МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (ННГУ)

Институт Информационных Технологий, Математики и Механики

М.Х.Прилуцкий, У.С.Колосовская

Распределение ресурсов в иерархических системах транспортного типа с интервальными значениями критериев оптимальности

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика»

Нижний Новгород
2015 год

УДК 519.874

П-76

П-76 Прилуцкий М.Х., Колосовская У.С. Распределение ресурсов в иерархических системах транспортного типа с интервальными значениями критериев оптимальности. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 22с.

Рецензент: д.т.н., профессор Федосенко Ю.С.

В учебно-методическом пособии рассматривается проблема многокритериального распределения ресурсов в иерархических системах транспортного типа с интервальными значениями частных критериев оптимальности. Строится общая математическая модель, в рамках которой ставятся задачи многокритериальной оптимизации, проводится её исследование. Приводятся примеры прикладных задач, формализуемых как задачи распределения ресурсов в иерархических системах транспортного типа. Материал учебно-методического пособия предназначен для студентов 4 курса направления подготовки «Прикладная информатика», изучающих курс «Теория систем и системный анализ».

Содержание

Распределение ресурсов в иерархических системах транспортного типа с интервальными значениями критериев оптимальности

В учебно-методическом пособии рассматривается проблема многокритериального распределения ресурсов в иерархических системах транспортного типа с интервальными значениями частных критериев оптимальности. Строится общая математическая модель, в рамках которой ставятся задачи многокритериальной оптимизации, проводится её исследование. Приводятся примеры прикладных задач, формализуемых как задачи распределения ресурсов в иерархических системах транспортного типа. Материал учебно-методического пособия предназначен для студентов 4 курса направления подготовки «Прикладная информатика», изучающих курс «Теория систем и системный анализ».

1. Введение

Широкий класс прикладных задач связан с проблемой эффективного распределения ограниченных ресурсов. При постановке задач распределения ресурсов обычно задаются директивные показатели, к которым необходимо стремиться. Учет этих показателей осуществляется с помощью так называемых контролируемых ограничений, от выполнения которых зависит эффективность функционирования системы, что приводит к постановке многокритериальных многоиндексных задач транспортного типа. В работе предлагается для формализации критериев оптимальности указывать границы для величин отклонений от заданных директивных показателей, в которых эти величины являются «отличными», «очень хорошими», «хорошими», «удовлетворительными» и др. Отсюда следует, что функции отклонений от директивных показателей должны быть кусочно-постоянными. Тогда такие функции разбивают множество величин отклонений по каждому критерию на области качества отклонений.

В работе предлагаются эффективные алгоритмы решения поставленных многокритериальных задач путем поиска «оптимальных» вершин некоторых подмножеств многомерного (по количеству критериев) многозначного (по количеству областей качества отклонений) куба, где каждая вершина куба определяет свою систему линейных алгебраических двусторонних неравенств транспортного типа.

В качестве примеров, иллюстрирующих полученные результаты, рассмотрены: задача объемно-календарного планирования для подразделений предприятия [1-2, 6], многопродуктовая транспортная задача с промежуточными пунктами [3-4] и задача переработки газового конденсата [7, 17].

2. Постановки задач распределения ресурсов

2.1. Задача объёмно-календарного планирования для подразделений предприятия

Необходимо определить на заданный период планирования программу производства в объёмных показателях, удовлетворяющую некоторым заданным характеристикам.

Пусть I – множество номеров подразделений предприятия, J – множество номеров заказов, K – множество номеров изделий, S – множество номеров деталей, T – множество номеров тактов планирования. Обозначим через a_{ijkst} объём работ, оставшийся невыполненным в подразделении i по заказу j изделию k детали s в такт планирования t; B_{jkst} – объем работ, запланированный к выполнению по заказу j изделию k детали s в такт t; C^-_{kst} и C^+_{kst} – минимальный и максимальный объем работ, который должен быть выполнен по изделию k детали s в такт t, $0 \le C^-_{kst} \le C^+_{kst}$; D^-_{kt} и D^+_{kt} – минимальный и максимальный объем работ, который должен быть выполнен такт t по изделию k, $0 \le D^-_{kt} \le D^+_{kt}$; E^-_t и E^+_t – минимальный и максимальный объем работ, который должен быть выполнен всеми подразделениями в такт t в планируемом периоде, $0 \le E^-_t \le E^+_t$; G – общий объем запланированных работ; $i \in I, j \in J, k \in K, s \in S, t \in T$.

Тогда формально задача объёмно-календарного планирования для подразделений предприятия может быть поставлена как задача определения таких величин x_{ijkst} (объём работ, который будет выполнен в подразделении i по заказу j изделию k детали s в такт планирования t), $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, $s \in S$, $t \in T$, для которых выполняются ограничения:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{s\in S}\sum_{t\in T} x_{ijkst} = G \qquad (1)$$

(выполнение общего объема запланированных работ в планируемом периоде),

$$E^-_t \le \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{s\in S} x_{ijkst} \le E^+_t,\ t \in T \qquad (2)$$

(ограничения на объемы работ, которые должны быть выполнены по тактам планирования),

$$D^-_{kt} \le \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{s\in S} x_{ijkst} \le D^+_{kt},\ k \in K, t \in T \qquad (3)$$

(ограничения на объёмы работ, которые должны быть выполнены по изделиям в заданные такты планирования),

$$C^-_{kst} \le \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijkst} \le C^+_{kst},\ k \in K, s \in S, t \in T \qquad (4)$$

(ограничения на запланированные объёмы работ по изделиям, деталям в заданные такты планирования),

$$\sum_{i\in I} x_{ijkst} \ge B_{jkst},\ j \in J, k \in K, s \in S, t \in T \qquad (5)$$

(ограничения на запланированные объёмы работ во всех подразделениях по заказам, изделиям, деталям и тактам планирования),

$$0 \le x_{ijkst} \le a_{ijkst},\ i \in I, j \in J, k \in K, s \in S, t \in T \qquad (6)$$

(естественные условия на переменные, формализующие требования запрета выпуска внеплановой продукции), с учетом минимизируемых критериев, которые в рассматриваемой постановке определяются контролируемыми ограничениями системы. В качестве контролируемых ограничений, могут выступать, например, ограничения на объемы работ, которые должны быть выполнены по тактам планирования.

2.2. Многопродуктовая транспортная задача с промежуточными пунктами

Имеются пункты производства, промежуточные пункты, пункты потребления разнородной продукции и такты функционирования системы. Заданы ограничения на производство, потребление продукции и возможности перевозки продукции с учетом промежуточных пунктов. Требуется определить такие объемы производства по тактам планирования, которые бы удовлетворяли заданным ограничениям и были бы эффективны по определенным (директивным) показателям.

Пусть I – множество пунктов производства, J – множество промежуточных пунктов, K – множество пунктов потребления, S – множество видов продукции, T – множество тактов функционирования системы, Обозначим через A^- и A^+ – минимально и максимально возможные объемы перевозимой продукции, $0 \le A^- \le A^+$; B_{st} – минимальный объем продукции s, который должен быть перевезен в такт t; C^-_{jt} и C^+_{jt} – минимальный и максимальный объем продукции, который может быть перевезен в промежуточный пункт j в такт t, $0 \le C^-_{jt} \le C^+_{jt}$; D_{ist} – максимальный объем продукции s, который может быть произведен пунктом i в такт t; E_{ijkt} – минимальный объем продукции, который должен быть перевезен из пункта производства i через промежуточный пункт j в пункт потребления k в такт t, $i \in I, j \in J, k \in K, s \in S, t \in T$.

Тогда формально многопродуктовая транспортная задача с промежуточными пунктами может быть поставлена как задача определения таких величин x_{ijkst} (количество продукта s, которое будет перевезено из пункта производства i через промежуточный пункт j потребителю k в такт планирования t, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, $s \in S$, $t \in T$, для которых выполняются ограничения:

$$A^- \le \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{s\in S}\sum_{t\in T} x_{ijkst} \le A^+ \qquad (7)$$

(ограничения на общий объем перевозимой продукции в планируемом периоде),

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijkst} \ge B_{st},\ s \in S, t \in T \qquad (8)$$

(ограничения на объемы каждого вида перевозимой продукции в заданные такты планирования),

$$C^-_{jt} \le \sum_{i\in I}\sum_{k\in K}\sum_{s\in S} x_{ijkst} \le C^+_{jt},\ j \in J, t \in T \qquad (9)$$

(ограничения на объёмы продукции, которые могут перевозить промежуточные пункты по тактам планирования),

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijkst} \le D_{ist}, i \in I, s \in S, t \in T \qquad (10)$$

(ограничения на объемы по каждому виду продукции, производимой пунктами производства по тактам планирования),

$$\sum_{s\in S} x_{ijkst} \geq E_{ijkt},\ i \in I, j \in J, k \in K, t \in T \qquad (11)$$

(ограничения на объемы продукции, которые могут быть перевезены из пункта производства через промежуточный пункт в пункт потребления в заданные такты планирования),

$$x_{ijkst} \geq 0,\ i \in I, j \in J, k \in K, s \in S, t \in T \qquad (12)$$

(естественные условия на переменные), с учетом минимизируемых критериев, которые в рассматриваемой постановке определяются контролируемыми ограничениями системы. В качестве контролируемых ограничений могут выступать, например, ограничения, связанные с объёмами продукции, которые могут перевозить промежуточные пункты по тактам планирования.

2.3. Задача переработки газового конденсата

Рассматриваются производственные системы, в которых из сырья (газовый конденсат), в соответствии с технологическими режимами, изготавливаются продукты производства (бензин, дизельное топливо, пропан, бутан и др.). Основными элементами рассматриваемых производственных систем являются резервуарные парки, в которые поступает сырьё, технологические установки, в которых сырьё перерабатывается в готовую продукцию, резервуарные парки отгрузки готовой продукции, потребители готовой продукции. Рассматриваемые производственные системы функционируют по следующей схеме. Сырье поступает в резервуарные парки для сырья, откуда по трубопроводам в технологические нитки основных технологических установок. В технологических установках, под воздействием технологических режимов, из поступающего сырья производятся продукты производства. Продукты производства по трубопроводам поступают в ёмкости резервуарного парка отгрузки готовой продукции, откуда готовая продукция отправляется потребителям. Требуется определить такие объемы продуктов производства по тактам планирования, которые бы удовлетворяли заданным ограничениям и были бы эффективны по определенным (директивным) показателям.

Пусть T – множество тактов функционирования системы, I – множество ёмкостей под сырьё, J – множество технологических установок, K – множество различных видов готовой продукции, которые выпускает предприятие, S – множество ёмкостей под готовую продукцию, R – множество потребителей готовой продукции.

Обозначим через G^- и G^+ – минимально и максимально возможные объемы сырья, которые могут быть использованы для изготовления продуктов производства, $0 \leq G^- \leq G^+$; A_i – максимальный объём сырья, который может быть помещён под сырьё в ёмкость i, B_{jk}, C_{jk} – минимально и максимально возможные производительности технологической установки j по готовой продукции k, $0 \leq B_{jk} \leq C_{jk}$; D_{ks} – максимальный объём готовой продукции k, который можно поместить в ёмкость для готовой продукции s; E_{krt}, H_{krt} – минимальный и максимальный объёмы продукции k, которые требуется отгрузить потребителю r в такт t, $0 \leq E_{krt} \leq H_{krt}$, $i \in I, j \in J, k \in K, s \in S, r \in R, t \in T$.

Тогда формально задача переработки газового конденсата может быть поставлена как задача определения таких величин x_{ijksrt} (количество сырья, которое из ёмкости i поступит на установку j для изготовления продукта k, который через ёмкость s будет отправлен потребителю r в такт t), $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, $s \in S$, $r \in R$, $t \in T$, для которых выполняются ограничения:

$$G^{+} \le \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{r \in R} \sum_{t \in T} x_{ijksrt} \le G^{-} \tag{13}$$

(ограничения на общий объем используемого сырья),

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{r \in R} x_{ijksrt} \le A_i, i \in I, t \in T \tag{14}$$

(количество сырья, поступившее из каждой ёмкости, не должно превышать объёма этой ёмкости в любой такт планирования),

$$B_{jk} \le \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{r \in R} x_{ijksrt} \le C_{jk}, j \in J, k \in K, t \in T \tag{15}$$

(количество готового продукта, полученное с каждой установки не должно быть меньше минимальной и больше максимальной производительности этой установки по этому продукту каждый такт планирования),

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{r \in R} x_{ijksrt} \le D_{ks}, k \in K, s \in S, t \in T \tag{16}$$

(каждый такт планирования количество продукта, которое поступит в ёмкость готовой продукции, не должно превышать максимальный вместимости этой ёмкости)

$$E_{krt} \le \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{s \in S} x_{ijksrt} \le H_{krt}, k \in K, r \in R, t \in T \tag{17}$$

(каждый такт планирования количество готовой продукции, которое поступит потребителю, должно быть ограничено минимальным и максимальным объёмами продукции, который ему требуется),

$$x_{ijksrt} \ge 0, \ i \in I, j \in J, k \in K, s \in S, r \in R, t \in T \tag{18}$$

(естественные условия на переменные), с учетом минимизируемых критериев, которые в рассматриваемой постановке определяются контролируемыми ограничениями системы. В качестве контролируемых ограничений могут выступать, например, показатели, связанные с количеством готовой продукции, которое поступит потребителю.

Для всех таких задач общим является то, что варьируемые параметры математической модели являются многоиндексными; ограничения математической модели представляют собой систему линейных алгебраических в общем случае двусторонних неравенств транспортного типа (коэффициенты перед переменными принадлежат множеству {0, 1, -1}), каждое из которых получается суммированием по некоторым индексам; функции, формализующие критерии оптимальности, определяются контролируемыми ограничениями.

Функции критериев мы будем задавать в виде кусочно-постоянных функций, которые разбивают множество величин отклонений по каждому критерию на области качества отклонений. Будем считать, что функции, определяющие критерии оптимальности, имеют одинаковую область значений, равную множеству целых чисел от 0 до p (0 – «превосходно», 1 – «отлично», 2 – «очень хорошо», и т.д., p – «удовлетворительно»).

3. Постановка многокритериальной задачи

Перенумеровав переменные и ограничения рассматриваемой задачи получим:

$$A_i \le \sum_{j\in Q(i)} x_j \le B_i,\ i=1,\dots,q, \tag{19}$$

где $0 \le A_i \le B_i < \infty$, $Q(i)$ – множество номеров индексов, по которым происходит суммирование для ограничения i, а q – число всех ограничений. Не уменьшая общности, будем считать, что первые n ограничений являются контролируемыми и определяют критерии рассматриваемой многокритериальной задачи.

Будем интерпретировать величины x_i – как объемы распределяемого ресурса: это объемы выполняемых работ для задачи 1, объёмы перевозок груза для задачи 2 и объемы поставляемой продукции для задачи 3, а саму общую задачу называть *задачей распределения ресурсов*.

Как и в [6] рассмотрим задачу распределения ресурсов в наиболее общей постановке. Заданы булевы матрицы A и B, соответственно, размерностей $m\times k$ и $n\times k$, действительный неотрицательный вектор $\vec{c}$ размерности m и векторная функция $\vec{F}(\vec{y})$, определенная на множестве n-мерных векторов из R^n со значениями из $\{0, 1, \dots, p\}$ (здесь m – число ограничений в рассматриваемых задачах, n – число контролируемых ограничений (критериев задачи), k – число неизвестных)». Введенная функция $\vec{F}(\vec{y})$ отображает пространство R^n на множество вершин n-мерного (по числу контролируемых ограничений) $p + 1$-ичного куба (по количеству областей "качества" отклонений от заданных величин). Требуется найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий ограничениям $A\vec{x} \le \vec{c}$ с учетом минимизируемых критериев $\vec{F}(B\vec{x})$. Полученная задача является n-критериальной задачей с линейными ограничениями и частными критериями оптимальности, вид которых зависит от вида функции $\vec{F}(\vec{y})$. Система ограничений $A\vec{x} \le \vec{c}$ эквивалентна системе линейных алгебраических неравенств транспортного типа $\sum_{j\in R(i)} x_j \le c_i$, $i=1,\dots,m$, где $R(i)$ – множество индексов, соответствующих i-ой строке булевой матрицы A, $i=1,\dots,m$, а вектор $B\vec{x}$ имеет координаты $\sum_{j\in G(i)} x_j$, $i=1,\dots,n$, где $G(i)$ – множество индексов, соответствующих i-ой строке булевой матрицы B, $i=1,\dots,n$.

Определим функцию $\vec{F}(\vec{y})$ следующим образом. Для каждой компоненты i рассмотрим совокупность вложенных друг в друга сегментов $S_i^{t_i}$, $S_i^{t_i} \subseteq S_i^{t_i+1}$, $t_i = \overline{0, p-2}$, $p \ge 2$, $i=1,\dots,n$. Тогда $F_i(\sum_{j\in G(i)} x_j) = t_i$, если $\sum_{j\in G(i)} x_j \in S_i^{t_i}$, но $\sum_{j\in G(i)} x_j \notin S_i^{t_i-1}$. После проделанных преобразований общая задача распределения ресурсов ставится следующим образом: требуется найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий ограничениям $\sum_{j\in R(i)} x_j \le c_i$, $i=1,\dots,m$, с учетом минимизируемых критериев $F_i(\sum_{j\in G(i)} x_j) = t_i$, $t_i \in \{0, 1, \dots, p\}$, $i=1,\dots,n$.

Решение поставленной многокритериальной задачи будем осуществлять сведением её к однокритериальной, путем задания на множестве вершин n-мерного $p + 1$-ичного куба некоторых порядков, осуществляя при этом поиск решения на различных подмножествах вершин куба, которые определяются из условий постановок исходных задач.

4. Задача поиска оптимальной вершины многомерного многозначного куба

Поставленная задача распределения ресурсов является задачей многокритериальной оптимизации. Предполагая, что выбранные показатели «качества» распределения ресурса упорядочены с точки зрения их значимости при определении эффективности функционирования системы, в качестве схемы компромисса будем рассматривать только линейное упорядочивание частных критериев оптимальности.

Зададим на множестве вершин n-мерного p + 1-ичного куба некоторый полный порядок π. Это можно сделать, так как множество значений критериев (значений векторной функции $\vec{F}(\vec{y})$) является конечным множеством. Тогда задача распределения ресурсов будет заключаться в определении такого k-мерного вектора $\vec{x}^0$, для которого $\sum_{j\in R(i)} x_j^0 \le c_i$, $i=1,\ldots,m$, и для любого $\vec{x}$, для которого $\sum_{j\in R(i)} x_j \le c_i$, $i=1,\ldots,m$, выполняется отношение $\vec{F}(B\vec{x}^0)\,\pi\,\vec{F}(B\vec{x})$.

Каждой вершине куба $\vec{v}=(v_1,v_2,..,v_n)$ поставим в соответствие систему $D(\vec{v})$ линейных алгебраических неравенств, всегда включающую в себя совокупность ограничений $\sum_{j\in R(i)} x_j \le c_i$, $i=1,\ldots,m$, и, в зависимости от вершины куба, совокупность двусторонних ограничений $\sum_{j\in G(i)} x_j \in S_i^{v_i}$, $i=1,\ldots,n$. Зададим на множестве вершин куба двузначную функцию $g(\vec{v})$, принимающую значение 1, если система $D(\vec{v})$ совместна и 0 в противном случае. Для функции $g(\vec{v})$ выполняется: если для вершин куба $\vec{\mu}$ и $\vec{v}$ имеет место $\vec{\mu}\ge\vec{v}$ (покомпонентно), то $g(\vec{\mu})\ge g(\vec{v})$, отсюда функция $g(\vec{v})$ является монотонной.

Таким образом, для решения задачи распределения ресурсов необходимо уметь решать две задачи: задачу поиска оптимальной вершины многомерного многозначного куба и задачу проверки на совместность систем двусторонних линейных алгебраических неравенств транспортного типа.

5. Решение задачи поиска оптимальной вершины многомерного многозначного куба

Множество вершин n-мерного $p+1$-ичного куба будем обозначать $V_{(p+1),n}$. Пусть заданы вершина куба $\vec{v}^+\in V_{(p+1),n}$, l-ая координата которой определяет предельно допустимое значение l-ого критерия оптимальности; и вершина куба

$\vec{v}^- \in V_{(p+1),n}$, l-ая координата которой определяет значение l-ого критерия оптимальности, к которому необходимо стремиться, $l=1,\ldots,n$. Полагаем, что $v_l^- \le v_l^+$, $l=1,\ldots,n$ и $\vec{v}^- \ne \vec{v}^+$. Через $V(\vec{v}^-,\vec{v}^+)=\{\vec{v} \mid v_l^- \le v_l \le v_l^+,\ \ l=1,\ldots,n,\ \ \vec{v}\in V_{(p+1),n}\}$ обозначим множество таких вершин куба, координаты которых принимают значения из соответствующего интервала, определяемого заданными вершинами куба $\vec{v}^-$, $\vec{v}^+ \in V_{(p+1),n}$. Таким образом, нас будут интересовать только те вершины куба, которые принадлежат множеству $V(\vec{v}^-,\vec{v}^+)$. Тогда задача распределения ресурсов будет заключаться в определении такого k-мерного вектора $\vec{x}^0$, для которого $\sum_{j\in R(i)} x_j^0 \le c_i$, $i=1,\ldots,m$, и для любого $\vec{x}$, для которого $\sum_{j\in R(i)} x_j \le c_i$, $i=1,\ldots,m$, выполняется отношение $\vec{F}(B\vec{x}^0)\,\pi\,\vec{F}(B\vec{x})$, при условиях $F_i(\sum_{j\in G(i)} x_j)=t_i$, $t_i \in \{v_i^-, v_i^-+1,\ldots,v_i^+\}$, $i=1,\ldots,n$. Здесь и далее вершину $\vec{v}^0 = (F_1(\sum_{j\in G(1)} x_j^0), F_2(\sum_{j\in G(2)} x_j^0),\ldots,F_n(\sum_{j\in G(n)} x_j^0))$ будем называть оптимальной вершиной на множестве $V(\vec{v}^-,\vec{v}^+)$.

В качестве порядка π выберем лексикографическое отношение порядка: $\vec{v}^1 \pi \vec{v}^2$ тогда и только тогда, если $v_l^1 = v_l^2$, $l=1,\ldots,s$, $v_{s+1}^1 < v_{s+1}^2$.

В [6] предложен алгоритм решения задачи поиска оптимальной вершины многомерного многозначного куба для случая, когда $\vec{v}^+ = (p,p,\ldots,p)$, а $\vec{v}^- = (0,0,\ldots,0)$. Для множества вершин $V(\vec{v}^-,\vec{v}^+)$ этот алгоритм включает в себя следующие шаги. На первом шаге среди вершин вида $(v_1, v_2^+, v_3^+,\ldots,v_n^+)$, находится такое значение v_1^0, $v_1^0 \in \{v_1^-, v_1^-+1\ldots,v_1^+\}$, которое обеспечивает $g(v_1^0, v_2^+, v_3^+,\ldots,v_n^+)=1$, и $v_1^0 \le v_1$, для всех тех $v_1 \in \{v_1^-, v_1^-+1\ldots,v_1^+\}$, для которых $g(v_1, v_2^+, v_3^+,\ldots,v_n^+)=1$. На втором шаге среди вершин вида $(v_1^0, v_2, v_3^+,\ldots,v_n^+)$ аналогично находится вторая координата оптимальной вершины, $v_2 \in \{v_2^-, v_2^-+1\ldots,v_2^+\}$. На n-ом шаге находим искомую оптимальную на множестве $V(\vec{v}^-,\vec{v}^+)$ вершину. Так как функция $g(\vec{v})$ является монотонной, то, используя на каждом шаге двоичный поиск по соответствующей этому шагу координате вершины куба, алгоритм решения поставленной задачи будет включать в себя порядка $n+\sum_{i=1}^{n}[\log_2(v_i^+ - v_i^-)]$ проверок совместности систем ограничений типа (19).

Иногда при функционировании системы могут возникать дополнительные условия, тогда нас может интересовать не всё множество вершин $V(\vec{v}^-,\vec{v}^+)$, а только некоторое его подмножество W. В этом случае будем рассматривать задачу поиска такой оптимальной на подмножестве W вершины $\vec{x}^0$, для которой $\vec{F}(B\vec{x}^0)\in W$. Рассмотрим следующую схему построения множества W.

Пусть дополнительными условиями для рассматриваемых задач являются следующие условия:

- *Задача объемно-календарного планирования для подразделений предприятия*

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{s\in S}x_{ijkst} \geq \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{s\in S}x_{ijkst+1},\ t\in T\ , \qquad (20)$$

– общий объем выполненных работ в текущий такт не должен превышать объема, работ, выполненного в предыдущий такт. Данные условия являются естественными в случае, когда работы последующего такта планирования напрямую зависят от объёмов работ, выполненных на текущем такте планирования.

- *Многопродуктовая транспортная задача с промежуточными пунктами*

$$\sum_{i\in I}\sum_{k\in K}\sum_{s\in S}x_{ijkst} \geq \sum_{i\in I}\sum_{k\in K}\sum_{s\in S}x_{ijkst+1},\ j\in J, t\in T\ , \qquad (21)$$

– промежуточный пункт в следующий такт планирования не может «вместить» больше груза, чем в предыдущий такт. Данные ограничения могут возникать в силу условий контрактов (договоров) на аренду складских помещений, заключённых для каждого из промежуточных пунктов и устанавливающих ограничения на максимальные объёмы продукции, которые могут «вместить» промежуточные пункты.

- *Задача переработки газового конденсата*

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{s\in S}x_{ijksrt} \leq \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{s\in S}x_{ijksrt+1},\ k\in K,\ r\in R, t\in T\ , \qquad (22)$$

– количество готовой продукции, которое хочет получать потребитель, в каждый последующий такт планирования не может быть меньше, чем в предыдущий (в пределах общих ограничений). Данные ограничения также могут возникать в силу условий контрактов, заключённых между производителями и потребителями, которые сами могут использовать получаемую продукцию для производства или продажи, а, значит, быть связанными своими контрактными обязательствами.

Для построения множества *W*, в силу $\vec{v}^- \neq \vec{v}^+$, можем найти координату с наименьшим по порядку номером *s* такую, что: $v_s^- < v_s^+$ и $\max_{i=\overline{1,s-1}} \overline{v_i} \leq v_s^+,\quad s=1,\ldots,n$.

Далее, используя двоичный поиск по координате *s* (согласно изложенной выше схеме поиска оптимальной вершины куба) найдём значение v_s^0.

Вначале полагаем: $w_l^0 = v_l^+,\ l=1,\ldots,s-1,\quad l=s+1,\ldots,n,\ \ w_s^0 = v_s^0$. Затем найдём такое значение s_1, что $v_{s_1}^- \leq v_s^0 < v_{s_1}^+,\ s_1 = s+1,\ldots,n$. Если s_1 не найдено, завершаем процесс построения множества *W*. В противном случае, если *i* – текущий шаг построения множества *W*, $i=1,2,...$, тогда *i*-ая вершина *W* имеет вид:

$$w_l^i = w_l^{i-1},\ l=1,\ldots,s_1-1,\quad l=s_1+1,\ldots,n;$$

$$w_{s_1}^i = v_s^0,$$

откуда в силу $w_{s_1}^i = v_s^0 \leq v_{s_1}^+,\ v_{s_1}^+ = w_{s_1}^{i-1}$ следует, что $w_{s_1}^i \leq w_{s_1}^{i-1}$, и, значит, справедливо $\vec{w}^i \pi \vec{w}^{i-1},\ i=1,\ldots,|W|$. Множество *W* содержит не более *n* элементов.

Для решения задачи поиска оптимальной вершины среди вершин множества *W*, предложим следующую вычислительную процедуру. В силу $\vec{w}^i \pi \vec{w}^{i-1}$, $i=1,\ldots,|W|$, организуем двоичный поиск по элементам множества *W* и найдём такое наибольшее значение *i*, которое обеспечивает $g(\vec{w}^i)=1,\ i=1,\ldots,|W|$. Тогда

$\vec{v}^{\,0} = \vec{w}^{\,i}$, причём $g(\vec{w}^{\,i+1}) = 0$, если $i \neq |W|$. Алгоритм решения поставленной задачи будет включать в себя порядка $log_2|W|$ проверок совместности систем ограничений типа (19).

6. Решение задачи проверки на совместность систем двусторонних линейных алгебраических неравенств транспортного типа

Так как в рассматриваемых задачах распределения ресурсов варьируемые параметры являются многоиндексными, а ограничения представляют собой систему неравенств транспортного типа, для описания многоиндексных задач можно воспользоваться следующей формализацией, используемой в [10].

Пусть заданно множество индексов $N(s) = \{1, 2, \ldots, s\}$ и множество M, $M \subseteq 2^{N(s)}$. Тогда через $D(M)$ будем обозначать систему линейных алгебраических неравенств транспортного типа с множеством индексов $N(s)$ и системой ограничений, состоящей, для каждого $f \in M$, из ограничений на подсуммы, в которых суммирование происходит по всем индексам множества f при фиксированных наборах значений индексов из $N(s) \setminus f$. Как и в [1] будем говорить, что множество M является k-вложенным, если существует такое разбиение множества M на k подмножеств $M_i = \{f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, ..., f_{m_i}^{(i)}\}$, $i = 1, \ldots, k$, что $f_j^{(i)} \subseteq f_{j+1}^{(i)}$, $j = 1, \ldots, m_i - 1$, $i = 1, \ldots, k$.

В общем случае для исследования вопроса совместности системы $D(M)$ можно воспользоваться классическими вычислительными методами линейной алгебры [11]. Однако, учитывая транспортную специфику рассматриваемых систем, для их проверки на совместность можно воспользоваться специальными, более эффективными методами.

6.1. Задача объёмно-календарного планирования для подразделений предприятия

Преобразуем систему ограничений (1)-(6) задачи объёмно-календарного планирования в систему с двусторонними ограничениями.

$$G^- \le \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{s\in S}\sum_{t\in T} x_{ijkst} \le G^+ \qquad (23)$$

$$E_t^- \le \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{s\in S} x_{ijkst} \le E_t^+,\ t\in T \qquad (24)$$

$$D_{kt}^- \le \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{s\in S} x_{ijkst} \le D_{kt}^+,\ k\in K, t\in T \qquad (25)$$

$$C_{kst}^- \le \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijkst} \le C_{kst}^+,\ k\in K, s\in S, t\in T \qquad (26)$$

$$B_{jkst}^- \le \sum_{i\in I} x_{ijkst} \le B_{jkst}^+,\ j\in J, k\in K, s\in S, t\in T \qquad (27)$$

$$0 \le x_{ijkst} \le a_{ijkst},\ i\in I, j\in J, k\in K, s\in S, t\in T \qquad (28)$$

Здесь $G^- = G^+ = G$, $B^-_{jkst} = B_{jkst}$, $B^+_{jkst} = G$, $j \in J, k \in K, s \in S, t \in T$.

Для задачи объёмно-календарного планирования система (23)-(28) является системой вида $D(M)$, где $s = 5$, $N(s) = \{i, j, k, s, t\}$,
$M = \{\{i, j, k, s, t\}, \{i, j, k, s\}, \{i, j, s\}, \{i, j\}, \{i\}, \varnothing\}$. Так как выполняется $\varnothing \subset \{i\} \subset \{i, j\} \subset \{i, j, s\} \subset \{i, j, k, s\} \subset \{i, j, k, s, t\}$, то множество M является 1-вложенным и согласно [8] система ограничений (23)-(28) моделируется корневым ориентированным деревом, в котором ограничение (23) соответствует корню дерева, ограничения (28) – листьям, ограничения (24)-(27) – промежуточным вершинам дерева.

Найдем величины:

$$B^{p+}_{jkst} = \sum_{i \in I} a_{ijkst}, \ j \in J, k \in K, s \in S, t \in T,$$

$$C^{p-}_{kst} = \max(C^-_{kst}, \sum_{j \in J} B^{p-}_{jkst}), \ C^{p+}_{kst} = \min(C^+_{kst}, \sum_{j \in J} B^{p+}_{jkst}),$$

$$D^{p-}_{kt} = \max(D^-_{kt}, \sum_{s \in S} C^{p-}_{kst}), \ D^{p+}_{kt} = \min(D^+_{kt}, \sum_{s \in S} C^{p+}_{kst}), \tag{29}$$

$$E^{p-}_{t} = \max(E^-_{t}, \sum_{k \in K} D^{p-}_{kt}), \ E^{p+}_{t} = \min(E^+_{t}, \sum_{k \in K} D^{p+}_{kt}),$$

$$G^{p-} = \max(G^-, \sum_{t \in T} E^{p-}_{t}), \ G^{p+} = \min(G^+, \sum_{t \in T} E^{p+}_{t}).$$

Теорема 1. Система ограничений (23)-(28), а тем самым и исходная система (1)-(6), совместна тогда и только тогда, когда

$$G^{p-} \le G^{p+}; E^{p-}_t \le E^{p+}_t, t \in T;$$
$$D^{p-}_{kt} \le D^{p+}_{kt}, k \in K, t \in T;$$
$$C^{p-}_{kst} \le C^{p+}_{kst}, \ k \in K, s \in S, t \in T;$$
$$B^{p-}_{jkst} \le B^{p+}_{jkst}, \ j \in J, k \in K, s \in S, t \in T.$$

Доказательство теоремы 1 основано на использовании теоремы о «приведенных границах» из ([8]).

Проверка на совместность системы ограничений (1)-(6) требует линейного числа операций относительно переменных рассматриваемой задачи.

6.2. Многопродуктовая транспортная задача с промежуточными пунктами

Преобразуем систему ограничений (7)-(12) многопродуктовой транспортной задачи в систему с двусторонними ограничениями.

$$A^- \le \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} x_{ijkst} \le A^+ \tag{30}$$

$$B^-_{st} \le \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijkst} \le B^+_{st}, \ s \in S, t \in T \tag{31}$$

$$C^-_{jt} \le \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} x_{ijkst} \le C^+_{jt}, \ j \in J, t \in T \tag{32}$$

$$0 \le \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijkst} \le D_{ist}, \ i \in I, s \in S, t \in T \tag{33}$$

$$E^-_{ijkt} \le \sum_{s \in S} x_{ijkst} \le E^+_{ijkt}, \ i \in I, j \in J, k \in K, t \in T \tag{34}$$

$$0 \le x_{ijkst} \le A^+, \ i \in I, j \in J, k \in K, s \in S, t \in T. \tag{35}$$

Здесь $B_{st}^{-} = B_{st}$, $B_{st}^{+} = A^{+}$, $s \in S, t \in T$; $E_{ijkt}^{-} = E_{ijkt}$, $E_{ijkt}^{+} = A^{+}$, $i \in I, j \in J, k \in K, t \in T$; $D_{ist}^{+} = D_{ist}$, $i \in I, s \in S, t \in T$. Для многопродуктовой транспортной задачи система (30)-(35) является системой вида $D(M)$, где $s = 5$, $N(s) = \{i, j, k, s, t\}$, $M = \{\{i, j, k, s, t\}, \{i, j, k\}, \{i, k, s\}, \{j, k\}, \{s\}, \varnothing\}$. Для множества M существует разбиение $M_1 = \{\{i, j, k, s, t\}, \{i, j, k\}, \{j, k\}, \{s\}, \varnothing\}$, $M_2 = \{\{i, k, s\}\}$, таким образом, множество M является 2-вложенным.

Согласно [5] условие 2-вложенности многоиндексных задач является достаточным условием сводимости (в рамках исследуемой схемы сведения) к задаче поиска потока в сети. Таким образом, если для множества M существует соответствующее разбиение, то может быть построена транспортная сеть с двусторонними пропускными способностями дуг.

Теорема 2. Система ограничений (30)-(35), а тем самым и исходная система (7)-(12), совместна тогда и только тогда, когда существует допустимый поток у соответствующей транспортной сети.

Доказательство теоремы 2 основано на использовании теоремы из [5] о достаточном условии сводимости многоиндексных задач к потоковым алгоритмам.

Существует много работ, посвященных методам решения потоковых задач. Алгоритм поиска потока минимальной стоимости заданной величины, обладающий оценкой $O(mlog(logn(m+nlogn))$ (где n – число вершин, а m – число дуг) предложен в работе [16]. Алгоритм поиска максимального потока, обладающий оценкой $O(nmlogn)$, предложен в [18]. Обзор оценок вычислительной сложности для известных потоковых алгоритмов можно найти, например, в [16, 14-15].

6.3. Задача переработки газового конденсата

Преобразуем систему ограничений (13)-(18) в систему с двусторонними ограничениями.

$$G^{+} \le \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{s\in S}\sum_{r\in R}\sum_{t\in T} x_{ijksrt} \le G^{-} \tag{36}$$

$$0 \le \sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{s\in S}\sum_{r\in R} x_{ijksrt} \le A_i,\ i \in I, t \in T \tag{37}$$

$$B_{jk} \le \sum_{i\in I}\sum_{s\in S}\sum_{r\in R} x_{ijksrt} \le C_{jk},\ j \in J, k \in K,\ t \in T \tag{38}$$

$$0 \le \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{r\in R} x_{ijksrt} \le D_{ks},\ k \in K, s \in S,\ t \in T \tag{39}$$

$$E_{krt} \le \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{s\in S} x_{ijksrt} \le H_{krt},\ k \in K, r \in R,\ t \in T \tag{40}$$

$$0 \le x_{ijksrt} \le G^{+},\ i \in I, j \in J, k \in K, s \in S, r \in R, t \in T \tag{41}$$

Система (36)-(41) является системой вида $D(M)$, где $s = 6$, $N(s) = \{i, j, k, s, r, t\}$, $M = \{\{i, j, k, s, r, t\}, \{j, k, s, r\}, \{i, s, r\}, \{i, j, r\}, \{i, j, s\}, \varnothing\}$. Множество M в данном случае не является 2-вложенным, а значит, согласно [5] задача проверки на совместность системы (36)-(41) не может быть сведена к задаче поиска потока в сети

Для исследования совместности соответствующей системы можно воспользоваться предложенным в [9] алгоритмом, являющимся обобщением релаксационного метода ортогональных проекций Агмона-Моцкина [12, 15].

Перенумеровав переменные и ограничения рассматриваемой задачи, от многоиндексной системы ограничений типа (36)-(41) перейдём к системе линейных двусторонних алгебраических неравенств типа (19) над N-мерным евклидовым пространством R^N. Пусть задана совместная система линейных двусторонних алгебраических неравенств транспортного типа: $A_i \le \sum_{j\in Q(i)} x_j \le B_i,\ i=\overline{1,q}$. Пусть $\vec{x}^0 \in R^n$ произвольный вектор (например, с нулевыми компонентами). Если $\vec{x}^0$ удовлетворяет всем q ограничениям системы, то задача решена. Пусть s – первое по порядку ограничение, условия которого нарушены. Построим вектор $\vec{x}^1$ по следующему правилу:

$$x_j^1 = \begin{cases} x_j^0 + (A_s - \sum\limits_{i\in Q(s)} x_i^0)\times|Q(s)|^{-1}, & \text{если} \quad A_s \ge \sum\limits_{i\in Q(s)} x_i^0 \\ x_j^0 - (\sum\limits_{i\in Q(s)} x_i^0 - B_s)\times|Q(s)|^{-1}, & \text{если} \quad \sum\limits_{i\in Q(s)} x_i^0 \ge B_s \end{cases}, \qquad j\in Q(s),$$

$$x_j^1 = x_j^0, \quad j\in\{1,2,...,q\}\setminus Q(s),$$

и перейдем к следующему ($s + 1$)-ому ограничению. Так для всех ограничений.

Теорема 3. Если система ограничений (36)-(41), а тем самым и исходная система (13)-(18), совместна, то, при $\nu\to\infty$, последовательность $\vec{x}^{\nu}$ сходится к её решению.

Доказательство теоремы 3 основано на использовании теоремы Агмона-Моцкина ([12, 15]).

В случае, когда для рассматриваемых задач принципиальными являются ограничения типа (20)-(22), для проверки совместности возникающих систем также можно воспользоваться обобщением релаксационного метода Агмона-Моцкина.

7. Численные примеры

7.1. Решение задачи проверки на совместность систем двусторонних линейных алгебраических неравенств транспортного типа

- *Задача объемно-календарного планирования для подразделений предприятия*

Пусть $I = \{1, 2\}$, $J = \{1\}$, $K = \{1\}$, $S = \{1, 2\}$, $T = \{1, 2\}$, и система ограничений задачи объёмно-календарного планирования имеет вид:

$$14 \le \sum_{i=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2} x_{i11st} \le 14; \tag{42}$$

$$8 \le \sum_{i=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} x_{i11s1} \le 14, \tag{43}$$

$$5 \le \sum_{i=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} x_{i11s2} \le 13; \tag{43}$$

$$6 \le \sum_{i=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} x_{i11s1} \le 18,\ 4 \le \sum_{i=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} x_{i11s2} \le 14 \tag{45}$$

$$4 \le \sum_{i=1}^{2} x_{i1111} \le 14,\ 3 \le \sum_{i=1}^{2} x_{i1121} \le 10,\ 2 \le \sum_{i=1}^{2} x_{i1112} \le 9,\ 3 \le \sum_{i=1}^{2} x_{i1122} \le 7; \tag{46}$$

$$2 \le \sum_{i=1}^{2} x_{i1111} \le 14,\ 4 \le \sum_{i=1}^{2} x_{i1121} \le 14,\ 1 \le \sum_{i=1}^{2} x_{i1112} \le 14,\ 0 \le \sum_{i=1}^{2} x_{i1122} \le 14; \tag{47}$$

$0 \le x_{11111} \le 5$, $0 \le x_{21111} \le 10$, $0 \le x_{11121} \le 7$, $0 \le x_{21121} \le 2$,

$0 \le x_{11112} \le 4$, $0 \le x_{21112} \le 3$, $0 \le x_{11122} \le 1$, $0 \le x_{21122} \le 5$. (48)

Система (42)-(48) моделируется корневым ориентированным деревом, графическое изображение которого представлено на рис. 1.

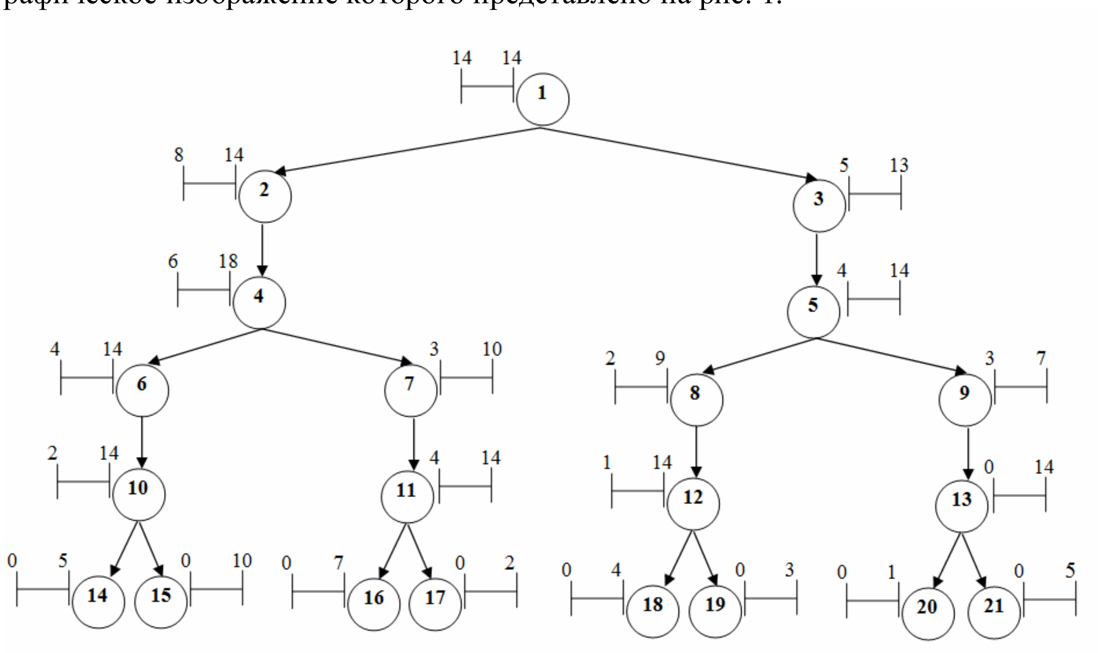

Рис. 1. Корневое ориентированное дерево, моделирующее систему ограничений (42)-(48)

Согласно соотношениям (29) приведённые границы элементов имеют вид:
$B_{1111}^{p-} = 2,\ B_{1111}^{p+} = 14$, $B_{1121}^{p-} = 4,\ B_{1121}^{p+} = 9$, $B_{1112}^{p-} = 1,\ B_{1112}^{p+} = 7$, $B_{1122}^{p-} = 1,\ B_{1122}^{p+} = 7$; $C_{111}^{p-} = 4,\ C_{111}^{p+} = 14$, $C_{121}^{p-} = 4,\ C_{121}^{p+} = 9$, $C_{112}^{p-} = 2,\ C_{112}^{p+} = 7$, $C_{122}^{p-} = 3,\ C_{122}^{p+} = 6$; $D_{11}^{p-} = 8,\ D_{11}^{p+} = 18$, $D_{12}^{p-} = 5,\ D_{15}^{p+} = 13$; $E_1^{p-} = 8,\ E_1^{p+} = 14$, $E_1^{p-} = 5,\ E_1^{p+} = 13$; $G^{p-} = 14$, $G^{p+} = 14$.

Из теоремы 1 следует совместность системы (42)-(48).

- *Многопродуктовая транспортная задача с промежуточными пунктами*

Пусть $I = \{1\}$, $J = \{1, 2\}$, $K = \{1, 2\}$, $S = \{1, 2\}$, $T = \{1\}$ и система ограничений многопродуктовой транспортной задачи имеет вид:

$$20 \le \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} x_{1jks1} \le 20;$$

$$8 \le \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} x_{1jk11} \le 20, \quad 10 \le \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} x_{1jk21} \le 20;$$

$$0 \le x_{ijkst} \le 20,\ I = \{1\},\ J = \{1,2\},\ K = \{1,2\},\ S = \{1,2\},\ T = \{1\}; \tag{49}$$

$$2 \le \sum_{s=1}^{2} x_{111s1} \le 20, k \in K, \quad 4 \le \sum_{s=1}^{2} x_{121s1} \le 20, \quad 8 \le \sum_{s=1}^{2} x_{122s1} \le 20;$$

$$5 \le \sum_{k=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} x_{11ks1} \le 10, \quad 13 \le \sum_{k=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} x_{12ks1} \le 20.$$

Транспортная сеть, соответствующая рассматриваемой задаче, моделируемой системой (49), приведена на рис. 2. С дугами сети связаны сегменты, соответствующие пропускным способностям. Дуги, у которых сегменты не приведены, имеют нулевую нижнюю и неограниченную верхнюю пропускные способности.

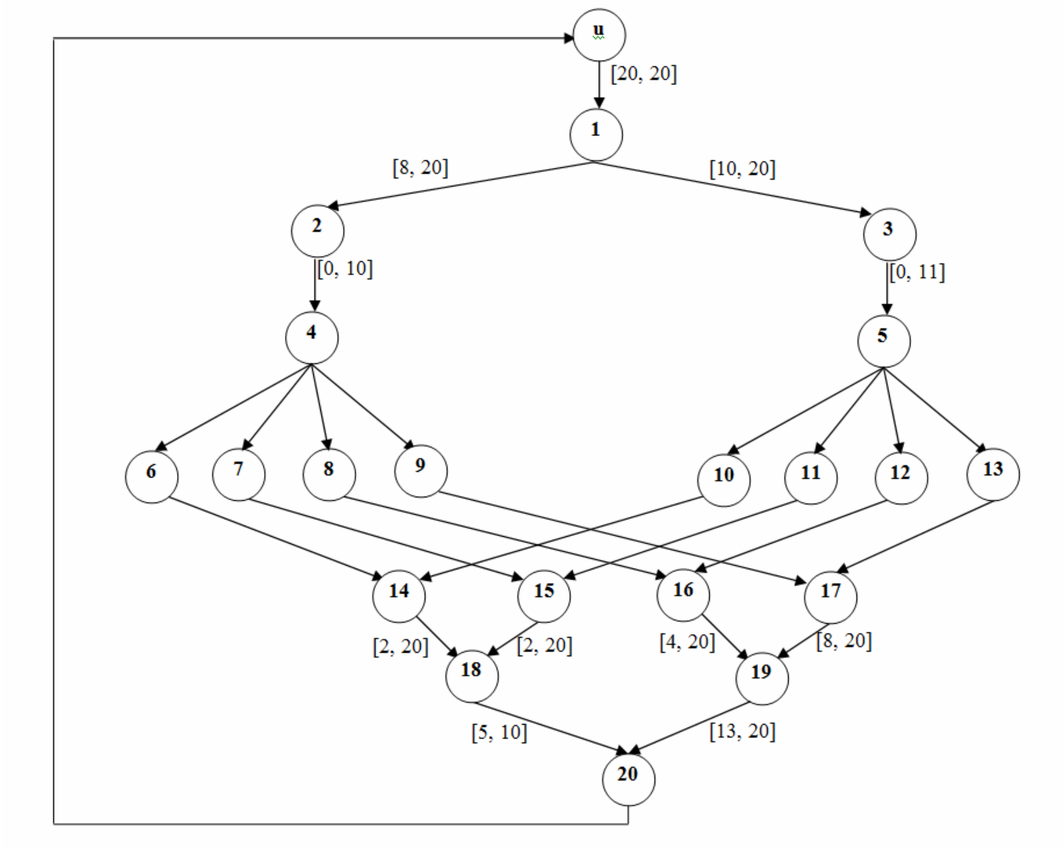

Рис. 2. Транспортная сеть, соответствующая задаче, моделируемой системой (49)

Существование допустимой циркуляции у построенной транспортной сети определяет совместность системы (49), допустимым решением которой является: $x_{11111} = 1$, $x_{11211} = 0$, $x_{12111} = 1$, $x_{12111} = 1$, $x_{12211} = 7$, $x_{11121} = 2$, $x_{11221} = 3$, $x_{12121} = 4$, $x_{12221} = 2$.

- *Задача переработки газового конденсата*

Пусть $I = \{1, 2\}$, $J = \{1, 2\}$, $K = \{1\}$, $S = \{1, 2\}$, $R = \{1\}$, $T = \{1\}$ и пусть переменные исходной задачи перенумерованы следующим образом: $x_1 = x_{111111}$, $x_2 = x_{111211}$, $x_3 = x_{121111}$, $x_4 = x_{121211}$, $x_5 = x_{211111}$, $x_6 = x_{211211}$, $x_7 = x_{221111}$, $x_8 = x_{221211}$. Система ограничений задачи переработки газового конденсата имеет вид:

$$16 \le \sum_{j=1}^{8} x_j \le 20, \qquad (50)$$

$$0 \le x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 10, \qquad (51)$$

$$0 \le x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \le 8, \qquad (52)$$

$$12 \le x_1 + x_2 + x_5 + x_6 \le 15, \qquad (53)$$

$$1 \le x_3 + x_4 + x_7 + x_8 \le 4, \qquad (54)$$

$$0 \le x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \le 10, \tag{55}$$

$$0 \le x_2 + x_4 + x_6 + x_8 \le 10, \tag{56}$$

$$12 \le \sum_{j=1}^{8} x_j \le 20, \tag{57}$$

$$0 \le x_j \le 20, \quad j = 1,\ldots,8. \tag{58}$$

Сеть, соответствующая рассматриваемой системе, представлена на рис.3.

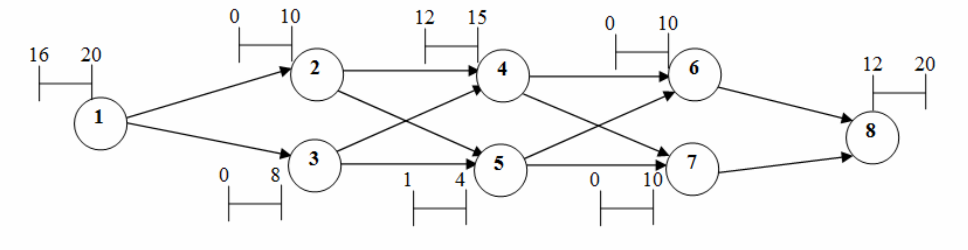

Рис. 3. Сеть, соответствующая системе ограничений (50)-(58)

Матрица ограничений системы (50)-(58) не является абсолютно унимодулярной, так как содержит минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

расположенный на пересечении строк, соответствующих ограничениям (51), (52), (54) и столбцов с номерами 2, 3 и 5, поэтому, согласно [5], задача определения совместности системы (50)-(58) не может быть сведена к потоковым алгоритмам.

Для отыскания решения системы (50)-(58) воспользуемся обобщением релаксационного метода ортогональных проекций Агмона-Моцкина. Пусть $x_j^0 = 0, \quad j = 1,\ldots,8$ – начальное итерационное решение.

1. Ограничение (50) нарушено, поэтому: $x_j^1 = x_j^0 + (16 - \sum_{j=1}^{8} x_j^0) \times |8|^{-1}$, так как $16 \ge \sum_{j=1}^{8} x_j^0$, откуда $x_j^1 = 2, \quad j = 1,\ldots,8$.

2. Ограничение (52) нарушено, поэтому: $x_j^2 = x_j^1 + (12 - (x_1^1 + x_2^1 + x_5^1 + x_6^1)) \times |4|^{-1}$, так как $12 \ge x_1^1 + x_2^1 + x_5^1 + x_6^1$, $j \in \{1, 2, 5, 6\}$, откуда $x_1^1 = x_2^1 = x_5^1 = x_6^1 = 3$; и, кроме того, $x_3^2 = x_3^1 = 2, x_4^2 = x_4^1 = 2, x_7^2 = x_7^1 = 2, x_8^2 = x_8^1 = 2$.

3. Ограничение (53) нарушено, поэтому: $x_j^3 = x_j^2 - ((x_3^2 + x_4^2 + x_7^2 + x_8^2) - 4) \times |4|^{-1}$, так как $4 \le x_3^2 + x_4^2 + x_7^2 + x_8^2$, $j \in \{3, 4, 7, 8\}$, откуда $x_3^3 = x_4^3 = x_7^3 = x_8^3 = 1$; и, кроме того, $x_1^3 = x_1^2 = 3, x_2^3 = x_2^2 = 3, x_5^3 = x_5^2 = 3, x_6^3 = x_6^2 = 3$.

Среди ограничений системы (50)-(58) больше нет нарушенных, получено следующее решение системы: $x_1^3 = x_2^3 = x_5^3 = x_6^3 = 3$, $x_3^3 = x_4^3 = x_7^3 = x_8^3 = 1$.

7.2. Решение задачи поиска оптимальной вершины многомерного многозначного куба

Пусть задача объёмно-календарного планирования имеет вид (42)-(48) и в качестве контролируемых ограничений выступают ограничения (43)-(44) на объемы работ, которые должны быть выполнены по тактам планирования. Пусть совокупности вложенных интервалов для контролируемых ограничений (43)-(44) имеют вид: $[8, 8] \subset [8, 9] \subset [8, 12] \subset [8, 13] \subset [8, 14]$ и $[11, 13] \subset [10, 13] \subset [8, 13] \subset [6, 13] \subset [5, 13]$, соответственно.

Здесь $p = 4$ и задача моделируется двумерным пятеричным кубом, каждая вершина которого определяется двумерным вектором с компонентами из множества $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Графическое изображение куба представлено на рис. 4.

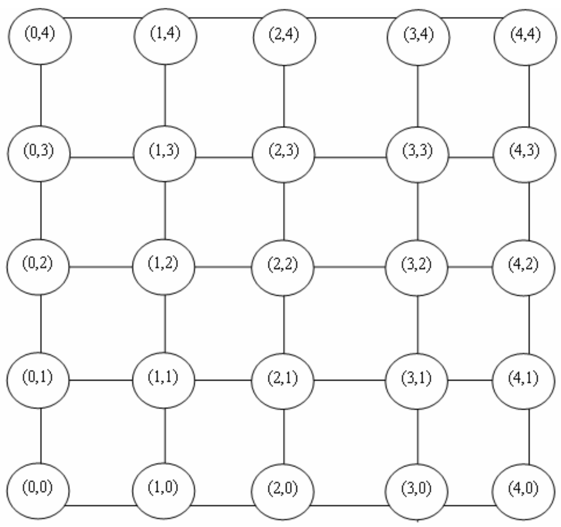

Рис. 4. Графическое изображение двумерного пятеричного куба

Будем предполагать, что контролируемое ограничение (43) лексикографически предпочтительнее ограничения (44). Пусть также $\vec{v}^- = (0,1)$ и $\vec{v}^+ = (4,3)$.

Прежде чем приступить к решению задачи 1, проверим на совместность систему (2), которая отличается от системы (1) только ограничением (44), которое теперь имеет вид $6 \le \sum_{i=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} x_{i1s2} \le 13$. Воспользовавшись соотношениями (29) найдём новые приведённые границы для ограничения (42) $G^{p-} = 14$, $G^{p+} = 14$, откуда согласно теореме 1 система (2) совместна, поэтому можем начать поиск оптимальной вершины куба.

На первом шаге работы алгоритма среди вершин вида $(v_1, 3)$, $v_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, найдём наименьшую по лексикографическому порядку вершину куба. Рассмотрим вершину куба (2, 3). Соответствующая этой вершине система ограничений (3) отличается от системы (2) только ограничением с номером (43), которое теперь имеет вид $8 \le \sum_{i=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} x_{i1s1} \le 12$. Приведённые границы для ограничения

(42) имеют вид: $G^{p-}=14$, $G^{p+}=14$. Из того, что $G^{p-}\le G^{p+}$, по теореме 1 система (3) совместна. Рассмотрим вершину куба (0, 3). Соответствующая этой вершине система ограничений (4) отличается от системы (3) только ограничением с номером (43), которое теперь имеет вид $8\le\sum_{i=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}x_{i11s1}\le 8$. Приведённые границы для ограничения (42) имеют вид $G^{p-}=14$, $G^{p+}=14$, откуда согласно теореме 1 система (4) совместна.

На втором шаге работы алгоритма среди вершин вида (0, v_2), $v_2\in\{1, 2, 3\}$ найдём наименьшую по лексикографическому порядку вершину куба. Рассмотрим вершину куба (0, 2). Соответствующая этой вершине система (5) отличается от системы (4) только ограничением с номером (44), которое теперь имеет вид $8\le\sum_{i=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}x_{i11s2}\le 13$. Приведённые границы для ограничения (42) имеют вид $G^{p-}=16$, $G^{p+}=14$, откуда согласно теореме 1 система (5) не совместна. Тем самым, оптимальной (по введённому лексикографическому порядку) вершиной будет вершина (0, 3). Оптимальным решением задачи является следующее решение: $x^0_{11111}=2$, $x^0_{21111}=2$, $x^0_{11121}=2$, $x^0_{21121}=2$, $x^0_{11112}=2$, $x^0_{21112}=1$, $x^0_{11122}=1$, $x^0_{21122}=2$.

8. Заключение

В статье рассмотрена проблема распределения ресурсов в иерархических системах транспортного типа. Решение поставленной многокритериальной задачи осуществляется сведением её к однокритериальной, путем задания на множестве вершин многомерного многозначного куба некоторых порядков, при этом поиск решения осуществляется на различных подмножествах вершин куба, которые определяются из условий постановок исходных задач. В качестве примеров прикладных задач, формализуемых как задачи распределения ресурсов в иерархических системах транспортного типа, рассмотрены ([1-4, 6-7, 17]): задача объемно-календарного планирования для подразделений предприятия, многопродуктовая транспортная задача с промежуточными пунктами, задача переработки газового конденсата.

Литература

1. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 6. – С. 194–205.
2. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многоиндексные задачи оптимального планирования производства // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 10. – С. 148–155.
3. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многопродуктовые потоки в древовидных сетях // Известия академии наук. Теория и системы управления. – 2007. – № 6. – С. 85–91.

4. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Поиск потока в несовместных транспортных сетях // Управление большими системами. – М.: ИПУ РАН. – 2009. – № 24. – С. 147–168.
5. Афраймович Л.Г. Многоиндексные транспортные задачи с 2-вложенной структурой // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 1. – С. 116–134.
6. Прилуцкий М.Х. Многокритериальные многоиндексные задачи объёмно-календарного планирования // Известия академии наук. Теория и системы управления. – 2007. – № 1. – С. 78–82.
7. Прилуцкий М.Х., Костюков В.Е. Оптимизационные задачи объёмно-календарного планирования для нефтеперерабатывающих предприятий // Системы управления и информационные технологии. – 2007. – № 2.1(28). – С. 188–192.
8. Прилуцкий М.Х. Распределение однородного ресурса в иерархических системах древовидной структуры // Труды международной конференции «Идентификация систем и задачи управления SICPRO'2000». – М.:Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – 2000. – С. 2038–2049.
9. Прилуцкий М.Х. Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 2. – С. 139–146.
10. Раскин Л.Г., Кириченко И.О. Многоиндексные задачи линейного программирования. – М.:Радио и связь, 1982. – 240 с.
11. Черников С.Н. Линейные неравенства. – Москва:Наука, 1968. – 488 с.
12. Agmon S. The relaxation method for linear inequalities // Canadian J. Math. – 1954. –Vol. 6, № 3. – P. 382–392.
13. Galil Z., Tardos E. An mincost flow algorithm // Journal of the ACM. – 1988. –Vol. 35, № 2. – P. 374–386.
14. Goldberg A.V., Rao S. Beyond the flow decomposition barrier // Journal of the ACM. – 1998. –Vol. 45, № 5. – P. 783–797.
15. Motzkin T.S., Schoenberg I.J. The relaxation method for linear inequalities // Canadian J. Math. –Vol. 6, № 3. – P. 393–404.
16. Orlin J.B. A Faster strongly polynomial minimum cost flow algorithm // Operations research. – 1993. –Vol. 41, № 2. – P. 338–350.
17. Prilutskii M. Kh., Kostyukov V.E. Optimization Models of Gas and Gas Condensate Processing // Automation and Remote Control. – 2012. –Vol. 72, № 8. – P. 345–349.
18. Sleator D.D., Tarjan R.E. A data structure for dynamic trees // Journal of Computer and System Sciences. – 1983. –Vol. 26, № 2. – P. 362–391.