и ранг определяется минимальным числом передающих или приемных антенн, то есть  $K = \min\{M, N\}$ .

Схема ММО-системы с параллельной передачей по собственным подканалам показана на рис. 3.7. Входные символы  $d_1, d_2, \dots, d_K$  кодера объединим в  $K$ -мерный вектор  $\mathbf{D} = (d_1, d_2, \dots, d_K)^T$  пространственного символа. Эти сигналы умножаются на соответствующие весовые коэффициенты (пространственно кодируются) и излучаются  $M$  антеннами. Принятые сигналы (вектор  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ ) преобразуются в пространственном декодере, на выходе которого имеется  $K$ -мерный вектор  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_K)^T$ .

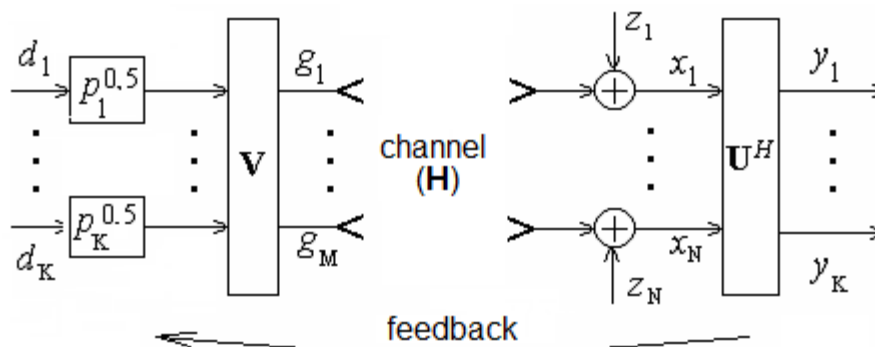


Рис. 3.7. ММО-система с передачей данных по собственным подканалам

$M$ -мерный вектор сигналов  $\mathbf{G}=[g_1, g_2, \dots, g_M]^T$  на выходе кодера может быть представлен в виде

$$\mathbf{G}=\mathbf{V}\mathbf{P}^{1/2}\mathbf{D}, \quad (3.2.1)$$

где  $(M \times K)$ -размерная матрица  $\mathbf{V}=(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_K)$  состоит из собственных векторов матрицы  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{P}=\text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_K\}$  – диагональная матрица, составленная из чисел  $p_i$ , которые дают распределение полной мощности  $P_0$  между параллельными подканалами. При этом  $p_1+p_2+\dots+p_K=P_0$ .

Вектор  $\mathbf{X}$  сигналов в приемных антеннах равен

$$\mathbf{X}=\mathbf{H}\mathbf{G}+\mathbf{Z}. \quad (3.2.2)$$

Преобразование сигналов в пространственном декодере описывается  $(N \times K)$ -размерной матрицей  $\mathbf{U}=(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_K)$ , состоящей из собственных векторов матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ . На выходе декодера вектор сигнала равен  $\mathbf{Y}=\mathbf{U}^H\mathbf{X}$ . С учетом (3.2.2) будем иметь, что  $\mathbf{Y}=\mathbf{U}^H\mathbf{H}\mathbf{G}+\tilde{\mathbf{Z}}$ , где  $\tilde{\mathbf{Z}}=\mathbf{U}^H\mathbf{Z}$  – вектор выходных шумов. С помощью (3.2.1) получим, что вектор  $\mathbf{Y}$  на выходе декодера равен

$$\mathbf{Y}=\mathbf{U}^H\mathbf{H}\mathbf{V}\mathbf{P}^{1/2}\mathbf{D}+\tilde{\mathbf{Z}}. \quad (3.2.3)$$

Выходные шумы в параллельных подканалах являются некоррелированными. В самом деле, для корреляционной матрицы получим, что

$$\langle \tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{Z}}^H \rangle = \mathbf{V}^H (\langle \mathbf{Z}\mathbf{Z}^H \rangle) \mathbf{V} = \sigma_0^2 \mathbf{I}. \quad (3.2.4)$$

Подставляя (2.1.1) в (3.2.3) и учитывая ортонормированность векторов  $\mathbf{V}_i$  и  $\mathbf{U}_i$ , получим, что вектор сигналов на выходе собственных подканалов равен

$$\mathbf{Y}=\mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{V}^H\mathbf{V}\mathbf{P}^{1/2}\mathbf{D}+\tilde{\mathbf{Z}}=\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{P}^{1/2}\mathbf{D}+\tilde{\mathbf{Z}}, \quad (3.2.5)$$

или в поэлементной записи

$$y_i = \sqrt{p_i \lambda_i} d_i + \tilde{z}_i. \quad (3.2.6)$$

Сформированные таким образом подканалы называются собственными. Из (3.2.6) следует, что в  $i$ -ом подканале присутствует только  $i$ -ый передаваемый символ. Кроме этого, в соответствии с (3.2.4) выходные собственные шумы являются некоррелированными между собой.

Таким образом, MIMO-систему можно представить в виде  $K$  параллельных подканалов, то есть как совокупность  $K$  независимых SISO-систем. Для формирования подканалов приемник должен оценивать матрицу  $\mathbf{H}$  коэффициентов передачи, и сообщать эту информацию на передающую сторону по обратной линии. На рис. 3.8 показана эквивалентная схема MIMO-системы.

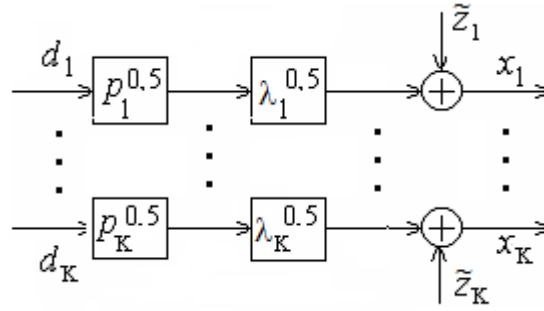


Рис. 3.8. Эквивалентная схема ММО-системы

Коэффициент усиления  $i$ -го собственного подканала определяется собственным числом  $\lambda_i$ . Из приведенных в п. 2.1 результатов следует, что разброс собственных чисел достаточно большой, особенно для системы с одинаковым числом передающих и приемных антенн. Поэтому подканалы имеют разные усиления. Средний коэффициент передачи наиболее слабого подканала, как видно из (2.1.6),  $\langle \lambda_K \rangle = 1/K$ , то есть в  $K$  раз меньше среднего квадрата модуля коэффициента усиления в системе с одной передающей и одной приемной антеннами.

Выходное ОСШ  $\eta_i$  в  $i$ -м подканале в соответствии с (3.2.6) равно

$$\eta_i = \frac{p_i \lambda_i}{\sigma_0^2} = \rho_i \lambda_i, \quad (3.2.7)$$

где  $\rho_i = p_i / \sigma_0^2$ .

Вероятность битовой ошибки ( $BER_i$ ) в  $i$ -м собственном подканале зависит от статистических свойств выходного ОСШ  $\eta_i$  в этом подканале. Из (3.2.7) следует, что ОСШ  $\eta_i$  пропорционально  $i$ -му собственному числу  $\lambda_i$ . Аналитические выражения для плотности вероятности ранжированных собственных чисел в условиях некоррелированного релейского канала известны в случае ММО-системы с двумя собственными подканалами, то есть при произвольном  $M$  и  $N=2$  или при  $M=2$  и произвольном  $N$  (см. формулы (2.1.7) и (2.1.8)). Собственные числа не изменяются при замене  $M$  на  $N$  и  $N$  на  $M$ . Поэтому в этом подразделе будем рассматривать ММО-систему с произвольным  $M$  и  $N=2$ .

Поступая аналогично (см. п. 1.2), получим, что вероятность битовой ошибки в  $i$ -ом собственном подканале равна

$$BER_i(\rho) = \int_0^{\infty} f_i(\lambda) BER_0(\rho\lambda) d\lambda, \quad (i=1,2), \quad (3.2.8)$$

где  $BER_0(\rho\lambda)$  – вероятность битовой ошибки в гауссовом шумовом канале без замираний при ОСШ, равном  $\rho\lambda$ .

Рассмотрим сигналы квадратурной фазовой модуляции, когда [2,3,28,33]

$$BER_0(\eta) = Q(\sqrt{\eta}), \quad Q(x) = 0.5 - \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt. \quad (3.2.9)$$

Подставляя (3.2.9) в (3.2.8), получим

$$BER_i(\rho) = \int_0^{\infty} f_i(\lambda) Q(\sqrt{\rho\lambda}) d\lambda, \quad (i=1,2). \quad (3.2.10)$$

Отсюда следует, что для нахождения вероятности ошибки необходимо вычислить определенный интеграл вида

$$I(\rho) = \int_0^{\infty} x^\mu e^{-cx} Q(\sqrt{\rho x}) dx, \quad (3.2.11)$$

где  $\mu$  - неотрицательное целое число,  $c$  и  $\rho$  - положительные числа.

Вычисление этого интеграла можно выполнить за три шага: [18,32]

- продифференцируем  $I(\rho)$  по переменной  $\rho$ ;
- вычислим полученный интеграл по переменной  $\lambda$ ;
- вычислим полученный интеграл по переменной  $\rho$ .

С помощью [20] имеем

$$\frac{dI}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_0^{\infty} \lambda^{\mu+1/2} e^{-(c+\rho/2)\lambda} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \frac{\Gamma(\mu+3/2)}{(c+\rho/2)^{\mu+3/2}}, \quad (3.2.12)$$

где  $\Gamma(y) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{y-1} dt$  - гамма-функция.

Отсюда, используя замену  $x = 2t^2$ , получим

$$I(\rho) = \frac{\Gamma(\mu+3/2)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\rho} \frac{1}{x^{1/2} (c+x/2)^{\mu+3/2}} dx = \frac{2\Gamma(\mu+3/2)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\rho/2}} \frac{dt}{(c+t^2)^{\mu+3/2}}, \quad (3.2.13)$$

Окончательно найдем с помощью [20, № 3.462.1], что

$$I(\rho) = \frac{2\Gamma(\mu+3/2)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{c^{\mu+1}} \sum_{k=0}^{\mu} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_{\mu}^k \frac{\rho^{k+1/2}}{(\rho+2c)^{k+1/2}} + I(0), \quad (3.2.14)$$

где  $C_{\mu}^k = \mu!/k!(\mu-k)!$  - число сочетаний по  $k$  элементам из  $\mu$  элементов,  $I(0)$  - константа интегрирования. Нетрудно получить, что  $I(0)=0$ , поскольку при  $\rho \rightarrow 0$  вероятность ошибки  $BER \rightarrow 1/2$ .

Теперь с помощью (3.2.14) для вероятности битовой ошибки в сильном (первом) и слабом (втором) собственных каналах ММО-системы с произвольным числом  $M$  передающих антенн будем иметь

$$BER_1(\rho) = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^M \delta_k \left( \frac{\rho}{\rho+2} \right)^{k+1/2} + \sum_{m=0}^{M-2} \sum_{k=0}^{m+M-2} \chi_{mk} \left( \frac{\rho}{\rho+4} \right)^{k+1/2}, \quad (3.2.15)$$

$$BER_2(\rho) = \frac{1}{2} - \sum_{m=0}^{M-2} \sum_{k=0}^{m+M-2} \chi_{mk} \left( \frac{\rho}{\rho+4} \right)^{k+1/2}, \quad (3.2.16)$$

где коэффициенты  $\delta_k$  и  $\chi_{mk}$  равны

$$\delta_k = \frac{\Gamma(M+3/2)}{\sqrt{\pi}M!} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_M^k \frac{Mk^2 - 2(M-1/2)k + 2M(M-5/8)}{(M+1/2)(M-1/2)}, \quad (3.2.17)$$

$$\chi_{mk} = \frac{1}{\sqrt{\pi}(M-1)!} \frac{m(m-2M+1) + M(M-1)}{m!} \frac{\Gamma(m+M-1/2)}{2^{(m+M-1)}} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_{m+M-2}^k. \quad (3.2.18)$$

Представляет интерес асимптотики кривых для BER. Имеем, что

$$BER_1^{(2 \times 2)} \approx 0.27\rho^{-4}, \quad BER_2^{(2 \times 2)} \approx 0.5\rho^{-1}, \quad (3.2.19)$$

$$BER_1^{(3 \times 2)} \approx 0.56\rho^{-6}, \quad BER_2^{(3 \times 2)} \approx 0.56\rho^{-2}, \quad (3.2.20)$$

$$BER_1^{(4 \times 2)} \approx 1.38\rho^{-8}, \quad BER_2^{(4 \times 2)} \approx 0.62\rho^{-3}, \quad (3.2.21)$$

где верхние индексы  $BER^{(M \times N)}$  показывают число антенн.

Отсюда следует, что вероятность битовой ошибки в собственных подканалах обратно пропорциональна ОСШ, но степень зависимости разная. Это видно из следующих выражений:

$$BER_1^{(M \times N)} \approx \rho^{-MN}, \quad BER_2^{(M \times N)} \approx \rho^{-(M-N+1)}. \quad (3.2.22)$$

Вероятность битовой ошибки в первом собственном подканале обратно пропорциональна ОСШ в степени, равной произведению  $MN$  числа антенн или числу некоррелированных коэффициентов передачи (ветвей разнесения). Вероятность битовой ошибки во втором собственном подканале уменьшается с ростом ОСШ значительно медленнее.

Полученные выражения для сигналов квадратурной фазовой модуляции (4-ФМ) легко обобщить на сигналы двоичной фазовой модуляции (2-ФМ). Для вероятности битовой ошибки в гауссовом шумовом канале без замираний вместо (3.2.9) имеем, что [2,3,28,33]  $BER_0^{BPSK}(\eta) = Q(\sqrt{2\eta})$ . Поэтому все формулы для 4-ФМ сигналов остаются справедливыми и для 2-ФМ сигналов, если в них заменить аргумент  $\rho$  на  $2\rho$ , то есть

$$BER_i^{BPSK}(\rho) = BER_i^{QPSK}(2\rho) \quad (i=1,2). \quad (3.2.23)$$

На рис. 3.9 показана вероятность битовой ошибки в зависимости от ОСШ в сильном и слабом собственных подканалах ММО-системы с разным числом передающих антенн ( $M=2, 4$  и  $8$ ) и двух ( $N=2$ ) приемных антеннах для релеевских некоррелированных замираний сигналов. Кривые соответствуют теоретическим формулам, а кружочки – результатам моделирования. При моделировании для каждого собственного канала формировалась случайная последовательность из 192 бит. Эти биты преобразовывались в символы с помощью бинарной фазовой модуляции. Для полученных символов формировалась одна реализация канальной матрицы  $\mathbf{H}$ , и вычислялись собственные числа этой матрицы. Всего формировалось 10000 реализаций последовательностей и матриц  $\mathbf{H}$  и вероятность битовой ошибки вычислялась как отношение числа ошибочно принятых бит к общему числу переданных бит.

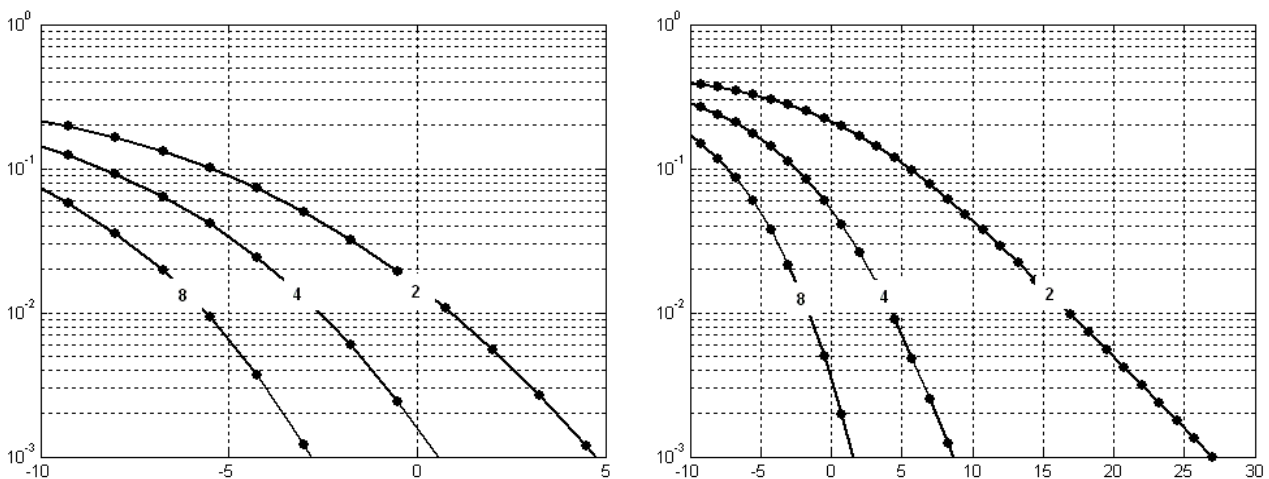


Рис 3.9. Вероятность битовой ошибки в зависимости от ОСШ в сильном и слабом собственных подканалах,  $N=2$ ,  $M=2, 4$  и  $8$  (кривые 2,4,8, соответственно)

Выражения (3.2.15) и (3.2.16) определяют вероятность битовой ошибки в собственных подканалах в зависимости от аргумента  $\rho$  и справедливы для произвольного распределения мощности между собственными подканалами. Если используется 4-ФМ модуляция, а мощность  $P_0$  распределяется между подканалами равномерно, то аргумент в (3.2.15) и (3.2.16)  $\rho = 0.5(P_0/\sigma_0^2)$ . Такое распределение мощности значительно упрощает выражение для вероятности битовой ошибки в ММО-системе, которое будет иметь вид

$$BER_{av}^{QPSK} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^M \delta_k \left( \frac{\rho}{\rho + 4} \right)^{k+1/2}, \quad (3.2.24)$$

где коэффициент  $\delta_k$  приведен в (3.2.17). Отсюда следует, что зависимость вероятности ошибки от ОСШ такая же, как во втором (слабом) собственном подка-

нале:  $BER_{av}^{QPSK} \sim \rho^{-(M-N+1)}$ . На рис. 3.10 показана вероятность битовой ошибки в MIMO-системе с разным числом передающих антенн ( $M=2, 4$  и  $8$ ) для релеевого некоррелированного канала при использовании 2-ФМ сигналов.

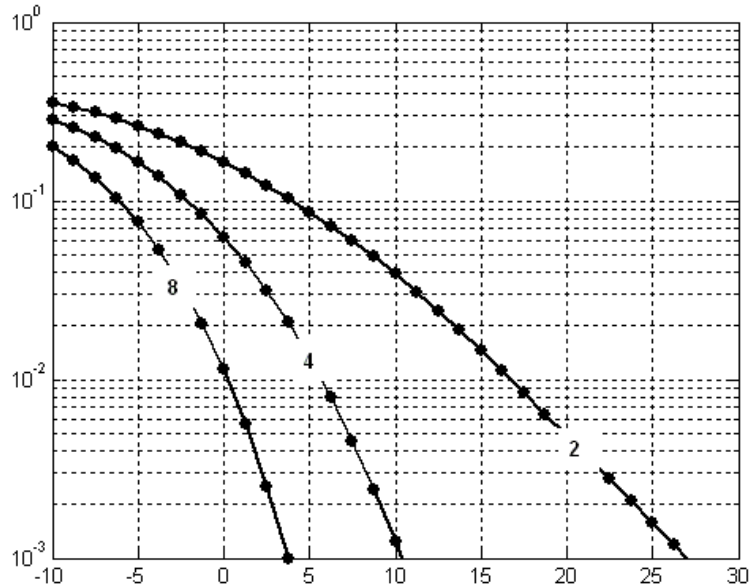


Рис. 3.10. Вероятность битовой ошибки в MIMO-системе,  $N=2$ ,  $M=2, 4$  и  $8$  (кривые 2,4,8, соответственно), релеевские некоррелированные замирания, 2-ФМ сигналы

### 3.2.2. Минимизация вероятности битовой ошибки

Теперь рассмотрим MIMO-систему с произвольным числом передающих и приемных антенн. Из выражения (3.2.7) для ОСШ на выходе собственных подканалов следует, что ОСШ зависит не только от собственных чисел канальной матрицы, но и от способа распределения мощности  $P_0$  между подканалами.

Коэффициенты усиления подканалов, а, следовательно, и вероятности битовой ошибки, могут достаточно сильно отличаться друг от друга [19,32]. Поэтому, для минимизации вероятности ошибки необходимо предварительное пространственное кодирование с помощью унитарной матрицы  $\mathbf{U}_0$  поворота с элементами в виде коэффициентов дискретного преобразования Фурье [37-39]:

$$(\mathbf{U}_0)_{mm} = \frac{1}{\sqrt{K}} \exp\left(j \frac{2\pi}{K} (m-1)(n-1)\right). \quad (3.2.25)$$

Вектор сигналов после матрицы поворота равен  $\mathbf{S}=\mathbf{U}_0\mathbf{D}$ . На выходе MIMO-системы выполняется обратный поворот вектора данных, используя матрицу  $\mathbf{U}_0^{-1} = \mathbf{U}_0^H$ . Поэтому, оцененный вектор данных будет равен  $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{U}_0^H \hat{\mathbf{S}}$ .

Например, при  $K=2$  и  $K=4$  матрица  $\mathbf{U}_0$  равна

$$\mathbf{U}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_0 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & 1 & j \end{pmatrix}. \quad (3.2.26)$$

Физический смысл предварительного кодирования заключается в том, что любой символ распределяется равномерно по мощности по всем подканалам (каждый символ передается по всем подканалам). Пусть, например, имеется  $K=4$  подканала и передается только один символ  $d_1=1$ , то есть вектор  $\mathbf{D}=(1, 0, 0, 0)^T$ . Тогда повернутый вектор сигналов  $\mathbf{S}=(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)^T$ . Следовательно, мощность повернутого сигнала равномерно распределена по всем подканалам.

Корреляционная матрица входных сигналов из-за их статистической независимости является единичной ( $\langle \mathbf{D}\mathbf{D}^H \rangle = \mathbf{I}$ ). Корреляционная матрица повернутых сигналов также является единичной вследствие унитарности матрицы поворота, так как  $\langle \mathbf{S}\mathbf{S}^H \rangle = \mathbf{U}_0 \langle \mathbf{D}\mathbf{D}^H \rangle \mathbf{U}_0^H = \mathbf{I}$ .

Эквивалентная схема MIMO-системы представлена на рис. 3.11, где  $b_1, b_2, \dots, b_K$  – элементы диагональной матрицы декодирования (матрицы приемника)  $\mathbf{V} = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_K\}$ . Таким образом, MIMO-система имеет диагональную структуру не по отношению к вектору  $\mathbf{D}$  входных данных, а по отношению к повернутому вектору  $\mathbf{S} = \mathbf{U}_0 \mathbf{D}$ . Для этого вектора ее можно представить в виде параллельного набора  $K$  независимых собственных подканалов.

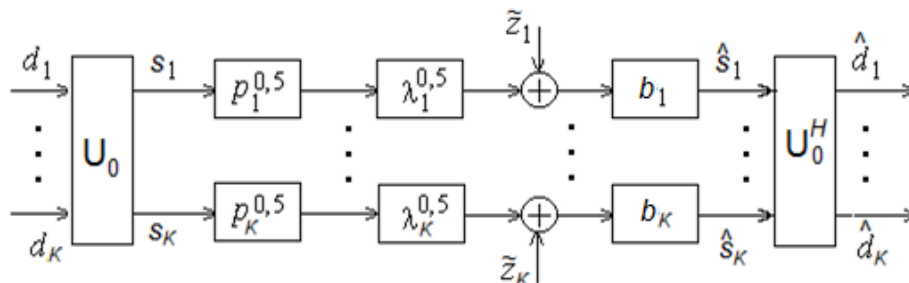


Рис. 3.11. Эквивалентная схема MIMO-системы

### Оптимизация декодера.

Найдем матрицу декодирования  $\mathbf{V}$ , что можно сделать независимо для каждого подканала. Будем исходить из критерия минимума СКО в собственных подканалах. Матрица поворота  $\mathbf{U}_0$  не влияет на матрицу СКО, поэтому матрица СКО равна  $\Sigma = \langle |\hat{\mathbf{D}} - \mathbf{D}|^2 \rangle$  или  $\Sigma = \langle |\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S}|^2 \rangle$ .

В соответствии с эквивалентной схемой (рис. 3.11) сигнал на входе  $i$ -го подканала  $\hat{s}_i = b_i(\sqrt{p_i \lambda_i} s_i + z_i)$ . Тогда СКО в  $i$ -ом подканале равна

$$\Delta_i = \langle [b_i(\sqrt{p_i \lambda_i} s_i + z_i) - s_i]^* [b_i(\sqrt{p_i \lambda_i} s_i + z_i) - s_i] \rangle. \quad (3.2.27)$$



Найдем минимум этой СКО  $\Delta_i$ . Дифференцируя и приравнявая производную  $d\Delta_i/db_i^*$  к нулю, получим

$$\langle (\sqrt{p_i\lambda_i}s_i + z_i)^* [b_i(\sqrt{p_i\lambda_i}s_i + z_i) - s_i] \rangle = 0. \quad (3.2.28)$$

Отсюда

$$b_i = \frac{\sqrt{p_i\lambda_i}}{p_i\lambda_i + 1}. \quad (3.2.29)$$

При этом оценка сигнала в  $i$ -ом подканале будет равна

$$\hat{s}_i = \frac{p_i\lambda_i}{p_i\lambda_i + 1} s_i + \frac{\sqrt{p_i\lambda_i}}{p_i\lambda_i + 1} z_i. \quad (3.2.30)$$

Такой приемник является линейным и обеспечивает минимальную СКО между входным и выходным символами в  $i$ -ом собственном подканале, и, поэтому, называется МСКО-приемником.

### **Оптимизация распределения мощности.**

На выходе  $i$ -го собственного подканала ОСШ  $\eta_i$  дается формулой (3.2.7). Из нее следует, что ОСШ в подканалах зависит как от собственных чисел  $\lambda_i$ , так и от способа распределения полной мощности между ними.

Средняя по всем собственным подканалам СКО равна

$$\Delta = K^{-1} \sum_{i=1}^K \Delta_i = K^{-1} \sum_{i=1}^K \langle |\hat{s}_i - s_i|^2 \rangle. \quad (3.2.31)$$

Опуская несущественный множитель  $1/K$  получим [37,38]

$$\Delta = \sum_{m=1}^K \left\langle \left| \left( \frac{p_m\lambda_m}{p_m\lambda_m + 1} - 1 \right) s_m + \frac{p_m\lambda_m}{p_m\lambda_m + 1} z_m \right|^2 \right\rangle = \sum_{m=1}^K \frac{1}{p_m\lambda_m + 1}. \quad (3.2.32)$$

Оптимизация передатчика заключается в выборе оптимального распределения мощности по  $K$  подканалам по критерию минимума средней СКО (3.2.32) при условии  $p_1 + p_2 + \dots + p_K = P_0$ .

Для поиска условного минимума составим функцию Лагранжа в виде

$$Lag = \sum_{m=1}^K \frac{1}{p_m\lambda_m + 1} + \mu \left( \sum_{m=1}^K p_m - P_0 \right). \quad (3.2.33)$$

Вычислим производные по  $p_j$  ( $j=1,2,\dots,K$ ) и  $\mu$  и приравняем их к нулю. Получим нелинейную систему  $K+1$  нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \mu(p_j \lambda_j + 1)^2 = \lambda_j, & j=1,2,\dots,K, \\ \sum_{m=1}^K p_m q_m = P_0 \end{cases} \quad (3.2.34)$$

Из первого уравнения в (1.1.21) найдем, что

$$\sqrt{\mu}(p_j \lambda_j + 1) = \sqrt{\lambda_j} \quad (3.2.35)$$

Суммируя по индексу  $i$  и учитывая второе уравнение в (3.2.34), будем иметь

$$\sqrt{\mu} = \left( \sum_{m=1}^K \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \right) \left( P_0 + \sum_{m=1}^K \frac{1}{\lambda_m} \right)^{-1}. \quad (3.2.36)$$

Подставив (3.2.36) в (3.2.35) получим оптимальное распределение мощности в  $m$ -ый подканал ( $m=1,2,\dots,K$ ) для МСКО-приемника в виде

$$p_m = \left( \frac{P_0 + \sum_{i=1}^K \lambda_i^{-1}}{\sqrt{\lambda_m} \sum_{i=1}^K \lambda_i^{-0.5}} - \frac{1}{\lambda_m} \right)^+, \quad (a)^+ = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a \leq 0. \end{cases} \quad (3.2.37)$$

Если в (3.2.37) не учитывать дополнительное условие, то можно получить отрицательное значение для некоторых  $p_m$  при достаточно малой мощности  $P_0$ , что будет противоречить физическому смыслу. Поэтому, необходимо уменьшить число подканалов на единицу и заново выполнить распределение мощности между оставшимися подканалами. Такая процедура выполняется, пока все значения  $p_m$  не станут положительными. При этом число  $K_0$  используемых подканалов становится меньше ранга  $K$  матрицы  $\mathbf{H}$  ( $K_0 \leq K$ ).

Рассмотрим пример распределения мощности по подканалам для ММО-системы с 4 передающими и 4 приемными антеннами. Максимальное число используемых подканалов  $K=4$ . Зададим следующие собственные числа:  $\lambda_1=7.97$ ,  $\lambda_2=3.36$ ,  $\lambda_3=0.81$ ,  $\lambda_4=0.09$ . Видно, что собственные числа отличаются в  $\approx 88$  раз.

Пусть средняя мощность передатчика  $P_0=10$ . Тогда из (3.2.37) получим, что  $p_1=1.37$ ,  $p_2=2.00$ ,  $p_3=3.45$ ,  $p_4=3.18$ . Следовательно, используются все 4 подканала, а ОСШ в этих подканалах отличается в  $\approx 38$  раз.

Для средней мощности передатчика  $P_0=1$ , из (3.2.37) найдем, что  $p_1=0.34$ ,  $p_2=0.42$ ,  $p_3=0.23$ ,  $p_4=0$ . Это означает, что используются только 3 подканала, а ОСШ в подканалах отличается только в  $\approx 14$  раз.

Приведем результаты моделирования для двух ММО-систем с одинаковым и разным числом передающих и приемных антенн ( $M=N=4$  и  $M=4$ ,  $N=8$ ) в релейском некоррелированном канале для сигналов 4ФМ-модуляции. Максималь-

ное число собственных подканалов в этих системах  $K=4$ . Рассмотрим вероятность битовой ошибки и среднее число подканалов, используемых для передачи данных. В этих подканалах будем использовать оптимальное распределение мощности (3.2.37).

На рис. 3.12 показана вероятность битовой ошибки (слева) и число используемых подканалов (справа) в зависимости от ОСШ (дБ). Видно, что при разном числе антенн вероятность ошибки значительно меньше, и данные передаются по всем 4 подканалам даже при малых ОСШ.

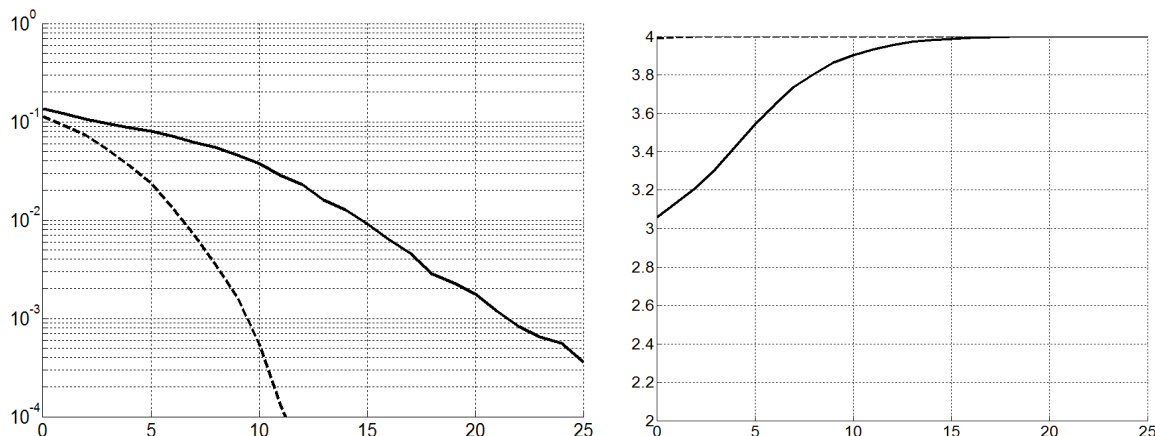


Рис. 3.12. Вероятность ошибки (слева) и число используемых подканалов (справа) в зависимости от ОСШ (дБ),  $M=N=4$  (сплошные кривые) и  $M=4, N=8$  (пунктирные кривые)

### 3.2.3. Пропускная способность ММО-системы

Для оценки качества мобильных систем связи часто используется вероятность битовой ошибки. Однако этот параметр характеризует систему не в полной мере. Например, при увеличении уровня модуляции увеличивается скорость передачи данных, но одновременно увеличивается и вероятность ошибки. Поэтому в качестве критерия производительности системы связи удобнее использовать пропускную способность (ПС), которая представляет собой среднее число правильно переданных информационных бит за единицу времени, то есть скорость правильной передачи данных.

В качестве единицы времени удобно выбрать длительность одного пространственного символа. Если  $K_0$  – число используемых подканалов ( $K_0 \leq K$ ), то с помощью одного символа будет передано  $K_0 k_b R_c$  информационных бит, где  $k_b$  – битовая загрузка символа (уровень модуляции),  $R_c$  – скорость кодера.

Обозначим через PER (Packet Error Rate) вероятность ошибки передачи пакета, состоящего из некоторого числа  $L$  бит. Если все биты декодированы правильно, то данный пакет передан правильно. Если хотя бы один бит декодирован с ошибкой, то пакет передан с ошибкой. Тогда PER определяется отношением числа ошибочно переданных пакетов к общему числу пакетов. В результате для ПС имеем:  $Th = (1 - PER)K_0 k_b R_c$ . Удобно нормировать ПС  $Th$  на мак-

симальную ПС равную  $Th_{max} = Kk_b R_c$ , которая обеспечивается при использовании всех  $K$  подканалов ( $K = \min\{M, N\}$ ) и безошибочной передаче данных ( $PER=0$ ). При этом нормированная ПС будет равна

$$Th_{norm} = (K_0/K)(1 - PER). \quad (3.2.38)$$

Такая ПС зависит от конкретного вида кодера. Часто удобнее рассматривать эффективную ПС, которая основана на передаче некодированной информации и косвенном учете кодера без конкретизации его вида [36]. Зададим максимально допустимое число  $v$  ошибочных бит в пакете и будем считать, что кодер может исправить эти биты. Следовательно, пакет считается переданным правильно при меньшем или равном  $v$  числу ошибочных некодированных бит.

Вероятность, что в пакете из  $n$  бит имеется  $j$  ошибочно и  $(n-j)$  правильно детектированных бит равна  $C_n^j BER^j (1 - BER)^{n-j}$ , где  $C_n^j$  – число сочетаний из  $n$  по  $j$ . Учтем далее, что с единичной вероятностью возможны два противоположных события: пакет передан правильно (число ошибочно переданных бит равно  $0, 1, \dots, v_{max}$ ) или пакет передан неправильно (число ошибочно переданных бит составляет  $v_{max} + 1, v_{max} + 2, \dots, n$ ). Найдем вероятность первого события и вычтем ее из единицы. Тогда для вероятности  $PER^{(0)}$  ошибки передачи некодированного пакета получим [36]

$$PER^{(0)} = 1 - \sum_{j=0}^v C_n^j BER^j (1 - BER)^{n-j}. \quad (3.2.39)$$

При этом нормированная эффективная ПС ММО-системы будет равна

$$Th_{norm}^{(eff)} = \frac{K_0}{\min(M, N)} \sum_{j=0}^v C_n^j BER^j (1 - BER)^{n-j}. \quad (3.2.40)$$

Приведем результаты моделирования для нормированной эффективной ПС двух ММО-систем с одинаковым ( $M=N=4$ ) и разным ( $M=4, N=8$ ) числом передающих и приемных антенн в релейском некоррелированном канале для 4ФМ-сигналов. Длину пакета зададим равной 200 бит и будем считать, что кодер может исправить до 10 % ошибочных бит, т.е. максимальное число ошибочных бит в пакете может быть 20.

На рис. 3.13 показана нормированная эффективная ПС в зависимости от ОСШ (дБ). Видно, что в области низких ОСШ в системе с разным числом антенн обеспечивается значительно большая ПС за счет большего числа используемых подканалов (см. рис. 3.12).

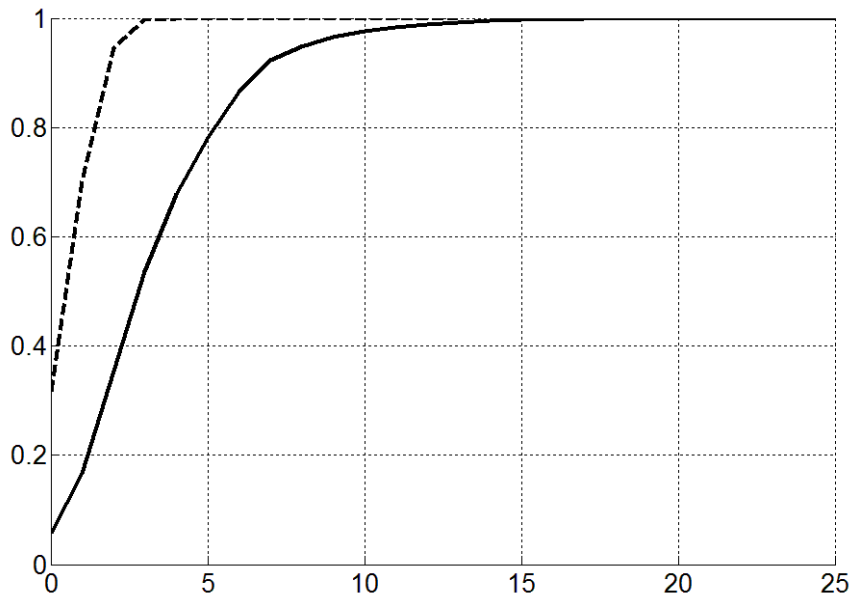


Рис. 3.13. Пропускная способность в зависимости от ОСШ (дБ),  $M=N=4$  (сплошные кривые) и  $M=4, N=8$  (пунктирные кривые)

### 3.2.4. Пороговый метод минимизации вероятности битовой ошибки

В общем случае требования увеличения скорости передачи и уменьшения вероятности битовой ошибки являются противоречивыми. Наибольшая скорость в ММО-системе будет обеспечена при использовании всех подканалов. Однако вероятность битовой ошибки может становиться неприемлемо большой в энергетически слабых подканалах, что может привести к недопустимому увеличению результирующей вероятности ошибки. Если допустить определенные потери в скорости, то можно не передавать информацию по слабым подканалам и тем самым уменьшить вероятность ошибки. Такой подход будет обеспечивать компромисс между скоростью передачи и вероятностью ошибки.

Для формирования собственных подканалов приемник оценивает матрицу  $\mathbf{H}$  и затем эта информация сообщается на передающую сторону по обратной линии связи, показанной на рис. 3.7. Обычно поток сигналов разделяется на группы длительностью  $\tau_{gr}$ , и оценка матрицы  $\mathbf{H}$  производится один раз для каждой группы. Поэтому для эффективного отслеживания состояния канала (элементов матрицы  $\mathbf{H}$ ) длительность  $\tau_{gr}$  группы символов должна быть выбрана меньше времени корреляции  $\tau_{cor}$  федингов.

Матрица  $\mathbf{H}$  всегда оценивается с некоторой ошибкой, обусловленной влиянием собственных шумов приемных устройств и изменением состояния канала между двумя его последовательными оценками. Однако мы рассмотрим потенциальные характеристики ММО-системы при точно известной матрице  $\mathbf{H}$  на обоих концах линии связи. Будем также считать, что пространственный канал (матрица  $\mathbf{H}$ ) остается постоянным в течение каждой группы символов и изменяется случайным образом по некоторому закону (например, релеевскому) от

одной группы к другой. Так как матрица  $\mathbf{H}$  предполагается фиксированной («замороженной») на время, равное длительности группы  $\tau_{gr}$ , то число используемых собственных подканалов будет постоянным в течение этого интервала времени, изменяясь случайным образом с частотой  $1/\tau_{gr}$ .

Рассмотрим пороговый метод минимизации вероятности битовой ошибки в ММО-системе, основанный на разделении собственных подканалов на энергетически сильные и слабые [14].

При использовании всех  $K$  подканалов одновременно передается  $k_b K$  кодированных бит или  $k_b K R_c$  некодированных бит, то есть скорость передачи будет максимальной и равной  $R_{max} = k_b K R_c$  бит/символ. Отключение слабых собственных подканалов приводит к уменьшению скорости передачи.

Введем в рассмотрение матрицу  $\mathbf{H}^{(p)}$ , равную

$$\mathbf{H}^{(p)} = \begin{cases} \rho_0 \mathbf{H} \mathbf{H}^H & (M > N), \\ \rho_0 \mathbf{H}^H \mathbf{H} & (M < N). \end{cases} \quad (3.2.41)$$

Пороговый метод [14] разделения собственных подканалов на сильные и слабые заключается в разделении собственных чисел  $\lambda^{(p)}$  матрицы  $\mathbf{H}^{(p)}$  на две группы чисел, превышающих или не превышающих пороговое значение. Это значение зависит от статистических свойств собственных чисел матрицы  $\mathbf{H}^{(p)}$  в (3.2.41) и от наименьшего ОСШ  $\rho_{min}$ , при котором обеспечивается обслуживание пользователей.

В случае некоррелированных релейских замираний сигналов («городской» тип канала) одномерная плотность вероятности неранжированных собственных чисел матрицы  $\mathbf{H} \mathbf{H}^H$  или  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  получена в [15] и имеет вид (2.1.3). Учитывая, что  $\lambda^{(p)} = \rho_0 \lambda$ , получим из (2.1.3) одномерную плотность вероятности неранжированных собственных чисел  $\lambda^{(p)}$  матрицы  $\mathbf{H}^{(p)}$  в виде [19]:

$$f(\lambda^{(p)}, \rho_0) = \frac{1}{K \rho_0^{q+1}} \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(i)!}{(i+q)!} \left[ L_i^q(\lambda^{(p)}/\rho_0) \right]^2 (\lambda^{(p)})^q \exp(-\lambda^{(p)}/\rho_0). \quad (3.2.42)$$

В случае одинакового числа передающих и приемных антенн ( $M=N$ ) матрицы  $\mathbf{H} \mathbf{H}^H$  и  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  совпадают между собой, а выражение (2.1.3) для плотности вероятности неранжированных собственных чисел матриц  $\mathbf{H} \mathbf{H}^H$  и  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  значительно упрощается и принимает вид (2.1.5). Тогда для одномерной плотности вероятности  $f(\lambda_i^{(p)}, \rho_0)$  вместо (3.2.42) будем иметь

$$f(\lambda^{(p)}, \rho_0) = \frac{1}{2\pi N \rho_0} \sqrt{\frac{4N \rho_0 - \lambda^{(p)}}{\lambda^{(p)}}}. \quad (3.2.43)$$

Для вероятности  $p$  нахождения собственного числа  $\lambda^{(p)}$  матрицы  $\mathbf{H}^{(p)}$  в интервале  $0 < \lambda^{(p)} < \lambda_{tg}^{(p)}$  при среднем ОСШ  $\rho_0$  получим

$$p(\lambda_{tg}^{(\rho)}, \rho_0) = \int_0^{\lambda_{tg}^{(\rho)}} f(\lambda^{(\rho)}, \rho_0) d\lambda^{(\rho)}. \quad (3.2.44)$$

Вероятность превышения порога для собственного числа  $\lambda_i^{(\rho)}$  при ОСШ  $\rho_0$  равна  $1 - p(\lambda_{tg}^{(\rho)}, \rho_0)$ . Поэтому уравнение  $[1 - p(\lambda_{tg}^{(\rho)}, \rho_0)] = R(\rho_0)/R_{max}$  будет определять вероятность использования  $i$ -го собственного подканала, для которого величина  $\rho_0 \lambda_i > \lambda_{tg}^{(\rho)}$ , где  $R(\rho_0)$  – скорость передачи при ОСШ равном  $\rho_0$ .

Зададим минимальную скорость  $R_{min}$  передачи данных для минимального ОСШ  $\rho_{min}$ , при котором обеспечивается обслуживание пользователей. При этом пороговое значение будет зависеть от  $\rho_{min}$  и  $R_{min}$ , то есть  $\lambda_{tg}^{(\rho)} = \lambda_{tg}^{(\rho)}(\rho_{min}, R_{min})$ . Задавая  $R_{min}/R_{max}$  и решая обратную задачу, пороговое значение  $\lambda_{tg}^{(\rho)}(\rho_{min}, R_{min})$  для разделения собственных чисел матрицы  $\mathbf{H}^{(\rho)}$  найдем из уравнения вида:

$$p[\rho_{min}, \lambda_{tg}^{(\rho)}(\rho_{min}, R_{min})] = 1 - R_{min}/R_{max}. \quad (3.2.45)$$

При этом будет обеспечиваться минимальная скорость  $R_{min}$  передачи данных при наименьшем ОСШ  $\rho_{min}$ . С ростом ОСШ собственные числа матрицы  $\mathbf{H}^{(\rho)}$  в (3.2.41) увеличиваются. Следовательно, число собственных чисел, превышающих выбранный порог, также будет увеличиваться, что означает увеличение скорости передачи данных.

Отобранные собственные подканалы имеют наибольшие ОСШ, поэтому вероятность битовой ошибки в ММО-системе будет меньше, чем в случае использования всех  $K$  подканалов. В отобранных подканалах будем использовать оптимальное распределение мощности (3.2.37).

Приведем сравнительные результаты численного моделирования эффективности двух методов передачи данных в ММО-системе. Первый из них (пороговый метод) основан на отборе сильных собственных подканалов с помощью пороговой техники и оптимальном распределении мощности (3.2.37) по оставшимся подканалам. Второй метод основан на использовании оптимального распределения мощности передатчика по всем подканалам в соответствии с выражением (3.2.37). В качестве характеристик системы будем рассматривать вероятность битовой ошибки и нормированную эффективную ПС, усредненные по замираниям сигналов в пространственном канале связи.

Пространственный канал предполагается случайным с некоррелированными релеевскими замираниями сигналов в разных антеннах («городской» тип). Элементы  $h_{nm}$  матрицы  $\mathbf{H}$  являются независимыми комплексными гауссовыми случайными величинами с нулевым средним и единичной дисперсией [19]. Фаза коэффициентов  $h_{nm}$  равномерно распределена в пределах  $[0 \div 2\pi]$ , а амплитуда подчиняется релеевскому распределению. Дисперсию канальных коэффициентов будем считать единичной ( $\langle |h_{nm}|^2 \rangle = 1$ ). Будем считать, что время корреляции

канальных коэффициентов больше времени передачи пакета. Тогда матрицу  $\mathbf{H}$  можно считать постоянной для данного пакета и случайно изменяющейся для разных пакетов (квазистатическое приближение). Гауссовы собственные шумы имеют нулевое среднее и единичную мощность.

Рассмотрим две ММО-системы с одинаковым и разным числом передающих и приемных антенн ( $M=N=4$  и  $M=4, N=8$ ). Максимальное число собственных подканалов в этих системах  $K=4$ . Зададим скорость передачи данных для минимального среднего ОСШ  $\rho_{min}=0$  дБ равную  $R_{min}=0.5R_{max}$ , что соответствует формированию в среднем двух собственных подканалов при  $\rho_{min}=0$  дБ. С ростом ОСШ среднее число собственных подканалов будет увеличиваться. Длину пакета зададим равной  $L=200$  бит, число реализаций матрицы  $\mathbf{H}$  равно 1000000.

На рис. 3.14 (слева) показаны кривые для вероятности битовой ошибки в зависимости от ОСШ  $\rho_0$  при числе антенн  $M=N=4$  и 4ФМ-сигналах. Кодер может исправить до 10 % ошибочных бит (максимальное число ошибочных бит в пакете равно 20). Кривые для нормированной эффективной ПС приведены на рис. 3.14 (справа). Видно, что отбор сильных собственных подканалов дает выигрыш в ОСШ  $\approx 5$  дБ по уровню вероятности ошибки 0.01 и более высокую ПС при низких значениях ОСШ ( $< 4$  дБ). Аналогичные кривые при 16КАМ-сигналах даны на рис. 3.15. Из сравнения этих рисунков следует, что изменение уровня модуляции привело к тому, что по вероятности ошибки выигрыш в ОСШ для метода 2 по сравнению с методом 1 уменьшился до  $\approx 2$  дБ. Однако при этом значительно увеличился выигрыш в ПС (4 дБ по уровню 0.5).

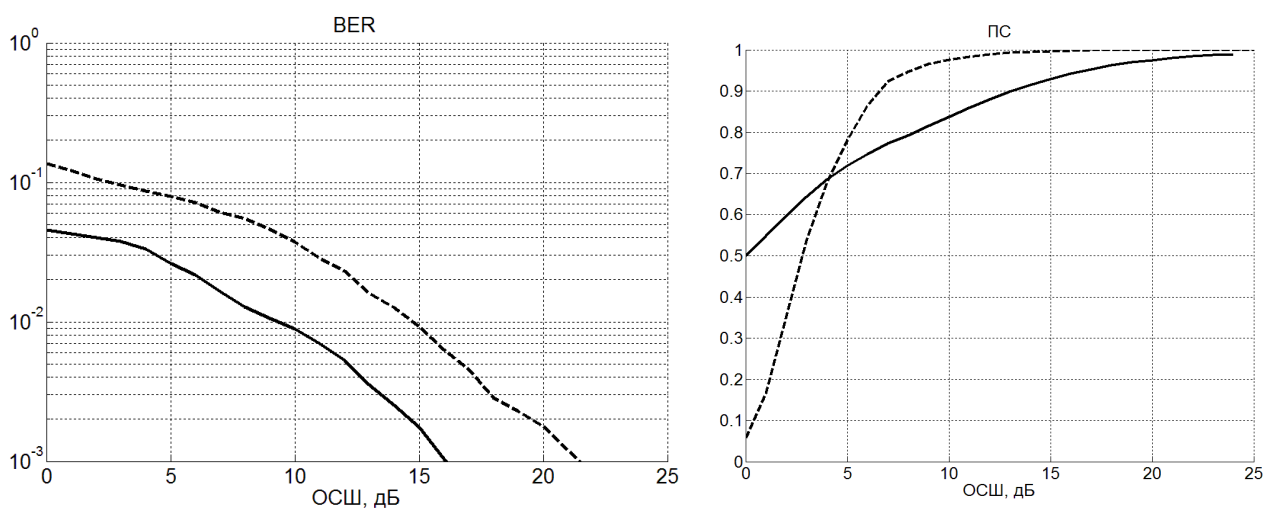


Рис. 3.14. BER и нормированная ПС для методов с отбором и без отбора сильных подканалов (сплошные и пунктирные кривые, соответственно),  $M=4, N=4$ , 4ФМ-сигналы



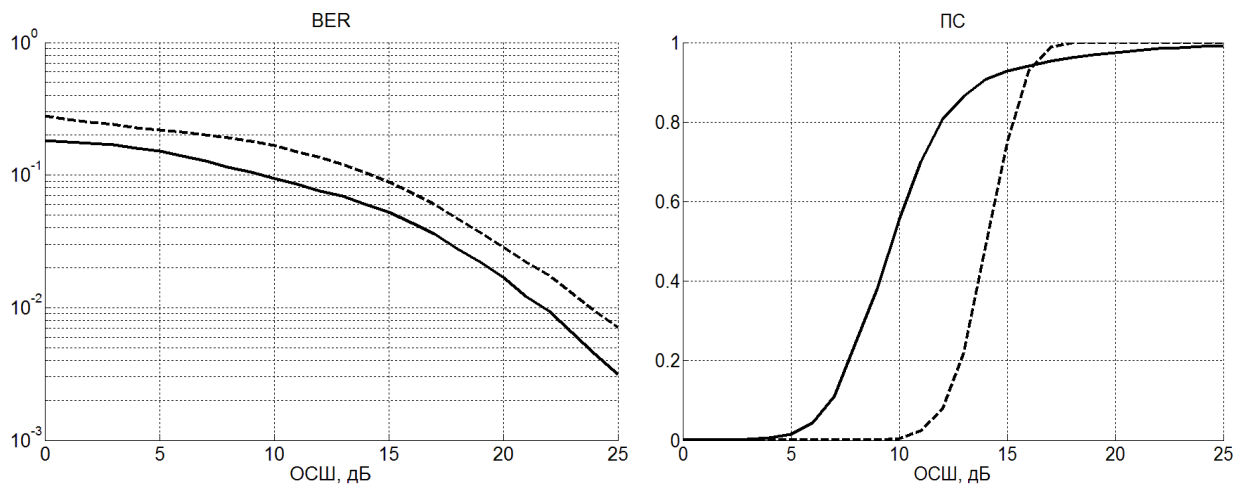


Рис. 3.15. BER и нормированная ПС для методов с отбором и без отбора сильных подканалов (сплошные и пунктирные кривые, соответственно),  $M=4$ ,  $N=4$ , 16КАМ-сигналы

На рис. 3.16 приведены кривые для вероятности битовой ошибки в зависимости от среднего ОСШ  $\rho_0$  при разном числе антенн ( $M=4$ ,  $N=8$ ) и 4ФМ-сигналах для кодера, исправляющего до 5 % ошибочных бит. Видно, что метод 2 обеспечивает выигрыш по вероятности ошибки во всей области ОСШ, а по ПС – при ОСШ меньших 4 дБ.

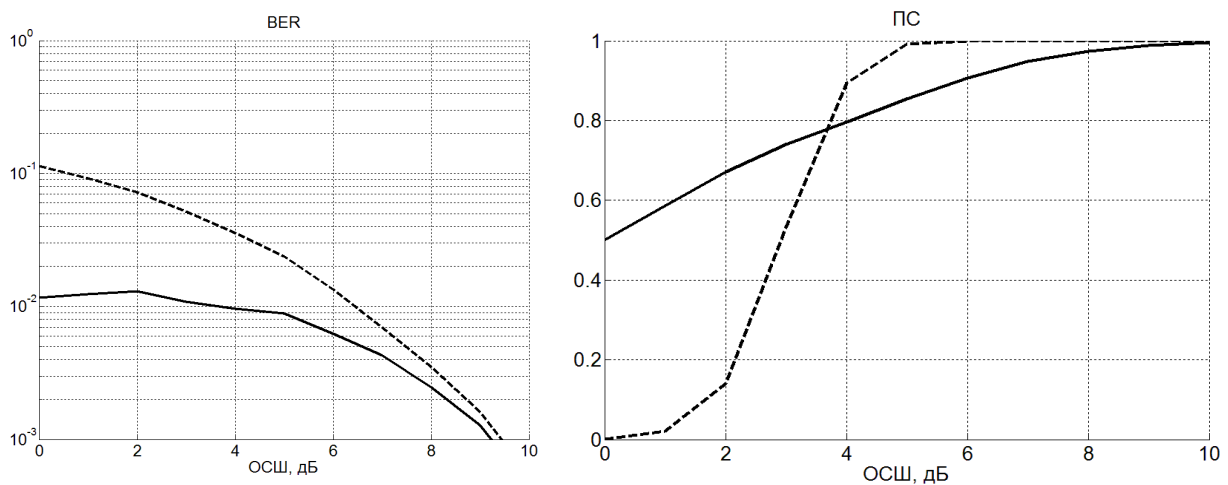


Рис. 3.16. BER и нормированная ПС для методов с отбором и без отбора сильных подканалов (сплошные и пунктирные кривые, соответственно),  $M=4$ ,  $N=8$ , 4ФМ-сигналы

Из представленных результатов следует, что пороговый метод обеспечивает лучшие характеристики (вероятность битовой ошибки и эффективную ПС) ММО-системы, особенно в области достаточно низких значений ОСШ.

### 3.3. Ортогональное пространственно-временное блочное кодирование

В подразделе 1.1 рассматривались СИМО-системы с одной передающей антенной и с разнесенным приемом на  $N$  антенн. При когерентном суммировании сигналов в приемных антеннах, выходное ОСШ дается выражением (1.1.5). В

подразделе (1.2) анализировались MISO-системы с разнесенной передачей из  $M$  антенн и с одной приемной антенной, использующие ортогональное пространственно-временное блочное кодирование. Для таких систем ОСШ определяется формулой (1.2.20). Теперь рассмотрим обобщение на случай произвольного числа приемных антенн.

Теперь ОСШ будет равно

$$\rho = \rho_0 \sum_{i=1}^N |\tilde{h}_i|^2 = \frac{\rho_0}{M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |h_{ij}|^2 = \frac{\rho_0}{M} \|\mathbf{H}\|^2. \quad (3.3.1)$$

Сравним ОСШ (3.3.1) в системе с  $M$  передающими и  $N$  приемными антеннами с ОСШ в системе с разнесенным приемом на  $NM$  антенн, которое определяется (1.1.5), если в нем заменить  $N$  на  $NM$ . Видно, что ОСШ подчиняются одинаковому закону распределения (хи-квадрат-распределение с  $2NM$  степенями свободы). Поэтому ортогональное пространственно-временное блочное кодирование обеспечивает максимальный порядок разнесения, равный общему числу  $NM$  некоррелированных ветвей разнесения. Следовательно, при достаточно больших ОСШ вероятность битовой ошибки при ортогональном блочном кодировании уменьшается обратно пропорционально произведению  $NM$ .

Существует одно различие – среднее ОСШ для разнесенной передачи меньше в  $1/M$  раз из-за деления мощности между передающими антеннами. Отсюда следует, что кривые вероятности битовой ошибки для такой передачи будут смещены вправо на  $10 \cdot \lg(M)$  дБ по сравнению с соответствующими кривыми для разнесенного приема на  $NM$  антенн (см. рис. 1.3). Например, если  $M=2$  и  $N=4$ , то кривые вероятности ошибки будут сдвинуты на 3 дБ по сравнению с кривыми на рис. 1.3. В обратном случае ( $M=4$ ,  $N=2$ ) мощность разделяется между 4 антеннами, и сдвиг кривых увеличивается до 6 дБ.

Таким образом, ортогональное пространственно-временное блочное кодирование обеспечивает максимальный порядок разнесения. Однако скорость передачи данных ( $R_{s-t}$ ) либо сохраняется (число передающих антенн  $M=2$ ), либо уменьшается ( $M>2$ ) по сравнению с системой без разнесенной передачи.

Сравним СЭ MIMO-системы с ортогональным пространственно-временным блочным кодированием со СЭ (2.2.14) MIMO-системы без обратной связи. С этой целью преобразуем (2.2.14) к виду

$$C = \log_2 \prod_{i=1}^K \left( 1 + \frac{\rho_0}{M} \lambda_i \right) = \log_2 \left( 1 + \frac{\rho_0}{M} \sum_{i=1}^K \lambda_i + \frac{\rho_0^2}{M} a + \frac{\rho_0^3}{M} b + \dots \right), \quad (3.3.2)$$

где  $a, b$  – некоторые положительные числа.

Учитывая (3.3.1) для СЭ MIMO-системы с ортогональным пространственно-временным блочным кодированием получим

$$C = \rho_0 \log_2 \left( 1 + \frac{\rho_0}{M} \sum_{i=1}^K \lambda_i \right). \quad (3.3.3)$$

Из (3.3.2) и (3.3.3) следует, что  $C_{ort} < C$ . Таким образом, СЭ системы с ортогональным блочным кодом меньше, чем СЭ ММО-системы без обратной связи.

На рис. 3.20 приведена средняя СЭ в зависимости от ОСШ  $\rho_0$  для ММО-систем с ортогональным блочным пространственно-временным кодированием, в которых передающих антенн не больше, чем приемных. Для сравнения показана СЭ для ММО-систем без обратной связи с пространственным кодированием. Аналогичные кривые показаны на рис. 3.21 для ММО-систем, в которых передающих антенн не меньше, чем приемных. Видно, что использование ортогонального блочного кодирования приводит к уменьшению СЭ, особенно значительному в системах с большим числом передающих антенн.

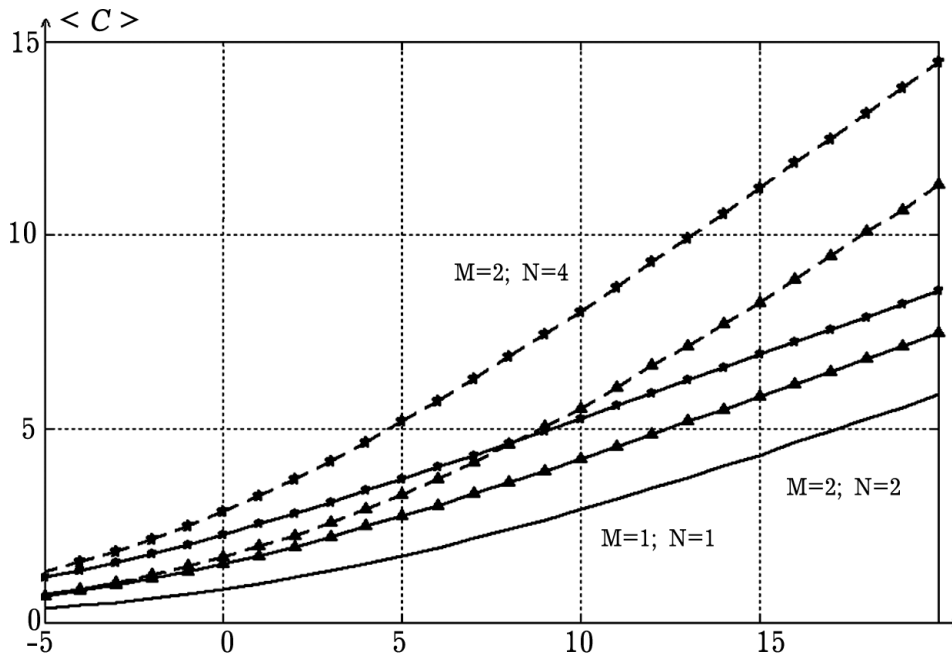


Рис. 3.20. Средняя СЭ в зависимости от ОСШ: сплошные кривые – ортогональное пространственно-временное кодирование, пунктирные кривые – пространственное кодирование

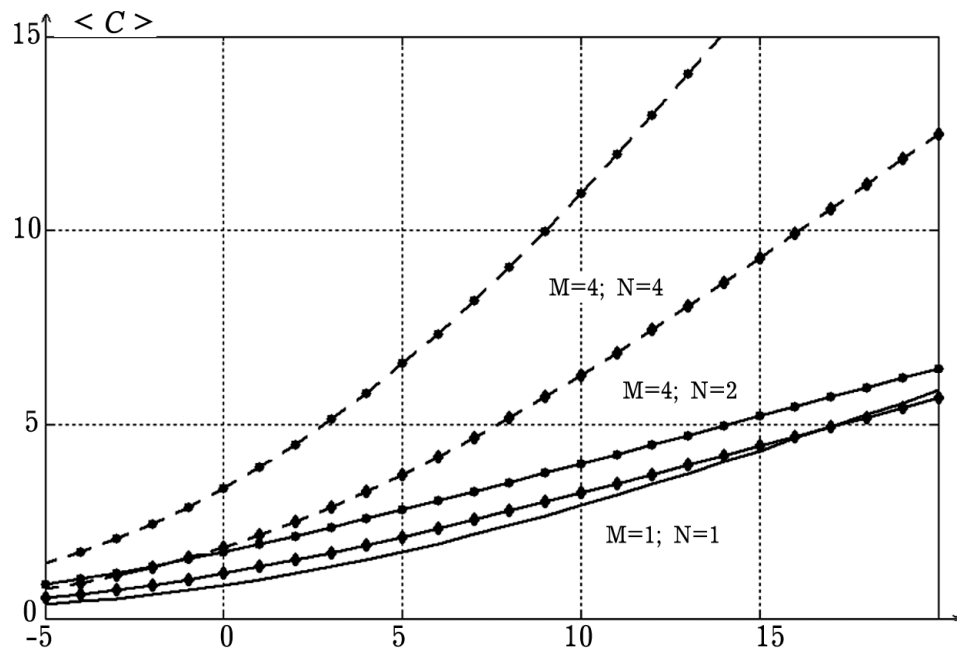


Рис. 3.21. Средняя СЭ в зависимости от ОСШ: сплошные кривые – ортогональное пространственно-временное кодирование, пунктирные кривые – пространственное кодирование

## ГЛАВА 4. ОЦЕНКА ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОЛУЧЕВОГО КАНАЛА

Многолучевой канал связи характеризуется импульсной характеристикой (ИХ). Для SISO-системы связи с одной передающей и одной приемной антеннами, ИХ канала в дискретной форме можно представить набором комплексных коэффициентов  $h(0), h(1), \dots, h(m)$ , где  $h(0)$  – коэффициент передачи прямого сигнала, а  $h(1), \dots, h(m)$  – коэффициенты передачи задержанных сигналов.

Если длительность импульсов много больше максимальной задержки, то канал является частотно-неселективным и его ИХ содержит единственный коэффициент  $h(0)$ . Канал может быть частотно-селективным, особенно для широкополосных систем связи, когда прямой и задержанные сигналы можно принять отдельно. Примером является CDMA-система связи с кодовым разделением пользователей, в которой применяется дополнительная модуляция сигналов ортогональными кодовыми псевдошумовыми последовательностями (КПШП) Уолша [4]. Задержки сигналов в канале, являясь пренебрежимо малыми по сравнению с длительностью сигнала, могут быть сравнимыми или большими длительности элемента КПШП. В этом случае свойства ИХ канала описываются комплексными коэффициентами  $h(0), h(1), \dots, h(m)$ .

Для SIMO-системы связи с одной передающей и несколькими приемными антеннами канал характеризуется набором ИХ, то есть многоканальной импульсной характеристикой (МИХ). В случае MIMO-системы с несколькими передающими и приемными антеннами канал можно характеризовать набором МИХ, каждая из которых соответствует одной передающей антенне.

Для оценки МИХ многолучевого канала используются обучающие (известные приемнику) сигналы, например, в виде псевдошумовой последовательности, состоящей из  $L$  импульсов.

### 4.1. Система связи с одной приемной антенной

Вначале рассмотрим проблему оценивания ИХ, когда система имеет одну передающую и одну приемную антенну. Эту проблему можно разделить на две:

- оценка значений ИХ  $h(0), h(1), \dots, h(m)$  при заданной длине  $m$  ИХ;
- оценка длины ИХ ( $m+1$ ).

**Оценка ИХ при заданной длине.** Рассмотрение начнем с самого простого случая, когда канал является частотно-неселективным, а последовательность обучающих сигналов содержит один импульс. В этом случае принятый сигнал можно записать в виде:

$$x = h(0)s + z, \quad (4.1.1)$$

где  $s$  – обучающий сигнал, амплитуда которого зависит от мощности передатчика,  $z$  – шум приемника. Будем считать дисперсию коэффициента  $h(0)$  равной

единице ( $\langle |h(0)|^2 \rangle = 1$ ), а шум – некоррелированным комплексным гауссовым процессом с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_0^2$ .

Плотность вероятности шума имеет вид:

$$f(z) = \frac{1}{\pi\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{|z|^2}{\sigma_0^2}\right). \quad (4.1.2)$$

Принятый сигнал (4.1.1) также будет гауссовым процессом со средним  $\langle x \rangle = h(0)s$  и дисперсией  $\sigma_0^2$ . Поэтому плотность вероятности сигнала равна

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{|x - h(0)s|^2}{\sigma_0^2}\right). \quad (4.1.3)$$

Задача заключается в том, чтобы оценить канальный коэффициент  $h(0)$ , если принятый сигнал имеет некоторое значение  $x$ . В этом случае функция  $f(x)$  в (4.1.3) имеет смысл функции правдоподобия относительно неизвестного параметра  $h(0)$ . В соответствии с методом максимального правдоподобия необходимо выбрать параметр  $h(0)$  так, чтобы функция правдоподобия принимала максимальное значение. Это имеет место при условии минимума величины  $|x - h(0)s|^2$  в (4.1.3). Учтем, что  $|x - h(0)s|^2 = (x - h(0)s)(x^* - h^*(0)s^*)$  и приравняем к нулю производную от этого выражения по искомому параметру  $h(0)$ . В результате получим, что  $(sx^* - h^*(0)|s|^2) = 0$ . Отсюда для оценки  $\hat{h}(0)$  канального коэффициента  $h(0)$  будем иметь

$$\hat{h}(0) = \frac{xs^*}{|s|^2}. \quad (4.1.4)$$

Оценка (4.1.4) является случайной величиной, так как зависит от принятого сигнала  $x$ . Подставляя (4.1.1) в (4.1.4), будем иметь

$$\hat{h}(0) = h(0) + \frac{zs^*}{|s|^2}. \quad (4.1.5)$$

Так как шум имеет нулевое среднее, оценка канала является несмещенной, т.е.  $\langle \hat{h}(0) \rangle = h(0)$ . Для дисперсии оценки из (4.1.5) получим, что

$$\langle |\hat{h}(0) - \langle \hat{h}(0) \rangle|^2 \rangle = \frac{\sigma_0^2}{|s|^2} = \frac{1}{\rho}, \quad (4.1.6)$$

где  $\rho$  – ОСШ. Отсюда следует, что дисперсия оценки обратно пропорциональна ОСШ и точность оценивания канала зависит только от ОСШ.

Точность оценивания ИХ канала может быть недостаточной при одном обучающем сигнале. Рассмотрим ситуацию, когда для оценки канала применяется последовательность известных сигналов длительностью  $L$ . В этом случае приемник регистрирует последовательность сигналов

$$x(k) = h(0)s(k) + z(k); \quad k = (1 \div L), \quad (4.1.7)$$

где  $k$  – индекс дискретного времени,  $s(k)$  –  $k$ -я выборка обучающей последовательности,  $z(k)$  –  $k$ -я выборка собственного шума.

Обозначим:  $\mathbf{X}=[x(1), x(2), \dots, x(L)]^T$  – вектор принятых сигналов,  $\mathbf{S}=[s(1), s(2), \dots, s(L)]^T$  – вектор сигналов обучающей последовательности и  $\mathbf{Z}=[z(1), z(2), \dots, z(L)]^T$  – вектор шума. Тогда (4.1.7) принимает в векторной форме вид:

$$\mathbf{X} = h(0)\mathbf{S} + \mathbf{Z}. \quad (4.1.8)$$

Поскольку шумовые выборки статистически независимые, их многомерная плотность вероятности равна произведению одномерных плотностей вероятности вида (4.1.2). Следовательно,

$$f[z(1), z(2), \dots, z(L)] = \frac{1}{(\pi\sigma_0^2)^L} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{k=1}^L |z(k)|^2\right). \quad (4.1.9)$$

Выражение (4.1.9) перепишем в виде

$$f[\mathbf{Z}] = \frac{1}{(\pi\sigma_0^2)^L} \exp\left(-\frac{\mathbf{Z}^H \mathbf{Z}}{\sigma_0^2}\right). \quad (4.1.10)$$

Многомерную плотность вероятности для принятых сигналов найдем из (4.1.8) и (4.1.10). В результате будем иметь, что

$$f[\mathbf{X}] = \frac{1}{(\pi\sigma_0^2)^L} \exp\left(-\frac{(\mathbf{X} - h(0)\mathbf{S})^H (\mathbf{X} - h(0)\mathbf{S})}{\sigma_0^2}\right). \quad (4.1.11)$$

Снова рассмотрим выражение (4.1.11) как функцию правдоподобия относительно неизвестного параметра  $h(0)$ . Тогда оценку максимального правдоподобия можно представить следующим уравнением:

$$\hat{h}(0) = \frac{\mathbf{S}^H \mathbf{X}}{\mathbf{S}^H \mathbf{S}} = \frac{\mathbf{S}^H \mathbf{X}}{|\mathbf{S}|^2}. \quad (4.1.12)$$

Переходя к компонентам векторов, (4.1.12) запишем в виде

$$\hat{h}(0) = \sum_{k=1}^L s^*(k)x(k) \left[ \sum_{k=1}^L |s(k)|^2 \right]^{-1}. \quad (4.1.13)$$

Чтобы определить точность оценивания канального коэффициента, подставим (4.1.8) в (4.1.12) и получим, что

$$\hat{h}(0) = h(0) + \frac{\mathbf{S}^H \mathbf{Z}}{|\mathbf{S}|^2}. \quad (4.1.14)$$

Таким образом, оценка (4.1.14) является несмещенной, как и в случае одного обучающего сигнала. Однако дисперсия этой оценки становится меньше. Чтобы показать это из (4.1.14) найдем, что

$$\langle |\hat{h}(0) - \langle \hat{h}(0) \rangle|^2 \rangle = \frac{\mathbf{S}^H \langle \mathbf{Z}\mathbf{Z}^H \rangle \mathbf{S}}{|\mathbf{S}|^4}. \quad (4.1.15)$$

Поскольку выборки шума не коррелированы между собой, корреляционная матрица шума  $\langle \mathbf{Z}\mathbf{Z}^H \rangle = \sigma_0^2 \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица. Теперь (4.1.15) преобразуется к виду

$$\langle |\hat{h}(0) - \langle \hat{h}(0) \rangle|^2 \rangle = \frac{\sigma_0^2}{|\mathbf{S}|^2} = \left[ \sum_{k=1}^L \rho(k) \right]^{-1}, \quad (4.1.16)$$

где  $\rho(k) = |s(k)|^2 / \sigma_0^2$  – ОСШ для  $k$ -го обучающего сигнала.

Из (4.1.16) следует, что дисперсия канальной оценки обратно пропорциональна ОСШ, просуммированному по всем сигналам обучающей последовательности. Если сигналы имеют одинаковую амплитуду, то дисперсия оценки (4.1.16) меньше в  $L$  раз, чем дисперсия оценки (4.1.6).

Теперь рассмотрим более общую задачу, когда ИХ содержит  $(m+1)$  канальных коэффициентов  $h(0), h(1), \dots, h(m)$  и для ее оценки применяется последовательность сигналов длительностью  $L$ . В этом случае приемник регистрирует последовательность сигналов

$$x(k) = \sum_{n=0}^m h(n)s(k-n) + z(k). \quad (4.1.17)$$

Плотность вероятности входного сигнала  $x(k)$  имеет вид:

$$f[x(k)] = \frac{1}{\pi\sigma_0^2} \exp \left( -\frac{1}{\sigma_0^2} \left| x(k) - \sum_{n=0}^m h(n)s(k-n) \right|^2 \right). \quad (4.1.18)$$



Из-за задержек сигналов, для оценки канальных коэффициентов необходимо увеличить длину последовательности принятых сигналов по сравнению с длиной  $L$  обучающей последовательности. В данном случае число задержанных сигналов равно  $m$ , и поэтому длину последовательности принятых сигналов выберем равной  $L+m$ .

Принятые сигналы  $x(1), x(2), \dots, x(L+m)$  являются статистически независимыми. Поэтому их совместная плотность вероятности равна произведению одномерных функций плотности вероятности (4.1.18), то есть

$$f[x(1), x(2), \dots, x(L+m)] = \frac{1}{(\pi\sigma_0^2)^{L+m}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{k=1}^{L+m} \left|x(k) - \sum_{n=0}^m h(n)s(k-n)\right|^2\right). \quad (4.1.19)$$

В общем случае неизвестными величинами в (4.1.19) являются значения ИХ  $h(0), h(1), \dots, h(m)$  и число  $m$  задержанных лучей. Однако сейчас мы считаем, что число  $m$  задержанных лучей задано. Мощность собственного шума  $\sigma_0^2$  обычно считается известной, поскольку она может быть измерена. Однако для общности рассмотрения будем предполагать, что мощность собственного шума также подлежит оценке как параметр функции правдоподобия (4.1.19). Значения искоемых параметров, которые обеспечивают максимальное значение функции правдоподобия (4.1.19), называются максимально правдоподобными оценками.

Найдем логарифм от функции правдоподобия (4.1.19) в виде

$$\ln f[x(1), \dots, x(L+m)] = -(L+m)(\ln \pi + \ln \sigma_0^2) - \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{k=1}^{L+m} \left|x(k) - \sum_{n=0}^m h(n)s(k-n)\right|^2. \quad (4.1.20)$$

Максимум плотности вероятности будет при следующих условиях:

$$\frac{\partial \ln f[x(1), x(2), \dots, x(L+m)]}{\partial h^*(q)} = 0, \quad \frac{\partial \ln f[x(1), x(2), \dots, x(L+m)]}{\partial \sigma_0^2} = 0, \quad (4.1.21)$$

где  $q=0, 1, \dots, m$ .

Первые  $(m+1)$  условий в (4.1.21) представляют собой  $(m+1)$  линейных уравнений, из которых можно найти оценки канальных коэффициентов  $h(0), h(1), \dots, h(m)$ . Эти уравнения имеют вид

$$\sum_{n=0}^m h(n) \sum_{k=1}^{L+m} s(k-n)s^*(k-q) = \sum_{k=1}^{L+m} x(k)s^*(k-q) \quad q=0, 1, 2, \dots, m. \quad (4.1.22)$$

Введем в рассмотрение матрицу  $\mathbf{M}$  и вектор  $\mathbf{R}$  с элементами

$$M(q, n) = \sum_{k=1}^{L+m} s(k-n)s^*(k-q), \quad R(q) = \sum_{k=1}^{L+m} x(k)s^*(k-q) \quad (4.1.23)$$

и перепишем (4.1.22) в виде

$$\sum_{n=0}^m M(q,n)h(n) = R(q), \quad (q=0,1,2,\dots, m). \quad (4.1.24)$$

Второе условие в (4.1.21) дает нам оценку дисперсии шума в виде

$$\sigma^2 = \frac{1}{L+m} \sum_{k=1}^{L+m} \left| x(k) - \sum_{n=0}^m h(n)s(k-n) \right|^2. \quad (4.1.25)$$

Если оценки  $\hat{h}(0), \hat{h}(1), \dots, \hat{h}(m)$ , полученные путем решения системы (4.1.24), подставить в (4.1.25), то мы получим оценку дисперсии шума  $\sigma_{min}^2$ .

Если не делать предположения о гауссовости шума  $z(k)$ , то уравнение (4.1.25) может быть рассмотрено как квадратичный функционал от переменных  $h(0), h(1), \dots, h(m)$ . Минимизируя этот функционал, мы придем к (4.1.24). Таким образом, в случае гауссова шума обе оценки (наименьшей квадратичной ошибки и максимального правдоподобия) дают одинаковый результат.

Решение задачи представим более компактно в векторно-матричной форме. Введем векторы входных данных  $\mathbf{X}=[x(1), x(2), \dots, x(L+m)]^T$ , шумов  $\mathbf{Z}=[z(1), z(2), \dots, z(L+m)]^T$ , ИХ  $\mathbf{H}=[h(0), h(1), \dots, h(m)]^T$  и обучающих сигналов  $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_m$  размерности  $(L+m)$ , равных

$$\begin{cases} \mathbf{S}_0 = [s(1), s(2), \dots, s(L), 0, 0, \dots, 0]^T, \\ \mathbf{S}_1 = [0, s(1), s(2), \dots, s(L-1), s(L), 0, \dots, 0]^T, \\ \mathbf{S}_2 = [0, 0, s(1), \dots, s(L-1), s(L), 0, \dots, 0]^T, \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{m-1} = [0, \dots, 0, s(1), \dots, s(L-1), s(L), 0]^T, \\ \mathbf{S}_m = [0, \dots, 0, 0, s(1), \dots, s(L-1), s(L)]^T. \end{cases} \quad (4.1.26)$$

Векторы  $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_m$  назовем обучающими векторами. Они отличаются друг от друга тем, что обучающая последовательность сдвигается на одну позицию при смене индекса обучающего вектора на единицу. Объединим обучающие векторы в матрицу  $\mathbf{S}=(\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_m)$  и запишем (4.1.17), (4.1.19), (4.1.24) и (4.1.25) в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{H} + \mathbf{Z}, \quad (4.1.27)$$

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{(\pi\sigma_0^2)^{L+m}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{X}-\mathbf{S}\mathbf{H})^H(\mathbf{X}-\mathbf{S}\mathbf{H})}{\sigma_0^2}\right). \quad (4.1.28)$$

$$\mathbf{M}\mathbf{H} = \mathbf{R}, \quad (4.1.29)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{L+m} |\mathbf{X} - \mathbf{S}\mathbf{H}|^2. \quad (4.1.30)$$

Матрица  $\mathbf{M}$  и вектор  $\mathbf{R}$  теперь имеют вид:  $\mathbf{M} = \mathbf{S}^H \mathbf{S}$  и  $\mathbf{R} = \mathbf{S}^H \mathbf{X}$ .

Матрица  $\mathbf{M}$  является эрмитовой и представляет собой матрицу Грамма, составленную из скалярных произведений обучающих векторов  $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_m$ :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_0^H \mathbf{S}_0 & \mathbf{S}_0^H \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_0^H \mathbf{S}_2 & \dots & \mathbf{S}_0^H \mathbf{S}_m \\ \mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_0 & \mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_2 & \dots & \mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_m \\ \mathbf{S}_2^H \mathbf{S}_0 & \mathbf{S}_2^H \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2^H \mathbf{S}_2 & \dots & \mathbf{S}_2^H \mathbf{S}_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{S}_m^H \mathbf{S}_0 & \mathbf{S}_m^H \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_m^H \mathbf{S}_2 & \dots & \mathbf{S}_m^H \mathbf{S}_m \end{pmatrix}. \quad (4.1.31)$$

Элементами главной диагонали матрицы  $\mathbf{M}$  являются квадраты модулей обучающих векторов. Если сигналы обучающей последовательности имеют одинаковые амплитуды  $|s|$ , то диагональные элементы равны между собой:

$$M(n, n) = \mathbf{S}_n^H \mathbf{S}_n = |s|^2 L, \quad (n = 0, 1, \dots, m). \quad (4.1.32)$$

Компоненты вектора  $\mathbf{R}$  являются скалярными произведениями обучающих векторов  $\mathbf{S}_n$  и вектора  $\mathbf{X}$  входных сигналов.

Решение уравнения (4.1.29) дает оценку ИХ в виде

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R} = (\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{X}. \quad (4.1.33)$$

Подставим сюда вектор принятых сигналов (4.1.27) и найдем, что

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + (\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{Z}. \quad (4.1.34)$$

Ясно, что оценка  $\hat{\mathbf{H}}$  является случайной величиной и, строго говоря, не совпадает с точным значением ИХ  $\mathbf{H}$ . Среднее значение оценки равно  $\langle \hat{\mathbf{H}} \rangle = \mathbf{H}$ , то есть оценка  $\hat{\mathbf{H}}$  является несмещенной.

Точность оценивания определяется матрицей ошибок, которая равна

$$\Delta = \langle (\hat{\mathbf{H}} - \langle \hat{\mathbf{H}} \rangle) (\hat{\mathbf{H}} - \langle \hat{\mathbf{H}} \rangle)^H \rangle. \quad (4.1.35)$$

Используя (4.1.34), преобразуем это выражение к виду

$$\Delta = (\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^H \langle \mathbf{Z} \mathbf{Z}^H \rangle \mathbf{S} (\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-1}. \quad (4.1.36)$$

Учтем, что корреляционная матрица шума  $\langle \mathbf{Z} \mathbf{Z}^H \rangle = \sigma_0^2 \mathbf{I}$ . Тогда

$$\Delta = \sigma_0^2 (\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-1} = \sigma_0^2 \mathbf{M}^{-1}. \quad (4.1.37)$$

Если обучающие векторы являются ортогональными, а сигналы имеют одинаковую амплитуду, то матрица  $\mathbf{M}$  имеет диагональный вид с элементами (4.1.32). Матрица  $\Delta$  ошибок также является диагональной и имеет одинаковые элементы равные

$$\Delta(n, n) = \frac{\sigma_0^2}{|s|^2 L}. \quad (4.1.38)$$

В этом случае оценки отсчетов ИХ  $h(n)$  ( $n=0, 1, 2, \dots, m$ ) будут статистически независимы между собой, а точность их оценивания будет одинаковой.

Точность оценки (4.1.34) определяется следующими факторами:

- ОСШ для сигналов обучающей последовательности. Увеличение ОСШ увеличивает точность оценивания ИХ;

- длиной обучающей последовательности. Ее увеличение ведет к уменьшению ошибки;

- степенью ортогональности обучающих векторов  $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_m$ .

Требование ортогональности обучающих векторов имеет большое значение. Если обучающая последовательность выбрана неудачно (нет ортогональности этих векторов), то матрица  $\mathbf{M}$  становится близкой к сингулярной матрице, а некоторые ее собственные числа становятся близкими к нулю. Это приводит к уменьшению точности оценивания, так как согласно (4.1.37) матрица ошибок определяется обратной матрицей  $\mathbf{M}^{-1}$ , собственные числа которой возрастают. Чтобы обеспечить хорошую точность оценивания ИХ, необходимо выбрать обучающую последовательность таким образом, чтобы базис, построенный на обучающих векторах, был максимально близок к ортогональному. Для этого детерминант матрицы  $\mathbf{M}$  должен быть близок к максимальному значению, равному  $(\det(\mathbf{M}))_{max} = L^{m+1}$  при единичной амплитуде сигналов.

Рассмотрим пример генерирования двоичной обучающей последовательности длительностью 26 символов, каждый из которых может принимать только два значения 1 или -1. Первые 5 сигналов назначаются произвольно, а последующие сигналы определяются с использованием следующих соотношений:  $s(k) = -s(k-5)s(k-3)$ . Таким образом, можно получить 32 ( $2^5$ ) последовательности сигналов, которые могут рассматриваться в качестве обучающих последовательностей. Для этих последовательностей вычислим  $\det(\mathbf{M})$  и найдем его отношение к максимальному значению, равному  $L^{m+1}$ . В результате получим, что лучшими являются 3 последовательности с начальными сигналами (1,1,1,1,1); (1,-1,1,1,1) и (-1,1,1,1,-1), когда это отношение равно 0.9679; 0.9671 и 0.9733. Худшими являются – 9 последовательностей с начальными сигналами (1,-1,1,-1,1); (1,-1,-1,-1,-1); (-1,1,1,1,1); (-1,1,-1,1,1); (-1,1,-1,1,-1); (-1,1,-1,-1,1); (-1,1,1,1,1); (-1,-1,-1,1,-1) и (-1,-1,-1,-1,-1), когда это отношение равно 0.

Для выяснения смысла оценки (4.1.33) введем систему так называемых взаимных векторов [23]. Эти векторы являются взаимными по отношению к обучающим векторам. Матрица взаимных векторов имеет вид

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}(\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-1}. \quad (4.1.39)$$

Тогда оценка ИХ (4.1.33) будет равна

$$\hat{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{S}}^H \mathbf{X}. \quad (4.1.40)$$

Из (4.1.40) ясно, что процедура оценивания ИХ канала сводится к проектированию вектора  $\mathbf{X}$  принятых сигналов на систему взаимных векторов  $\tilde{\mathbf{S}}$ . Каждая проекция вектора  $\mathbf{X}$  дает оценку одного канального коэффициента. На практике взаимные векторы могут быть подготовлены заранее и храниться в памяти вычислителя. Поэтому для оценки ИХ канала требуется  $mL$  комплексных умножений и столько же сложений.

Взаимные векторы не являются ортогональными, так как матрица Грамма  $\tilde{\mathbf{S}}^H \tilde{\mathbf{S}} = (\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-1}$  недиагональная. В то же время  $\tilde{\mathbf{S}}^H \mathbf{S} = \mathbf{I}$ . Это значит, что взаимный вектор с индексом  $k$  является ортогональным всем обучающим векторам, кроме вектора с индексом  $k$ . Благодаря этому возможно независимое оценивание канальных коэффициентов.

Входящие в (4.1.27) векторы принятых сигналов  $\mathbf{X}$  и шума  $\mathbf{Z}$  принадлежат пространству размерности  $L+m$ . В то же время обучающие векторы сосредоточены в подпространстве размерности  $(m+1)$ . Вектор шума  $\mathbf{Z}$  можно представить в виде суммы ортогональных векторов  $\mathbf{Z}_{col}$  и  $\mathbf{Z}_{ort}$ . Вектор  $\mathbf{Z}_{col}$  находится в  $(m+1)$ -мерном подпространстве обучающих векторов (4.1.31), а вектор  $\mathbf{Z}_{ort}$  принадлежит ортогональному подпространству размерности  $(L-1)$ . Так как собственный шум является однородным, то его средняя мощность в подпространстве обучающих векторов равна  $(m+1)\sigma_0^2$  и в оставшемся подпространстве –  $(L-1)\sigma_0^2$ . Следовательно, минимальное значение выражения (4.1.30) полностью определяется значением мощности шума в ортогональном подпространстве и равно

$$\sigma_{min}^2 = (L+m)^{-1} |\mathbf{Z}_{ort}|^2. \quad (4.1.41)$$

Среднее значение мощности этого шума равно

$$\langle \sigma_{min}^2 \rangle = (L+m)^{-1} \langle |\mathbf{Z}_{ort}|^2 \rangle = \frac{L-1}{L+m} \sigma_0^2. \quad (4.1.42)$$

Шум из ортогонального подпространства не влияет на точность оценки ИХ, которая определяется только шумовой компонентой  $\mathbf{Z}_{col}$ .

**Оценка длины ИХ.** Выше предполагалось, что число  $m$  задержанных в канале лучей является известным. Если это не так или же  $m$  выбрано неудачно, то при оценивании ИХ могут возникнуть дополнительные ошибки. Например, если взять  $m$  больше, чем истинная длина ИХ, то входной вектор  $\mathbf{X}$  будет проектироваться на подпространство большей размерности. Оценка ИХ будет содержать лишние канальные коэффициенты, которые будут использоваться прием-

ником при детектировании принятых сигналов, что приведет к увеличению вероятности ошибки передачи информации. Допустим теперь, что длина  $m$  выбрана на один бит меньше истинной длины ИХ. Это означает, что последняя компонента в  $\mathbf{H}$  не будет оцениваться. В этом случае детектор приемника не будет учитывать последний из запаздывающих лучей, что также приведет к росту вероятности ошибки. Таким образом, задача оценивания длины  $m$  ИХ является важной с практической точки зрения.

Анализируя поведение функции правдоподобия (4.1.28) или квадратичного функционала (4.1.30) в зависимости от числа  $m$  задержанных сигналов, нетрудно видеть, что оценка длины ИХ не может быть получена методом максимального правдоподобия. При увеличении  $m$  значение минимума (4.1.30) будет уменьшаться, а функция правдоподобия (4.1.28) возрастать. Отсутствие экстремума обусловлено влиянием шума. Это можно понять, если предположить, что принятая последовательность  $\mathbf{X}$  содержит только шум  $\mathbf{Z}$ . Реализация шумового процесса  $\mathbf{Z}$  может быть представлена в виде разложения с использованием произвольного базиса. Если в качестве базиса взять обучающие векторы (4.1.26) и выполнить оценивание ИХ, то шумовая реализация породит ненулевые оценки ИХ при любом сколь угодно большом значении  $m$ , хотя в действительности сигнала нет. Поэтому при увеличении  $m$  плотность вероятности монотонно возрастает и не имеет максимума.

Чтобы оценить длину  $m$ , необходимо привлечь дополнительные априорные данные [29]. В частности, допустим, что нам известна статистика собственного шума, который является комплексным гауссовым некоррелированным во времени процессом с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_0^2$ . Выше было установлено, что минимальная величина в (4.1.30) соответствует максимуму функции правдоподобия и равна  $\sigma_{min}^2$ . Уравнение (4.1.42) определяет среднее значение случайной величины  $\sigma_{min}^2$ .

Найдем дисперсию  $\sigma_{min}^2$ , равную  $D_\sigma = \langle \sigma_{min}^4 \rangle - (\langle \sigma_{min}^2 \rangle)^2$ . Из (4.1.41) имеем, что

$$\langle \sigma_{min}^4 \rangle = \frac{1}{(L+m)^2} \sum_{k=1}^{L+m} \sum_{l=1}^{L+m} \langle z_{ort}(k) z_{ort}^*(k) z_{ort}(l) z_{ort}^*(l) \rangle. \quad (4.1.43)$$

Для комплексных гауссовых процессов момент четвертого порядка вычисляется следующим образом [22]

$$\begin{aligned} \langle z_{ort}(k) z_{ort}^*(k) z_{ort}(l) z_{ort}^*(l) \rangle = & \langle |z_{ort}(k)|^2 \rangle \langle |z_{ort}(l)|^2 \rangle + \\ & + \langle z_{ort}(k) z_{ort}^*(l) \rangle \langle z_{ort}(l) z_{ort}^*(k) \rangle. \end{aligned} \quad (4.1.44)$$

Подставим (4.1.44) в (4.1.43) и учтем статистические свойства шума. Получим, что

$$\langle \sigma_{min}^4 \rangle = \frac{1}{(L+m)^2} \{ [L-1]^2 \sigma_0^4 + [L-1] \sigma_0^4 \}. \quad (4.1.45)$$

Тогда дисперсия  $D_\sigma$  равна

$$D_\sigma = \frac{L-1}{(L+m)^2} \sigma_0^4. \quad (4.1.46)$$

Используя (4.1.42) и (4.1.46), определим статистический критерий для оценки длины ИХ  $m$ . Так как  $\sigma_{min}^2$  уменьшается с ростом  $m$ , то можно задать пороговое значение равным

$$\rho_t = \langle \sigma_{min}^2 \rangle + \sqrt{D_\sigma}. \quad (4.1.47)$$

Это означает, что если для некоторого  $m$  выполняется условие  $\sigma_{min}^2 < \rho_t$ , то остаток  $\sigma_{min}^2$  считается обусловленным только шумом.

Для примера рассмотрим ИХ вида:  $h(0)=1.65$ ;  $h(1)=0.2$ ;  $h(2)=1.2$ ;  $h(3)=0.3$ ;  $h(4)=h(5)=\dots=0$ . На рис. 4.1 изображена функция  $\sigma_{min}^2(m)$  для 10 реализаций шума с дисперсией  $\sigma_0^2 = 0.25$ . Порог  $\rho_t$  вычислен по формуле (4.1.47), то есть значение порога зависит от  $m$ . Видно, что при  $m=2$  несколько реализаций  $\sigma_{min}^2(m)$  ниже порога, а при  $m=3$  все реализации ниже порога. Для различных реализаций шума каналный оценщик выберет либо  $m=2$ , либо  $m=3$  (истинное значение равно 3). Ошибка в оценивании  $m$  обусловлена тем, что последний компонент ИХ ( $h(3)=0.3$ ) меньше, чем среднеквадратический уровень шума  $\sigma_0 = 0.5$ .

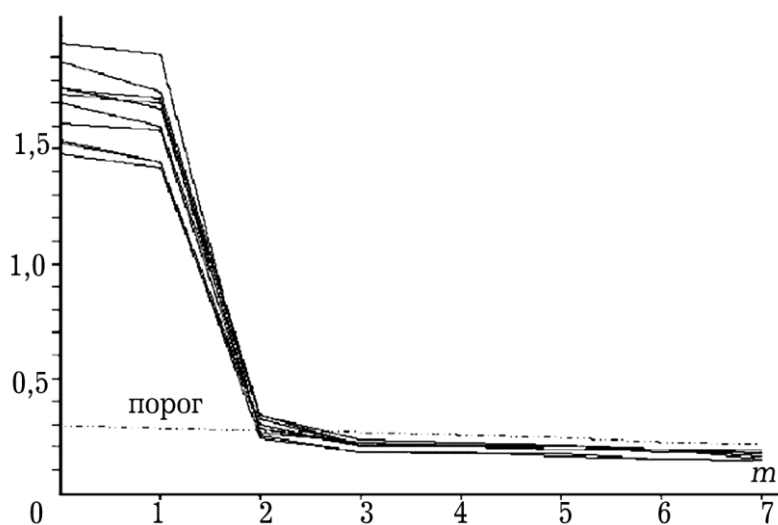


Рис. 4.1. Функция  $\sigma_{min}^2(m)$  для 10 реализаций шума при  $\sigma_0 = 0.5$

## 4.2. Система связи произвольным числом приемных антенн

Рассмотрим задачу канального оценивания в системах, в которых для приема сигнала используется произвольное число  $N$  приемных антенн, а передача сигнала осуществляется из одной антенны. В общем случае отклики различных приемных антенн на одни и те же обучающие сигналы отличаются друг от друга. Поэтому можно ввести в рассмотрение многоканальную импульсную характеристику (МИХ) системы как совокупность ИХ отдельных приемных антенн. Поскольку ИХ рассматривалась нами как вектор, МИХ следует рассматривать как матрицу, которая имеет  $N$  столбцов и  $m$  строк. Проблему оценки МИХ теперь можно разделить на три отдельные задачи:

- оценивание значений МИХ;
- оценивание длины МИХ;
- оценивание ранга МИХ.

Предположим, что для оценки канала передается обучающая последовательность. Вектор принятых сигналов размерности  $L+m$  для  $k$ -ой приемной антенны можно записать в виде

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{S}\mathbf{H}_k + \mathbf{Z}_k, \quad (4.2.1)$$

где  $\mathbf{S}=(\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_m)$  – матрица обучающих векторов (4.1.26); вектор  $\mathbf{H}_k$  размерности  $(m+1)$  дает ИХ  $k$ -ой приемной антенны, состоящую из  $(m+1)$  независимых отсчетов; вектор  $\mathbf{Z}_k$  определяет последовательность выборок шума на выходе  $k$ -ой антенны.

Все  $N$  векторов входных сигналов объединим в матрицу  $\mathbf{X}=(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N)$  размерности  $(L+m) \times N$ . МИХ представим в виде матрицы  $\mathbf{H}=(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3, \dots, \mathbf{H}_N)$  размерности  $(m+1) \times N$ . Выборки собственных шумов приемных каналов опишем матрицей  $\mathbf{Z}=(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \dots, \mathbf{Z}_N)$  размерности  $(L+m) \times N$ .

Тогда матрица принятых сигналов будет равна

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{H} + \mathbf{Z}. \quad (4.2.2)$$

Полагая собственные шумы статистически независимыми как по времени, так и по пространству (антеннам), совместную функцию плотности вероятности шумов в элементах АР можно представить в виде

$$f(\mathbf{Z}) = \frac{1}{(\pi\sigma_0^2)^{N(L+m)}} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_0^2} Sp(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H)\right\}. \quad (4.2.3)$$

Нетрудно проверить, что

$$Sp(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H) = Sp(\mathbf{Z}^H\mathbf{Z}) = \sum_{k=1}^{L+m} \sum_{i=1}^N |z_i(k)|^2, \quad (4.2.4)$$



где  $z_i(k)$  –  $k$ -ая выборка шума в  $i$ -ой антенне ( $(k,i)$ -ый элемент в матрице  $\mathbf{Z}$ ).

Полагая МИХ и обучающую последовательность детерминированными, из (4.2.2) и (4.2.3) получим совместную функцию плотности вероятности принятых сигналов, описываемых матрицей  $\mathbf{X}$ , в виде

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{(\pi\sigma_0^2)^{N(L+m)}} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_0^2} Sp[(\mathbf{X} - \mathbf{S}\mathbf{H})(\mathbf{X} - \mathbf{S}\mathbf{H})^H]\right\}. \quad (4.2.5)$$

Если имеется некоторая реализация принятых сигналов  $\mathbf{X}$ , то это уравнение можно рассматривать как функцию правдоподобия относительно неизвестной канальной матрицы  $\mathbf{H}$  и дисперсии шума  $\sigma_0^2$ .

Максимально правдоподобные оценки находятся из следующих уравнений

$$\mathbf{M}\mathbf{H} = \mathbf{R}; \quad \sigma_{min}^2 = \frac{1}{N(L+m)} Sp[(\mathbf{X} - \mathbf{S}\hat{\mathbf{H}})(\mathbf{X} - \mathbf{S}\hat{\mathbf{H}})^H], \quad (4.2.6)$$

где матрица  $\mathbf{M} = \mathbf{S}^H\mathbf{S}$ , вектор  $\mathbf{R} = \mathbf{S}^H\mathbf{X}$ , а  $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R} = (\mathbf{S}^H\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}^H\mathbf{X}$  – оценка матрицы  $\mathbf{H}$ .

Второе выражение в (4.2.6) перепишем в развернутом виде:

$$\sigma_{min}^2 = \frac{1}{N(L+m)} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{L+m} \left| x_i(k) - \sum_{n=0}^m \hat{h}_i(n)s(k-n) \right|^2. \quad (4.2.7)$$

Сравним полученные результаты оценивания МИХ в случае произвольного числа приемных антенн с результатами оценивания ИХ при одной антенне. Результаты сравнения показывают, что:

1. Оценки отсчетов МИХ могут выполняться независимо для каждой приемной антенны аналогично более простому случаю одной приемной антенны.

2. Оценивать длину МИХ  $m$  можно путем проведения  $N$  независимых оценок для каждой антенны. Значение  $\sigma_{min}^2(m, i)$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) в каждом из приемных каналов описывается формулой

$$\sigma_{min}^2(m, i) = \frac{1}{L+m} \sum_{k=1}^{L+m} \left| x_i(k) - \sum_{n=0}^m h_i(n)s(k-n) \right|^2. \quad (4.2.8)$$

Пусть для некоторого  $m$  выполняется условие  $\sigma_{min}^2(m, i) < \rho_t$  (при любом  $i$ ), где  $\rho_t$  – выбранное пороговое значение. Тогда это значение  $m$  является оценкой длины МИХ. Этот способ был рассмотрен выше.

3. Можно применять другой способ оценивания длины МИХ, если сравнивать с порогом величину  $\sigma_{min}^2(m)$  в (4.2.7). Нетрудно видеть, что

$$\sigma_{min}^2(m) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{min}^2(m, i). \quad (4.2.9)$$

Дисперсия  $\sigma_{min}^2(m)$  будет в  $N$  раз меньше, чем для отдельного слагаемого. Поэтому, значение порога  $\rho_t$  для  $\sigma_{min}^2(m)$  также будет более низким.

4. Принципиальное отличие оценки МИХ заключается в том, что она представляет собой матрицу, а не вектор. Поэтому появляется еще один независимый параметр – ранг матрицы МИХ, который также должен быть оценен.

Как известно, ранг матрицы определяет число ее независимых строк или столбцов. Для лучшего понимания физического смысла ранга матрицы  $\mathbf{H}$  рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Матрица  $\mathbf{H}$  имеет одну строку ( $m=0$ ). Это означает, что задержки в канале можно не учитывать, и на выходе каждой из антенн нет задержанных сигналов. В этом случае ранг матрицы  $\mathbf{H}$  всегда равен единице.

б) Матрица  $\mathbf{H}$  имеет один столбец, то есть для приема сигнала используется одна антенна ( $N=1$ ). Ранг матрицы  $\mathbf{H}$  всегда будет равен единице, независимо от длины ИХ. Этот случай был рассмотрен выше.

в) Матрица  $\mathbf{H}$  состоит из двух строк ( $m=1$ ). Наличие второй строки означает, что имеются сигналы, задержанные относительно прямого сигнала на длительность одного элемента разрешения. Элементы второй строки описывают амплитудно-фазовое распределение задержанного сигнала по приемным антеннам. В случае, когда прямой и задержанный сигналы приходят с разных направлений, ранг будет равен 2. Если же прямой и задержанный сигналы приходят с одного направления, то строки матрицы  $\mathbf{H}$  будут линейно зависимыми и ранг матрицы  $\mathbf{H}$  снова будет равен единице.

Эти простые примеры могут быть обобщены. Предположим, что матрица  $\mathbf{H}$  имеет  $(m+1)$  строк, то есть существует  $m$  задержанных сигналов. Если  $(m+1 < N)$ , то ранг матрицы  $\mathbf{H}$  может изменяться в пределах от 1 до  $m+1$ . Если ранг равен  $k$  ( $1 \leq k \leq m+1$ ), то  $k$  строк будут линейно независимыми. Каждая строка представляет собой вектор сигнала, лежащий в  $N$ -мерном векторном пространстве. Таким образом, ранг матрицы  $\mathbf{H}$  определяет размерность сигнального подпространства, в котором расположены векторы МИХ. Если  $m+1 \geq N$ , то ранг матрицы  $\mathbf{H}$  может принимать значение в пределах  $1 \leq k \leq N$ .

Рассмотрим пороговый метод оценки ранга МИХ  $\mathbf{H}$ . Максимально правдоподобная оценка матрицы  $\mathbf{H}$  равна  $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R} = (\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{X}$ . Поэтому мы должны оценивать ранг  $\mathbf{H}$ , используя оцененную матрицу  $\hat{\mathbf{H}}$ .

Можно записать, что

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + \Delta \mathbf{H}, \quad (4.2.10)$$

где  $\Delta \mathbf{H}$  – матрица ошибок, обусловленная собственным шумом. Оценка  $\hat{\mathbf{H}}$  является несмещенной, то есть  $\langle \hat{\mathbf{H}} \rangle = \mathbf{H}$ . Поэтому матрица  $\langle \Delta \mathbf{H} \rangle = \{\mathbf{0}\}$ .

Подобно истинной МИХ  $\mathbf{H}$ , свойства ее оценки  $\hat{\mathbf{H}}$  будут определяться эрмитовыми матрицами  $\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{H}}^H$  и  $\hat{\mathbf{H}}^H\hat{\mathbf{H}}$ . Матрица  $\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{H}}^H$  имеет размерность  $(m+1)\times(m+1)$ . Если число задержанных сигналов меньше числа приемных антенн  $(m+1)<N$ , то она будет иметь  $(m+1)$  случайных собственных чисел  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m+1}$ . Вероятность появления нулевых собственных чисел будет пренебрежимо малой, так как из-за шума строки матрицы  $\hat{\mathbf{H}}$  не будут линейно зависимыми. Если задержанных сигналов больше, чем приемных антенн  $(m+1)>N$ , то матрица  $\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{H}}^H$  будет иметь  $N$  случайных ненулевых собственных чисел  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ , а остальные  $[(m+1)-N]$  собственных чисел будут равны нулю.

Матрица  $\hat{\mathbf{H}}^H\hat{\mathbf{H}}$  имеет  $N$  строк и  $N$  столбцов. При  $(m+1)>N$  нулевых собственных чисел нет. Когда  $(m+1)<N$ , имеется  $[N-(m+1)]$  нулевых собственных чисел, и мы должны анализировать матрицу  $\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{H}}^H$ .

Для матриц  $\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{H}}^H$  и  $\hat{\mathbf{H}}^H\hat{\mathbf{H}}$  из (4.2.10) получим средние значения, равные

$$\langle \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{H}}^H \rangle = \mathbf{H}\mathbf{H}^H + \langle \Delta\mathbf{H}\Delta\mathbf{H}^H \rangle, \quad \langle \hat{\mathbf{H}}^H\hat{\mathbf{H}} \rangle = \mathbf{H}^H\mathbf{H} + \langle \Delta\mathbf{H}^H\Delta\mathbf{H} \rangle. \quad (4.2.11)$$

Опуская громоздкий вывод [30], приведем выражения для дополнительных слагаемых в (4.2.11), которые характеризуют смещение среднего:

$$\langle \Delta\mathbf{H}\Delta\mathbf{H}^H \rangle = N\sigma_0^2\mathbf{M}^{-1}, \quad \langle \Delta\mathbf{H}^H\Delta\mathbf{H} \rangle = \sigma_0^2(Sp\mathbf{M}^{-1})\mathbf{I}_N. \quad (4.2.12)$$

Для оценки ранга  $k$  матрицы МИХ с помощью анализа собственных чисел матрицы  $\hat{\mathbf{H}}^H\hat{\mathbf{H}}$ , необходимо принять во внимание их смещение относительно среднего значения, вызванное шумом (матрица  $\langle \Delta\mathbf{H}^H\Delta\mathbf{H} \rangle$ ). Также необходимо учесть возможность отклонения случайных шумовых собственных чисел от среднего значения. Для этого сформируем матрицу  $\mathbf{V} = \Delta\mathbf{H}^H\Delta\mathbf{H} - \langle \Delta\mathbf{H}^H\Delta\mathbf{H} \rangle$ .

Среднее значение квадрата нормы этой матрицы равно [30]

$$\langle \|\mathbf{V}\|^2 \rangle = Sp(\langle \mathbf{V}^2 \rangle) = N^2\sigma_0^4(Sp\mathbf{M}^{-2}). \quad (4.2.13)$$

Таким образом, матрица  $\Delta\mathbf{H}$  в (4.2.10) приводит к появлению отличных от нуля шумовых собственных чисел матрицы  $\hat{\mathbf{H}}^H\hat{\mathbf{H}}$ . Их средние задаются (4.2.12), а разброс будет порядка  $\sqrt{\langle \|\mathbf{V}\|^2 \rangle} = N\sigma_0^2\sqrt{Sp\mathbf{M}^{-2}}$ .

Для оценивания ранга МИХ мы должны сравнить случайные собственные числа  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$  матрицы  $\hat{\mathbf{H}}^H\hat{\mathbf{H}}$  с порогом, равным

$$\mu_t^{(1)} = \sigma_0^2(Sp\mathbf{M}^{-1}) + N\sigma_0^2\sqrt{Sp\mathbf{M}^{-2}}. \quad (4.2.14)$$

Затем нужно отобрать собственные значения, превышающие данный порог. Их число будет определять оценку ранга матрицы МИХ.

Для обучающих векторов имеем, что  $Sp\mathbf{M}^{-1} \approx (m+1)(L+m)^{-1}$ ,  $Sp\mathbf{M}^{-2} \approx (m+1)(L+m)^{-2}$ . Тогда порог будет равен

$$\mu_t^{(1)} = \sigma_0^2 \frac{\sqrt{N(m+1)}}{L+m} \left( \sqrt{\frac{m+1}{N}} + \sqrt{N} \right). \quad (4.2.15)$$

Перейдем к оценке ранга  $k$  матрицы МИХ на основе анализа собственных чисел матрицы  $\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{H}}^H$ . Среднее значение  $\langle \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{H}}^H \rangle$  смещено на матрицу  $\langle \Delta\mathbf{H}\Delta\mathbf{H}^H \rangle$  относительно матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ . Для оценки разброса шумовых собственных чисел введем матрицу  $\mathbf{A} = \Delta\mathbf{H}\Delta\mathbf{H}^H - \langle \Delta\mathbf{H}\Delta\mathbf{H}^H \rangle$ .

Средний квадрат евклидовой нормы этой матрицы равен [29,30]

$$\langle \|\mathbf{A}\|^2 \rangle = N\sigma_0^4 (Sp\mathbf{M}^{-1})^2. \quad (4.2.16)$$

Матрица  $\langle \Delta\mathbf{H}\Delta\mathbf{H}^H \rangle$  имеет разные собственные числа. Для оценки порога возьмем самое большое из них. Тогда порог  $\mu_t^{(2)}$  для разделения случайных собственных чисел матрицы  $\langle \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{H}}^H \rangle$  будет складываться из величины  $N\sigma_0^2\lambda_{max}$  ( $\lambda_{max}$  – наибольшее собственное число матрицы  $\mathbf{M}^{-1}$ ) и величины разброса  $\sqrt{\langle \|\mathbf{A}\|^2 \rangle} = \sqrt{N}\sigma_0^2 (Sp\mathbf{M}^{-1})$ . В результате получим, что

$$\mu_t^{(2)} = N\sigma_0^2\lambda_{max} + \sqrt{N}\sigma_0^2 (Sp\mathbf{M}^{-1}). \quad (4.2.17)$$

Для обучающих  $(L+m)$ -мерных векторов имеем, что  $\lambda_{max} \approx (L+m)^{-1}$ ;  $Sp\mathbf{M}^{-1} \approx (m+1)(L+m)^{-1}$ . Тогда

$$\mu_t^{(2)} = \sigma_0^2 \frac{\sqrt{N(m+1)}}{L+m} \left( \sqrt{\frac{N}{m+1}} + \sqrt{m+1} \right). \quad (4.2.18)$$

Если  $\hat{\mathbf{H}}$  – квадратная матрица, то есть число отсчетов МИХ равно числу приемных антенн ( $m+1=N$ ), тогда найденные пороговые значения совпадают ( $\mu_t^{(1)} = \mu_t^{(2)}$ ). При достаточно малом числе лучей ( $m+1 < N$ ) оценивается ранг матрицы  $\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{H}}^H$  и для этого используется порог  $\mu_t^{(2)}$ . Если лучей достаточно много ( $m+1 > N$ ), оценивается ранг матрицы  $\hat{\mathbf{H}}^H\hat{\mathbf{H}}$  и используется порог  $\mu_t^{(1)}$ .

Отметим, что пороги (4.2.15) и (4.2.18) зависят от числа приемных антенн, длины МИХ, длины обучающей последовательности и мощности шума.

Результаты расчета шумовых собственных чисел матрицы  $\Delta\mathbf{H}\Delta\mathbf{H}^H$  для разного числа  $m$  задержанных сигналов приведены на рис. 4.2 ( $m=0, 1, 2$ ) и рис. 4.3 ( $m=3, 4$ ). Порог  $\mu_t^{(2)}$  вычислялся по формуле (4.2.18) при  $N=8, L=6, \sigma_0^2 = 0.25$  и равен 0.104, 0.131, 0.159, 0.186, 0.213 для  $m=0, 1, 2, 3, 4$ , соответственно. Видно, что эта формула хорошо соответствует поведению наибольшего собственного числа. На практике порог при необходимости можно сделать выше.

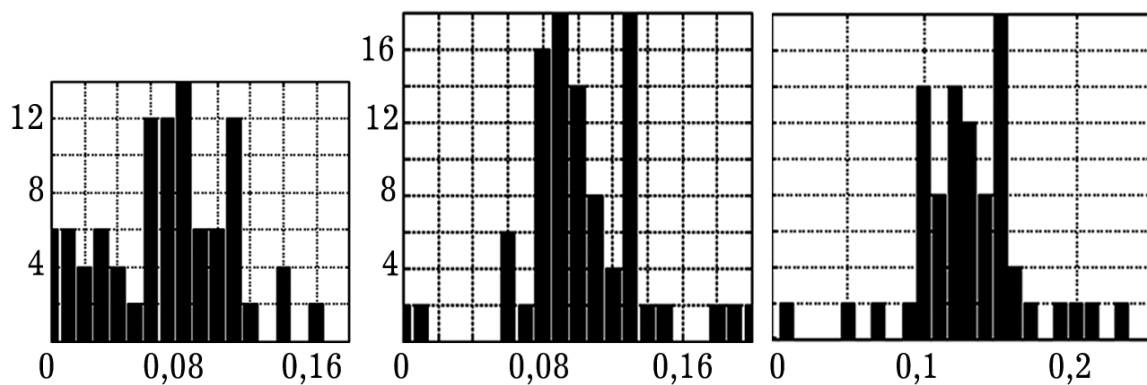


Рис. 4.2. Гистограмма распределения шумовых собственных чисел для  $m=0, 1, 2$

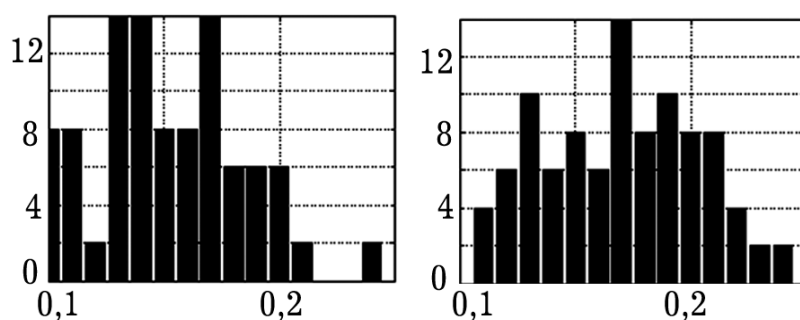


Рис. 4.3. Гистограмма распределения шумовых собственных чисел для  $m=3$  и  $4$

Рассмотрим результаты моделирования для рассмотренного метода оценки МИХ. В таблице 4.1 представлены реальные и мнимые части точной ИХ в 8 антеннах ( $N=8$ ). Ранг МИХ выбран равным 1.

Таблица 4.1

Точные значения ИХ в приемных антеннах					
$N$	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
1	(-1.30,1.00)	(0.20,-0.03)	(0.90,0.80)	(-0.21,-0.21)	(0.00,0.00)
2	(3.92,1.22)	(-0.35,-0.36)	(0.34,-2.99)	(-0.13,0.74)	(0.00,0.00)
3	(1.71,0.87)	(-0.13,-0.19)	(0.39,-1.35)	(-0.12,0.33)	(0.00,0.00)
4	(1.48,0.03)	(-0.16,-0.09)	(-0.18,-1.07)	(0.03,0.27)	(0.00,0.00)
5	(-0.35,0.39)	(0.06,-0.02)	(0.33,0.20)	(-0.08,-0.05)	(0.00,0.00)
6	(2.30,1.27)	(-0.17,-0.27)	(0.60,-1.83)	(-0.18,0.45)	(0.00,0.00)
7	(0.84,0.75)	(-0.05,-0.13)	(0.42,-0.71)	(-0.12,0.17)	(0.00,0.00)
8	(0.43,0.52)	(-0.02,-0.08)	(0.32,-0.38)	(-0.08,0.09)	(0.00,0.00)

Различные реализации шума с дисперсией  $\sigma_0^2 = 0.25$  были добавлены к обучающей последовательности, проходящей через канал с заданной МИХ. Ранг МИХ оценивался на основе сравнения собственных чисел матрицы  $\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{N}}^H$  с порогом при 50 шумовых реализациях. На рис. 4.4 изображены сигнальное собственное число, шумовые собственные числа и порог. Видно, что во всех реализациях ранг МИХ, который равен единице, оценивается правильно.

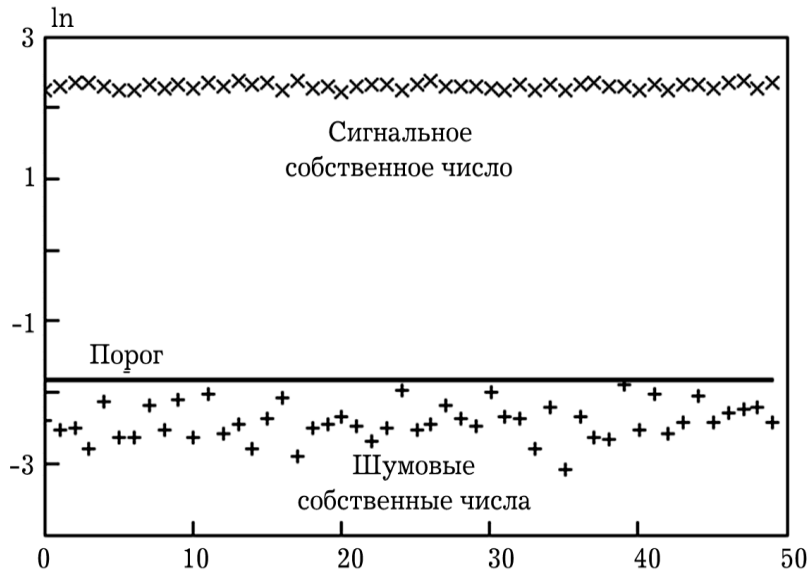


Рис. 4.4. Разделение собственных чисел с помощью порога

Из таблицы 4.1 видно, что сигнал во второй антенне является сильным, тогда как в пятой антенне сигнал очень слабый. На рис. 4.5 показаны оценки ИХ для 10 различных шумовых реализаций в этих антеннах. Видно, что оценка ИХ в пятой антенне достаточно сильно искажена шумом.

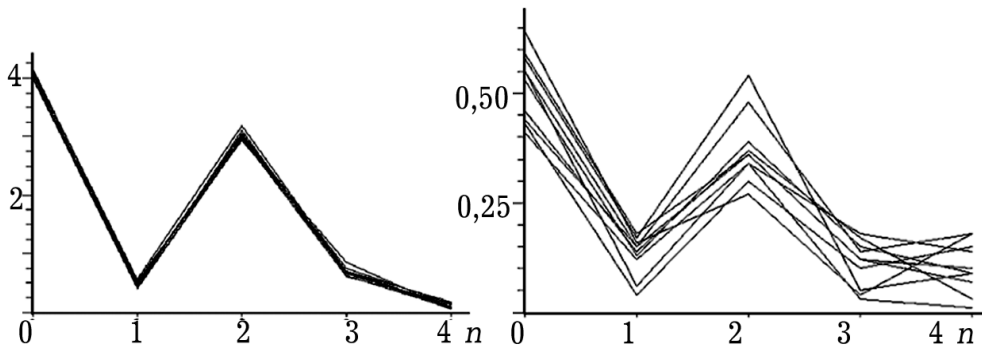


Рис. 4.5. Десять реализаций оценок ИХ во второй (слева) и пятой (справа) антеннах

Оценка МИХ с рангом  $k=3$  моделировалась аналогично. В таблице 4.2 даны реальная и мнимая части отсчетов точной ИХ в 8 антеннах ( $N=8$ ). Рис. 4.6 демонстрирует разделение сигнальных и шумовых собственных чисел матрицы  $\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{N}}^H$  с использованием пороговой методики. На рис. 4.7 представлены модули оценок ИХ для антенны №6 и антенны №3, соответственно, которые принимают самые сильные и самые слабые сигналы.

Таблица 4.2

Точные значения ИХ в приемных антеннах					
$N$	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
1	(-1.30,1.00)	(0.20,-0.03)	(0.90,0.80)	(-0.21,-0.21)	(0.00,0.00)
2	(3.92,1.22)	(-0.13,-0.19)	(-0.18,-1.07)	(0.03,0.27)	(0.00,0.00)

3	(-0.35,0.39)	(-0.17,-0.27)	(0.42,-0.71)	(-0.12,0.17)	(0.00,0.00)
4	(0.43,0.52))	(0.00,0.10)	(-2.11,-2.81)	(0.48,0.73)	(0.00,0.00)
5	(-1.17,0.51)	(-0.30,-0.12)	(-0.85,-0.14)	(0.21,0.05)	(0.00,0.00)
6	(0.50,-4.24)	(-0.15,0.14)	(-0.50,0.65)	(0.14,-0.16)	(0.00,0.00)
7	(-3.10,0.59)	(-0.21,0.20)	(-0.61,-0.11)	(0.15,0.04)	(0.00,0.00)
8	(-1.33,3.23)	(0.25,0.00)	(0.75,-0.57)	(-0.20,0.13)	(0.00,0.00)

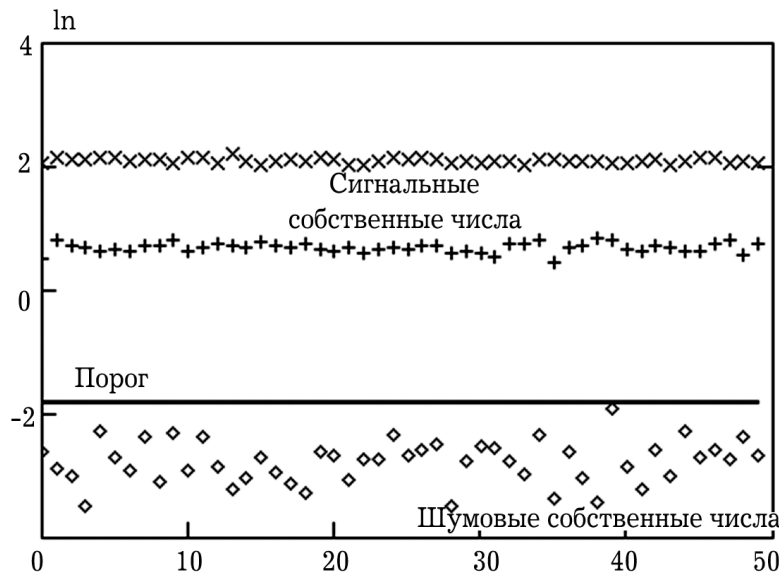


Рис. 4.6. Разделение собственных чисел с помощью порога

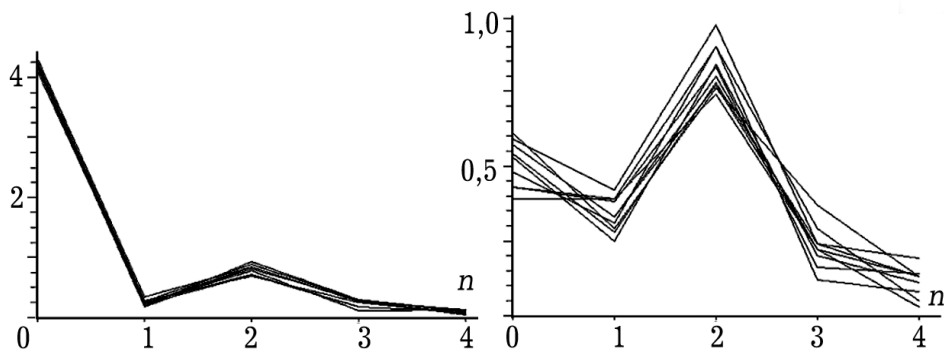


Рис. 4.7. Десять реализаций оценок ИХ в шестой (слева) и третьей (справа) антеннах

### 4.3. Оценка числа собственных подканалов ММО-системы

Выше было показано, что СЭ ММО-системы существенно зависит от статистических свойств пространственного канала связи. Так в статическом канале без замираний сигналов ранг канальной матрицы  $\mathbf{H}$  равен единице независимо от числа передающих и приемных антенн и, поэтому, параллельная передача данных невозможна. В случайном канале, если коэффициенты передачи коррелированы в элементах хотя бы одной из передающей и приемной АР, параллельная передача данных также становится невозможной. Только при некоррелированных замираниях сигналов в обеих АР можно использовать максималь-

ное число собственных каналов, то есть обеспечить параллельную передачу данных. При этом предполагалось, что матрица  $\mathbf{H}$  является известной.

На практике матрица  $\mathbf{H}$  всегда оценивается с некоторой ошибкой  $\Delta\mathbf{H}$  из-за влияния собственных шумов и конечной длины обучающей последовательности. Независимо от ранга  $r$  точной матрицы  $\mathbf{H}$  оценочная матрица  $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + \Delta\mathbf{H}$  имеет полный ранг  $\hat{r}$ , равный минимальному числу передающих и приемных антенн  $\hat{r} = \min\{M, N\}$ . Это означает, что  $(\hat{r} - r)$  собственных чисел матрицы  $\mathbf{H}$  отличны от нуля только из-за ошибок оценивания этой матрицы. Поэтому в ММО-системе будет сформировано  $(\hat{r} - r)$  «лишних» собственных каналов, которые могут иметь неограниченно малые усиления. По этим каналам будут передаваться символы, вероятность ошибки декодирования которых может быть недопустимо большой. Поэтому необходимо ограничить число собственных каналов, чтобы не использовать «лишние» каналы, то есть оценить ранг случайной оценочной матрицы  $\hat{\mathbf{H}}$ .

Выше был рассмотрен пороговый метод оценки ранга матрицы  $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + \Delta\mathbf{H}$ , использующий априорную информацию об уровне собственного шума в приемных каналах АР, а также статистические свойства максимально правдоподобных оценок элементов матрицы  $\mathbf{H}$ . Ранг оценивается по числу собственных чисел матрицы  $\hat{\mathbf{H}}$ , превышающих некоторый порог.

Рассмотрим обобщение порогового метода с SМО-систем на ММО-системы. Достаточно рассмотреть частотно-неселективные каналы, так как в случае частотной селективности общая полоса частот разделяется на отдельные полосы, число которых выбирается из условия, что канал можно считать частотно-неселективным в каждой из них. Затем необходимо сформировать собственные подканалы во всех частотных полосах. Для такого обобщения необходимо заменить число  $(m+1)$  лучей числом  $M$  передающих антенн.

В первом случае, когда передающих антенн меньше, чем приемных ( $M < N$ ), в качестве оценки  $\hat{r}$  ранга  $r$  матрицы  $\mathbf{H}$  можно взять число собственных значений матрицы  $\hat{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{H}}$  размерности  $M \times M$ , превышающих пороговое значение  $\mu_t^{(1)}$ . Заменяя в (4.2.15) число  $(m+1)$  лучей числом  $M$  передающих антенн, получим, что пороговое значение равно

$$\mu_t^{(1)} = \sigma_0^2 \frac{1}{L + M - 1} (M + \sqrt{MN}). \quad (4.3.1)$$

Во втором случае большего числа передающих антенн ( $M > N$ ) удобнее рассматривать  $(N \times N)$ -размерную матрицу  $\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{H}}^H$ . Обобщая (4.2.18), получим, что оценкой  $\hat{r}$  ранга  $r$  матрицы  $\mathbf{H}$  является число собственных чисел матрицы  $\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{H}}^H$  превышающих пороговое значение, равное

$$\mu_t^{(2)} = \sigma_0^2 \frac{1}{L + M - 1} (N + M \sqrt{N}). \quad (4.3.2)$$



Из (4.3.1) и (4.3.2) видно, что если матрица  $\mathbf{H}$  является квадратной ( $M=N$ ), то пороговые значения  $\mu_t^{(1)}$  и  $\mu_t^{(2)}$  равны между собой:

$$\mu_t^{(1)} = \mu_t^{(2)} = \sigma_0^2 \frac{M}{L+M-1} (1 + \sqrt{M}). \quad (4.3.3)$$

## ГЛАВА 5. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ В МИМО-СИСТЕМАХ

В предыдущих главах рассматривалась передача информации в МИМО-системе одному пользователю. В системах сотовой связи базовая станция (БС) имеет значительно большее число антенн, чем каждый из пользователей ( $M \gg N$ ). Следовательно, число собственных подканалов, которые можно сформировать для каждого пользователя, ограничивается числом  $N$ , хотя АР БС позволяет сформировать их большее число (до  $M$ ). Это означает, что имеется возможность увеличения скорости передачи данных в МИМО-системе за счет одновременного обслуживания нескольких пользователей одной БС и формирования большего числа собственных подканалов. Однако для этого необходимо обеспечить пространственное разделение пользователей с помощью некоторой дополнительной обработки сигналов.

Отметим, что такое разделение может использоваться дополнительно к любому методу разделения – временному, частотному или кодовому.

### 5.1. Передача информации двум пользователям без пространственного разделения

#### 5.1.1. Релеевский канал

Пусть МИМО-система с собственными подканалами обеспечивает передачу данных двум пользователям, число  $M$  передающих антенн больше двух ( $M \geq 2$ ), а каждый пользователь имеет по одной антенне ( $N=1$ ). В современных системах сотовой связи пользователи, как правило, имеют по одной антенне, а число антенн на БС является различным. Поэтому случай  $M \geq 2$  и  $N=1$  представляет особый интерес.

Матрица коэффициентов передачи для  $q$ -го пользователя переходит в  $M$ -мерную вектор-строку:  $\mathbf{H}^{(q)} = (h_1^{(q)}, h_2^{(q)}, \dots, h_M^{(q)})$  ( $q=1, 2$ ). Число  $K$  собственных подканалов, которые можно сформировать для этого пользователя, равно  $K = \min\{M, N\}$ , то есть при  $N=1$  имеется только один собственный подканал. Вектор, создающий этот подканал, является собственным  $M$ -мерным вектором  $\mathbf{V}^{(q)}$  матрицы  $\mathbf{H}^{(q)H} \mathbf{H}^{(q)}$ . Схема одновременной передачи сигналов двум пользователям без их пространственного разделения показана на рис. 5.1.

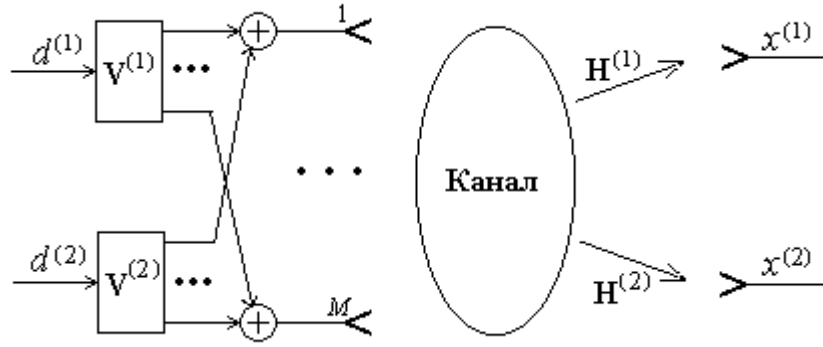


Рис. 5.1. Схема передачи сигналов двум пользователям без пространственного разделения

Полная мощность  $P_0$  распределяется между пользователями равномерно, то есть мощность, предназначенная каждому из них, равна  $P_0/2$ . Тогда (3.2.1) для вектора  $\mathbf{G}$  сигналов на выходе передающей АР принимает вид

$$\mathbf{G} = \sqrt{0.5P_0} \mathbf{V}\mathbf{D} = \sqrt{0.5P_0} (\mathbf{V}^{(1)}d^{(1)} + \mathbf{V}^{(2)}d^{(2)}), \quad (5.1.1)$$

а сигналы, принимаемые первым и вторым пользователями, равны

$$x^{(1)} = \mathbf{H}^{(1)}\mathbf{G} + z^{(1)} = \sqrt{0.5P_0} (\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{V}^{(1)}d^{(1)} + \mathbf{H}^{(1)}\mathbf{V}^{(2)}d^{(2)}) + z^{(1)}, \quad (5.1.2)$$

$$x^{(2)} = \mathbf{H}^{(2)}\mathbf{G} + z^{(2)} = \sqrt{0.5P_0} (\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{V}^{(1)}d^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}\mathbf{V}^{(2)}d^{(2)}) + z^{(2)}, \quad (5.1.3)$$

где  $\mathbf{D}=(d^{(1)}, d^{(2)})^T$  – двумерный вектор-столбец символов, передаваемых первому ( $d^{(1)}$ ) и второму ( $d^{(2)}$ ) пользователям,  $z^{(1)}$  и  $z^{(2)}$  – собственные шумы приемных устройств пользователей, которые будем считать некоррелированными гауссовыми случайными процессами с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_0^2$ .

Весовые векторы, обеспечивающие согласованную с каналом передачу данных каждому из пользователей в отдельности, определяются выражениями

$$\mathbf{V}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(1)H}}} \mathbf{H}^{(1)H}, \quad \mathbf{V}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{H}^{(2)H}}} \mathbf{H}^{(2)H}. \quad (5.1.4)$$

Подставляя эти выражения в (5.1.2) и (5.1.3), будем иметь

$$x^{(1)} = \sqrt{0.5P_0} \left( \frac{\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(1)H}}{\sqrt{\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(1)H}}} d^{(1)} + \frac{\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(2)H}}{\sqrt{\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{H}^{(2)H}}} d^{(2)} \right) + z^{(1)}, \quad (5.1.5)$$

$$x^{(2)} = \sqrt{0.5P_0} \left( \frac{\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{H}^{(1)H}}{\sqrt{\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(1)H}}} d^{(1)} + \frac{\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{H}^{(2)H}}{\sqrt{\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{H}^{(2)H}}} d^{(2)} \right) + z^{(2)}. \quad (5.1.6)$$

Учитывая выбранную нормировку канальных коэффициентов (единичная дисперсия), для средней мощности полезного сигнала на выходе антенны первого и второго пользователя получим

$$P_s^{(1)} = \frac{P_0}{2} \langle \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H} \rangle = \frac{P_0}{2} M, \quad P_s^{(2)} = \frac{P_0}{2} P_0 \langle \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)H} \rangle = \frac{P_0}{2} M. \quad (5.1.7)$$

Суммарная средняя мощность шума и помехи определяется выражениями

$$P_{int}^{(1)} = \sigma_0^2 + \frac{P_0}{2} \left\langle \frac{|\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(2)H}|^2}{\mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)H}} \right\rangle, \quad P_{int}^{(2)} = \sigma_0^2 + \frac{P_0}{2} \left\langle \frac{|\mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(1)H}|^2}{\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H}} \right\rangle. \quad (5.1.8)$$

С помощью (5.1.7) и (5.1.8) получим, что средние отношения мощности сигнала к суммарной мощности шума и помехи (ОСШП) на выходе приемных антенн первого и второго пользователей равны

$$\eta_{mean}^{(1)} = \frac{P_s^{(1)}}{P_{int}^{(1)}} = \frac{\rho_0}{2} M \left[ 1 + \frac{\rho_0}{2} \left\langle \frac{|\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(2)H}|^2}{\mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)H}} \right\rangle \right]^{-1}, \quad (5.1.9)$$

$$\eta_{mean}^{(2)} = \frac{P_s^{(2)}}{P_{int}^{(2)}} = \frac{\rho_0}{2} M \left[ 1 + \frac{\rho_0}{2} \left\langle \frac{|\mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(1)H}|^2}{\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H}} \right\rangle \right]^{-1}. \quad (5.1.10)$$

Выполнить усреднение дроби со случайным числителем и знаменателем достаточно сложно. Покажем, что при большом числе передающих антенн ( $M \gg 1$ ) флуктуации знаменателей в (5.1.8) являются малыми по сравнению с их средними значениями и могут не учитываться.

Обозначим случайную величину  $\xi^{(1)} = \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H}$ . Нетрудно получить, что её среднее значение равно

$$\langle \xi^{(1)} \rangle = \langle \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H} \rangle = M. \quad (5.1.11)$$

Найдем дисперсию  $\xi^{(1)}$ . По определению

$$D_\xi = \langle |\xi^{(1)} - \langle \xi^{(1)} \rangle|^2 \rangle = \langle (\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H})^2 \rangle - M^2. \quad (5.1.12)$$

Учитывая, что  $(\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H})^2 = (\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H}) \times (\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H})$ , будем иметь

$$\langle (\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H})^2 \rangle = \sum_{p=1}^M \sum_{n=1}^M \langle h_p^{(1)} h_p^{(1)*} h_n^{(1)*} h_n^{(1)} \rangle. \quad (5.1.13)$$

В случае некоррелированных релейевских замираний сигналов каналные коэффициенты являются комплексными гауссовыми величинами с нулевым средним. При этом четные моменты либо равны нулю, либо отличны от нуля в зависимости от количества комплексно-сопряженных амплитуд в произведении под знаком статистического среднего. Если число комплексно сопряженных амплитуд не равно числу несопряженных амплитуд, то момент четного порядка равен нулю [22]. В противном случае момент четного порядка отличен от нуля. Поэтому момент четвертого порядка в (5.1.13) равен [16,19]

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H})^2 \rangle &= \sum_{p=1}^M \sum_{n=1}^M \langle h_p^{(1)} h_p^{(1)*} \rangle \langle h_n^{(1)*} h_n^{(1)} \rangle + \\ &+ \sum_{p=1}^M \sum_{n=1}^M \langle h_p^{(1)} h_n^{(1)*} \rangle \langle h_n^{(1)} h_p^{(1)*} \rangle = \sum_{p=1}^M \sum_{n=1}^M (1 + \delta_{pn} \delta_{np}) = M^2 + M. \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Подставляя (5.1.14) в (5.1.12), получим, что дисперсия величины  $\xi^{(1)}$  равна  $D_\xi = M$ . Тогда относительные флуктуации величины  $\xi^{(1)}$  равны

$$\frac{\sqrt{D_\xi}}{\langle \xi^{(1)} \rangle} = \frac{1}{\sqrt{M}} \quad (5.1.15)$$

Отсюда следует, что при  $M \gg 1$  флуктуации величины  $\xi^{(1)}$  являются малыми по сравнению с ее средним значением и могут не учитываться.

Аналогичный результат можно получить для  $\mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)H}$  в (5.1.8).

Таким образом, знаменатели дробей в (5.1.8) можно считать постоянными величинами и заменить их средними значениями. При этом

$$P_{int}^{(1)} \approx \sigma_0^2 + \frac{P_0}{2} \left( \frac{\langle |\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(2)H}|^2 \rangle}{\langle \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)H} \rangle} \right), \quad P_{int}^{(2)} \approx \sigma_0^2 + \frac{P_0}{2} \left( \frac{\langle |\mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(1)H}|^2 \rangle}{\langle \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H} \rangle} \right). \quad (5.1.16)$$

Учтем, что  $\langle \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H} \rangle = \langle \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)H} \rangle = M$ . Тогда из (5.1.16) будем иметь

$$P_{int}^{(1)} = P_{int}^{(2)} \approx \sigma_0^2 + \frac{P_0}{2M} \langle |\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(2)H}|^2 \rangle. \quad (5.1.17)$$

Поступая аналогично выводу формулы (5.1.14), найдем что [16,19]

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(2)H})^2 \rangle &= \sum_{p=1}^M \sum_{n=1}^M \langle h_p^{(1)} h_p^{(2)*} \rangle \cdot \langle h_n^{(1)*} h_n^{(2)} \rangle + \\ &+ \sum_{p=1}^M \sum_{n=1}^M \langle h_p^{(1)} h_n^{(1)*} \rangle \cdot \langle h_n^{(2)} h_p^{(2)*} \rangle = \sum_{p=1}^M \sum_{n=1}^M \delta_{pn} \delta_{np} = M. \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

Таким образом, из (5.1.9) и (5.1.10) получаем, что среднее ОСШП на выходе антенны каждого из пользователей равно

$$\eta_{mean}^{(1)} = \eta_{mean}^{(2)} = M \frac{0.5\rho_0}{1+0.5\rho_0}. \quad (5.1.19)$$

Из (5.1.19) также следует, что передача информации первому пользователю создает помеху второму пользователю и наоборот. Мощность этой взаимной помехи пропорциональна мощности передатчика, поэтому ОСШП является ограниченной величиной и при  $\rho_0 \rightarrow \infty$  величины  $\eta_{mean}^{(1)} = \eta_{mean}^{(2)} \rightarrow M$ .

### 5.1.2. Статический канал

Статический канал без замираний сигналов не типичный для систем связи, но позволяет получить выражения, имеющие ясный физический смысл. В этом случае все сигналы имеют плоский волновой фронт, и векторы-фазоры  $\Phi_{tr}^{(1)}$  и  $\Phi_{tr}^{(2)}$  плоской волны в направлении на первого и второго пользователя определяются выражением

$$\Phi_{tr}^{(1,2)} = \left[ \exp(j\psi_1^{(1,2)}), \exp(j\psi_2^{(1,2)}), \dots, \exp(j\psi_M^{(1,2)}) \right]^T, \quad (5.1.20)$$

где  $\psi_m^{(1,2)}$  – фаза сигнала в  $m$ -м элементе АР.

Коэффициент передачи между  $m$ -ой антенной БС и антенной пользователя является детерминированной величиной, равной

$$h_m^{(1,2)} = \exp[j(\psi_m^{(1,2)})]. \quad (5.1.21)$$

Для линейной эквидистантной АР (5.1.2) можно переписать в виде

$$h_m^{(1,2)} = \exp \left[ j \left( m - \frac{M+1}{2} \right) \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \varphi^{(1,2)} \right], \quad (5.1.22)$$

где  $\lambda$  – длина волны,  $d$  – период АР,  $\varphi^{(1)}$ ,  $\varphi^{(2)}$  – угловые направления на каждого из пользователей, отсчитываемые от нормали к АР.

Нетрудно получить, что

$$\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H} = \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)H} = M. \quad (5.1.23)$$

Из (5.1.4) будем иметь, что весовые векторы, обеспечивающие согласованную с каналом передачу данных каждому из пользователей в отдельности, в случае статического канала равны

$$\mathbf{V}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{M}} \mathbf{H}^{(1)H}; \quad \mathbf{V}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{M}} \mathbf{H}^{(2)H}. \quad (5.1.24)$$

Можно показать, что для скалярного произведения векторов  $\mathbf{H}^{(1)}$  и  $\mathbf{H}^{(2)}$  с комплексными коэффициентами передачи вида (5.1.22) справедливо

$$\left| \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(2)H} \right|^2 = \left| \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(1)H} \right|^2 = M^2 |g(\Delta\varphi)|^2, \quad (5.1.25)$$

где  $\Delta\varphi = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}$  – параметр, определяемый взаимным угловым положением пользователей, а  $g(x)$  – нормированная диаграмма направленности АР, равная

$$g(x) = \frac{\sin(0.5Mkdsin x)}{M \sin(0.5kdsin x)}. \quad (5.1.26)$$

Подставляя (5.1.23) и (5.1.25) в (5.1.9) и (5.1.10), для среднего ОСШП на выходе антенны первого и второго пользователей будем иметь

$$\eta_{mean}^{(1)} = \eta_{mean}^{(2)} = \frac{0.5\rho_0 M}{1 + 0.5\rho_0 M |g(\Delta\varphi)|^2}. \quad (5.1.27)$$

Числитель в (5.1.27) определяет максимально достижимое ОСШП.

Из (5.1.27) следует, что ОСШП уменьшается за счет взаимной помехи, создаваемой пользователями друг другу. Величина помехи определяется уровнем диаграммы направленности антенны БС в направлении на мешающего пользователя. Чем больше уровень диаграммы направленности в этом направлении, тем больше величина взаимной помехи и тем меньше ОСШП. Вместе с тем, если  $|g(\Delta\varphi)| = 0$ , то ОСШП достигает своего максимального значения. Это объясняется тем, что при  $|g(\Delta\varphi)| = 0$  и передаче данных первому пользователю второй пользователь находится в направлении, соответствующем нулю диаграммы направленности АР базовой станции, и наоборот. В такой ситуации пользователи изначально являются пространственно разделенными.

В общем случае произвольного расположения пользователей мощность взаимной помехи пропорциональна мощности передатчика. Поэтому при бесконечном увеличении мощности передатчика ( $\rho_0 \rightarrow \infty$ ), ОСШП является ограниченной величиной, так как  $\eta_{mean}^{(1)} = \eta_{mean}^{(2)} \rightarrow |g(\Delta\varphi)|^{-2}$ .

## 5.2. Пространственное разделение двух пользователей

### 5.2.1. Проекционный метод

Рассмотрим теперь систему связи, реализующую независимую передачу данных двум пользователям за счет их пространственного разделения.

Принятые пользователями сигналы определяются выражениями (5.1.2) и (5.1.3). Из них следует, что на входе приемной антенны пользователей имеются как предназначенные ему полезные сигналы, так и мешающие («чужие») сигналы. Пространственное разделение пользователей обеспечивает обнуление

«чужих» сигналов. Из (5.1.2) и (5.1.3) следует, что пользователи будут пространственно разделенными, если весовые векторы  $\mathbf{V}^{(1)}$  и  $\mathbf{V}^{(2)}$  заменить некоторыми векторами  $\tilde{\mathbf{V}}^{(1)}$  и  $\tilde{\mathbf{V}}^{(2)}$ , которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\mathbf{H}^{(1)}\tilde{\mathbf{V}}^{(2)} = 0, \quad \mathbf{H}^{(2)}\tilde{\mathbf{V}}^{(1)} = 0. \quad (5.2.1)$$

Тогда каждый из пользователей будет принимать только «свои» сигналы и вместо (5.1.2) и (5.1.3) будем иметь

$$x^{(1)} = \sqrt{\frac{P_0}{2}}\mathbf{H}^{(1)}\tilde{\mathbf{V}}^{(1)}d^{(1)} + z^{(1)}, \quad x^{(2)} = \sqrt{\frac{P_0}{2}}\mathbf{H}^{(2)}\tilde{\mathbf{V}}^{(2)}d^{(2)} + z^{(2)}. \quad (5.2.2)$$

В соответствии с (5.1.4) весовой вектор  $\mathbf{V}^{(1)}$ , обеспечивающий максимум ОСШ при передаче первому пользователю при отсутствии второго, совпадает с вектором  $\mathbf{H}^{(1)}$  канальных коэффициентов ( $\mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{H}^{(1)}$ ). Однако из (5.1.6) видно, что при этом второй пользователь будет принимать «чужой» сигнал  $d^{(1)}$ . Если в качестве весового вектора выбрать проекцию вектора  $\mathbf{H}^{(1)}$  на направление, ортогональное вектору  $\mathbf{H}^{(2)}$ , то второе условие (5.2.1) будет выполняться, и второй пользователь не будет принимать «чужой» сигнал  $d^{(1)}$ . Геометрическая интерпретация условий (5.2.1) разделения двух пользователей показана на рис. 5.2.

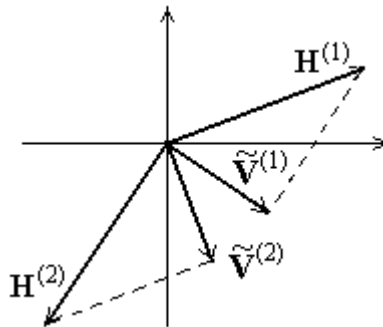


Рис. 5.2. Геометрическая интерпретация пространственного разделения двух пользователей

Поэтому, для пространственного разделения двух пользователей необходимо, чтобы весовой вектор первого (второго) пользователя был ортогонален канальному вектору второго (первого) пользователя:  $\tilde{\mathbf{V}}^{(1)} \perp \mathbf{H}^{(2)}$  и  $\tilde{\mathbf{V}}^{(2)} \perp \mathbf{H}^{(1)}$ .

Из (5.1.5) и (5.1.6) следует, что на БС должна быть информация о канальных коэффициентах для первого и второго пользователей, то есть должна быть обратная связь между пользователями и БС. Такая связь имеется в ММО-системе с передачей информации по собственным подканалам, поэтому далее будем рассматривать ММО-системы с обратной связью.

Для пространственного разделения пользователей можно использовать следующую процедуру [12,16], которая представляет собой дополнительное пре-



образование сигналов. Найдем проекцию вектора  $\mathbf{V}^{(1)}$  на подпространство, ортогональное вектору  $\mathbf{V}^{(2)}$ . Соответствующая матрица-проектор имеет вид [23]

$$\mathbf{\Pi}^{(1)} = \mathbf{I} - \mathbf{V}^{(2)}\mathbf{V}^{(2)H}. \quad (5.2.3)$$

Отсюда следует, что искомая проекция равна

$$\mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{\Pi}^{(1)}\mathbf{V}^{(1)} = (\mathbf{I} - \mathbf{V}^{(2)}\mathbf{V}^{(2)H})\mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{V}^{(1)} - (\mathbf{V}^{(2)H}\mathbf{V}^{(1)})\mathbf{V}^{(2)}. \quad (5.2.4)$$

Нормируем этот вектор. Учтем, что матрица  $\mathbf{\Pi}^{(1)}$  является эрмитовой и не изменяется при возведении в квадрат [23], то есть  $\mathbf{\Pi}^{(1)} = \mathbf{\Pi}^{(1)H}$  и  $\mathbf{\Pi}^{(1)} = (\mathbf{\Pi}^{(1)})^2$ . В результате получим, что нормированный вектор равен

$$\tilde{\mathbf{V}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{\Pi}}^{(1)}\mathbf{V}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{\Pi}}^{(1)} = \frac{\mathbf{\Pi}^{(1)}}{\sqrt{\mathbf{V}^{(1)H}\mathbf{\Pi}^{(1)}\mathbf{V}^{(1)}}}. \quad (5.2.5)$$

Аналогично получим, что нормированная проекция вектора  $\mathbf{V}^{(2)}$  на подпространство, ортогональное вектору  $\mathbf{V}^{(1)}$ , определяется выражением

$$\tilde{\mathbf{V}}^{(2)} = \tilde{\mathbf{\Pi}}^{(2)}\mathbf{V}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{\Pi}}^{(2)} = \frac{\mathbf{\Pi}^{(2)}}{\sqrt{\mathbf{V}^{(2)H}\mathbf{\Pi}^{(2)}\mathbf{V}^{(2)}}}. \quad (5.2.6)$$

С учетом введенных обозначений, выражения (5.1.2) и (5.1.3) для сигналов, принимаемых пользователями, можно переписать в виде

$$\tilde{x}^{(1)} = \sqrt{\frac{P_0}{2}}\mathbf{H}^{(1)}\tilde{\mathbf{V}}^{(1)}d^{(1)} + z^{(1)}, \quad \tilde{x}^{(2)} = \sqrt{\frac{P_0}{2}}\mathbf{H}^{(2)}\tilde{\mathbf{V}}^{(2)}d^{(2)} + z^{(2)}. \quad (5.2.7)$$

Схема передачи сигналов двум пользователям с пространственным разделением показана на рис. 5.3.

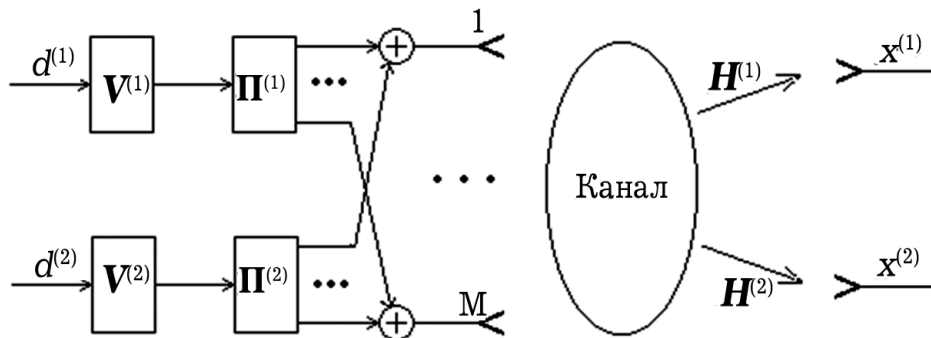


Рис. 5.3. Схема передачи с пространственным разделением двух пользователей

Подставляя (5.2.5) и (5.2.6) в (5.2.7) и учитывая (5.1.4), получим, что среднее ОСШ на выходе антенны первого и второго пользователей равны

$$\tilde{\eta}_{mean}^{(1)} = \frac{\rho_0}{2} \left( \langle \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H} \rangle - \left\langle \frac{|\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(2)H}|^2}{\mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)H}} \right\rangle \right). \quad (5.2.8)$$

$$\tilde{\eta}_{mean}^{(2)} = \frac{\rho_0}{2} \left( \langle \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)H} \rangle - \left\langle \frac{|\mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(1)H}|^2}{\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H}} \right\rangle \right). \quad (5.2.9)$$

В случае релейских замираний сигналов выражения (5.2.8) и (5.2.9) являются сложными для дальнейшего использования. Однако знаменатели дробей, входящих в эти формулы, аналогичны знаменателям дробей в (5.1.8). Ранее было показано, что при большом числе передающих антенн ( $M \gg 1$ ) флуктуации таких величин малы по сравнению с их средними значениями и могут не учитываться, то есть выполняются следующие приближенные равенства

$$\left\langle \frac{|\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(2)H}|^2}{\mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)H}} \right\rangle \approx \frac{\langle |\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(2)H}|^2 \rangle}{\langle \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)H} \rangle}, \quad \left\langle \frac{|\mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(1)H}|^2}{\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H}} \right\rangle \approx \frac{\langle |\mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(1)H}|^2 \rangle}{\langle \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H} \rangle}. \quad (5.2.10)$$

Учитывая, что  $\langle \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)H} \rangle = \langle \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)H} \rangle = M$ , а также (5.1.18), получим для среднего ОСШ [16,19]

$$\tilde{\eta}_{mean}^{(1)} = \tilde{\eta}_{mean}^{(2)} \approx 0,5\rho_0(M-1). \quad (5.2.11)$$

Из (5.2.11) следует, что для разделенных пользователей взаимная помеха отсутствует и при бесконечном увеличении излучаемой мощности ( $\rho_0 \rightarrow \infty$ ) ОСШ является неограниченной величиной ( $\tilde{\eta}_{mean}^{(1)} = \tilde{\eta}_{mean}^{(2)} \rightarrow \infty$ ).

Выше показано, что при оптимальной (согласованной с каналом) передаче сигналов одному пользователю и использовании  $M$  передающих антенн ОСШ на выходе приемной антенны равно  $0,5\rho_0 M$ , что означает выигрыш в  $M$  раз. Следовательно, при разделении двух пользователей возникают энергетические потери, величина которых, с учетом (5.2.11), составляет  $(1-M^{-1})$ . Полученный результат свидетельствует о том, что, с точки зрения энергетических соотношений, ММО-система с  $M$  передающими антеннами и пространственным разделением двух пользователей, эквивалентна системе с  $(M-1)$  антеннами, но обслуживающей только одного пользователя.

С помощью (5.2.11) получим приближенное выражение для полной средней СЭ ММО-системы с двумя разделенными пользователями, имеющими по одной антенне, в виде

$$C_{mean} = C_{mean}^{(1)} + C_{mean}^{(2)} \approx 2 \log_2 [1 + 0,5\rho_0(M-1)]. \quad (5.2.12)$$

Отсюда следует, что удельная (на одного пользователя) средняя СЭ ММО-системы с  $M$  передающими антеннами и с пространственным разделением двух

пользователей равна средней СЭ ММО-системы с  $(M-1)$  передающими антеннами, обслуживающей единственного пользователя.

Для пояснения физического смысла пространственного разделения двух пользователей обратимся к наглядному случаю статического канала.

Учитывая, что для статического канала справедливы выражения (5.1.23) и (5.1.25), из (5.2.1) – (5.2.3) следует, что в условиях статического канала ОСШ на выходе антенны пользователя равно

$$\tilde{\eta}^{(1)} = \tilde{\eta}^{(2)} = 0,5\rho_0 M [1 - |g(\Delta\varphi)|^2]. \quad (5.2.13)$$

Полученная формула совпадает с известным в радиолокации выражением, определяющим ОСШП на выходе  $M$ -элементной АР с оптимальной пространственной обработкой сигнала в присутствии одного источника помехи достаточно большой мощности [26], в результате которой формируется провал в диаграмме направленности в направлении на помеху. Это означает, что в статическом канале пространственное разделение пользователей обеспечивается за счет формирования нуля в диаграмме направленности в направлении на мешающего пользователя.

Из (5.2.13) следует, что для разделенных пользователей взаимная помеха отсутствует и при увеличении мощности ( $\rho_0 \rightarrow \infty$ ) ОСШ является неограниченной величиной ( $\eta^{(1)} = \eta^{(2)} \rightarrow \infty$ ). При этом энергетические потери на разделение пользователей в статическом канале определяются величиной  $(1 - |g(\Delta\varphi)|^2)$ .

С учетом (5.2.13) полная СЭ системы в статическом канале равна

$$C = 2 \log_2 [1 + 0,5\rho_0 M (1 - |g(\Delta\varphi)|^2)]. \quad (5.2.14)$$

### 5.2.2. Энергетический выигрыш за счет разделения пользователей

Сравним эффективности двух режимов работы системы связи: обслуживание двух пользователей без их пространственного разделения и обслуживание двух пользователей с пространственным разделением. Для оценки эффективности введем понятие энергетического выигрыша за счет разделения

$$v = \tilde{\eta}_{mean} / \eta_{mean}, \quad (5.2.15)$$

где ОСШ  $\tilde{\eta}_{mean}$  определяется формулами (5.2.11) и (5.2.13) для релейского и статического каналов, а ОСШП  $\eta_{mean}$  – выражениями (5.1.19) и (5.1.27).

Из (5.2.15) с учетом (5.1.19), (5.1.27), (5.2.11) и (5.2.13) для релейского и статического каналов будем соответственно иметь

$$v = \frac{M-1}{M} (1 + 0,5\rho_0), \quad (5.2.16)$$

$$v = [1 - |g(\Delta\varphi)|^2] \times [1 + 0,5\rho_0 M |g(\Delta\varphi)|^2]. \quad (5.2.17)$$

На рис. 5.4 показан энергетический выигрыш  $\nu$  в зависимости от ОСШ  $\rho_0$  для релейского канала при различном числе передающих антенн ( $M=2, 4, 10, 24$ ). Видно, что чем больше излучаемая мощность, тем больше получаемый выигрыш. Увеличение числа передающих антенн приводит к незначительному увеличению энергетического выигрыша.

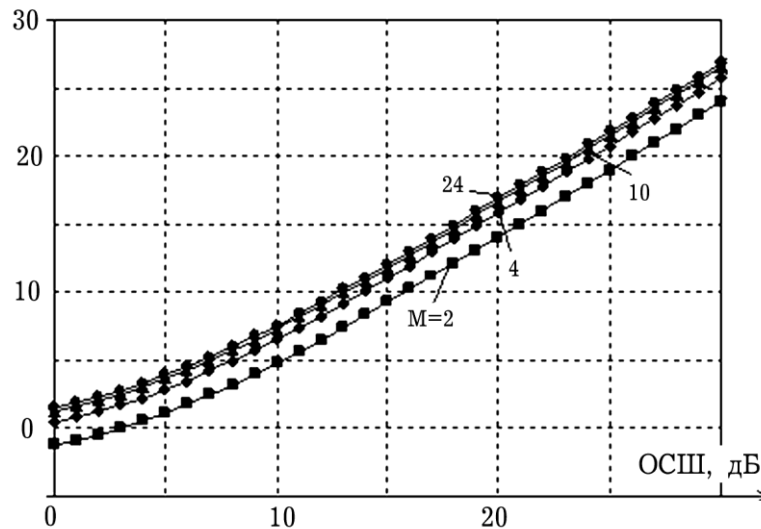


Рис. 5.4. Энергетический выигрыш при пространственном разделении двух пользователей в релейском канале и разных  $M$

На рис. 5.5 показаны зависимости энергетического выигрыша  $\nu$  для статического канала от взаимного углового положения пользователей  $\Delta\varphi=\varphi(1)-\varphi(2)$  при различном числе передающих антенн ( $M=4$  и  $10$ ) и ОСШ  $\rho_0=10$  дБ. Видно, что выигрыш за счет пространственного разделения определяется взаимным расположением пользователей. Чем больше уровень диаграммы направленности в направлении на мешающего пользователя, тем больше выигрыш. Пространственное разделение не дает результата ( $\nu=0$  дБ), если направление на мешающего пользователя соответствует нулю диаграммы направленности, так при этом пользователи являются изначально разделенными. Если мешающий пользователь находится в пределах ширины главного лепестка диаграммы направленности, пространственное разделение приводит к проигрышу в ОСШ из-за ослабления полезного сигнала.

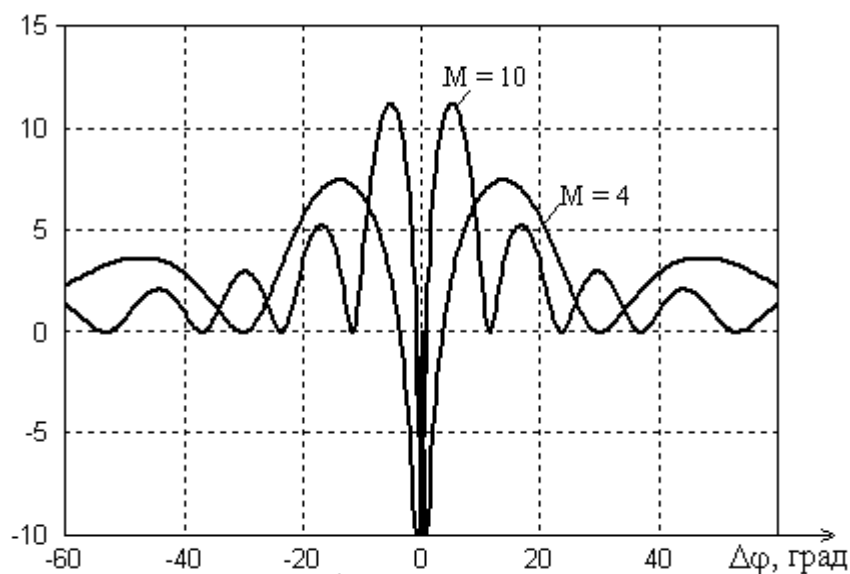


Рис. 5.5. Энергетический выигрыш при пространственном разделении двух пользователей в статическом канале при  $M=4$  и  $M=10$ , ОСШ  $\rho_0=10$  дБ

### 5.3. Пространственное разделение произвольного числа пользователей

В предыдущем параграфе был рассмотрен метод пространственного разделения двух пользователей, каждый из которых имеет по одной антенне. Обобщим теперь этот метод для случая произвольного числа пользователей и произвольного числа приемных и передающих антенн [16].

#### 5.3.1. Проекционный метод

Предположим, что система связи одновременно обслуживает  $Q$  пользователей, каждый из которых может иметь разное число антенн. Однако неприципиальным является предположение, что все пользователи имеют одинаковое число  $N$  антенн. Будем считать, что передающая АР на БС состоит из  $M$  антенн и  $M > N$ . Тогда для каждого пользователя можно сформировать  $K$  собственных подканалов, а максимальное число разделяемых пользователей равно  $Q_{max} = \lfloor M/N \rfloor$ , где  $\lfloor x \rfloor$  – целая часть  $x$ .

Коэффициенты передачи  $h_{nm}^{(q)}$  сигналов из  $m$ -ой антенны БС в  $n$ -ую антенну  $q$ -го пользователя образуют канальную матрицу  $\mathbf{H}^{(q)}$ . Свойства пространственного канала для всех пользователей могут быть описаны  $Q$  матрицами  $\mathbf{H}^{(1)}, \mathbf{H}^{(2)}, \dots, \mathbf{H}^{(Q)}$ , которые имеют одинаковую размерность  $(N \times M)$  и состоят из элементов с одинаковыми статистическими свойствами. Весовые коэффициенты, формирующие собственные подканалы для  $q$ -го пользователя, будем описывать матрицами  $\mathbf{V}^{(q)}$  и  $\mathbf{U}^{(q)}$ . Эти подканалы обеспечивают параллельную передачу  $K$  символов  $q$ -му пользователю. Таким образом, одновременно может быть передано  $KQ$  символов для  $Q$  пользователей.

Обозначим  $\mathbf{D}^{(q)}$   $K$ -мерный вектор символов, передаваемых  $q$ -му пользователю. Из п. 3.1 следует, что после смешивания сигналов всех пользователей  $M$ -мерный вектор излучаемых сигналов будет определяться выражением вида

$$\mathbf{G} = \sum_{q=1}^Q \mathbf{V}^{(q)} (\mathbf{P}^{(q)})^{1/2} \mathbf{D}^{(q)}, \quad (5.3.1)$$

где  $\mathbf{P}^{(q)}$  – диагональная матрица, элементы которой дают распределение мощности, предназначенной  $q$ -му пользователю, по его собственным подканалам.

Вектор сигнала, принимаемого  $q$ -м пользователем, в соответствии с (3.2.2), равен

$$\mathbf{X}^{(q)} = \mathbf{H}^{(q)} \mathbf{G} + \mathbf{Z}^{(q)}. \quad (5.3.2)$$

Сингулярное разложение матрицы  $\mathbf{H}^{(q)}$  канальных коэффициентов для  $q$ -го пользователя имеет вид

$$\mathbf{H}^{(q)} = \mathbf{U}^{(q)} (\mathbf{\Lambda}^{(q)})^{1/2} \mathbf{V}^{(q)H}. \quad (5.3.3)$$

Подставляя (5.3.1) и (5.3.3) в (5.3.2), получим, что

$$\mathbf{X}^{(q)} = \sum_{p=1}^Q \mathbf{U}^{(q)} (\mathbf{\Lambda}^{(q)} \mathbf{P}^{(p)})^{1/2} (\mathbf{V}^{(q)H} \mathbf{V}^{(p)}) \mathbf{D}^{(p)} + \mathbf{Z}^{(q)}. \quad (5.3.4)$$

Полная система весовых векторов  $\{\mathbf{V}_i^{(q)}\}$  ( $i=1,2,\dots,K; q=1,2,\dots,Q$ ), формирующих собственные подканалы для всех пользователей, не является ортогональной. В самом деле, векторы  $\mathbf{V}_i^{(q)}$  и  $\mathbf{V}_j^{(p)}$  ортогональны друг другу только при  $q=p$ . То есть весовые векторы, формирующие собственные каналы для одного пользователя ортогональны между собой, а векторы собственных подканалов для разных пользователей, ортогональными не являются. Следовательно, матрица  $\mathbf{V}^{(q)H} \mathbf{V}^{(p)}$  в (5.3.4) не является диагональной, и  $q$ -ый пользователь будет принимать информацию, предназначенную и другим пользователям. В самом деле, для  $q$ -го пользователя вектор сигнала на выходе блока пространственной обработки равен

$$\mathbf{Y}^{(q)} = (\mathbf{\Lambda}^{(q)} \mathbf{P}^{(q)})^{1/2} \mathbf{D}^{(q)} + \sum_{p=1, p \neq q}^Q (\mathbf{\Lambda}^{(q)} \mathbf{P}^{(p)})^{1/2} (\mathbf{V}^{(q)H} \mathbf{V}^{(p)}) \mathbf{D}^{(p)} + \tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}, \quad (5.3.5)$$

где  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)} = \mathbf{U}^{(q)H} \mathbf{Z}^{(q)}$  – вектор выходных собственных шумов.

Первое слагаемое в (5.3.5) представляет полезный сигнал, передаваемый  $q$ -му пользователю. Второе слагаемое дает помеховые сигналы, принимаемые  $q$ -

ым пользователем, но предназначенные для других пользователей. Таким образом, пользователи оказываются между собой неразделенными.

Для пространственного разделения  $Q$  пользователей используем проекционный метод, который представляет собой дополнительное преобразование сигналов и может быть выполнен с помощью матриц-проекторов  $\Pi_i^{(q)}$  на подпространство, ортогональное всем весовым векторам, кроме вектора  $\mathbf{V}_i^{(q)}$  [16].

Введем в рассмотрение матрицы  $\mathbf{A}_\Sigma$  и  $\mathbf{A}_i^{(q)}$ . Первая из них – матрица  $\mathbf{A}_\Sigma = (\mathbf{V}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{V}_K^{(1)}, \mathbf{V}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{V}_K^{(2)}, \dots, \mathbf{V}_1^{(Q)}, \dots, \mathbf{V}_K^{(Q)})$  размерности  $(M \times QK)$  состоит из всех весовых векторов  $\mathbf{V}_i^{(q)}$  ( $i=1,2,\dots,K; q=1,2,\dots,Q$ ), а матрица  $\mathbf{A}_i^{(q)}$  образована из матрицы  $\mathbf{A}_\Sigma$  путем исключения вектора  $\mathbf{V}_i^{(q)}$ . Иными словами, в матрицу  $\mathbf{A}_i^{(q)}$  не входит вектор-столбец, формирующий  $i$ -ый собственный подканал  $q$ -го пользователя.

Найдем проекцию вектора  $\mathbf{V}_i^{(q)}$  на подпространство остальных векторов. Соответствующую матрицу-проектор можно записать в виде [23]  $\mathbf{A}_i^{(q)}(\mathbf{A}_i^{(q)H} \mathbf{A}_i^{(q)})^{-1} \mathbf{A}_i^{(q)H}$ . Учтем, что матрица-проектор на полное пространство совпадает с тождественной матрицей  $\mathbf{I}$ . Тогда матрица-проектор  $\Pi_i^{(q)}$  на подпространство, ортогональное всем векторам, кроме вектора  $\mathbf{V}_i^{(q)}$ , будет равна

$$\Pi_i^{(q)} = \mathbf{I} - \mathbf{A}_i^{(q)}(\mathbf{A}_i^{(q)H} \mathbf{A}_i^{(q)})^{-1} \mathbf{A}_i^{(q)H}. \quad (5.3.6)$$

Проекция вектора  $\mathbf{V}_i^{(q)}$  на подпространство, ортогональное всем векторам, кроме вектора  $\mathbf{V}_i^{(q)}$ , определяется вектором  $\Pi_i^{(q)} \mathbf{V}_i^{(q)}$ . Нормируем этот вектор и учтем, что матрица  $\Pi_i^{(q)}$  является эрмитовой и не изменяется при возведении в квадрат [23], то есть  $\Pi_i^{(q)} = \Pi_i^{(q)H}$  и  $\Pi_i^{(q)} = (\Pi_i^{(q)})^2$ . В результате получим, что нормированный весовой вектор равен

$$\tilde{\mathbf{V}}_i^{(q)} = \frac{\Pi_i^{(q)} \mathbf{V}_i^{(q)}}{\sqrt{\mathbf{V}_i^{(q)H} \Pi_i^{(q)} \mathbf{V}_i^{(q)}}}. \quad (5.3.7)$$

Теперь вектор  $\mathbf{G}$  сигналов на выходах передающих антенн и вектор сигналов  $\mathbf{X}^{(q)}$  в приемных антеннах  $q$ -го пользователя определяются с помощью выражений (5.3.1) и (5.3.4), если в них заменить  $\mathbf{V}_i^{(q)}$  на  $\tilde{\mathbf{V}}_i^{(q)}$ . При этом вектор сигнала  $\mathbf{Y}^{(q)}$  на выходе собственных подканалов  $q$ -го пользователя равен [12,16]

$$\mathbf{Y}^{(q)} = \sum_{p=1}^Q (\Lambda^{(q)} \mathbf{P}^{(p)})^{1/2} (\mathbf{V}^{(q)H} \tilde{\mathbf{V}}^{(p)}) \mathbf{D}^{(q)} + \tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}. \quad (5.3.8)$$

Матрица  $\mathbf{V}^{(q)H} \tilde{\mathbf{V}}^{(p)}$  в (5.3.8) является диагональной. Учтем, что ее  $lm$ -ый элемент равен  $(\mathbf{V}^{(q)H} \tilde{\mathbf{V}}^{(p)})_{lm} = \mathbf{V}_l^{(q)H} \tilde{\mathbf{V}}_m^{(p)}$ . Тогда из свойств матриц-проекторов [23] следует, что

$$\mathbf{V}_l^{(q)H} \tilde{\mathbf{V}}_m^{(p)} = \frac{\mathbf{V}_l^{(q)H} \mathbf{\Pi}_m^{(p)} \mathbf{V}_m^{(p)}}{\sqrt{\mathbf{V}_m^{(p)H} \mathbf{\Pi}_m^{(p)} \mathbf{V}_m^{(p)}}} = \sqrt{\mathbf{V}_l^{(q)H} \mathbf{\Pi}_m^{(p)} \mathbf{V}_m^{(p)}} \delta_{pq} \delta_{lm}, \quad (5.3.9)$$

где  $\delta_{pq}$  – символ Кронекера.

Подставляя (5.3.9) в (5.3.8), для вектора сигнала, принимаемого  $q$ -м пользователем, будем иметь

$$\mathbf{Y}^{(q)}(t) = (\Lambda^{(q)})^{1/2} (\Lambda_{\Pi}^{(q)})^{1/2} (\mathbf{P}^{(q)})^{1/2} \mathbf{C}^{(q)}(t) + \tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}(t), \quad (5.3.10)$$

где  $\Lambda_{\Pi}^{(q)}$  – диагональная матрица с элементами  $\mathbf{V}_i^{(q)H} \mathbf{\Pi}_i^{(q)} \mathbf{V}_i^{(q)}$  ( $i=1, \dots, K$ ).

Из (5.3.10) следует, что пространственное разделение пользователей обеспечивает независимую параллельную передачу  $KQ$  символов. Общая схема ММО-системы с передачей информации по собственным подканалам и с пространственным разделением  $Q$  пользователей показана на рис. 5.6, где  $\tilde{\mathbf{\Pi}}_K^{(q)}$  – матричные преобразователи, обеспечивающие разделение пользователей.

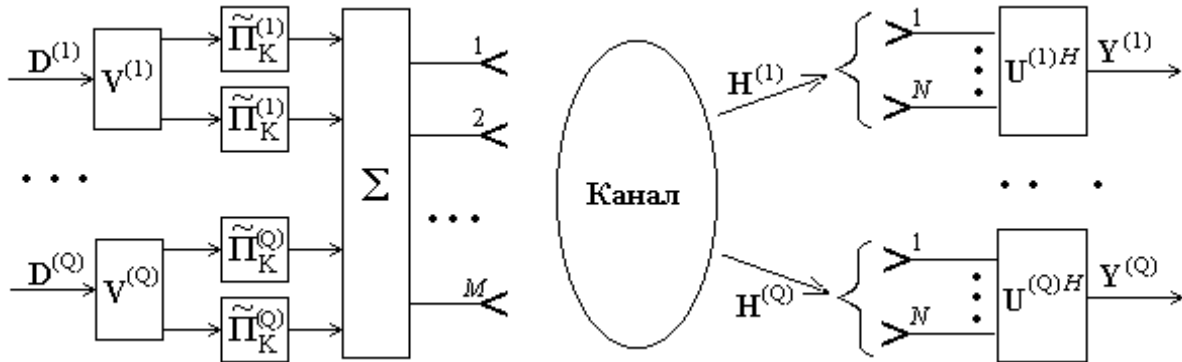


Рис. 5.6. Схема ММО-системы с передачей данных по собственным подканалам и пространственным разделением пользователей

Ранее рассматривалась передача информации от БС нескольким пользователям. Покажем, что проекционный метод обеспечивает также разделение пользователей при передаче сигналов в обратном направлении от пользователей к БС. Будем считать, что передача в прямом и обратном направлениях ведется на одной частоте. В этом случае все каналные матрицы являются эрмитово сопряженными матрицами по отношению к прежним матрицам.



Следовательно, канал связи в обратном направлении определяется  $Q$  матрицами  $\mathbf{H}^{(1)H}$ ,  $\mathbf{H}^{(2)H}$ , ...,  $\mathbf{H}^{(Q)H}$ . Приемные антенны пользователей становятся передающими антеннами, а передающая АР базовой станции – приемной АР, то есть  $\mathbf{U}^{(q)}$  является матрицей весовых коэффициентов при передаче сигнала от  $q$ -го пользователя, а матрица  $\mathbf{V}^{(q)H}$  играет роль матрицы весовых коэффициентов при приеме сигналов от этого пользователя. Для сигнала, принимаемого от  $q$ -го пользователя, можно получить выражение, совпадающее с (5.3.10).

Таким образом, при использовании процедуры ортогонализации собственные подканалы являются независимыми для передачи информации в любом направлении.

### 5.3.2. Спектральная эффективность

Найдем СЭ системы с собственными подканалами при пространственном разделении  $Q$  пользователей. Из (5.3.10) следует, что ОСШ  $\eta_i^{(q)}$  на выходе  $i$ -го собственного подканала  $q$ -го пользователя равно

$$\eta_i^{(q)} = \rho_i^{(q)} \lambda_i^{(q)} \mathbf{V}_i^{(q)H} \mathbf{\Pi}_i^{(q)} \mathbf{V}_i^{(q)}. \quad (5.3.11)$$

Отметим, что в случае одного пользователя, как следует из (3.2.6), ОСШ  $\eta_i = \rho_i \lambda_i$ . Учтем, что для любой системы ортонормированных векторов  $\mathbf{V}_i^{(q)}$  справедливо неравенство:  $\mathbf{V}_i^{(q)H} \mathbf{\Pi}_i^{(q)} \mathbf{V}_i^{(q)} \leq \mathbf{V}_i^{(q)H} \mathbf{V}_i^{(q)} = 1$ . Отсюда следует, что пространственное разделение пользователей с помощью проекционного метода приводит к энергетическим потерям из-за уменьшения ОСШ на выходе собственных подканалов. При этом с ростом числа  $Q$  пользователей ОСШ уменьшается в большей степени. Для  $i$ -го собственного подканала  $q$ -го пользователя коэффициент уменьшения ОСШ равен  $\mathbf{V}_i^{(q)H} \mathbf{\Pi}_i^{(q)} \mathbf{V}_i^{(q)}$ .

Выражение (5.3.11) позволяет определить удельную СЭ  $C^{(q)}$  системы, приходящуюся на одного ( $q$ -го) пользователя. С учетом (5.3.11) имеем, что

$$C^{(q)} = \sum_{i=1}^K \log_2 (1 + \rho_i^{(q)} \lambda_i^{(q)} \mathbf{V}_i^{(q)H} \mathbf{\Pi}_i^{(q)} \mathbf{V}_i^{(q)}). \quad (5.3.12)$$

Все пользователи являются пространственно разделенными. Поэтому, полную СЭ системы получим, суммируя удельные СЭ. В результате найдем, что

$$C = \sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^K \log_2 (1 + \rho_i^{(q)} \lambda_i^{(q)} \mathbf{V}_i^{(q)H} \mathbf{\Pi}_i^{(q)} \mathbf{V}_i^{(q)}). \quad (5.3.13)$$

Выражения (5.3.11) и (5.3.13) для ОСШ на выходе собственных подканалов и полной СЭ ММО-системы справедливы в случае произвольных замираний сигналов.

Обобщим приближенное выражение (5.3.11) для случая двух пользователей ( $Q=2$ ) на случай произвольного числа  $Q>2$  пользователей, каждый из которых имеет по одной приемной антенне ( $N=1$ ). В соответствии с (5.2.11) энергетические потери при  $Q=2$  составляют величину  $(1-M^{-1})$ , что имеет ясное математическое толкование. Матрица  $\mathbf{\Pi}^{(1)}$  проектирует  $M$ -мерный весовой вектор  $\mathbf{V}^{(1)}$  на  $(M-1)$ -мерное подпространство. Релеевским замираниям соответствует однородная рассеивающая среда. Поэтому вектор  $\mathbf{V}^{(1)}$  является случайным вектором, равномерно распределенным в  $M$ -мерном пространстве, и при его проектировании в подпространство меньшей размерности потери в ОСШ определяются степенью уменьшения размерности этого подпространства, которая в случае двух пользователей составляет величину  $1/M$ .

В случае произвольного числа пользователей ( $Q>2$ ), имеющих по одной антенне, матрица  $\mathbf{\Pi}^{(1)}$  проектирует  $M$ -мерный весовой вектор  $\mathbf{V}^{(1)}$  на подпространство меньшей размерности  $(M-Q)$ .

Следовательно, энергетические потери за счет разделения  $Q$  пользователей увеличиваются и равны  $1-(Q-1)M^{-1}$ . Поэтому будем иметь, что среднее ОСШ на выходе антенны  $q$ -го пользователя равно

$$\eta_{mean}^{(q)} = \frac{P_0}{Q} M \left( 1 - \frac{Q-1}{M} \right), \quad (5.3.14)$$

откуда полная средняя СЭ системы

$$C_{mean} = \sum_{q=1}^Q C_{mean}^{(q)} \approx Q \log_2 \left[ 1 + \frac{P_0}{Q} [M - (Q-1)] \right]. \quad (5.3.15)$$

Из (5.3.14) следует, что среднее ОСШ на выходе антенны пользователя в ММО-системе с  $M$  передающими антеннами, разделяющей  $Q$  пользователей с одной приемной антенной каждый, совпадает с ОСШ в ММО-системе с  $M-(Q-1)$  передающими антеннами, обслуживающей единственного пользователя при мощности передатчика, равной  $P_0/Q$ .

Обобщим теперь полученный результат на случай произвольного числа  $N$  антенн пользователя. Так как каждый пользователь имеет  $N$  собственных подканалов, то его пространственное разделение с другими пользователями предполагает использование  $N$  матриц-проекторов. Обобщая (5.3.14) и (5.3.15) на случай произвольного числа  $N$  антенн пользователя, получим, что при условии равномерного распределения мощности между подканалами среднее выходное ОСШ определяется выражением [16]

$$\eta_{mean}^{(q)} = \frac{P_0}{Q} M \left( 1 - \frac{QN-1}{M} \right), \quad (5.3.16)$$

а полная средняя СЭ ММО-системы с  $Q$  разделенными пользователями

$$C_{mean} \approx QN \log_2 \left[ 1 + \frac{P_0}{Q} [M - (QN - 1)] \right]. \quad (5.3.17)$$

Из (5.3.17) следует, что удельная (на одного пользователя и на один собственный подканал) средняя СЭ ММО-системы с пространственным разделением  $Q$  пользователей с  $N$  антеннами каждый равна средней СЭ системы, обслуживающей единственного пользователя, если он имеет одну антенну, а число  $M$  передающих антенн на базовой станции уменьшено на  $(QN-1)$ .

Из (5.3.17) также видно, что полная СЭ системы увеличивается с ростом числа  $Q$  пользователей за счет увеличения общего количества собственных подканалов. Однако среднее ОСШ на выходе этих подканалов уменьшается при увеличении  $Q$ . Поэтому существует оптимальное число  $Q_{opt}$  пользователей для их пространственного разделения, которое зависит от мощности  $P_0$  передатчика (или от ОСШ  $\rho_0$ ).

Выражение для  $Q_{opt}$ , которое можно получить, дифференцируя в (5.3.17) по параметру  $Q$ , в общем случае имеет достаточно сложный вид. Однако если излучаемая мощность является малой ( $\rho_0 MN^{-1} \ll 1$ ), то из (5.3.17) получим [16]

$$C_{mean} \approx \rho_0 \frac{M}{\ln 2} \left( 1 - \frac{QN - 1}{M} \right). \quad (5.3.18)$$

Отсюда  $Q_{opt}=1$ , то есть оптимальным является обслуживание только одного пользователя.

В обратном случае достаточно большой мощности ( $\rho_0 MN^{-1} \gg 1$ ), дифференцируя (5.3.17) по  $Q$ , можно показать, что оптимальным является обслуживание максимально возможного числа пользователей, то есть  $Q_{opt}=Q_{max}=[M/N]$ .

Приведем результаты моделирования, характеризующие эффективность проекционного метода пространственного разделения пользователей для релейского некоррелированного канала. Сравним также результаты для полной средней СЭ системы с собственными подканалами, основанные на точном выражении (5.3.13), с результатами, полученными с помощью приближенной формулы (5.3.17).

При моделировании вначале формировалась случайная выборка коэффициентов передачи  $h_{nm}^{(q)}$  для каждого пользователя, то есть формировалась одна реализация канальных матриц  $\mathbf{H}^{(q)}$  ( $q=1, 2, \dots, Q$ ). Для этих матриц вычислялись весовые векторы  $\mathbf{V}^{(q)}$  и  $\mathbf{U}^{(q)}$ , как векторы сингулярного разложения матрицы  $\mathbf{H}^{(q)}$ , а также собственные числа  $\lambda_i^{(q)}$ . Далее реализовывалось пространственное разделение пользователей. С этой целью с помощью (5.3.3) находились проекционные матрицы  $\mathbf{P}_i^{(q)}$  для всех пользователей и на основе (5.3.13) вычислялась СЭ системы для заданной реализации матриц  $\mathbf{H}^{(q)}$ . Затем формировалась следующая выборка коэффициентов  $h_{nm}^{(q)}$ , и аналогичным образом находилось

значение СЭ. Результатом моделирования являлась оценка полной средней СЭ системы. Всего рассматривалось 5000 реализаций каждой из матриц  $\mathbf{H}^{(q)}$ .

На рис. 5.7 и рис. 5.8 показаны полная средняя СЭ ММО-системы в зависимости от числа  $Q$  разделяемых пользователей при разном числе передающих антенн  $M=8, 12, 16, 24$  для ОСШ  $\rho_0=10$  дБ. Число антенн у каждого из пользователей  $N=1$  и 2. Черные кривые соответствуют точной формуле (5.3.13), а результаты, показанные серыми кривыми, получены с помощью приближенного выражения (5.3.17).

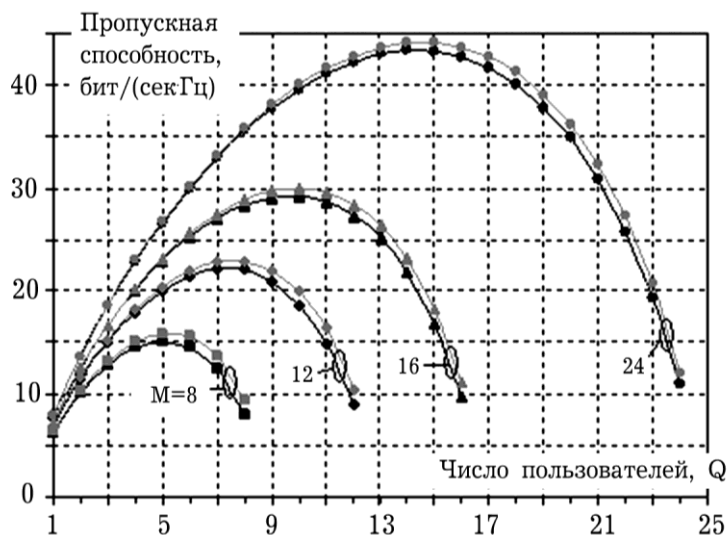


Рис. 5.7. Средняя СЭ при разных  $M$  и  $N=1$ . Черными и серыми кривыми показаны результаты моделирования и аналитические результаты, соответственно

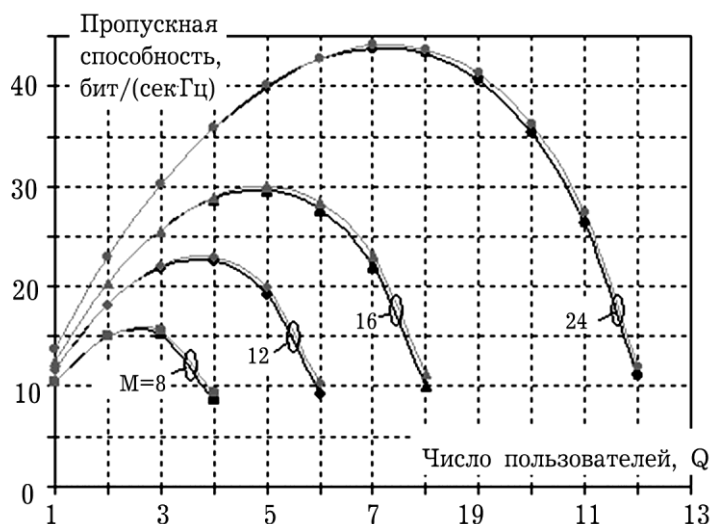


Рис. 5.8. Средняя СЭ при разных  $M$  и  $N=2$ . Черными и серыми кривыми показаны результаты моделирования и аналитические результаты, соответственно

Из результатов, представленных на рис. 5.7 и рис. 5.8, следует, что полная средняя СЭ системы при увеличении количества пользователей сначала возрастает благодаря увеличению общего количества собственных подканалов, а затем начинает убывать из-за потерь в ОСШ на выходе этих подканалов. Полная

СЭ увеличивается тем больше, чем больше используется передающих антенн. Например, при  $\rho_0=10$  дБ и числе антенн пользователя, равном  $N=2$ , оптимальное число обслуживаемых пользователей составляет  $Q_{opt} \approx 3, 4, 5, 7$  при  $M=8, 12, 16, 24$ , соответственно. При этом СЭ системы увеличивается в 1.5, 2.0, 2.4 и 3.2 раза. Нетрудно также видеть, что приближенные выражения (5.3.16) и (5.3.17) обеспечивают высокую точность.

На рис. 5.9 представлена полная средняя СЭ системы ММО-системы с 24 передающими и 2 приемными антеннами у каждого пользователя, вычисленная по формуле (5.3.17), в зависимости от числа  $Q$  обслуживаемых пользователей для ОСШ  $\rho_0=0, 10, 20$  и 30 дБ. Видно, что оптимальное число обслуживаемых пользователей увеличивается с увеличением полной мощности и составляет  $Q_{opt}=5, 7, 9$  и 10 для  $\rho_0=0, 10, 20$  и 30 дБ, соответственно, то есть приближается к максимально возможному числу разделяемых пользователей  $Q_{max}=M/N=12$ .

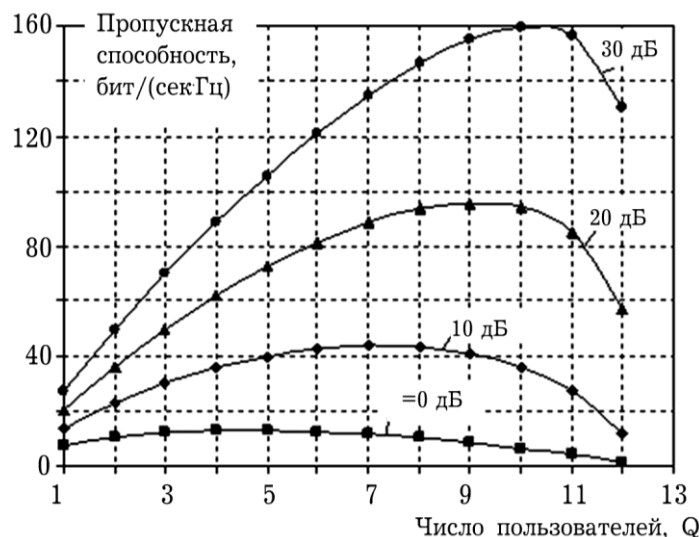


Рис. 5.9. Средняя СЭ при разных ОСШ,  $M=24, N=2$

Таким образом, эффективность ММО-системы связи с передачей данных по собственным подканалам может быть значительно увеличена за счет пространственного разделения нескольких пользователей.

### 5.3.3. Вероятность битовой ошибки

Найдем вероятность битовой ошибки  $BER^{(q)}$  при передаче информации  $q$ -му пользователю в ММО-системе с пространственным разделением  $Q$  пользователей. Предположим, что во всех собственных подканалах каждого пользователя используется одинаковая модуляция, то есть на базовой станции имеется общий модулятор, отображающий биты в символы, после которого формируется  $QK$  параллельных потоков данных. Тогда вероятность  $BER^{(q)}$  можно найти путем усреднения по всем собственным подканалам вероятности битовой ошибки  $BER_i^{(q)}$  в  $i$ -м собственном канале  $q$ -го пользователя, то есть

$$BER^{(q)} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K BER_i^{(q)}. \quad (5.3.19)$$

Вероятность ошибки  $BER_i^{(q)}$  определяется выражением, аналогичным (1.1.9), то есть зависит от функции  $f_i^{(q)}(\eta)$  плотности вероятности ОСШ  $\eta_i^{(q)}$  на выходе  $i$ -го собственного подканала и равна

$$BER_i^{(q)} = \int_0^{\infty} BER^{(stat)}(\eta) f_i^{(q)}(\eta) d\eta, \quad (5.3.20)$$

где  $BER^{(stat)}(\eta)$  – вероятность битовой ошибки в статическом канале без замираний сигналов, которая является одинаковой для всех подканалов.

Рассмотрим сигналы бинарной и квадратурной фазовых модуляций, наиболее часто используемых в современных системах сотовой связи. Вероятность ошибки  $BER^{(stat)}(\eta)$ , которая определяется (1.1.10), перепишем в виде

$$BER^{(stat)}(a\eta) = \frac{1}{2} [1 - \Phi(\sqrt{a\eta})], \quad (5.3.21)$$

где параметр  $a = 1$  и  $a = 0.5$  для 2-ФМ 4-ФМ сигналов, соответственно.

Найдем плотность вероятности  $f_i^{(q)}(\eta)$  ОСШ  $\eta_i^{(q)}$  на выходе  $i$ -го собственного подканала  $q$ -го пользователя, которое определяется выражением (5.3.11). Будем считать, что полная мощность распределяется равномерно между  $Q$  пользователями и между  $K$  собственными подканалами каждого из них. При этом из (5.3.11) для ОСШ  $\eta_i^{(q)}$  будем иметь

$$\eta_i^{(q)} = \frac{P_0}{QK\sigma_0^2} \lambda_i^{(q)} \mathbf{V}_i^{(q)H} \mathbf{\Pi}_i^{(q)} \mathbf{V}_i^{(q)}. \quad (5.3.22)$$

Получить аналитическое выражение для плотности вероятности  $f_i^{(q)}(\eta)$  в случае произвольного вида замираний сигналов, а, следовательно, и для вероятности битовой ошибки, не представляется возможным. Поэтому вероятность ошибки в ММО-системе с разделением пользователей можно получить с помощью численного моделирования. Однако в практически наиболее интересном случае некоррелированного релейского канала известны точные выражения для вероятности битовой ошибки [17], поэтому далее будем рассматривать такие замирания сигналов.

**Пользователи с одной приемной антенной.** Случай, когда каждый из пользователей имеет по одной антенне ( $N=1$ ), представляет интерес, так как является распространенным на практике. Канальные матрицы  $\mathbf{H}^{(1)}, \mathbf{H}^{(2)}, \dots, \mathbf{H}^{(Q)}$  для всех пользователей вырождаются в  $M$ -мерные векторы-строки, случайно ориен-

тированные в  $M$ -мерном пространстве, а каждая из матриц  $\mathbf{V}^{(1)}, \mathbf{V}^{(2)}, \dots, \mathbf{V}^{(Q)}$ , формирующих собственные подканалы, также состоит из одного весового вектора  $\mathbf{V}_1^{(1)}, \mathbf{V}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{V}_1^{(Q)}$ , соответственно.

Если имеется один пользователь, то весовой вектор  $\mathbf{V}^{(1)}$ , обеспечивающий оптимальную (согласованную со случайным каналом) передачу данных, определяется выражением (5.1.4). При этом для выходного ОСШ будем иметь

$$\eta_1^{(q)} = P_0 (Q\sigma_0^2)^{-1} (\mathbf{H}^{(q)} \mathbf{H}^{(q)H}) = \frac{P_0}{Q\sigma_0^2} \sum_{p=1}^M |h_{1p}^{(q)}|^2. \quad (5.3.23)$$

Среднее ОСШ равно  $\langle \eta_1^{(q)} \rangle = MP_0 / Q\sigma_0^2$ , то есть пропорционально числу  $M$  передающих антенн. Каждый из  $M$  коэффициентов  $h_{1p}^{(q)}$  является случайной комплексной гауссовой величиной с нулевым средним и единичной дисперсией, а расстояние между передающими антеннами обычно выбирается таким, чтобы коэффициенты  $h_{1p}^{(q)}$  были некоррелированы между собой. Поэтому ОСШ  $\eta_1^{(q)}$  подчиняется центральному хи-квадрат-распределению с  $2M$  степенями свободы, которое уже встречалось ранее (см. (1.1.6)). В нашем случае в (1.1.6) следует заменить  $N$  на  $M$  и  $\rho_0$  на  $\eta_0 = P_0 / Q\sigma_0^2$ . Величина  $\eta_0$  имеет смысл нормированной (к собственному шуму) мощности передатчика, предназначенной каждому пользователю.

При наличии  $Q$  пользователей каждый из них принимает не только «свои» сигналы, но и «чужие», предназначенные другим пользователям. Чтобы обнулить эти сигналы, весовой вектор  $\mathbf{V}_1^{(q)}$  должен быть заменен вектором  $\tilde{\mathbf{V}}_1^{(q)}$ , который дается выражением (5.3.7) при  $i=1$ . Этот вектор представляет собой нормированную проекцию вектора  $\mathbf{H}^{(q)}$  на подпространство размерности  $M - (Q-1)$ , которое является ортогональным всем остальным векторам  $\mathbf{H}^{(1)}, \dots, \mathbf{H}^{(q-1)}, \dots, \mathbf{H}^{(q+1)}, \dots, \mathbf{H}^{(Q)}$ . Выходное ОСШ в соответствии с (5.3.23) будет равно [17]

$$\eta_i^{(q)} = \frac{P_0}{Q\sigma_0^2} \mathbf{H}^{(q)} \mathbf{\Pi}_1^{(q)} \mathbf{H}^{(q)H}. \quad (5.3.24)$$

Случайный вектор  $\mathbf{H}^{(q)}$  равновероятно распределен в полном  $M$ -мерном пространстве, и при его проектировании в подпространство меньшей размерности средние потери в ОСШ будут определяться размерностью этого подпространства относительно размерности полного пространства. Поэтому среднее ОСШ теперь увеличится не в  $M$  раз, а только в  $M_{eff} = M - (Q-1)$  раз, то есть  $\langle \eta_1^{(q)} \rangle = M_{eff} P_0 / Q\sigma_0^2$ . Подпространство меньшей размерности  $[M - (Q-1)]$ , в котором находится вектор  $\mathbf{\Pi}_1^{(q)} \mathbf{H}^{(q)H}$ , также является однородным. Поэтому в

ММО-системе с разделением  $Q$  пользователей ОСШ  $\eta_1^{(q)}$  будет по-прежнему подчиняться центральному хи-квадрат-распределению с тем же параметром  $\eta_0 = P_0/Q\sigma_0^2$ , но с уменьшенным числом степеней свободы, равным  $2M_{eff}$ .

Таким образом, плотность вероятности ОСШ на выходе собственного подканала не зависит от номера пользователя и имеет вид

$$f(\eta) = \frac{1}{\eta_0^{M-Q+1}(M-Q)!} \eta^{M-Q} \exp\left(-\frac{\eta}{\eta_0}\right). \quad (5.3.25)$$

Этот результат имеет ясный физический смысл. Разделение  $Q$  пользователей с одной антенной у каждого эквивалентно обнулению «чужих» сигналов, принимаемых, например  $q$ -м пользователем, но предназначенных другим  $(Q-1)$  пользователям. Это приводит к потере  $Q-1$  степеней свободы передающей АР.

Теперь подставляя (5.3.25) и (5.3.21) в (5.3.20) и выполняя интегрирование, получим искомую вероятность битовой ошибки в виде [17]

$$BER = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a\eta_0}{a\eta_0 + 1}} \left[ 1 + \sum_{l=1}^{M-Q} \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} \frac{1}{(a\eta_0 + 1)^l} \right], \quad (5.3.26)$$

где  $(2l-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2l-1)$ ;  $(2l)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2l$ .

Из сравнения (5.3.26) с (1.1.13) следует, что вероятность битовой ошибки в ММО-системе с  $M$  передающими антеннами и с пространственным разделением  $Q$  пользователей совпадает с вероятностью ошибки в системе с разнесенным когерентным приемом при уменьшенном с  $M$  до  $M_{eff} = M - (Q-1)$  числе антенн.

На рис. 5.10 показана вероятность битовой ошибки в зависимости от параметра  $\eta_0$  в ММО-системе для разного числа  $Q$  разделяемых пользователей. Число передающих антенн  $M=16$ , а число приемных антенн у каждого пользователя  $N=1$ . Видно, что вероятность ошибки сначала возрастает незначительно при увеличении числа пользователей, однако затем ее увеличение становится более существенным. Зафиксируем вероятность битовой ошибки на уровне 0.001. Тогда требуемое ОСШ (или мощность передатчика) должно быть увеличено на 0.4; 1.0; 3 и 7 дБ при увеличении числа пользователей от 1 до 2, 4, 8 и 12, соответственно.



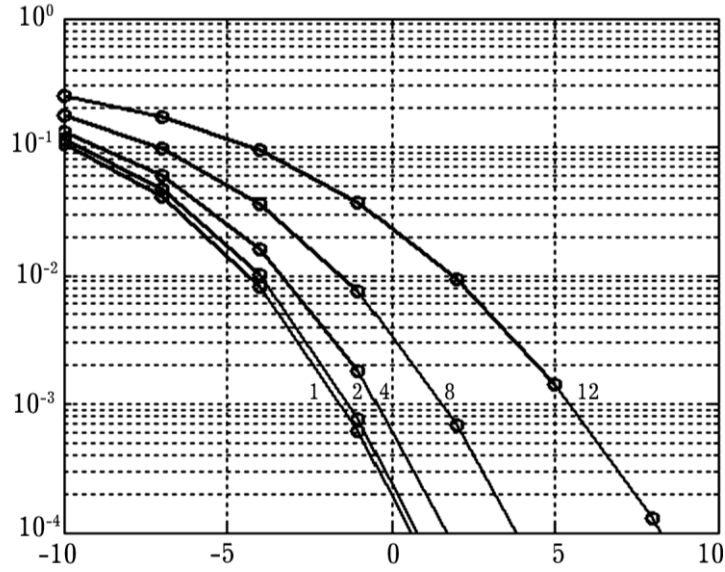


Рис. 5.10. Вероятность битовой ошибки в зависимости от параметра  $\eta_0$  для разного числа  $Q$  пользователей при  $M=16$  и  $N=1$

**Пользователи с произвольным числом антенн.** Если пользователи имеют по  $N$  приемных антенн, то для каждого из них можно сформировать  $N$  собственных подканалов. Поэтому всего имеется  $QN$  таких подканалов, и каждый из них должен быть разделен с остальными  $(QN-1)$  подканалами. Для этого  $M$ -мерный весовой вектор  $\mathbf{V}_i^{(q)}$ , формирующий  $i$ -ый собственный подканал  $q$ -го пользователя в отсутствии других пользователей, должен быть заменен своей нормированной проекцией  $\tilde{\mathbf{V}}_i^{(q)}$  (5.3.7) на подпространство меньшей размерности, равной  $M_{eff} = M - (QN - 1)$ . В случае некоррелированных релеевских замираний средние потери в ОСШ будут определяться только степенью уменьшения размерности этого подпространства относительно полного пространства.

Поэтому случай, когда пользователи имеют по  $N$  приемных антенн, отличается от случая одной приемной антенны тем, что средние потери в ОСШ за счет разделения  $Q$  пользователей увеличатся и составят  $(QN-1)$  вместо  $(Q-1)$ . Следовательно, ОСШ на выходе  $i$ -го собственного подканала не зависит от номера пользователя и по-прежнему подчиняется центральному хи-квадрат-распределению с тем же параметром  $\eta_0 = P_0 / Q\sigma_0^2$ , но с уменьшенным до  $2M_{eff} = 2[M - (QN - 1)]$  числом степеней свободы и имеет вид

$$f(\eta) = \frac{1}{\eta_0^{M-QN+1} (M-QN)!} \eta^{M-QN} \exp\left(-\frac{\eta}{\eta_0}\right). \quad (5.3.27)$$

Подставляя (5.3.27) и (5.3.21) в (5.3.20) и выполняя интегрирование, получим, что вероятность битовой ошибки будет равна [17]

$$BER = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a\eta_0}{a\eta_0 + 1}} \left[ 1 + \sum_{l=1}^{M-QN} \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} \frac{1}{(a\eta_0 + 1)^l} \right]. \quad (5.3.28)$$

Из сравнения (5.3.28) с (1.1.13) следует, что вероятность ошибки в MIMO-системе с  $M$  передающими антеннами и разделением  $Q$  пользователей с  $N$  антеннами у каждого, совпадает с вероятностью ошибки в системе с разнесенным когерентным приемом при уменьшенном с  $M$  до  $M_{eff} = M - (QN - 1)$  числе антенн.

При достаточно большой мощности, предназначенной каждому пользователю ( $P_0 \gg Q\sigma_0^2$ ), выражение (5.3.28) разложим в степенной ряд. В результате получим, что вероятность битовой ошибки

$$BER \approx \xi_{M-QN+1} \cdot \eta_0^{-(M-QN+1)}, \quad (5.3.29)$$

где коэффициент  $\xi_{M-QN+1}$  зависит только от эффективного числа передающих антенн  $M_{eff} = M - (QN - 1)$  и не зависит от мощности. В частности, для  $M_{eff} = 2, 4$  и  $8$  имеем, что  $\xi_2 = 0.19$ ,  $\xi_4 = 0.14$  и  $\xi_8 = 0.10$ .

На рис. 5.11 показана вероятность битовой ошибки в MIMO-системе в зависимости от параметра  $\eta_0$  для разного числа  $Q$  пользователей, когда число передающих антенн равно  $M=16$ , а число приемных антенн у каждого пользователя  $N=2$ . Видно, что вероятность ошибки сначала возрастает незначительно при увеличении числа пользователей, однако затем ее увеличение становится более существенным. Зафиксируем вероятность ошибки на уровне 0.001. Тогда требуемое ОСШ должно быть увеличено на 0.5, 2.5 и 7 дБ при увеличении числа пользователей от 1 до 2, 4 и 6, соответственно.

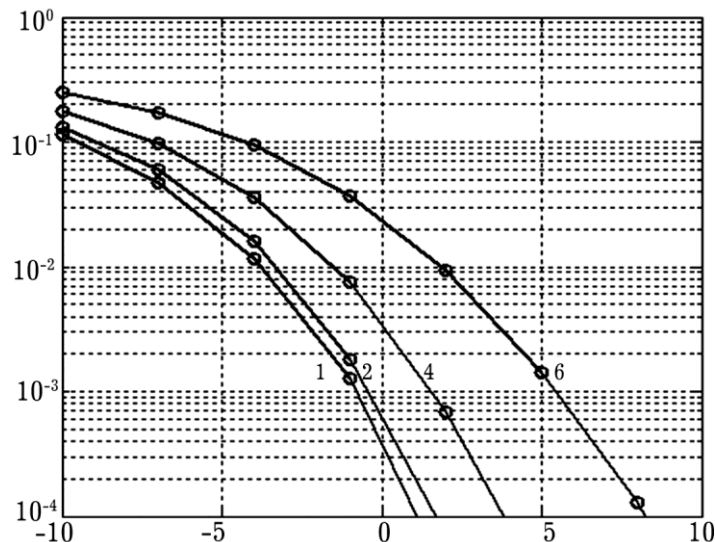


Рис. 5.11. Вероятность битовой ошибки в зависимости от параметра  $\eta_0$  в MIMO-системе для разного числа  $Q$  пользователей при  $M=16$  и  $N=2$

## ПРИЛОЖЕНИЕ. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА

**Векторное представление сигналов.** Предположим, что сигнал представлен своими  $N$  значениями  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Например, это может быть смесь полезных сигналов, собственных шумов и внешних помех в приемных каналах  $N$ -элементной АР. Тогда в векторной форме совокупность  $N$  сигналов представим в виде  $N$ -мерного вектора-столбца

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T. \quad (\text{П1})$$

Евклидова норма вектора является его длиной в  $N$ -мерном векторном пространстве и равна

$$\|\mathbf{X}\| = \left( \sum_{p=1}^N |x_p|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\mathbf{X}^H \mathbf{X}}, \quad (\text{П2})$$

Скалярное произведение двух комплексных векторов  $\mathbf{X}^T = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  и  $\mathbf{Y}^T = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  одинаковой размерности равно  $\mathbf{X}^H \mathbf{Y} = \sum_{p=1}^N x_p^* y_p$ . Оно удовле-

творяет неравенству Коши–Шварца  $|\mathbf{X}^H \mathbf{Y}| \leq \|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{Y}\|$ . Векторы  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  ортогональны между собой, когда их скалярное произведение равно нулю:  $\mathbf{X}^H \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^H \mathbf{X} = 0$ .

Векторы  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(N)}$  являются линейно независимыми, если их линейная комбинация дает нулевой вектор только при всех нулевых коэффициентах:

$$\alpha_1 \mathbf{X}^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{X}^{(2)} + \dots + \alpha_N \mathbf{X}^{(N)} = \mathbf{0}, \quad \text{если} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0. \quad (\text{П3})$$

Если в (П3) хотя бы один из коэффициентов  $\alpha_p$  отличен от нуля, то  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(N)}$  – линейно зависимые векторы. Пусть,  $\alpha_1 \neq 0$ , тогда первый вектор  $\mathbf{X}^{(1)}$  выражается через остальные векторы  $\mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(N)}$ . Действительно, имеем  $\mathbf{X}^{(1)} = -\alpha_2 \alpha_1^{-1} \mathbf{X}^{(2)} - \alpha_3 \alpha_1^{-1} \mathbf{X}^{(3)} - \dots - \alpha_N \alpha_1^{-1} \mathbf{X}^{(N)}$ .

Если  $N$  векторов  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(N)}$  являются линейно независимыми, то любой другой вектор  $\mathbf{X}$  можно представить в виде их линейной комбинации

$$\mathbf{X} = \sum_{p=1}^N \alpha_p \mathbf{X}^{(p)}. \quad (\text{П4})$$

Это означает, что векторы  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(N)}$  формируют базис в векторном пространстве, а число  $N$  называется размерностью пространства. Очевидно, что данный базис не является единственным.

**Основные операции с матрицами.** Рассмотрим прямоугольную матрицу  $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$  с элементами  $a_{ij}$ , которая состоит из  $N$  строк и  $M$  столбцов. Если  $N=M$ , то матрица  $\mathbf{A}$  становится квадратной.

Матрица  $\mathbf{A}$  называется симметричной, если она не изменяется при транспонировании ( $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$ ), и эрмитово сопряженной, если она остается постоянной при эрмитовом сопряжении ( $\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$ ). Основные свойства этих операций одинаковы, поэтому приведем их на примере эрмитова сопряжения:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H, \quad (\mathbf{A}^H)^H = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{AB})^H = \mathbf{B}^H \mathbf{A}^H. \quad (\text{П5})$$

Матрицу  $\mathbf{A}$  часто представляют в виде набора из  $M$  векторов-столбцов  $\mathbf{A}_j$  размерности  $N$  каждый или из  $N$  векторов-строк  $\mathbf{B}_i^T$  размерности  $M$ :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_M) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{B}_N^T \end{pmatrix}. \quad (\text{П6})$$

Важным параметром матрицы  $\mathbf{A}$  является ее ранг, который определяется как число линейно независимых столбцов или строк в (П6). Основные свойства ранга следующие:

$$\begin{aligned} \text{rank}\{\mathbf{A}\} &= \text{rank}\{\mathbf{AA}^H\} = \text{rank}\{\mathbf{A}^H \mathbf{A}\}, & \text{rank}\{\mathbf{A}\} &\leq \min\{N, M\}, \\ \text{rank}\{\mathbf{AB}\} &\leq \text{rank}\{\mathbf{A(B)}\}. \end{aligned} \quad (\text{П7})$$

Если  $\text{rank}\{\mathbf{A}\} = \min\{N, M\}$ , то матрица  $\mathbf{A}$  называется *матрицей полного ранга*.

Для квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  полного ранга ( $\text{rank}\{\mathbf{A}\} = N = M$ ) существует обратная матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  такая, что  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}_N$ , где  $\mathbf{I}_N$  – единичная (тождественная) матрица размерности  $N \times N$  с элементами  $a_{ij}=1$  ( $i=j$ ) и  $a_{ij}=0$  ( $i \neq j$ ). Квадратная матрица  $\mathbf{A}$  неполного ранга ( $\text{rank}\{\mathbf{A}\} < N$ ), называется сингулярной матрицей и не имеет обратной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Приведем некоторые свойства обращения матриц:  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ ,  $(\mathbf{A}^H)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^H$ . В теории ММО-систем часто используется лемма об обращении матриц. Если  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  – матрицы размерности  $(N \times N)$ ,  $(N \times M)$ ,  $(M \times M)$  и  $(M \times N)$ , соответственно, и  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$  – несингулярные матрицы, то

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{DA}^{-1}. \quad (\text{П8})$$

В случае, когда  $M=1$ , матрица  $\mathbf{C}$  вырождается в скаляр ( $\mathbf{C}=c$ ), а матрицы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  – в вектор-столбец  $\mathbf{B}_1$  и вектор-строку  $\mathbf{D}_1^H$ , соответственно ( $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$ ;  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1^H$ ). Полагая  $c=1$ , получим тождество Вудбури (Woodbury):

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_1^H)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_1^H \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{D}_1^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_1}. \quad (\text{П9})$$

В другом случае, когда матрицы  $\mathbf{B}=\mathbf{I}$  и  $\mathbf{D}=\mathbf{I}$ , из (П8) имеем, что

$$(\mathbf{A} + \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{A}^{-1})^{-1} \mathbf{A}^{-1}. \quad (\text{П10})$$

Определителем квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  размерности  $N \times N$  называется число

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^N (-1)^{i+k} a_{ik} \det \mathbf{A}_{ik}, \quad (\text{П11})$$

где  $\mathbf{A}_{ij}$  – матрица меньшей размерности  $(N-1) \times (N-1)$ , формируемая из матрицы  $\mathbf{A}$  путем исключения в ней  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца. Если определитель квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  не равен нулю ( $\det \mathbf{A} \neq 0$ ), то  $\mathbf{A}$  – несингулярная матрица.

Основные свойства определителей:

$$\begin{aligned} \det\{\mathbf{AB}\} &= \det \mathbf{A} \times \det \mathbf{B}; & \det\{\alpha \mathbf{A}\} &= \alpha^N \det \mathbf{A}; \\ \det \mathbf{A}^{-1} &= (\det \mathbf{A})^{-1}; & \det \mathbf{A}^T &= \det \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (\text{П12})$$

Для любой матрицы  $\mathbf{A}$

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{X}_1^H \\ \mathbf{Y} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \det \mathbf{A} \times (\mathbf{X}_1^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y}). \quad (\text{П13})$$

В теории адаптивных АР часто используется след матрицы  $\mathbf{A}$ , равный сумме диагональных элементов  $Sp\{\mathbf{A}\} = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{NN})$ . След обладает следующими свойствами:

$$Sp\{\mathbf{A} + \mathbf{B}\} = Sp\{\mathbf{A}\} + Sp\{\mathbf{B}\}; \quad Sp\{\mathbf{ABC}\} = Sp\{\mathbf{BCA}\} = Sp\{\mathbf{CAB}\}. \quad (\text{П14})$$

**Линейные уравнения.** Во многих практических приложениях, в частности при нахождении весового вектора адаптивной АР, необходимо решить систему линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1M}x_M = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2M}x_M = b_2 \\ \dots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{NM}x_M = b_N \end{cases} \quad (\text{П15})$$

Обычно используют матричную форму записи (П15)

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B}, \quad (\text{П16})$$

где  $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$  – прямоугольная матрица размерности  $(N \times M)$ ,  $\mathbf{B}$  – вектор-столбец, состоящий из  $N$  элементов.

Имеются три основных варианта системы (П16), отличающихся видом матрицы  $\mathbf{A}$ .

а)  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица  $(M=N)$ . Решение системы (П16) зависит от того, сингулярная или несингулярная матрица  $\mathbf{A}$ . Если  $\mathbf{A}$  – несингулярная матрица, то обратная матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  существует и решение системы (П16) имеет вид

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \quad (\text{П17})$$

При сингулярной матрице  $\mathbf{A}$  обратная матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  не существует и система (П15) либо не имеет решения, либо имеет множество решений.

б)  $\mathbf{A}$  – прямоугольная матрица с числом столбцов меньше числа строк  $(M < N)$ . При этом в системе (П15) число уравнений больше числа неизвестных. Такая система называется *переопределенной*. Если  $\mathbf{A}$  – матрица полного ранга  $\text{rank}\{\mathbf{A}\} = M$ , то матрица  $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$  является несингулярной и для решения системы уравнений (П16) используется метод наименьших квадратов, основанный на минимизации квадрата нормы  $\|\mathbf{E}\|^2 = \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|^2$  вектора ошибки  $\mathbf{E}$  (часто его называют вектором невязки) между левой и правой частью в (П16).

В результате последовательных преобразований получим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}\|^2 &= (\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X})^H (\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathbf{B}^H\mathbf{B} - \mathbf{X}^H\mathbf{A}^H\mathbf{B} - \mathbf{B}^H\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{X} = \\ &= [\mathbf{X} - (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{B}]^H (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1} [\mathbf{X} - (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{B}] + \\ &+ [\mathbf{B}^H\mathbf{B} - \mathbf{B}^H\mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{B}]. \end{aligned} \quad (\text{П18})$$

Второе слагаемое в (П18) не зависит от неизвестного вектора  $\mathbf{X}$ , поэтому минимум квадрата нормы вектора ошибки  $\mathbf{E}$  достигается при векторе  $\mathbf{X}$ , равном

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{B}. \quad (\text{П19})$$

Матрица  $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$  называется *псевдообратной к матрице  $\mathbf{A}$* .

Наилучшая аппроксимация (оценка) вектора  $\mathbf{B}$  при использовании метода наименьших квадратов имеет вид

$$\widehat{\mathbf{B}} = \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{B} = \mathbf{P}_A\mathbf{B}. \quad (\text{П20})$$

Здесь  $\mathbf{P}_A = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$  – так называемая *проекционная матрица*, которая играет важную роль в теории адаптивной пространственной обработки сигналов. Основные свойства матрицы  $\mathbf{P}_A$  следующие. Матрица-проектор не изменяется при возведении ее в квадрат, то есть  $(\mathbf{P}_A)^2 = \mathbf{P}_A$ . Если некоторый вектор  $\mathbf{C}$  принадлежит векторному подпространству, образованному векторами-столбцами  $\mathbf{A}_q$  ( $q=1, 2, \dots, M$ ) матрицы  $\mathbf{A}$  в (П16), то  $\mathbf{P}_A\mathbf{C} = \mathbf{C}$ . В противном слу-

чае  $\mathbf{P}_A \mathbf{C} = \mathbf{0}$ . Другими словами, проекционная матрица  $\mathbf{P}_A$  проецирует любой вектор на подпространство векторов  $\mathbf{A}_q$  матрицы  $\mathbf{A}$ .

Минимальное значение квадрата нормы вектора ошибки  $\mathbf{E}$  можно найти подставляя (П19) в (П18):

$$\|\mathbf{E}\|_{\min}^2 = \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|^2 = \left\| (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H) \mathbf{B} \right\|^2 = \left\| (\mathbf{I} - \mathbf{P}_A) \mathbf{B} \right\|^2 = \left\| \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{B} \right\|^2 = \mathbf{B}^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{B}, \quad (\text{П21})$$

где  $\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_A$  – матрица-проектор на подпространство, ортогональное подпространству, образованному векторами  $\mathbf{A}_q$  ( $q=1, 2, \dots, M$ ) матрицы  $\mathbf{A}$  в (П16). В (П19) учтено также, что  $(\mathbf{P}_A^\perp)^2 = \mathbf{P}_A^\perp$ .

Заметим, что решение по методу наименьших квадратов можно получить, умножая уравнение (П16) слева на матрицу  $\mathbf{A}^H$ . В результате получим  $\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A}^H \mathbf{B}$ . Отсюда следует формула (П19).

с)  $\mathbf{A}$  – прямоугольная матрица, в которой число столбцов больше числа строк ( $M > N$ ). В этом случае число уравнений меньше, чем неизвестных. Такая система называется *недоопределённой* и имеет множество решений.

**Квадратичная и эрмитова формы.** Квадратичная форма реальной симметричной или комплексной эрмитовой матрицы  $\mathbf{A}$  равна  $Q(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$  или  $Q(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^H \mathbf{A} \mathbf{X}$ . Симметричная или эрмитова матрица  $\mathbf{A}$  является положительно определенной, если для любого вектора  $\mathbf{X}$  значение  $Q(\mathbf{X}) > 0$ .

**Собственные значения и собственные векторы.** Рассмотрим характеристическое уравнение квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  размерности ( $N \times N$ ):  $\mathbf{A}\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U}$ , где  $\mathbf{U}$  – некоторый вектор. Это уравнение эквивалентно системе однородных линейных уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{U} = \mathbf{0}$ . Поэтому матрица  $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$  является сингулярной, ее определитель равен нулю:  $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ . Многочлен  $p(\lambda)$  называется характеристическим и имеет  $N$  корней  $\lambda_i$  – собственных чисел матрицы  $\mathbf{A}$ .

Для каждого  $\lambda_i$  матрица  $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$  является сингулярной, поэтому имеется как минимум один ненулевой собственный вектор  $\mathbf{U}_i$ , удовлетворяющий уравнению  $\mathbf{A}\mathbf{U}_i = \lambda_i\mathbf{U}_i$ . Векторы  $\mathbf{U}_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) можно нормировать так, что их норма  $\|\mathbf{U}_i\| = 1$ . Приведем пять свойств для собственных чисел и векторов.

1. Собственные векторы  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_N$ , соответствующие разным собственным числам, линейно независимы.

2. Если  $\text{rank}\{\mathbf{A}\} = m$ , то имеется  $(N-m)$  независимых решений однородного уравнения  $\mathbf{A}\mathbf{U}_i = \mathbf{0}$ , которые формируют нулевое подпространство (ядро) матрицы  $\mathbf{A}$ .

3. Собственные числа эрмитовой матрицы – действительные числа. Из характеристического уравнения имеем  $\mathbf{U}_i^H \mathbf{A} \mathbf{U}_i = \lambda_i \mathbf{U}_i^H \mathbf{U}_i$ . Применяя эрмитово сопряжение, получим  $\mathbf{U}_i^H \mathbf{A}^H \mathbf{U}_i = \lambda_i^* \mathbf{U}_i^H \mathbf{U}_i$ . Так как  $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$ , то из сравнения этих уравнений будем иметь  $\lambda_i = \lambda_i^*$ , то есть  $\lambda_i$  – действительное число.

4. Эрмитова матрица положительно определена, если и только если ее собственные числа положительны. Определитель матрицы равен произведению ее собственных чисел  $\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N$ . Поэтому матрица  $\mathbf{A}$  является обратимой (несингулярной), если и только если все собственные числа отличны от нуля.

5. Собственные векторы эрмитовой матрицы, соответствующие несовпадающим собственным числам  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , ортогональны между собой ( $\mathbf{U}_i^H \mathbf{U}_j = \mathbf{0}$ ). Действительно, умножим первое уравнение  $\mathbf{A}\mathbf{U}_i = \lambda_i \mathbf{U}_i$  на вектор  $\mathbf{U}_j^H$ , а второе уравнение  $\mathbf{A}\mathbf{U}_j = \lambda_j \mathbf{U}_j$  – на вектор  $\mathbf{U}_i^H$ . Затем возьмем эрмитово сопряжение от второго уравнения и учтем, что  $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$  и  $\lambda_j = \lambda_j^*$ . Получим  $\mathbf{U}_j^H \mathbf{A}\mathbf{U}_i = \lambda_j \mathbf{U}_j^H \mathbf{U}_i$ . Теперь вычтем это уравнение из первого уравнения. Будем иметь  $\mathbf{0} = (\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{U}_j^H \mathbf{U}_i$ . Однако  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , поэтому  $\mathbf{U}_j^H \mathbf{U}_i = \mathbf{0}$ , что и требовалось доказать. Отметим, что данное свойство ортогональности векторов можно обобщить на случай совпадающих собственных чисел.

**Разложение квадратной матрицы по собственным векторам.** Матрицу  $\mathbf{A}$  можно представить в виде  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$ , а набор собственных уравнений  $\mathbf{A}\mathbf{U}_i = \lambda_i \mathbf{U}_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) – записать одним уравнением  $\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}$ , где несингулярная матрица  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_N)$  состоит из собственных векторов, а диагональная матрица  $\mathbf{\Lambda}$  – из собственных чисел векторов  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ . Умножая справа это уравнение на обратную матрицу  $\mathbf{U}^{-1}$ , получим уравнение  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$ .

Учтем далее, что для эрмитовой матрицы в силу ортогональности собственных векторов  $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}_N$ , то есть матрица  $\mathbf{U}$  является унитарной ( $\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^{-1}$ ). Поэтому разложение квадратной матрицы по собственным векторам можно записать двумя эквивалентными выражениями:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H, \quad \mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H + \lambda_2 \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H + \dots + \lambda_N \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H. \quad (\text{П22})$$

Используя свойство унитарности матрицы  $\mathbf{A}$ , нетрудно найти обратную матрицу через разложение по собственным векторам. Имеем

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H)^{-1} = (\mathbf{U}^H)^{-1} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^H, \quad (\text{П23})$$

или

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H. \quad (\text{П24})$$

Отсюда следует важное свойство: обращение эрмитовой матрицы не изменяет собственных векторов, но трансформирует собственные числа ( $\lambda_i \rightarrow 1/\lambda_i$ ).

Во многих приложениях теории адаптивных АР матрицы могут быть плохо обусловленными, что приводит к неустойчивости при их обращении. Поэтому для стабилизации обращения такой матрицы к ее диагональным элементам до-



бавляют постоянную величину  $\alpha$ , то есть, вместо матрицы  $\mathbf{B}$  обращают матрицу  $\mathbf{A}=\mathbf{B}+\alpha\mathbf{I}_N$ . Такая операция не изменяет собственные векторы, однако смещает собственные числа. Действительно,  $\mathbf{A}\mathbf{U}_i = \mathbf{B}\mathbf{U}_i + \alpha\mathbf{U}_i = (\lambda_i + \alpha)\mathbf{U}_i$ , где  $\lambda_i$  и  $\mathbf{U}_i$  – собственные числа и векторы матрицы  $\mathbf{B}$ .

След матрицы  $\mathbf{A}$  и обратной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  можно выразить через собственные числа следующим образом:

$$Sp\{\mathbf{A}\} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N), \quad Sp\{\mathbf{A}^{-1}\} = (1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + \dots + 1/\lambda_N). \quad (\text{П25})$$

Часто необходимо иметь простую оценку верхней границы для максимального собственного числа  $\lambda_{max}$ . Из (П25) имеем  $\lambda_{max} \leq Sp\{\mathbf{A}\}$ .

**Сингулярное разложение (singular value decomposition, SVD) прямоугольной матрицы.** Прямоугольную матрицу  $\mathbf{A}$  размерности  $(N \times M)$  можно представить в виде  $\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H$ . Здесь  $\mathbf{\Lambda}=\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K\}$  – диагональная матрица ненулевых собственных чисел  $\lambda_i$  матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  или матрицы  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ ,  $(M \times K)$ -размерная матрица  $\mathbf{U}=(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_K)$  состоит из собственных векторов матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ , а матрица  $\mathbf{V}=(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_K)$ , имеющая размерность  $(N \times K)$ , состоит из собственных векторов матрицы  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ .

Векторы  $\mathbf{U}_i$  и  $\mathbf{V}_i$  образуют ортонормированные системы и связаны между собой следующими соотношениями [23]:  $\mathbf{U}_i = \lambda_i^{-1/2}\mathbf{H}\mathbf{V}_i$  и  $\mathbf{V}_i = \lambda_i^{-1/2}\mathbf{H}^H\mathbf{U}_i$ . Отметим, что ненулевые собственные числа матриц  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  и  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$  совпадают между собой. Однако матрица  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  имеет размерность  $N \times N$ , а размерность матрицы  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$  равна  $M \times M$ . Поэтому в случае  $M > N$  удобнее использовать матрицу  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  и, наоборот, при  $M < N$  более простой является матрица  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ . Можно записать, что

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{U}_i \mathbf{V}_i^H \quad (N < M), \quad \mathbf{A} = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{U}_i \mathbf{V}_i^H \quad (N > M). \quad (\text{П26})$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений. М.: Сов. радио, 1970. - 728 с.
2. Прокис Д. Цифровая связь. – М.: Радио и связь, 2000. - 800 с.
3. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. - 1104 с.
4. Garg V.K. IS-95 CDMA and cdma2000: Cellular/PCS systems implementation. Prentice-Hall, Inc., 2000. - 424 p.
5. Paylraj A., Nabar R. and Gore D. Introduction to space-time wireless communications. Cambridge university press, 2003. – 278 p.
6. Jankiraman M. Space-time codes and MIMO systems. Artech House, Inc., 2004. - 328 p.
7. Space-Time Processing for MIMO Communications / Editors A.B. Gershman and N.D. Sidoropoulos. Wiley&Sons, 2005. - 370 p.
8. Vaughan R. and Andersen J.B. Channels, propagation and antennas for mobile communications. ИИИ, 2003. - 754 p.
9. Кларк Дж., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи. М.: Радио и связь, 1987. - 392 с.
10. Ермолаев В.Т., Маврычев Е.А., Флакман А.Г. Применение адаптивных антенных решеток для повышения темпа передачи информации в перспективных системах связи // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. – 2001. - № 9. – С. 50–58.
11. Ермолаев В.Т., Мальцев А.А., Флакман А.Г. и др. Применение адаптивных антенных решеток для повышения скорости передачи информации в беспроводных компьютерных сетях // Труды (шестой) научной конференции по радиофизике, посвященной 100-летию со дня рождения М.Т. Греховой / Ред. А.В. Якимов. Нижний Новгород: ТАЛАН, 2002. - С. 22–28.
12. Флакман, А.Г. Пространственное разделение пользователей в МИМО системах, использующих параллельную передачу данных // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45. - № 11. - С. 986–997.
13. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Чечиль К.В. Сравнительный анализ эффективности методов пространственной разнесенной передачи информации в системах с кодовым разделением пользователей // Прикладная радиоэлектроника. 2003. - Т. 2. - № 1. - С. 41–51.
14. Ермолаев В.Т., Маврычев Е.А., Флакман А.Г. Уменьшение вероятности битовой ошибки при параллельной передаче информации в МИМО-системе // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. - Т.46. - № 3. - С. 251–260.
15. Ермолаев В.Т., Маврычев Е.А. Флакман А.Г. Эффективность систем связи с антенными решетками в условиях рассеивающей среды // Успехи современной радиоэлектроники. 2003. - № 3. - С. 41–48.
16. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Аверин И.М., Грибов Д.В. Эффективность пространственного разделения пользователей в МИМО-системах связи с па-

- раллельной передачей информации // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. - Т.47. - № 2. С. 143–154.
17. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Лысяков Д.Н. Вероятность ошибки передачи информации в ММО-системах связи с пространственным разделением пользователей в условиях релейских замираний сигналов // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. - Т.49.- № 9. С. 816–828.
  18. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Зуев А.М., Лысяков Д.Н. Вероятность битовой ошибки в ММО-системах с двумя собственными подканалами. // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. – 2009. - № 2. - С. 55–61.
  19. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. Теоретические основы обработки сигналов в беспроводных системах связи: / Монография. Нижний Новгород: Изд. ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. – 368 с.
  20. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. - 1108 с.
  21. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. - 656 с.
  22. Евсиков Ю.А., Чапурский В.В. Преобразование случайных процессов в радиотехнических устройствах. М.: Высшая школа, 1977. - 254 с.
  23. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. - 400 с.
  24. Alamouti S.M. A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. - 1998. - V. 16. - No. 8. - P. 1451–1458.
  25. Telatar I.E. Capacity of multi-antenna Gaussian channels // European Transactions on Telecommunications. 1999. - V. 10. - No. 6. - P. 585–595.
  26. Ширман Я.В., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех.– М.: Радио и связь, 1981. - 416 с.
  27. Winters J., Salz J., Gitlin R. The impact of antenna diversity on the capacity of wireless communications systems // IEEE Transactions on Communications. - 1994. - V. 42. - No. 2. - P. 1740–1751.
  28. Ермолаев В.Т., Маврычев Е.А., Флакман А.Г. Современные методы обработки сигналов в беспроводных системах связи. Учебное пособие. / Нижегород. гос. техн. ун-т. им. Р.Е. Алексеева, 2011. - 140 с.
  29. Ermolayev V.T., Flaksman A.G., Mavrichev E.A. Estimation of channel matrix rank for multielement antenna arrays working in multipath fading environment // Proceedings of the 1<sup>st</sup> IEEE International Conference on Circuits and Systems for Communication (ICCSC'02). St. Petersburg, 2002. - P. 416–419.
  30. Флакман А.Г. Адаптивная обработка сигналов в антенных решетках с учетом ранга матрицы импульсной характеристики многолучевого канала // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т.45. - № 12. - С. 1064–1076.
  31. Ермолаев В.Т., Соколов М.А., Флакман А.Г. Пространственное разделение пользователей в системе мобильной связи с адаптивной антенной решеткой при использовании степенного базиса // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2011. Вып. 3. С. 44–50.

32. Ermolayev V.T., Flaksman A.G. and Averin I.M. Bit Error Rate in Eigenchannels of SVD-based MIMO System // *Signal Processing*. 2013, V. 93, No. 12, P. 3319–3326.
33. Ермолаев В.Т., Мальцев А.А., Флакман А.Г., Болховская О.В., Клюев А.В. Мобильная связь: вопросы теории и типовые задачи: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2014. – 234 с.
34. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988. - 552 с.
35. Tulino A.M., Verdú S. *Random Matrix Theory and Wireless Communications*. Now Publishers, 2004. – 182 p.
36. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Лысяков Д.Н. Увеличение пропускной способности ММО-системы радиосвязи с параллельной передачей данных по собственным подканалам // *Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Серия: Радиофизика*. 2010, № 3, часть 1. С. 79–86.
37. Palomar D.P., Cioffi J.M., Lagunas M.A. Joint Tx-Rx beamforming design for multicarrier MIMO channels: a unified framework for convex optimization // *IEEE Trans. Signal Process.* 2003. V. 51. No. 9, P. 2381–2401.
38. Palomar D.P., Lagunas M.A., Cioffi J.M. Optimum Linear Joint Transmit-Receive Processing for MIMO Channels with QoS Constraints // *IEEE Trans. Signal Process.* 2004. V. 52. No. 5, P. 1179–1197.
39. Scaglione A., Stoica P., Barbarossa S., Giannakis G.B., Sampath H. Optimal designs for space-time linear precoders and decoders // *IEEE Trans. Signal Process.* 2002. V. 50. P. 1051–1064.
40. Ермолаев В.Т., Маврычев Е.А., Флакман А.Г. Пространственно-временное кодирование в ММО-системах радиосвязи. Учебное пособие. / Нижегород. гос. техн. ун-т. им. Р.Е. Алексеева, 2013. - 116 с.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АР	- антенная решетка
БС	- базовая станция
ИХ	- импульсная характеристика
КАМ	- квадратурная амплитудная модуляция
КПШП	- кодовая псевдошумовая последовательность
МИХ	- многоканальная импульсная характеристика
МСКО	- минимум среднеквадратической ошибки
МП	- максимально правдоподобный
ОСШ	- отношение мощности сигнала к мощности шума
ОСШП	- отношение мощности сигнала к мощности шума и помех
ПВ	- пространственно-временной
РП	- разнесенная передача
СКО	- среднеквадратическая ошибка
СЭ	- спектральная эффективность
ФМ	- фазовая модуляция
BER	- Bit Error Rate
CDMA	- Code Division Multiple Access
MIMO	- Multiple Input Multiple Output
MISO	- Multiple Input Multiple Output
MMSE	- Minimum Mean Square Error
OFDM	- Orthogonal Frequency Division Multiplexing
SIMO	- Single Input Single Output
SISO	- Single Input Single Output
SVD	- Singular Value Decomposition
ZF	- Zero Forcing

# **ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ММО-СИСТЕМАХ СОТОВОЙ СВЯЗИ**

Авторы:

**Виктор Тимофеевич Ермолаев**  
**Александр Григорьевич Флакман**  
**Антон Вадимович Елохин и др.**

*Учебное пособие*

Компьютерный набор – *А.Г. Флакман*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского».  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.