МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Н.П. Семерикова
А.А. Дубков
А.А. Харчева

ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 “Радиофизика”, 02.03.02 “Фундаментальная информатика и информационные технологии” и специальности 10.05.02 “Информационная безопасность телекоммуникационных систем”

Нижний Новгород
2019

УДК 517.537
ББК 22.161
С30

Вычеты и их применение к вычислению интегралов: учебно-метод. пособие/ Н.П. Семерикова, А.А. Дубков, А.А. Харчева. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2019. - 47 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **А.В. Клюев**

Решение многих задач физики и математики связано с вычислением интегралов. В учебно-методическом пособии рассмотрены основные положения теории вычетов и ее применение к вычислению определенных классов интегралов. Выведена основная теорема теории вычетов и показано ее применение при вычислении контурных интегралов от функций комплексного переменного, в том числе и для случая особой точки на контуре интегрирования. Получены формулы и рассмотрено их применение к вычислению определенных интегралов от тригонометрических функций и несобственных интегралов первого рода. Уделено большое внимание вычислению главных значений несобственных интегралов при наличии особых точек на действительной оси. Разобраны примеры вычисления вычетов и интегралов. В конце каждого раздела приведены задания для самостоятельной работы и ответы к ним.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов радиофизического факультета, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 “Радиофизика”, 02.03.02 “Фундаментальная информатика и информационные технологии” и специальности 10.05.02. “Информационная безопасность телекоммуникационных систем” и изучающих курс “Теория функций комплексного переменного”.

Ответственный за выпуск:
зам. председателя методической комиссии
радиофизического факультета ННГУ,
д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 517.537
ББК 22.161
С30

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

В данном учебно-методическом пособии рассмотрены основные положения теории вычетов и ее применение к вычислению интегралов от функций комплексного и действительного переменного, в том числе и некоторых видов несобственных интегралов.

В учебно-методическом пособии «Ряды аналитических функций» подробно рассмотрены разложения аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана, а также приведена классификация изолированных особых точек. Напомним основные понятия из него, необходимые в теории вычетов.

Определение 1: Нулем аналитической функции $f(z)$ называется точка z_0, в которой $f(z_0)=0$. Если же функция $f(z)$ удовлетворяет условиям $f(z_0)=0,\quad f'(z_0)=0,\ldots,\quad f^{(m-1)}(z_0)=0,\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0$, то z_0 называется нулем порядка m (или кратности m). При m=1 точка z_0 называется простым нулем или нулем первого порядка.

Если точка z_0 является нулем m-го порядка, то в некоторой окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ можно представить в виде:

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z), \tag{1}$$

где функция $\varphi(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Определение 2: Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются особыми точками. В особых точках функция $f(z)$ либо не определена, либо определена, но не является дифференцируемой.

Определение 3: Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если функция $f(z)$ аналитическая в некоторой окрестности $0<|z-z_0|<r$ (т.е. в круге с выколотым центром в точке z_0), где нет других особых точек.

В основу классификации изолированных особых точек положено разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этих точек.

Определение 4: Ряд вида

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}, \tag{2}$$

коэффициенты C_n которого находятся по формулам:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}},\quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots) \tag{3}$$

называется рядом Лорана. В ряд Лорана можно разложить функцию $f(z)$, однозначную и аналитическую в круговом кольце $r<|z-z_0|<R$. В формуле (3) Г – произвольный замкнутый контур, лежащий внутри этого кольца.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ сходится внутри круга $|z-z_0|<R$, его называют правильной частью ряда Лорана (он же является рядом Тейлора). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$ сходится во внешности круга $|z-z_0|>r$, его называют главной часть ряда Лорана. Ряд (2) сходится, если сходится одновременно его правильная и главная части. Следовательно, ряд Лорана сходится в кольце $r<|z-z_0|<R$, при этом не исключаются случаи, когда r=0 и $R=+\infty$.

Определение 5: Точка z_0 называется *устранимой особой точкой*, если разложение $f(z)$ в ряд Лорана (2) в окрестности точки z_0 не содержит отрицательных степеней разности $(z-z_0)$, т.е. имеет вид обычного степенного ряда:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n . \tag{4}$$

В устранимой особой точке z_0 существует конечный предел функции $f(z)$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=C_0, |C_0|<+\infty$.

Определение 6: Точка z_0 называется *полюсом*, если разложение в ряд Лорана (2) в окрестности этой точки содержит конечное число отрицательных степеней $(z-z_0)$, т.е. имеет вид:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}, \quad c_{-m}\neq 0 . \tag{5}$$

Если m=1, полюс называется простым, а если m>1- то полюсом m- го порядка.

В полюсе $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$. Порядок полюса можно определить либо по разложению (5), либо воспользоваться связью между нулем и полюсом:

<u>*Связь между нулем и полюсом:*</u> Если z_0- нуль порядка m для функции $f(z)$, т.е. $f(z)$ представима в виде (1) $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, (где функция $\varphi(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$), то z_0- полюс порядка m для функции

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m\varphi(z)} \tag{6}$$

В частности, если $f(z)$ представима в виде дроби $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, где $\varphi(z)$ – аналитическая функция в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$, тогда z_0- полюс порядка m для функции $f(z)$.

Определение 7: Точка z_0 называется *существенно особой точкой*, если ряд Лорана содержит бесконечно число отрицательных степеней $(z-z_0)$, т.е. имеет вид (2)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

Если z_0 существенно особая точка, то в ее окрестности при $z\to z_0$ функция *f*(*z*) не стремится ни к какому конечному или бесконечному пределу, т.е. не существует $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$.

Определение 8: Окрестностью бесконечно удаленной точки называется внешность круга достаточно большого радиуса с центром в начале координат $R<|z|<+\infty$. Если *f*(*z*) аналитическая и однозначная функция в окрестности бесконечно удаленной, то точка *z*=∞ называется изолированной особой точкой.

В окрестности бесконечно удаленной точки $R<|z|<+\infty$ аналитическую функцию *f*(*z*) раскладывают в ряд Лорана вида:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{z^n}, \qquad (7)$$

коэффициенты C_n которого вычисляются по формулам

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{z^{n+1}}, \quad (n=0,\pm1,\pm2,...) \qquad (8)$$

Здесь Г – произвольный замкнутый контур, лежащий во внешности круга $R<|z|<+\infty$.

Определение 9: Точка *z*=∞ называется *устранимой особой точкой*, если ряд Лорана (7) не содержит положительных степеней *z*, т.е. имеет вид

$$f(z)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{z^n} \qquad (9)$$

В устранимой особой точке $z=\infty$ существует конечный предел $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=C_0,\quad |C_0|<+\infty$.

Определение 10: Точка *z*=∞ называется п*олюсом порядка m*, если ряд Лорана содержит конечное число положительных степеней, при этом порядок полюса определяется старшей положительной степенью *z*:

$$f(z)=C_mz^m+C_{m-1}z^{m-1}+...+C_1z+C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{z^n},\quad C_m\neq0 \qquad (10)$$

В полюсе $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$.При *m*=1 полюс называется простым.

Определение 11: Точка *z*=∞ называется *существенно особой точкой*, если ряд Лорана содержит бесконечное число положительных степеней, т.е. имеет вид

(7) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{z^n}$. В существенно особой точке $z=\infty$ не существует $\lim_{z\to\infty} f(z)$.

Замечание: Замена $z=\frac{1}{t}$ переводит изолированную особую точку $z=\infty$ функции $f(z)$ в конечную изолированную особую точку t=0 функции $g(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$. При этом характер особой точки $z=\infty$ и t=0 будет одинаковым.

2. ВЫЧЕТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

2.1. Определение и вычисление вычета в конечной изолированной особой точке

Определение: Пусть z_0 - изолированная особая точка функции $f(z)$. *Вычетом* функции $f(z)$ в точке $z_0\neq\infty$ называется комплексное число [1], обозначаемое символом $\operatorname{res} f(z_0)$, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)dz$, взятому в положительном направлении по любому замкнутому контуру Г, лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащему единственную особую точку z_0:

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)dz \tag{11}$$

Для обозначения вычета также применяют выражения $\operatorname{res}\left[f(z);z_0\right]$ или $\text{Выч}\left[f(z);z_0\right]$. В качестве контура Г можно взять окружность $|z-z_0|=\rho$ с положительным направлением обхода с центром в точке z_0 достаточно малого радиуса ρ, чтобы окружность не выходила за пределы области $0<|z-z_0|<\rho<R$, где $f(z)$ является аналитической функцией.

Ряд Лорана в окрестности особой точки z_0 (т.е. в кольце $0<|z-z_0|<R$) имеет вид (2): $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$, коэффициенты которого вычисляются по формулам (3): $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, $(n=0,\pm1,\pm2,...)$. В частности, при n=-1 из (3) получаем $C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)dz$. Сравнивая это выражение с формулой (11), приходим к выводу, что $\operatorname{res} f(z_0)=C_{-1}$.

Таким образом, *вычет в изолированной особой точке* $z_0 \neq \infty$ *равен коэффициенту при первой отрицательной степени* $(z - z_0)^{-1}$ *ряда Лорана* (2), представляющего функцию *f*(*z*) в окрестности особой точки z_0.

Рассмотрим формулы вычисления вычетов относительно изолированных особых точек.

1. Если z_0 - *устранимая особая точка*, то вычет в ней равен нулю, т.е. $\operatorname{res} f(z_0) = C_{-1} = 0$, поскольку разложение в ряд Лорана в окрестности устранимой особой точки имеет вид (4), т.е. не содержит отрицательных степеней $(z - z_0)$.

2. Если z_0 - *существенно особая точка*, то $\operatorname{res} f(z_0) = C_{-1}$, т.е. вычет находится из разложения функции в ряд Лорана (2). В некоторых случаях для вычисления вычета в существенно особой точке пользуются теоремой о сумме вычетов, которая рассмотрена в разделе 2.3.

3. Если z_0 - *полюс порядка* m для функции *f*(*z*), то ряд Лорана для этой функции имеет вид (5):

$$f(z) = C_{-m}(z - z_0)^{-m} + C_{-m+1}(z - z_0)^{-m+1} + \ldots + C_{-1}(z - z_0)^{-1} + C_0 + C_1(z - z_0) + \ldots,\ (C_{-m} \neq 0).$$

Умножая ряд (5) на $(z - z_0)^m$, получаем:

$$(z - z_0)^m f(z) = C_{-m} + C_{-m+1}(z - z_0) + \ldots + C_{-1}(z - z_0)^{m-1} + C_0(z - z_0)^m + C_1(z - z_0)^{m+1} + \ldots$$

Продифференцируем степенной ряд почленно (m-1) раз

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z - z_0)^m f(z)\right) = (m-1)!C_{-1} + m!C_0(z - z_0) + (m+1)m \cdot \ldots \cdot 3(z - z_0)^2 + \ldots$$

Переходя в к пределу при $z \to z_0$, получаем $\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z - z_0)^m f(z)\right) = (m-1)!C_{-1}$

Отсюда следует формула для вычисления вычета в полюсе порядка m:

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z \to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z - z_0)^m f(z)\right) \tag{12}$$

В частности, для полюса первого порядка формула (12) принимает вид:

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0}\left((z - z_0) f(z)\right). \tag{13}$$

Если функция $f(z)$ представима в виде дроби $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – аналитические функции в точке z_0, причем $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$, (z_0 - простой полюс), то пользуясь формулой (13), находим

$$\operatorname{res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)f(z)\right)=\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Получаем еще одну формулу для вычисления вычета в полюсе первого порядка:

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{14}$$

Примеры

Пример 1: Найти вычет функции $f(z)=z^3 coz\dfrac{1}{z-2}$

Решение: Особой точкой для $f(z)$ будет точка $z=2$, которая является существенно особой точкой, т.к. не существует $\lim\limits_{z\to 2} z^3 coz\dfrac{1}{z-2}$.

Представим z^3 по степеням $(z$-2): $z^3=\left(2+(z-2)\right)^3=8+12(z-2)+6(z-2)^2+(z-2)^3$ и запишем ряд

$\cos\dfrac{1}{z-2}=1-\dfrac{1}{2!(z-2)^2}+\dfrac{1}{4!(z-2)^4}-\dfrac{1}{6!(z-2)^6}+\ldots$, который сходится при $0<|z-2|<+\infty$.

Тогда

$$f(z)=\left(8+12(z-2)+6(z-2)^2+(z-2)^3\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2!(z-2)^2}+\frac{1}{4!(z-2)^4}-\ldots\right)=$$

$$=8\left(1-\frac{1}{2!(z-2)^2}+\frac{1}{4!(z-2)^4}-\ldots\right)+12\left((z-2)-\frac{1}{2!(z-2)}+\frac{1}{4!(z-2)^3}-\ldots\right)+$$

$$+6\left((z-2)^2-\frac{1}{2!(z-2)}+\frac{1}{4!(z-2)^2}-+..\right)+\left((z-2)^3-\frac{z-2}{2!}+\frac{1}{4!(z-2)}-..\right)$$

Вычислим коэффициент C_{-1} при степени $(z-2)^{-1}$:

$C_{-1}=12\left(-\dfrac{1}{2!}\right)+\dfrac{1}{4!}=-6+\dfrac{1}{24}=-\dfrac{143}{24}$. Тогда $\operatorname{res} f(2)=-\dfrac{143}{24}$.

Пример 2: Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{e^z}{1-e^z}$.

Решение: Особые точки находим из условия: $1-e^z=0$ или $e^z=1$, откуда получаем $z=\mathrm{Ln}1=2\pi ki$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Обозначим $\varphi(z)=e^z, \psi(z)=1-e^z$. Тогда $\varphi(2\pi ki)=e^{2\pi ki}=1\neq0$, $\psi(2\pi ki)=0$, $\psi'(z)=-e^z$, $\psi'(2\pi ki)=-e^{2\pi ki}=-1\neq0$. Следовательно, точки $z_k=2\pi ki$ являются простыми полюса. Тогда по формуле (14) получаем: $\operatorname{res} f(2\pi ki)=\dfrac{\varphi(2\pi ki)}{\psi'(2\pi ki)}=\dfrac{1}{-1}=-1$, ($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$)

Пример 3: Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{\cos 2z}{(z-1)^3}$.

Решение: Особая точка z=1 является полюсом третьего порядка, поэтому по формуле (12) получаем:

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to1}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\cos 2z}{(z-1)^3}(z-1)^3\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}(\cos 2z)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}(-2\sin 2z)'=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}(-4\cos 2z)=-2\cos 2$$

2.2. Определение и вычисление вычета в бесконечно удаленной точке

Определение: Пусть $z=\infty$ является изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$. *Вычетом функции* $f(z)$ *в изолированной особой точке* $z=\infty$ называется число, равное

$$\operatorname{res} f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho^-} f(z)dz\ , \tag{15}$$

где C_ρ^- - окружность $|z|=\rho$, $R<\rho<+\infty$ с отрицательным направлением обхода относительно начала координат (относительно точки $z=\infty$ направление будет положительным).

Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, т.е. во внешности круга $R<|z|<+\infty$, где $f(z)$ является аналитической, имеет вид (7): $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{C_{-n}}{z^n}$. Коэффициенты разложения находятся по формулам (8): $C_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\dfrac{f(z)dz}{z^{n+1}}$, $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$,здесь Г – произвольный замкнутый контур, лежащий во внешности круга $R<|z|<+\infty$. В качестве контура Г можно взять окружность $|z|=\rho$, где $R<\rho<+\infty$ с положительным направлением обхода. В частном случае при n=-1 из формулы (8) получаем $C_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} f(z)dz$ и сравним коэффициент C_{-1} с формулой (15):

$$C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} f(z)dz=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho^-} f(z)dz=-\operatorname{res} f(\infty)\ .$$

Следовательно, $\operatorname{res} f(\infty)=-C_{-1}$, *т.е. вычет в бесконечно удаленной точке равен взятому с противоположным знаком коэффициенту при первой отрицательной степени* z^{-1} *ряда Лорана* (7), *представляющего функцию f(z) в окрестности бесконечно удаленной точки.*

<u>*Замечание*</u>**:** Замена $z=\frac{1}{t}$ переводит изолированную особую точку $z=\infty$ функции $f(z)$ в конечную изолированную особую точку t=0 функции $g(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$ и характер особых точек при этом не меняется. Поэтому вычет в бесконечно удаленной точке функции $f(z)$ будет равен коэффициенту с противоположным знаком при степени t в разложении функции $g(t)$ в ряд Лорана в окрестности точки t=0. В частности, если t=0 является полюсом порядка m функции $g(t)$, то

$$\operatorname{res} f(\infty)=-\frac{1}{(m+1)!}\lim_{t\to 0}\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}\left(t^m f\left(\frac{1}{t}\right)\right) \qquad (16)$$

Если t=0 – устранимая особая точка функции $g(t)$, то m=0 и

$$\operatorname{res} f(\infty)=-\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right) \qquad (17)$$

Пример.4: Найти вычет функции $f(z)=\frac{z^2}{1+z}$ в бесконечно удаленной точке $z=\infty$.

Решение: Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z=\infty$, для этого вспомним, что разложение нужно вести по степеням $\frac{1}{z}$. Представим функцию в виде:

$$f(z)=\frac{z^2}{1+z}=\frac{z^2}{z\left(\frac{1}{z}+1\right)}=z\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=z\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=z-1+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\ldots$$

Поскольку разложение в ряд Лорана содержит z в первой степени, то точка $z=\infty$ является простым полюсом или полюсом первого порядка. Вычет в ней равен коэффициенту при степени $\frac{1}{z}$, взятый с противоположным знаком, т.е. $\operatorname{res} f(\infty)=-C_{-1}=-1$.

2.3. Теорема о сумме вычетов

При вычислении вычетов относительно изолированных особых точек, включая бесконечно удаленную точку, бывает полезной следующая теорема:

Теорема: *Если функция f(z) является аналитической на комплексной плоскости всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек* $z_1, z_2, ..., z_n$, *то сумма вычетов относительно всех особых точек, включая бесконечно удаленную точку, равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k) + \operatorname{res} f(\infty) = 0. \tag{18}$$

Пример 5: Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{4z^2 - 2z + 3}{(z-2)(z^2+1)}$ в особых точках, включая $z = \infty$.

Решение: Особые точки функции $z = 2, z = i, z = -i$ - полюса первого порядка, т.к. они являются нулями первого порядка для знаменателя дроби. Вычислим вычеты в этих точках по формуле (13):

$$\operatorname{res} f(2) = \lim_{z\to 2} \frac{(4z^2 - 2z + 3)(z-2)}{(z-2)(z^2+1)} = \lim_{z\to 2} \frac{4z^2 - 2z + 3}{z^2+1} = \frac{4\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 3}{2^2+1} = 3$$

$$\operatorname{res} f(i) = \lim_{z\to i} \frac{(4z^2 - 2z + 3)(z-i)}{(z-2)(z+i)(z-i)} = \lim_{z\to i} \frac{4z^2 - 2z + 3}{(z-2)(z+i)} = \frac{4\cdot i^2 - 2\cdot i + 3}{(i-2)\cdot 2i} = \frac{-1-2i}{2\cdot(-1-2i)} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{res} f(-i) = \lim_{z\to -i} \frac{(4z^2 - 2z + 3)(z+i)}{(z-2)(z+i)(z-i)} = \lim_{z\to -i} \frac{4z^2 - 2z + 3}{(z-2)(z-i)} = \frac{4\cdot(-i)^2 - 2\cdot(-)i + 3}{(-i-2)\cdot(-2i)} = \frac{-1+2i}{2\cdot(-1+2i)} = \frac{1}{2}$$

Точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой, т.к. $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{4z^2 - 2z + 3}{(z-2)(z^2+1)} = 0$. По теореме о сумме вычетов $\operatorname{res} f(2) + \operatorname{res} f(i) + \operatorname{res} f(-i) + \operatorname{res} f(\infty) = 0$, откуда находим, что $\operatorname{res} f(\infty) = -(\operatorname{res} f(2) + \operatorname{res} f(i) + \operatorname{res} f(-i)) = -4$.

Пример 6: Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ в особых точках, включая $z = \infty$.

Решение: Особые точки *f*(z) – нули знаменателя, т.е. корни уравнения $z^4 + 1 = 0$. Решая уравнение, получаем $z_k = \sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{4}}$, $k = 0,1,2,3.$ Корни: $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ - полюса первого порядка. Точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой, т.к. $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{1+z^4} = 0$.

Пользуясь формулой (14) для полюсов первого порядка, получаем:

$$\operatorname{res} f(z_1) = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \qquad \operatorname{res} f(z_2) = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}},$$

$$\operatorname{res} f(z_3) = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{i\frac{9\pi}{4}}, \qquad \operatorname{res} f(z_4) = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

По теореме о сумме вычетов, находим вычет в бесконечно удаленной точке:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\frac{1}{4}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{9\pi}{4}} + e^{i\frac{9\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{2} + \frac{e^{i\frac{9\pi}{4}} + e^{-i\frac{9\pi}{4}}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Пример 7: Найти вычеты $f(z) = \frac{e^z}{z^3}$ в особых точках, включая $z = \infty$.

Решение: Функция $f(z)$ имеет две особые точки z=0 и $z = \infty$. В кольце $0 < |z| < +\infty$ $f(z)$ является аналитической функцией и представляется рядом Лорана:

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z^3}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots.\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\,z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \frac{z^2}{5!}\ldots$$

Из разложения видно, что z=0 является полюсом третьего порядка на основании (5), а точка $z = \infty$ - существенно особая точка, т.к. ряд содержит бесконечное число положительных степеней z. Вычеты в этих точках равны соответственно $\operatorname{res} f(0) = C_{-1} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{res} f(\infty) = -C_{-1} = -\frac{1}{2}$. Очевидно, что $\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f(\infty) = 0$.

Пример 8: Найти вычеты функции $f(z) = \frac{(1-e^z)\sin z - z^2}{z^2 \sin z}$.

Решение: Находим особые точки из условия $z^2 \sin z = 0$, откуда получаем z =0 и $z = \pi k, (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Определим тип этих особых точек:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{(1-e^{-z})\sin z - z^2}{z^2 \sin z} = \lim_{z\to 0}\frac{\left(1 - \left(1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} + \ldots\right)\right)\sin z - z^2}{z^2 \sin z} =$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + ..\right)\sin z - z^2}{z^2 \sin z} == \lim_{z\to 0}\frac{\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + ..\right)z - z^2}{z^3} = \lim_{z\to 0}\frac{z^2 - \frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{6} + .. - z^2}{z^3}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{-\frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{6} + \ldots}{z^3} = \lim_{z\to 0}\frac{z^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{z}{6} + \ldots\right)}{z^3} = -\frac{1}{2}.$$

Значит, что z=0 является устранимой особой точкой, и, следовательно, вычет в ней равен нулю.

Точки $z=\pi k,\ \ k=\pm1,\pm2,\ldots.$ являются полюсами 1-го порядка для функции $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\sin z}$, где функция $\varphi(z)$, стоящая в числителе дроби в точках $z=\pi k$ в нуль не обращается $\varphi(\pi k)=\dfrac{(1-e^{-z})\sin z-z^2}{z^2}\Bigg|_{z=\pi k}=\dfrac{(1-e^{-\pi k})\sin\pi k-(\pi k)^2}{(\pi k)^2}=-1$. Тогда по формуле (14) имеем $resf\,(\pi k)=\dfrac{\varphi(\pi k)}{(\sin z)'}\Bigg|_{z=\pi k}=\dfrac{-1}{\cos\pi k}=-\dfrac{1}{(-1)^k}=(-1)^{k+1}$.

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}\pi k=\infty$, точка $z=\infty$ является предельной для полюсов первого порядка, т.е. не является изолированной особой точкой.

Замечание:

Обращаем внимание, что классификация особых точек и вычисление вычетов в них проводится только для изолированных особых точек, включая изолированную бесконечно удаленную точку.

Пример 9: Найти вычеты функции $f(z)=\mathrm{ctg}^3 z$.

Решение: Так как $f(z)=\mathrm{ctg}^3 z=\dfrac{\cos^3 z}{\sin^3 z}$, то особые точки находим из условия $\sin^3 z=0$. Получаем точки $z=\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.- нули третьего порядка для знаменателя, поскольку $\left(\sin^3 z\right)'=3\sin^2 z\cos z\big|_{z=\pi k}=0$,

$\left(\sin^3 z\right)''=6\sin z\cos^2 z-3\sin^3 z\big|_{z=\pi k}=0$,

$(\sin^3 z)'''=6\cos^3 z-12\sin^2 z\cos z-9\sin^2 z\cos z\big|_{z=\pi k}=6\neq0$.

Следовательно, $z=\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.- полюса третьего порядка для функции $f(z)$. Точка $z=\infty$ является предельной для полюсов, поэтому ее не исследуем.

Вычеты в полюсах третьего порядка вычисляем по формуле (12):

$$\mathrm{res}\,f(\pi k)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to\pi k}\frac{d^2}{dz^2}\left(\mathrm{ctg}^3 z\cdot(z-\pi k)^3\right)\left|\begin{array}{l}\text{Замена}\\ z-\pi k=t\\ t\to0\end{array}\right|=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\left(t^3\mathrm{ctg}^3(t+\pi k)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\left(t^3\mathrm{ctg}^3 t\right)''=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\left(t^3\frac{\cos^3 t}{\sin^3 t}\right)''\quad(*)$$

Покажем прием, как можно избежать вычисления производных в громоздких выражениях. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(t)=\dfrac{t^3\cos^3 t}{\sin^3 t}$, которую разложим в ряд по степеням t: $\varphi(t)=\dfrac{t^3\cos^3 t}{\sin^3 t}=A+Bt+Ct^2+Dt^3+Et^4+\ldots$.

При вычислении вычета в точках $z=\pi k$ нужно найти $\varphi''(t)$, поэтому в разложении по степеням t нужно учесть только слагаемое Ct^2, так как слагаемые $A+Bt$ исчезнут при дифференцировании, а слагаемые степени выше второй $\left(Dt^3+Et^4+...\right)$ исчезнут при вычислении предела при $t\to 0$. Выражение (*)

$$\operatorname{res} f(\pi k)=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\varphi''(t)=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(A+Bt+Ct^2+Dt^3+Et^4+\ldots\right)''=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(B+2Ct+3Dt^2+4Et^3+\ldots\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(2C+6Dt+12Et^2+\ldots\right)=C.$$

Теперь займемся непосредственно разложением функции $\varphi(t)$ в ряд, учитывая слагаемые до степени t^2:

$$\varphi(t)=\frac{t^3\cos^3 t}{\sin^3 t}=\frac{t^3\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\ldots\right)^3}{\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\ldots\right)^3}=\frac{t^3\left(1-\left(\frac{t^2}{2!}-\frac{t^4}{4!}+..\right)\right)^3}{\left(t\left(1-\left(\frac{t^2}{3!}-\frac{t^4}{5!}+\ldots\right)\right)\right)^3}=\frac{t^3\left(1-\left(\frac{t^2}{2!}-\frac{t^4}{4!}+..\right)\right)^3}{t^3\left(1-\left(\frac{t^2}{3!}-\frac{t^4}{5!}+\ldots\right).\right)^3}=$$

$$=\left(1-\left(\frac{t^2}{2!}-\frac{t^4}{4!}+..\right)\right)^3\cdot\left(1-\left(\frac{t^2}{3!}-\frac{t^4}{5!}+...\right)\right)^{-3} \quad (**)$$

Для разложения в ряд первого сомножителя выражения (**) можно воспользоваться формулой куба разности:

$$\left(1-\left(\frac{t^2}{2!}-\frac{t^4}{4!}+...\right)\right)^3=1-3\left(\frac{t^2}{2!}-\frac{t^4}{4!}+...\right)+3\left(\frac{t^2}{2!}-\frac{t^4}{4!}+...\right)^2-\left(\frac{t^2}{2!}-\frac{t^4}{4!}+...\right)^3=1-\frac{3}{2}t^2+...$$

Второй сомножитель разложим в ряд по формуле: $\left(1-q\right)^{-3}=\left(1+(-q)\right)^{-3}=1+(-3)(-q)+\frac{(-3)(-4)}{2!}(-q)^2+\ldots=1+3q+6q^2+\ldots$, где $q=\frac{t^2}{3!}-\frac{t^4}{5!}+...$

Получаем: $\left(1-\left(\frac{t^2}{3!}-\frac{t^4}{5!}+...\right)\right)^{-3}=1+3\left(\frac{t^2}{3!}-\frac{t^4}{5!}+...\right)+6\left(\frac{t^2}{3!}-\frac{t^4}{5!}+...\right)^2+...=1+\frac{t^2}{2}+...$.

Подставим полученные разложения в выражение (**) и перемножим:
$\varphi(t)=\left(1-\frac{3}{2}t^2+..\right)\left(1+\frac{1}{2}t^2+..\right)=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)t^2+...=1-t^2+...$.

Значит при t^2 коэффициент $C=-1$, поэтому $\operatorname{res} f(\pi k)=C=-1$, $(k=0,\pm1,\pm2,...)$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти вычеты в особых точках, включая $z=\infty$:

1) $\frac{tgz}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$, **2)** $\frac{chz}{(z^2+1)(z-3)}$, **3)** $\frac{e^z}{\frac{1}{4}-\sin^2 z}$, **4)** $\frac{e^z-1}{z^3(z-1)}$, **5)** $\frac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$, **6)** $\frac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$,

7) $\sin\frac{1}{z}+z^3$, **8)** $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, n-натуральное число, **9)** $\frac{z^{10}+1}{z^5(z+1)}$, **10)** $\frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$,

11) $\frac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}$, **12)** $\mathrm{ctg}^2 z$.

Ответы:

1) $\operatorname{res} f(0)=0$, $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{\pi}$, $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=-\frac{8}{\pi^2(2k+1)(4k+1)}$, $k=0,\pm1,\pm2,...$;

2) $\operatorname{res} f(3)=\frac{\cosh 3}{10}$, $\operatorname{res} f(i)=-\frac{\cos 1}{2(1+3i)}$, $\operatorname{res} f(-i)=-\frac{\cos 1}{2(1-3i)}$, $\operatorname{res} f(\infty)=\frac{\cos 1-\cosh 3}{10}$;

3) $\operatorname{res} f\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi k\right)=\mp 2e^{\pm\frac{\pi}{6}+\pi k}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$; **4)** $\operatorname{res} f(0)=-\frac{3}{2}$, $\operatorname{res} f(1)=e-1$, $\operatorname{res} f(\infty)=\frac{5}{2}-e$; **5)** $\operatorname{res} f(0)=-\frac{4}{\pi^2}$, $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\operatorname{res} f(\infty)=\frac{4}{\pi^2}$; **6)** $\operatorname{res} f(0)=-\frac{1}{18}$, $\operatorname{res} f(3)=\frac{1-\cos 3}{27}$, $\operatorname{res} f(\infty)=\frac{1+2\cos 3}{54}$; **7)** $\operatorname{res} f(0)=1$, $\operatorname{res} f(\infty)=-1$;

8) $\operatorname{res} f(0)=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$, $\operatorname{res} f(\infty)=-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$; **9)** $\operatorname{res} f(0)=\frac{3}{2}$, $\operatorname{res} f(-1)=-2$, $\operatorname{res} f(\infty)=\frac{1}{2}$; **10)** $\operatorname{res} f(2)=\frac{1}{81}$, $\operatorname{res} f(-1)=\frac{1}{27}$, $\operatorname{res} f(\infty)=-\frac{4}{81}$;

11) $\operatorname{res} f(-3)=\frac{\cos 3-i\sin 3}{8}$, $\operatorname{res} f(i)=-\frac{e^{-1}}{2(1-3i)}$, $\operatorname{res} f(-i)=-\frac{e}{2(1+3i)}$, $\operatorname{res} f(\infty)=\frac{\cosh 1-3i\sinh 1}{10}-\frac{\cos 3-i\sin 3}{8}$; **12).** $\operatorname{res} f(\pi k)=0$, $k=0,\pm1,\pm2,...$

3. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

3.1. Основная теорема теории вычетов

Теорема: *Пусть D - односвязная область, ограниченная кусочно-гладкой кривой C, а функция f(z) является аналитической в D и непрерывной в* $\overline{D} = D \cup C$*, за исключением конечного числа изолированных особых точек* $z_1, z_2, ..., z_n$*, лежащих внутри области D.*
Тогда:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k) . \qquad (19)$$

Доказательство: Выделим каждую из особых точек функции $f(z)$ замкнутым контуром γ_k, не содержащим внутри себя других особых точек, кроме z_k. Рассмотрим многосвязную область, ограниченную контуром C и всеми контурами γ_k (k=1, 2,…, n) (рис.1).

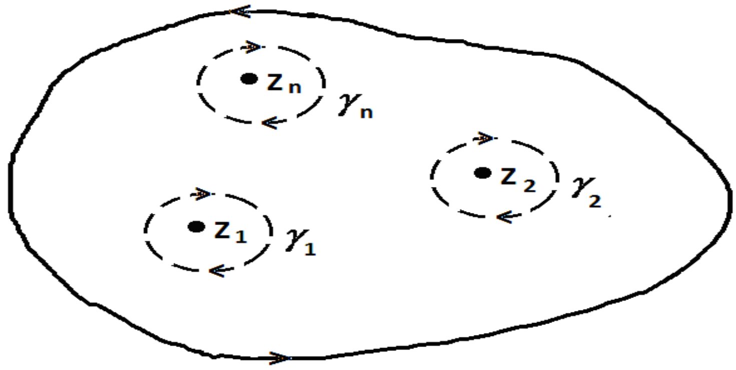

Рис.1

Внутри этой области функция $f(z)$ является всюду аналитической. Поэтому по теореме Коши для многосвязной области получаем $\int_{C^+} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k^-} f(z)dz = 0$. Перенесем второе слагаемое вправо $\int_{C^+} f(z)dz = -\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k^-} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k^+} f(z)dz$ и воспользуемся определением вычета (11), откуда получаем $\int_{\gamma_k^+} f(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(z_k)$. В результате получаем утверждение теоремы: $\int_{C^+} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)$.

Прикладное значение формулы (19) заключается в том, что во многих случаях для вычисления контурного интеграла гораздо проще вычислить вычеты функции $f(z)$ относительно особых точках, лежащих внутри контура интегрирования, чем вычислять интеграл по контуру C непосредственно.

Основная теорема теории вычетов имеет также ряд важных применений при вычислении определенных интегралов, в том числе и несобственных.

Замечание:

Если внутри контура C содержится много особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$ функции $f(z)$, то применение основной теоремы о вычетах может быть сопряжено с громоздкими вычислениями. Если при этом вне контура C находится лишь несколько особых точек $z_1^*, z_2^*, ..., z_N^*$ $(N < n)$ и вычеты относительно этих точек и бесконечно удаленной точки $z = \infty$ вычисляются достаточно просто, то применяя теорему о сумме вычетов (18), получаем, что $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k) = -\left(\sum_{m=1}^{N} \operatorname{res} f(z_m^*) + \operatorname{res} f(\infty)\right)$. Подставляя данный результат в (19), получаем еще одну формулу для вычисления контурного интеграла с помощью вычетов относительно особых точек, лежащих вне контура C:

$$\int_C f(z)dz = -2\pi i \cdot \left(\sum_{m=1}^{N} \operatorname{res} f(z_m^*) + \operatorname{res} f(\infty)\right) \tag{20}$$

3.2. Вычисление контурных интегралов с помощью основной теоремы о вычетах

По основной теореме теории вычетов интеграл по границе области D от функции f(z) равен сумме вычетов относительно всех особых точек этой функции, лежащих внутри области D, умноженной на $2\pi i$.

Рассмотрим на примерах применение формул (19) и (20).

Пример 1: Вычислить интеграл $\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz$.

Решение: Функция $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + z}$ является аналитической всюду в области $|z| < 4$, кроме точек z=0 и z=-1. Тогда по теореме о вычетах можно записать: $\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i \cdot \left(\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f(-1)\right)$.

Точка z=0 является устранимой особой точкой, т.к. $\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} = \lim_{z \to 0} \frac{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots - 1}{z(z+1)} = \lim_{z \to 0} \frac{\cancel{z}\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots\right)}{\cancel{z}(z+1)} = 1$. Поэтому $\operatorname{res} f(0) = 0$.

Точка z=-1 является полюсом первого порядка, вычет в которой вычислим по формуле (14): $\operatorname{res} f(-1) = \left.\frac{e^z - 1}{(z^2 + z)'}\right|_{z=-1} = \left.\frac{e^z - 1}{2z + 1}\right|_{z=-1} = 1 - e^{-1}$

Таким образом, $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i \cdot \left(1 - e^{-1}\right)$.

Пример 2: Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=2} \mathrm{tg} z\, dz$.

Решение: Особыми точками $f(z) = \mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ являются точки $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Эти точки являются полюсами первого порядка, поскольку $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$, $(\cos z)'\big|_{\frac{\pi}{2}+\pi k} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = -(-1)^k = (-1)^{k+1} \neq 0$.

В область $|z| < 2$ попадают всего две особые точки $z = \frac{\pi}{2}$ и $z = -\frac{\pi}{2}$. Найдем вычеты в них по формуле (14):

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin z}{(\cos z)'}\bigg|_{z=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin z}{-\sin z}\bigg|_{z=\frac{\pi}{2}} = -1, \quad \operatorname{res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin z}{(\cos z)'}\bigg|_{z=-\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin z}{-\sin z}\bigg|_{z=-\frac{\pi}{2}} = -1$$

Поэтому $\int\limits_{|z|=2} \mathrm{tg} z\, dz = 2\pi i \cdot \left(\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -4\pi i$.

Пример 3: Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$.

Решение: Функция $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$ - аналитическая, за исключением точек $z = 3$ и еще пяти точек $z_k = \sqrt[5]{1} = e^{i\frac{2\pi k}{5}}$, $(k = 0,1,2,3,4)$, являющихся корнями уравнения $z^5 - 1 = 0$. Точки z_k $(k = 0,1,2,3,4)$ являются простыми полюсами и находятся внутри области $|z| < 2$, а точка $z = 3$ лежит вне данной области. В этом случае для вычисления интеграла удобнее применить формулу (20): $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)} = -2\pi i\left(\operatorname{res} f(3) + \operatorname{res} f(\infty)\right)$. Вычет в точке $z = 3$ найдем по формуле (13): $\operatorname{res} f(3) = \lim\limits_{z\to 3} \frac{(z-3)}{(z-3)(z^5-1)} = \lim\limits_{z\to 3} \frac{1}{z^5-1} = \frac{1}{3^5-1} = \frac{1}{242}$. Точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой, поскольку $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = 0$. Для нахождения вычета в бесконечно удаленной точке разложим $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $\frac{1}{z}$:

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = \frac{1}{z\left(1 - \frac{3}{z}\right) \cdot z^5\left(1 - \frac{1}{z^5}\right)} = \frac{1}{z^6}\left(1 - \frac{3}{z}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{z^5}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{z^6}\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^{10}} \ldots\right) = \frac{1}{z^6} + \frac{3}{z^7} + \frac{9}{z^8} + \ldots$$

Поскольку в данном разложении $C_{-1}=0$, то $\operatorname{res} f(\infty)=-C_{-1}=0$ и окончательно получаем, что $\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}=-2\pi i\cdot\frac{1}{242}=-\frac{\pi i}{121}$.

Пример 4: Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=2}\frac{\cos\frac{1}{z}dz}{1-z}$.

Решение: Особые точки функции $z=1$ - простой полюс, z=0 – существенно особая точка. Вычет в простом полюсе находим по формуле (13) $\operatorname{res} f(1)=\lim\limits_{z\to 1}\frac{(z-1)}{(1-z)}\cos\frac{1}{z}=-\cos 1$. Для нахождения вычета в существенно особой точке z=0 разложим подынтегральную функцию в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$f(z)=\frac{1}{1-z}\cos\frac{1}{z}=\left(1+z+z^2+z^3+z^4+\ldots\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\ldots\right).$$

Перемножая ряды, легко увидеть, что коэффициент при степени $\frac{1}{z}$ представляется в виде бесконечного числового ряда $\operatorname{res} f(0)=C_{-1}=-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\ldots$ Сумму данного числового ряда можно найти, если вспомнить стандартное разложение для функции $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots$ и положить в нем $z=1$, т.е. $\cos 1=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\ldots$. Тогда $\operatorname{res} f(0)=-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\ldots=\cos 1-1$.

В итоге получаем $\int\limits_{|z|=2}\frac{\cos\frac{1}{z}dz}{1-z}=2\pi i\cdot\left(\operatorname{res} f(1)+\operatorname{res} f(0)\right)=2\pi i(-\cos 1+\cos 1-1)=-2\pi i$.

Пример 5: Вычислить интеграл $\int\limits_{|z+1|=2}\frac{1}{z+2}\cdot\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)dz$.

Решение: Интеграл вычисляется по окружности радиуса 2 с центром в точке $z=-1$. Особые точки функции $z=-2$ - простой полюс и $z=-1$- существенно особая точка, обе лежат внутри данного круга. В простом полюсе вычет вычисляем по формуле (13) $\operatorname{res} f(-2)=\lim\limits_{z\to -2}\frac{(z+2)}{(z+2)}\sin\frac{1}{z+1}=\sin(-1)=-\sin 1$. Вычет в существенно особой точке $z=-1$ находим из разложения в ряд Лорана по степеням $(z+1)$. Для этого функцию представим в виде:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)=\frac{1}{1+(z+1)}\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)=\left(1+(z+1)\right)^{-1}\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)=$$

$$=\left(1-(z+1)+(z+1)^2-(z+1)^3+(z+1)^4-\ldots\right)\cdot\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\frac{1}{5!(z+1)^5}-\frac{1}{7!(z+1)^7}+\ldots\right)$$

Для нахождения вычета нам необходимо вычислить коэффициент C_{-1} при степени $\frac{1}{z+1}$. Легко увидеть, что данная степень получается при перемножении четных степеней $(z+1)^{2n}$ первого ряда на нечетные степени $\frac{1}{(z+1)^{2n+1}}$ второго ряда. Поэтому коэффициент C_{-1} представляется в виде бесконечного числового ряда $C_{-1} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ldots$. Данный числовой ряд можно получить из стандартного разложения $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$ в точке $z = 1$, тогда $\operatorname{res} f(-1) = C_{-1} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ldots = \sin 1$.

Окончательно получаем

$$\int\limits_{|z+1|=2} \frac{1}{z+2} \cdot \sin\left(\frac{1}{z+1}\right) dz = 2\pi i \cdot \left(\operatorname{res} f(-1) + \operatorname{res} f(-2)\right) = 2\pi i \cdot (\sin 1 - \sin 1) = 0 .$$

Пример 6: Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=3} \left(1 + z + z^2\right)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right) dz$.

Решение: Точки $z = 0, z = 1, z = 2$ являются существенно особыми для *f(z)*, поскольку не существуют $\lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$, $\lim\limits_{z \to 1} e^{\frac{1}{z-1}}$, $\lim\limits_{z \to 2} e^{\frac{1}{z-2}}$. Вычеты в них находятся из разложения в ряд Лорана в окрестности каждой из точек. Для простоты вычислений представим интеграл в виде суммы интегралов, чтобы в каждом из них у подынтегральной функции была всего одна особая точка:

$$\int\limits_{|z|=3} \left(1 + z + z^2\right)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right) dz = \int\limits_{|z|=3} \left(1 + z + z^2\right) e^{\frac{1}{z}} dz + \int\limits_{|z|=3} \left(1 + z + z^2\right) e^{\frac{1}{z-1}} dz + \int\limits_{|z|=3} \left(1 + z + z^2\right) e^{\frac{1}{z-2}} dz$$

а) Интеграл $I_1 = \int\limits_{|z|=3} \left(1 + z + z^2\right) e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(0)$. Разложим в ряд Лорана по степеням z функцию $f_1(z) = \left(1 + z + z^2\right) e^{\frac{1}{z}} = \left(1 + z + z^2\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{4! z^4} + \ldots\right)$.

Очевидно, что степень $\frac{1}{z}$ получается при умножении следующих сомножителей $1 \cdot \frac{1}{z} + z \cdot \frac{1}{2! z^2} + z^2 \cdot \frac{1}{3! z^3}$, коэффициент при ней $C_{-1} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{5}{3}$.

Получаем, что $I_1 = 2\pi i \cdot \frac{5}{3}$.

б) Интеграл $I_2 = \int\limits_{|z|=3} \left(1 + z + z^2\right) e^{\frac{1}{z-1}} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(1)$. Разложим в ряд Лорана по степеням $(z-1)$ функцию

$$f_2(z)=\left(1+z+z^2\right)e^{\frac{1}{z-1}}=\left(1+(z-1)+1+((z-1)+1)^2\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{4!(z-1)^4}+\ldots\right)=$$
$=\left(3+3(z-1)+(z-1)^2\right)\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{4!(z-1)^4}+\ldots\right)$ и аналогично вычислим коэффициент при степени $\frac{1}{z-1}$: $C_{-1}=3+\frac{3}{2!}+\frac{1}{3!}=\frac{14}{3}$. Тогда $I_2=2\pi i\cdot\frac{14}{3}$.

в) Интеграл $I_3=\int\limits_{|z|=3}\left(1+z+z^2\right)e^{\frac{1}{z-2}}dz=2\pi i\cdot\operatorname{res}f(2)$. Разложим в ряд Лорана по степеням $(z-2)$ функцию

$$f_3(z)=\left(1+z+z^2\right)e^{\frac{1}{z-2}}=\left(1+(z-2)+2+((z-2)+2)^2\right)\times$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2!(z-2)^2}+\frac{1}{3!(z-2)^3}+\frac{1}{4!(z-2)^4}+\ldots\right)=$$
$=\left(7+5(z-2)+(z-2)^2\right)\left(1+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2!(z-2)^2}+\frac{1}{3!(z-2)^3}+\frac{1}{4!(z-2)^4}+\ldots\right)$. При степени $\frac{1}{z-2}$ коэффициент $C_{-1}=7+\frac{5}{2!}+\frac{1}{3!}=\frac{29}{3}$. Тогда $I_3=2\pi i\cdot\frac{29}{3}$.

Окончательно получаем ответ

$$\int\limits_{|z|=3}\left(1+z+z^2\right)\left(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz=2\pi i\cdot\frac{5+14+29}{3}=32\pi i.$$

Пример 7: Вычислить интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{e^z\,dz}{\cos z}$, где контур интегрирования C указан на рис.2.

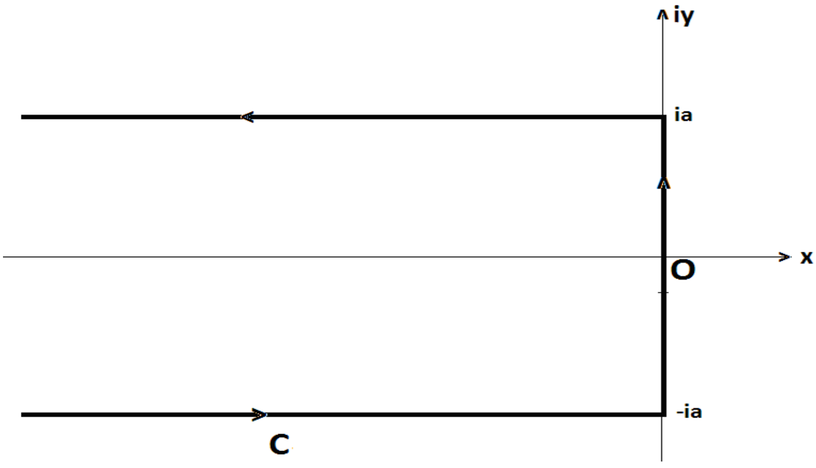

Рис.2

Решение: Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{e^z}{\cos z}$ аналитическая всюду, за исключением точек, в которых $\cos z=0$: $z_k=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,(k\in Z)$ -полюса первого порядка, $z=\infty$- предельная для полюсов. Из множества простых полюсов выберем точки $z_k=-\dfrac{\pi}{2}-\pi k,(k=0,1,2,\ldots)$, лежащие слева от мнимой оси. Вычеты в них находятся по формуле (14).

$$\operatorname{res} f(z_k)=\left.\frac{e^z}{(\cos z)'}\right|_{z=-\frac{\pi}{2}-\pi k}=\left.\frac{e^z}{-\sin z}\right|_{z=-\frac{\pi}{2}-\pi k}=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}-\pi k}}{-\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}-\pi k\right)}=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}-\pi k}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)}=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}-\pi k}}{(-1)^k}=(-1)^k e^{-\frac{\pi}{2}-\pi k}$$

Поскольку контур интегрирования не замкнут, для вычисления интеграла нельзя применить основную теорему о вычетах. Для устранения данной проблемы замкнем контур, проведя прямую $z=A+iy,(-ia\le y\le ia)$, параллельную мнимой оси так, чтобы полюса $z_0=-\dfrac{\pi}{2}$, $z_1=-\dfrac{\pi}{2}-\pi=-\dfrac{3\pi}{2}$, $z_2=-\dfrac{\pi}{2}-2\pi=-\dfrac{5\pi}{2}$, $\ldots$, $z_n=-\dfrac{\pi}{2}-\pi n=-\dfrac{(2n+1)\pi}{2}$ лежали внутри области, ограниченной контурами C_1 и C_2 (рис.3). Здесь C_1- часть контура C, отсеченная контуром C_2: $z=A+iy,(-ia\le y\le ia)$.

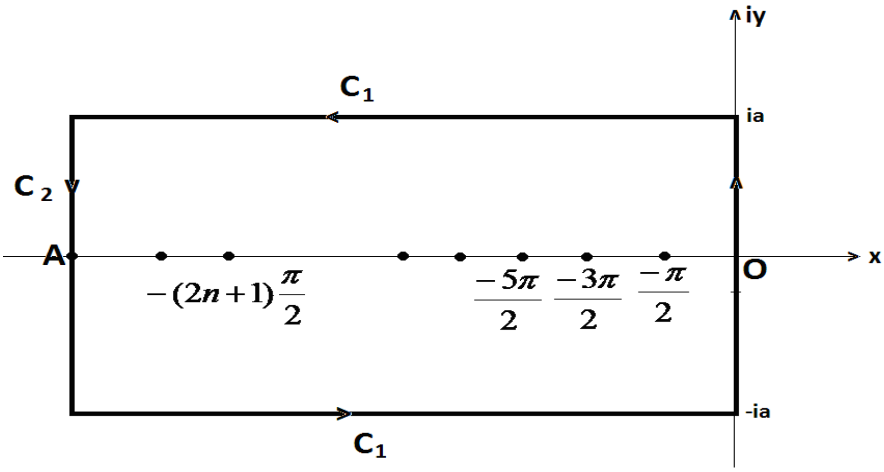

Рис.3

Тогда по теореме о сумме вычетов получаем:

$$\int_{C_1}\frac{e^z\,dz}{\cos z}+\int_{C_2}\frac{e^z\,dz}{\cos z}=2\pi i\cdot\sum_{k=0}^{n}\operatorname{res} f\left(-\frac{\pi}{2}-\pi k\right)=2\pi i\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-\frac{\pi}{2}-\pi k},$$

откуда выражаем:

$$\int_{C_1}\frac{e^z\,dz}{\cos z}=2\pi i\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-\frac{\pi}{2}-\pi k}-\int_{C_2}\frac{e^z\,dz}{\cos z}=2\pi i\cdot e^{-\frac{\pi}{2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-\pi k}-\int_{C_2}\frac{e^z\,dz}{\cos z}\quad(*)$$

В выражении (*) перейдем к пределу при $A \to -\infty$ (или при $n \to +\infty$). Очевидно, что $\lim\limits_{A\to-\infty} \int\limits_{C_1} \frac{e^z\,dz}{\cos z} = \int\limits_{C} \frac{e^z\,dz}{\cos z}$. Тогда

$$\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{\cos z} = 2\pi i\, e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-\pi k} - \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{C_2} \frac{e^z\,dz}{\cos z} = 2\pi i\, e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-\pi k} - \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{C_2} \frac{e^z\,dz}{\cos z} \quad (**).$$

Первое слагаемое в выражении (**) преобразуем по формуле суммы бесконечно убывающей прогрессии со знаменателем $q = -e^{-\pi}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-\pi k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(e^{-\pi}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-e^{-\pi}\right)^k = \frac{1}{1-\left(-e^{-\pi}\right)} = \frac{1}{1+e^{-\pi}} = \frac{1}{e^{-\pi}\left(1+e^{\pi}\right)}.$$

Вычислим интеграл по контуру C_2, введя параметризацию этой прямой $z = A + iy,\ dz = d(iy),\ ia \le iy \le -ia$:

$$\lim_{A\to-\infty} \int\limits_{C_2} \frac{e^z\,dz}{\cos z} = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{ia}^{-ia} \frac{e^{A+iy}\,d(iy)}{\cos(A+iy)} = \left| \begin{matrix} \text{Замена} \\ iy = t \end{matrix} \right| = \lim_{A\to-\infty} e^{A} \cdot \int\limits_{a}^{-a} \frac{e^t\,dt}{\cos(A+t)} = -\lim_{A\to-\infty} e^{A} \cdot \int\limits_{-a}^{a} \frac{e^t\,dt}{\cos(A+t)} = 0$$

Здесь $\int\limits_{-a}^{a} \frac{e^t\,dt}{\cos(A+t)}$ - интеграл Римана, принимающий конечное значение, независящее от A, а $\lim\limits_{A\to-\infty} e^{A} = 0$.

Тогда из (**) получаем: $\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{\cos z} == 2\pi i\, e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{e^{-\pi}\left(1+e^{\pi}\right)} = \frac{2\pi i \cdot e^{\frac{\pi}{2}}}{1+e^{\pi}}$, и окончательный ответ $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^z\,dz}{\cos z} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{1+e^{\pi}}$.

<u>*Замечание*</u>:

Применение основной теоремы о вычетах при вычислении контурных интегралов невозможно, если функция $f(z)$ имеет особые точки на контуре интегрирования. Рассмотрим специальный случай контурного интеграла $\oint\limits_C f(z)dz$, у которого особая точка $z=a$ функции $f(z)$, являющаяся полюсом первого порядка, лежит на контуре C. В этой ситуации $\lim\limits_{z\to a} |f(z)| = \infty$, и интеграл должен рассматриваться как <u>несобственный</u>. Его обычно понимают в смысле главного значения:

$$\text{v.p.}\oint\limits_C f(z)dz = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \left(\begin{smallmatrix} |a_1-a|=\varepsilon \\ |a_2-a|=\varepsilon \end{smallmatrix}\right)}} \int\limits_{C'} f(z)dz\ , \tag{21}$$

где интеграл справа вычисляется по разомкнутому контуру C' (рис. 4) от точки a_1 до точки a_2 . Точки a_1, a_2 лежат на контуре C на расстоянии ε от особой точки $z=a$. В силу малости ε дугу контура около точки $z=a$ между точками a_1 и a_2 можно заменить отрезком прямой.

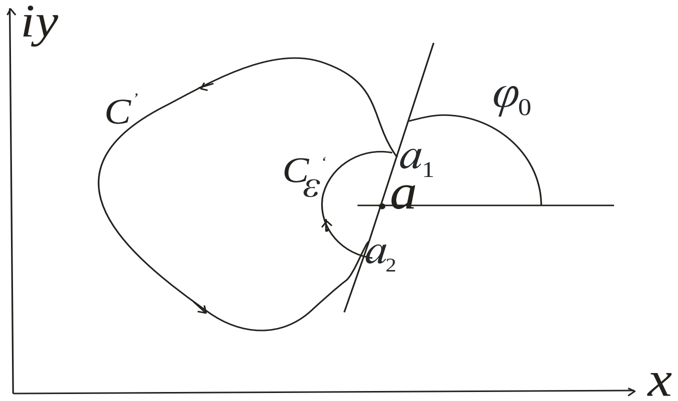

Рис.4

Покажем далее, как этот интеграл может быть вычислен по теореме о вычетах. Замкнем разомкнутый контур C' дугой окружности C'_ε радиуса ε с центром в точке z=a, проходящей через точки a_1 и a_2, сохранив направление обхода. Тогда в соответствии с теоремой о вычетах (19)

$$\int\limits_{C'\cup C'_\varepsilon} f(z)dz = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k)\,, \tag{22}$$

где $z_k\ (k=\overline{1,n})$ - особые точки $f(z)$, лежащие внутри контура C. В силу свойства контурных интегралов из (22) находим

$$\int\limits_{C'} f(z)dz = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k) - \int\limits_{C'_\varepsilon} f(z)dz\,. \tag{23}$$

Вычислим интеграл по дуге окружности C'_ε, разложив функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности простого полюса z=a : $\quad f(z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}C_m(z-a)^m+\dfrac{c_{-1}}{z-a},\quad c_{-1}\neq 0$

Тогда интеграл по дуге окружности C'_ε можно записать в виде:

$$\int\limits_{C'_\varepsilon} f(z)dz = \int\limits_{C'_\varepsilon}\left(\sum_{m=0}^{\infty}C_m(z-a)^m+\frac{c_{-1}}{z-a}\right)dz\left|\begin{array}{l}\text{Замена}\\ z-a=\varepsilon e^{i\varphi}\\ dz=i\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi\end{array}\right| = \int\limits_{\varphi_0+\pi}^{\varphi_0}\left(\sum_{m=0}^{\infty}C_m\varepsilon^m e^{im\varphi}+\frac{c_{-1}}{\varepsilon e^{i\varphi}}\right)i\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi =$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}iC_m\varepsilon^{m+1}\int\limits_{\varphi_0+\pi}^{\varphi_0}e^{i(m+1)\varphi}d\varphi + c_{-1}\int\limits_{\varphi_0+\pi}^{\varphi_0}d\varphi = \sum_{m=0}^{\infty}iC_m\varepsilon^{m+1}\int\limits_{\varphi_0+\pi}^{\varphi_0}e^{i(m+1)\varphi}d\varphi - c_{-1}\pi i$$

Подставляя этот результат в формулу (23) и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем в соответствии с определением (21):

$$\text{v.p.}\oint\limits_{C} f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C'} f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k) - \int\limits_{C'_\varepsilon} f(z)dz\right) = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k) -$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{m=0}^{\infty}iC_m\varepsilon^{m+1}\int\limits_{\varphi_0+\pi}^{\varphi_0}e^{i(m+1)\varphi}d\varphi - c_{-1}\pi i\right) = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k) + c_{-1}\pi i$$

Т.к. $c_{-1} = \operatorname{res} f(a)$, то окончательно получаем формулу для вычисления главного значения несобственного интеграла, когда особая точка находится на контуре интегрирования:

$$\text{v.p.}\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k) + \pi i \cdot \operatorname{res} f(a). \tag{24}$$

Таким образом, при расположении особой точки подынтегральной функции на контуре интегрирования, вычет относительно нее берется с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Формулу (24) можно обобщить на случай, когда несколько особых точек (полюсов первого порядка) находятся на контуре интегрирования:

$$\text{v.p.}\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k) + \pi i \cdot \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res} f(a_j). \tag{25}$$

Здесь $z_1, z_2, ..., z_n$ - особые точки функции $f(z)$, лежащие внутри контура C, $a_1, a_2, ..., a_m$ - полюса первого порядка, расположенные на контуре C.

Пример 8: Вычислить интеграл $I = \int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{ctg}(z-1)}{z^2(z+1)} dz$.

Решение: Особыми точками функции $f(z) = \frac{\operatorname{ctg}(z-1)}{z^2(z+1)} = \frac{\cos(z-1)}{z^2(z+1)\sin(z-1)}$ являются z=0 – полюс 2-го порядка, лежащий внутри круга $|z| < 1$, z=1 и z=-1 – полюса первого порядка, лежащие на границе этого круга. Полюса первого порядка $z_k = 1 + \pi k, (k \in Z, k \neq 0)$ находятся вне данного круга, поэтому их не рассматриваем. Интеграл I является несобственным и вычисляется в смысле главного значения по формуле (25):

$$\text{v.p}I = \text{v.p.}\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{ctg}(z-1)}{z^2(z+1)} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(0) + \pi i \left(\operatorname{res} f(1) + \operatorname{res} f(-1) \right).$$

Найдем вычеты относительно этих особых точек. Вычет в полюсе 2-го порядка считаем по формуле (12):

$$\operatorname{res} f(0) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{\operatorname{ctg}(z-1)}{(z+1)} \right)' = \lim_{z \to 0} \frac{-\frac{z+1}{\sin^2(z-1)} - \operatorname{ctg}(z-1)}{(z+1)^2} = \frac{-\frac{1}{\sin^2 1} + \operatorname{ctg} 1}{1} = \operatorname{ctg}1 - \operatorname{ctg}^2 1 - 1.$$

Вычет в простом полюсе z=-1 вычисляем по формуле (13):

$$\operatorname{res} f(-1) = \lim_{z \to -1} \left(\frac{\operatorname{ctg}(z-1)}{z^2} \right) = \frac{-\operatorname{ctg}2}{1} = -\operatorname{ctg}2.$$

Вычет в простом полюсе z=1 вычисляем по формуле (14):

$$\operatorname{res} f(1) = \left. \frac{\cos(z-1)}{\left(z^2(z+1)\sin(z-1) \right)'} \right|_{z=1} = \left. \frac{\cos(z-1)}{2z(z+1)\sin(z-1) + z^2\sin(z-1) + z^2(z+1)\cos(z-1)} \right|_{z=1} = \frac{1}{2},$$

$$\text{v.p.}\int\limits_{|z|=1}\frac{\text{ctg}(z-1)}{z^2(z+1)}dz = 2\pi i\cdot(\text{ctg}1\text{-}\,\text{ctg}^2 1-1)+\pi i\left(\frac{1}{2}+\text{ctg}2\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы с помощью вычетов (*обход контура всюду против часовой стрелки*):

1. $\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z(z-1)^2(z-3)}$, **2**. $\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2(z-2i)^2}$, **3**. $\int\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1}\frac{e^{z^2}dz}{z^2-1}$, **4**. $\int\limits_{|z|=4}\frac{e^z dz}{(z-\pi i)^n}, n>0-$ целое,

5. $\int\limits_{|z|=1}\frac{\cos z dz}{z^n}, n>0-$ целое, **6**. $\int\limits_{|z|=3}\frac{zdz}{(2-z)^2\left(z^2+16\right)}$, **7**. $\int\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}}\frac{z^4 e^{\pi z}dz}{z^2+1}$, **8**. $\int\limits_{|z-2|=2}\frac{\sin^2 z dz}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^3}$,

9. $\int\limits_{|z-2\pi i|=1}\frac{z^2 dz}{e^z-1}$, **10**. $\int\limits_{|z|=1}e^z\cos\frac{1}{z}\,dz$, **11**. $\int\limits_{|z|=2}\frac{ze^{\frac{1}{z}}dz}{1-z}$, **12**. $\int\limits_{|z|=8}\frac{dz}{\sin z}$.

Ответы

1 $-\frac{\pi i}{6}$, **2**. $-\frac{\pi}{2}$, **3**. $\pi e i$, **4**. $-\frac{2\pi i}{(n-1)!}$, **5**. $\begin{cases}0, n=2k\\ 2\pi i\cdot\frac{(-1)^k}{(2k)!}, n=2k+1\end{cases}$, **6**. $\frac{3\pi i}{50}$, **7**. 0,

8. $-2\pi i$, **9**. $-8\pi^3 i$, **10**. $2\pi i\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}$, **11**. $-2\pi i$, **12**. $2\pi i$.

3.3. Вычисление интегралов от тригонометрических функций

Интегралы вида $I=\int\limits_0^{2\pi}R(\sin\varphi,\cos\varphi)d\varphi$, где R- рациональная функция относительно $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, непрерывная на отрезке $[0,2\pi]$, сводятся к интегралам по единичной окружности от функции комплексного переменного.

Пусть $z=e^{i\varphi}$, тогда $\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}$, $\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$,

$dz=e^{i\varphi}id\varphi$ или $d\varphi=\frac{dz}{ie^{i\varphi}}=\frac{dz}{iz}$.

Поскольку при $0\le\varphi\le 2\pi$ $|z|=\left|e^{i\varphi}\right|=1$, это означает, что переменная z изменяется по окружности $|z|=1$. Поэтому определенный интеграл на отрезке

$[0,2\pi]$ с помощью замены $z = e^{i\varphi}$ приводится к интегралу, вычисляемому в комплексной плоскости по единичной окружности с центром в начале координат:

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi)d\varphi = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2i\,z}\right)\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \tilde{R}(z)dz,$$

здесь $\tilde{R}$ - рациональная функция от z. Вычисляем полученный интеграл, применяя основную теорему теории вычетов: $I = \int_{|z|=1} \tilde{R}(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\tilde{R}(z_k)$, где $z_1, z_2, ..., z_n$ -полюса функции $\tilde{R}(z)$, лежащие в круге $|z| < 1$.

Пример 1: Вычислить интеграл $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos\varphi}$ $(a > 1)$.

Решение: Введем замену $z = e^{i\varphi}$ и подставляем в интеграл $\cos\varphi = \frac{z^2+1}{2z}$, $d\varphi = \frac{dz}{iz}$:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(a + \frac{z^2+1}{2z}\right)} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \quad (*)$$

Особые точки подынтегральной функции $\tilde{R}(z) = \frac{1}{z^2 + 2az + 1}$ являются корнями уравнения $z^2 + 2az + 1 = 0$. Находим $z_1 = -\left(a - \sqrt{a^2-1}\right)$, $z_2 = -\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)$ - полюса первого порядка. Можно показать, что $|z_1| = a - \sqrt{a^2-1} \neq 1$ и $|z_2| = a + \sqrt{a^2-1} \neq 1$ при $a > 1$, при этом их произведение $|z_1|\cdot|z_2| = \left(a - \sqrt{a^2-1}\right)\cdot\left(a + \sqrt{a^2-1}\right) = a^2 - \left(a^2-1\right) = 1$. Это возможно при $|z_1| < 1$, а $|z_2| > 1$, т.е. внутрь круга $|z| < 1$ попадает только точка z_1. Вычет в ней найдем по формуле (14) $\operatorname{res}\tilde{R}(z_1) = \left.\frac{1}{\left(z^2 + 2az + 1\right)'}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{1}{2(z+a)}\right|_{z=-a+\sqrt{a^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$ и вычислим интеграл (*): $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1} = \frac{2}{i}\cdot 2\pi i \cdot \operatorname{res}\tilde{R}(z_1) = 4\pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

<u>Замечание</u>:
Нужно помнить, что при вычислении интегралов от функции действительного переменного значением интеграла всегда будет действительное число, что является проверкой правильности вычислений по основной теореме теории вычетов.

Пример 2: Вычислить интеграл $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5 + 4\cos\varphi)^2}$.

Решение: Сделав замену $z = e^{i\varphi}$, получаем

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(5+4\cos\varphi)^2}=\left|\begin{aligned}&\cos\varphi=\frac{z^2+1}{2z}\\&d\varphi=\frac{dz}{iz}\end{aligned}\right|=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z\left(5+4\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{zdz}{\left(2z^2+5z+2\right)^2}.\quad (*)$$

Особые точки подынтегральной функции $\tilde{R}(z)=\dfrac{z}{\left(2z^2+5z+2\right)^2}$ $z=-2$ и $z=-\dfrac{1}{2}$ - полюса второго порядка. Внутрь круга $|z|<1$ попадает только точка $z=-\dfrac{1}{2}$, вычет в которой находим по формуле (12):

$$\operatorname{res}\tilde{R}\left(-\frac{1}{2}\right)=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(\frac{z\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}{4(z+2)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right)'=\frac{1}{4}\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{(z+2)^2}\right)'=\frac{1}{4}\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{2-z}{(z+2)^3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{20}{27}=\frac{5}{27}.$$

Интеграл (*) вычисляем с помощью вычетов:

$$I=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{zdz}{\left(2z^2+5z+2\right)^2}=\frac{1}{i}\cdot 2\pi i\cdot\operatorname{res}\tilde{R}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{10\pi}{27}.$$

Пример 3: Вычислить интеграл $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos^4\varphi\, d\varphi}{1+\sin^2\varphi}$.

Решение: Применяя формулы понижения степени $\cos^2\varphi=\dfrac{1+\cos2\varphi}{2}$, $\sin^2\varphi=\dfrac{1-\cos2\varphi}{2}$, перепишем исходный интеграл в виде:

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\cos^4\varphi\, d\varphi}{1+\sin^2\varphi}=\int_0^{\pi}\frac{\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi}{1+\frac{1-\cos2\varphi}{2}}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\left(1+\cos2\varphi\right)^2\, d\varphi}{3-\cos2\varphi}=\left|\begin{aligned}&\text{Замена}\\&2\varphi=t\end{aligned}\right|=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{\left(1+\cos t\right)^2\, dt}{3-\cos t}\left|\begin{aligned}&\text{Замена}\\&e^{it}=z\end{aligned}\right|=.$$

$$=\frac{1}{4}\int_{|z|=1}\frac{\left(1+\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}{\left(3-\frac{z^2+1}{2z}\right)}\frac{dz}{iz}=-\frac{1}{8i}\int_{|z|=1}\frac{(z+1)^4dz}{z^2\left(z^2-6z+1\right)}=-\frac{2\pi i}{8i}\left(\operatorname{res}\tilde{R}(0)+\operatorname{res}\tilde{R}(3-2\sqrt{2})\right).\quad (*)$$

Подынтегральная функция $\tilde{R}(z)=\dfrac{(z+1)^4}{z^2\left(z^2-6z+1\right)}$ имеет особые точки $z=0,\ z=3-2\sqrt{2},\ z=3+2\sqrt{2}$, и только две из них: полюс второго порядка z=0 и полюс первого порядка $z=3-2\sqrt{2}$ лежат внутри единичной окружности. Найдем вычеты в них по формуле (12):

$$\operatorname{res}\tilde{R}(0)=\lim_{z\to0}\left(\frac{(z+1)^4}{\left(z^2-6z+1\right)}\right)'=\lim_{z\to0}\frac{4(z+1)^3(z^2-6z+1)-(z+1)^4(2z-6)}{(z^2-6z+1)^2}=10.$$

По формуле (13):

$$\operatorname{res}\tilde{R}\left(3-2\sqrt{2}\right)=\lim_{z\to 3-2\sqrt{2}}\frac{(z+1)^4\cdot\left(z-(3-2\sqrt{2})\right)}{z^2\left(z-(3+2\sqrt{2})\right)\left(z-(3-2\sqrt{2})\right)}=\frac{(4-2\sqrt{2})^4}{(3-2\sqrt{2})^2(-4\sqrt{2})}=\frac{(16-8\sqrt{2}+8)^2}{(3-2\sqrt{2})^2(-4\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{(24-8\sqrt{2})^2}{(3-2\sqrt{2})^2(-4\sqrt{2})}=\frac{8^2(3-\sqrt{2})^2}{(3-2\sqrt{2})^2(-4\sqrt{2})}=\frac{64}{-4\sqrt{2}}=-\frac{16}{\sqrt{2}}=-8\sqrt{2}$$

Подставляем найденные значения в выражение (*) и получаем ответ

$$I=-\frac{2\pi i}{8i}\left(\operatorname{res} f(0)+\operatorname{res} f(3-2\sqrt{2})\right)=-\frac{2\pi i}{8i}\left(10-8\sqrt{2}\right)=2\pi\left(\sqrt{2}-\frac{5}{4}\right).$$

Пример 4: Вычислить интеграл $I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ $\left(-1<a<1,\, n>0, n\in \mathrm{R}\right)$.

Решение: Рассмотрим вспомогательный интеграл $I_1=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin n\varphi\, d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}=0$.

Интеграл равен нулю, т.к. подынтегральная функция нечетная, а промежуток интегрирования симметричный. Тогда исходный интеграл можно представить в виде:

$$I=I+iI_1=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}+i\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin n\varphi\, d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\, d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{in\varphi}\, d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(e^{i\varphi}\right)^n d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\left|\begin{matrix}\text{Замена}\\ e^{i\varphi}=z\end{matrix}\right|=\int\limits_{|z|=1}\frac{z^n}{1-2a\dfrac{z^2+1}{2z}+a^2}\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{z^n dz}{(a^2+1)z-az^2-a}=-\frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{z^n dz}{a(z-a)\left(z-\dfrac{1}{a}\right)}$$

Очевидно, что при изменении φ от $-\pi$ до π переменная z пробегает окружность $|z|=1$ в положительном направлении.

Подынтегральная функция $\tilde{R}(z)=\dfrac{z^n}{a(z-a)\left(z-\dfrac{1}{a}\right)}$ имеет две особые точки $z=a,\, z=\dfrac{1}{a}$ полюса первого порядка, причем внутри единичной окружности находится точка z=a. Вычет в ней найдем по формуле (13):

$\operatorname{res}\tilde{R}(a)=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{z^n(z-a)}{a(z-a)\left(z-\dfrac{1}{a}\right)}=\dfrac{a^n}{a\left(a-\dfrac{1}{a}\right)}=\dfrac{a^n}{a^2-1}$ и подставляем в интеграл

$$I=-\frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{z^n dz}{a(z-a)\left(z-\dfrac{1}{a}\right)}=-\frac{2\pi i}{i}\operatorname{res}\tilde{R}(a)=\frac{2\pi a^n}{1-a^2}.$$

Пример 5: Вычислить интеграл $I=\int\limits_{0}^{\pi}\operatorname{tg}(x+ia)dx$, где $a\neq 0$ - действительное число.

Решение: Стандартная замена $z = e^{ix}$ при изменении x от 0 до π приведет к контурному интегралу по половине дуги окружности $|z| = 1$. Рассмотрим интеграл на отрезке $[0,2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{tg}(x+ia)dx = \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x+ia)dx + \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{tg}(x+ia)dx \left| \begin{matrix} \text{Замена} \\ x = t+\pi \end{matrix} \right| = \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x+ia)dx + \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(t+\pi+ia)dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x+ia)dx + \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(t+ia)dt = 2\int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x+ia)dx$$

Следовательно $I = \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x+ia)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{tg}(x+ia)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x+ia)}{\cos(x+ia)}dx$ (*)

Тригонометрические функции представим в виде:

$$\sin(x+ia) = \frac{e^{i(x+ia)} - e^{-i(x+ia)}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{-a} - e^{-ix}e^{a}}{2i} = \frac{e^{2ix} - e^{2a}}{2i\,e^{ix}e^{a}},$$

$$\cos(x+ia) = \frac{e^{i(x+ia)} + e^{-i(x+ia)}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-a} + e^{-ix}e^{a}}{2} = \frac{e^{2ix} + e^{2a}}{2e^{ix}e^{a}}.$$

Подставляя выражения для тригонометрических функций в (*) и делая замену $z = e^{ix}$, сведем интеграл на отрезке $[0,2\pi]$ к контурному интегралу по окружности $|z| = 1$:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x+ia)}{\cos(x+ia)}dx = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{e^{2ix} - e^{2a}}{e^{2ix} + e^{2a}}\left| z = e^{ix} \right| = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{z^2 - e^{2a}}{z^2 + e^{2a}}\frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{(z^2 - e^{2a})dz}{z(z - ie^a)(z + ie^a)}$$

Особыми точками подынтегральной функции являются точки $z_1 = 0$, $z_2 = ie^a$, $z_3 = -ie^a$ - полюса первого порядка. Точки $z_{2,3} = \pm ie^a$ лежат внутри единичного круга, если $|z_{2,3}| = |\pm ie^a| = e^a < 1$, т.е. при a<0. Если же a>0, то $|z_{2,3}| > 1$ и внутри круга лежит одна точка $z_1 = 0$. Вычеты в полюсах первого порядка находим по формуле (13):

$$\operatorname{res} \tilde{R}(0) = \lim_{z\to 0} \frac{(z^2 - e^{2a})\cancel{z}}{(z^2 + e^{2a})\cancel{z}} = \frac{-e^{2a}}{e^{2a}} = -1,$$

$$\operatorname{res} \tilde{R}(ie^a) = \lim_{z\to ie^a} \frac{(z^2 - e^{2a})(z - ie^a)}{z(z - ie^a)(z + ie^a)} = \lim_{z\to ie^a} \frac{z^2 - e^{2a}}{z(z + ie^a)} = \frac{-e^{2a} - e^{2a}}{ie^a \cdot 2ie^a} = \frac{-2e^{2a}}{-2e^{2a}} = 1,$$

$$\operatorname{res} \tilde{R}(-ie^a) = \lim_{z\to -ie^a} \frac{(z^2 - e^{2a})(z + ie^a)}{z(z - ie^a)(z + ie^a)} = \lim_{z\to -ie^a} \frac{z^2 - e^{2a}}{z(z - ie^a)} = \frac{-e^{2a} - e^{2a}}{-ie^a \cdot (-2ie^a)} = \frac{-2e^{2a}}{-2e^{2a}} = 1.$$

В зависимости от знака a найдем значение интеграла:

1. При a<0 $I = -\frac{1}{2}2\pi i\left(\operatorname{res} \tilde{R}(0) + \operatorname{res} \tilde{R}(ie^a) + \operatorname{res} \tilde{R}(ie^a)\right) = -\pi i(-1+1+1) = -\pi i$.

2. При a>0 $I=-\frac{1}{2}2\pi i\cdot \operatorname{res}\tilde{R}(0)=-\pi i(-1)=\pi i$.

Окончательный ответ $I=\pi i\cdot \operatorname{sgn}a \quad (a\neq 0)$.

Пример 6: Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ $(a-\text{к.ч.},\ a\neq\pm1)$.

Решение:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\left|\begin{matrix}\text{Замена}\\ z=e^{i\varphi}\end{matrix}\right|=\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{1-2a\dfrac{z^2+1}{2z}+a^2}\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{(1+a^2)z-a(z^2+1)}=-\frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{az^2-(1+a^2)z+a}$$

Особыми точками функции $\tilde{R}(z)=\frac{1}{az^2-(1+a^2)z+a}$ являются $z=a$, $z=\frac{1}{a}$ - полюса первого порядка.

1. Если $|a|<1$, то точка $z=a$ лежит внутри единичного круга, вычет в ней вычисляем по формуле (14):

$$\operatorname{res}\tilde{R}(a)=\left.\frac{1}{\left(az^2-(1+a^2)z+1\right)'}\right|_{z=a}=\left.\frac{1}{2az-(1+a^2)}\right|_{z=a}=\frac{1}{a^2-1}.$$

Тогда $I=2\pi i\cdot\operatorname{res}\tilde{R}(a)=\frac{2\pi i}{a^2-1}$, $|a|<1$.

2. Если $|a|>1$, то точка $z=\frac{1}{a}$ лежит внутри единичного круга и вычет в ней равен: $\operatorname{res}\tilde{R}\left(\frac{1}{a}\right)=\left.\frac{1}{\left(az^2-(1+a^2)z+1\right)'}\right|_{z=\frac{1}{a}}=\left.\frac{1}{2az-(1+a^2)}\right|_{z=\frac{1}{a}}=\frac{1}{1-a^2}$. Находим значение интеграла в этом случае $I=2\pi i\cdot\operatorname{res}\tilde{R}\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{2\pi i}{1-a^2}$, $|a|>1$.

3. Если $|a|=1$, $(a\neq\pm1)$, то точки $z=a$ и $z=\frac{1}{a}$ лежат на контуре интегрирования $|z|=1$. В этом случае получаем несобственный интеграл, который вычисляется в смысле главного значения по формуле (25):

$$\text{v.p.}I=\pi i\cdot\left(\operatorname{res}\tilde{R}(a)+\operatorname{res}\tilde{R}\left(\frac{1}{a}\right)\right)=\frac{\pi i}{a^2-1}+\frac{\pi i}{1-a^2}=0.$$

Ответ: $I=\frac{2\pi i}{a^2-1},\text{если}|a|<1,\quad \frac{2\pi i}{1-a^2},\text{если}|a|>1,\quad 0,\text{если}|a|=1(a\neq\pm1)$ (главное значение).

Задачи для самостоятельного решения

1. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\frac{3}{5}\cos x}$ **2**. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\left(1+\frac{3}{5}\cos x\right)^2}$ **3**. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\frac{1}{2}+\sin x}$ **4**. $\int_0^{2\pi}\frac{2+\cos x}{2-\sin x}dx$ **5**. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x+\cos x}{3+2\cos x}dx$

6. $\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2+\sin^2 x}$ $(a\neq\pm i)$ **7**. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2p\cos x+p^2}$ $(0<p<1)$

8. $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\varphi\, d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ $(a-\text{к.ч.},\ a\neq\pm1)$, **9**. $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{ctg}(x+a)dx,\ a-\text{к.ч.},\mathrm{Im}a\neq 0$.

Ответы

1. $\frac{5\pi}{2}$, **2**. $\frac{125\pi}{32}$, **3**. $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$, **4**. $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$,**5**. $2\frac{3\sqrt{5}-7}{3\sqrt{5}-5}$, 6. $\frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}$, **7**. $\frac{2\pi}{1-p^2}$,

8. $\frac{\pi\left(a^6+1\right)}{1-a^2}$, если $|a|<1$, $\frac{\pi\left(a^6+1\right)}{a^6\left(a^2-1\right)}$, если $|a|<1$, $\frac{\pi\left(1-a^{12}\right)}{2a^6\left(a^2-1\right)}$, если $|a|=1,\ a\neq\pm1$ (главное значение), **9**. $-2\pi i\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}a)$.

3.4. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов

3.4.1. Несобственные интегралы первого рода вида $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$

Указанный интеграл понимается как предел интеграла Римана $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{\substack{R_2\to+\infty\\ R_1\to-\infty}}\int_{R_1}^{R_2}f(x)dx$ и вычисляется в смысле главного значения.

<u>*Определение:*</u>

Главным значением несобственного интеграла первого рода вида $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ *называется значение предела* $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx$, *если он существует*, т.е.

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx.$$

При вычислении несобственных интегралов с помощью вычетов будем пользоваться следующей леммой и теоремой:

<u>Лемма</u> 1:

Пусть функция f(z) является аналитической в верхней полуплоскости Imz>0 всюду за исключением конечного числа изолированных особых точек, и *существуют $R_0>0$, $M>0$ и $\delta>0$ такие, что для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию* $|z|>R_0$, *имеет место оценка* $|f(z)|<\dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}$. *Тогда* $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C'_R} f(\xi)d\xi=0$, *где контур интегрирования* C'_R *представляет собой полуокружность* $|z|=R, \operatorname{Im}z>0$ *в верхней полуплоскости.*

<u>Теорема</u> 1.

Пусть функция действительного переменного f(x), заданная на всей оси $-\infty<x<+\infty$, *может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im}z\ge 0$, *причем ее аналитическое продолжение, функция f(z) удовлетворяет условиям леммы 1 и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда главное значение несобственного интеграла первого рода* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *существует и может быть вычислено по формуле:*

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\cdot\sum_{\substack{k=1\\(\operatorname{Im}z_k>0)}}^{n}\operatorname{res} f(z_k)\,, \qquad (26)$$

где $z_1, z_2, ..., z_n$ *- изолированные особые точки функции f(z), лежащие в верхней полуплоскости*.

*Доказательств*о:

По условиям леммы и теоремы функция *f*(*z*) в верхней полуплоскости имеет конечное число особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, причем все они удовлетворяют условию $|z|<R_0$ (R_0- достаточно большое число).

Рассмотрим замкнутый контур, состоящей из отрезка действительной оси $-R\le x\le R$ $(R>R_0)$ и полуокружности C'_R $|z|=R$ в верхней полуплоскости (рис.5).

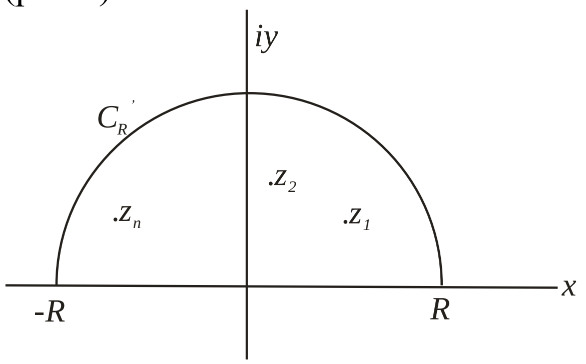

Рис.5

В силу основной теоремы теории вычетов:

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \int\limits_{C'_R} f(z)dz = 2\pi i\cdot\sum_{\substack{k=1\\(\operatorname{Im}z_k>0)}}^{n}\operatorname{res} f(z_k)\,.$$

В последнем равенстве перейдем к пределу при $R \to \infty$.
$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C'_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\left(2\pi i\cdot\sum_{\substack{k=1\\(\mathrm{Im}z_k>0)}}^{n}\mathrm{res}\,f(z_k)\right).$$
В силу леммы 1 $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C'_R} f(z)dz = 0$, а правая часть при $R > R_0$ не зависит от *R*. Следовательно, существует предел первого слагаемого в левой части, т.е. главное значение интеграла: $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx = \mathrm{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\cdot\sum\limits_{\substack{k=1\\(\mathrm{Im}z_k>0)}}^{n}\mathrm{res}\,f(z_k)$, что и требовалось доказать.

Замечания:

1. Теорема 1 позволяет вычислять несобственный интеграл по половине действительной оси $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ для четной функции $f(x)$.

2. При наличии особых точек у функции $f(x)$ на действительной оси рассматриваемый интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ является несобственным интегралом первого и второго рода одновременно. При этом под главным значением по Коши несобственного интеграла второго рода $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ с особой точкой $x=c$ ($a<c<b$), в которой $f(x)=\infty$, понимается значение предела
$$\mathrm{v.p.}\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

Продемонстрируем способ вычисления несобственного интеграла первого и второго рода $\mathrm{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, имеющего особые точки на действительной оси $x_1, x_2,..., x_m$.

Аналитически продолжим подынтегральную функцию $f(x)$ на верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}z > 0$ и выберем контур интегрирования, замкнув разрывы около точек $x_1, x_2,..., x_m$ полуокружностями радиуса ε (рис.6). Будем полагать, что особые точки функции $f(z)$, лежащие на действительной оси являются простыми полюсами.

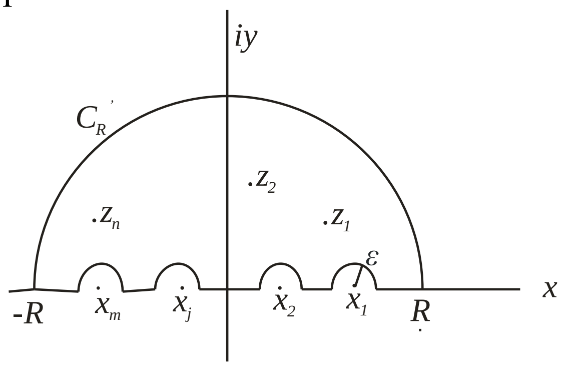

Рис.6

Интеграл по данному контуру будет определяться вычетами относительно особых точек *f*(*z*) в верхней полуплоскости в пределе при $R \to \infty$. Однако для получения точного значения несобственного интеграла $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ надо отнять значения интеграла по маленьким полуокружностям. Найдем предельной значение интеграла по полуокружности радиуса ε с центром в простом полюсе $x_j \ (j = \overline{1,m})$, проходимой против хода часовой стрелки (рис.7).

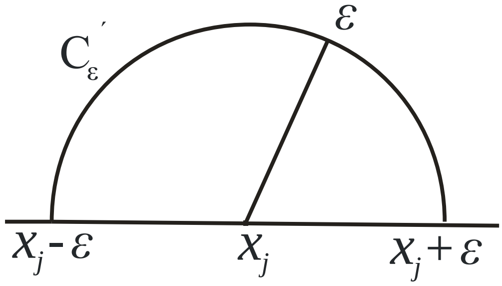

Рис.7

$$\int_{C'_\varepsilon} f(z)dz = \begin{vmatrix} z - x_j = \varepsilon e^{i\varphi} \\ dz = i\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{vmatrix} = i\varepsilon\int_0^{\pi} f(x_j + \varepsilon e^{i\varphi})d\varphi = \qquad (*)$$

Разложим *f*(*z*) в ряд Лорана в окрестности простого полюса $z = x_j$
$f(z) = \dfrac{C_{-1}}{z - x_j} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - x_j)^n$ и подставим в интеграл (*)

$$= i\varepsilon\int_0^{\pi}\left(\frac{C_{-1}}{\varepsilon e^{i\varphi}} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n\varepsilon^n e^{in\varphi}\right)e^{i\varphi}d\varphi = i\int_0^{\pi}\left(C_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n\varepsilon^{n+1}e^{i(n+1)\varphi}\right)d\varphi = \pi i C_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n\varepsilon^{n+1}\int_0^{\pi} e^{i(n+1)\varphi}d\varphi =$$

$$= \pi i C_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n\varepsilon^{n+1}}{n+1}\left(e^{i(n+1)\pi} - 1\right)$$

В пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C'_\varepsilon} f(z)dz = \pi i C_{-1} + \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n\varepsilon^{n+1}}{n+1}\left(e^{i(n+1)\pi} - 1\right) = \pi i C_{-1} = \pi i \cdot \operatorname{res} f(x_j).$$

Учитывая, что на действительной оси находятся m простых полюсов $x_1, x_2, ..., x_m$, получаем формулу вычисления главного значения несобственного интеграла первого и второго рода:

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ (\operatorname{Im} z_k > 0)}}^{n} \operatorname{res} f(z_k) + \pi i \cdot \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res} f(x_j)\,. \qquad (27)$$

Пример 1: Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}$.

Решение: Рассмотрим аналитическое продолжение подынтегральной функции на верхнюю полуплоскость $f(z)=\frac{z}{\left(z^2+4z+13\right)^2}$. Очевидно, что $\left|f(z)\right|=\frac{|z|}{\left|z^2+4z+13\right|^2}\sim\frac{1}{|z|^3}$, поэтому для $f(z)$ выполнены условия леммы 1 и несобственный интеграл можно вычислять по формуле (26). Особые точки $z_{1,2}=-2\pm 3i$ являются полюсами второго порядка, причем в верхней полуплоскости лежит точка $z_1=-2\pm 3i$. Найдем вычет в полюсе второго порядка по формуле (12):

$$\operatorname{res} f\left(-2+3i\right)=\lim_{z\to-2+3i}\left(\frac{z\cdot(z+2-3i)^2}{(z+2-3i)^2(z+2+3i)^2}\right)'=\lim_{z\to-2+3i}\left(\frac{z}{(z+2+3i)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to-2+3i}\frac{(z+2+3i)^2-2z(z+2+3i)}{(z+2+3i)^4}=\lim_{z\to-2+3i}\frac{(z+2+3i)-2z}{(z+2+3i)^3}=\frac{4}{(6i)^3}=-\frac{1}{54i}$$

Тогда по формуле (26) получаем:

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}=2\pi i\cdot\operatorname{res} f(-2+3i)=-\frac{2\pi i}{54i}=-\frac{\pi}{27}.$$

Пример 2: Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

Решение: Так как подынтегральная функция $f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+1}$ является четной, то $I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$. Рассмотрим функцию $f(z)=\frac{z^2+1}{z^4+1}$. Она аналитическая всюду, за исключением точек $z_k=\sqrt[4]{-1}=e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}, k=0,1,2,3$ и удовлетворяет условиям леммы 1. В верхней полуплоскости находятся точки $z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ и $z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ - полюса первого порядка, вычеты в которых находим по формуле (14):

$$\operatorname{res} f\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=\left.\frac{z^2+1}{\left(z^4+1\right)'}\right|_{e^{i\frac{\pi}{4}}}=\left.\frac{z^2+1}{4z^3}\right|_{e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}+1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\frac{(1+i)e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4}=\frac{(1+i)(-1-i)}{4\sqrt{2}}=\frac{-(1+i)^2}{4\sqrt{2}}=-\frac{i}{2\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{res} f\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)==\left.\frac{z^2+1}{4z^3}\right|_{e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\frac{e^{i\frac{3\pi}{2}}+1}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}}=\frac{1-i}{4e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)}}=\frac{(1-i)}{4e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{(1-i)e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4}=\frac{(1-i)^2}{4\sqrt{2}}=-\frac{i}{2\sqrt{2}}.$$

По формуле (26) находим значение интеграла:

$$I = \text{v.p.}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}2\pi i\left(\operatorname{res} f\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)+\operatorname{res} f\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\right) = \pi i\left(-\frac{2i}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Пример 3: Вычислить интеграл $I_n = \int_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$, $a>0$, $n=1,2,\ldots$

Решение: Функция $f(x)=\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}$ является четной, тогда $I_n=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$. Ее аналитическое продолжение $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^n}$ удовлетворяет условиям леммы 1 и имеет полюс *n*-го порядка $z=ai$ в верхней полуплоскости.

При *n*=1 вычет в простом полюсе находим по формуле (14):

$\operatorname{res} f(ai)=\left.\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)'}\right|_{z=ai}=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=ai}=\frac{1}{2ai}$ и интеграл равен

$$I_1=\text{v.p.}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}2\pi i\cdot\operatorname{res} f(ai)=\frac{\pi i}{2ai}=\frac{\pi}{2a}.$$

Пусть $n>1$. Для нахождения вычета в полюсе *n*-го порядка воспользуемся формулой (14):

$$\operatorname{res} f(ai)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to ai}\left(\frac{(z-ai)^n}{(z-ai)^n(z+ai)^n}\right)^{(n-1)}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to ai}\left(\frac{1}{(z+ai)^n}\right)^{(n-1)} \quad (*)$$

Выведем общую формулу для нахождения производной (*n*-1)-го порядка:

$$\left(\frac{1}{(z+ai)^n}\right)^{(n-1)} = \left((z+ai)^{-n}\right)' = -n(z+ai)^{-n-1},$$

$$\left((z+ai)^{-n}\right)''=(-n)(-n-1)(z+ai)^{-n-2}=n(n+1)(z+ai)^{-n-2},$$

$$\left((z+ai)^{-n}\right)^{(3)}=n(n+1)(-n-2)(z+ai)^{-n-3}=(-1)^3n(n+1)(n+2)(z+ai)^{-n-3}, \text{ и т.д.}$$

$$\left((z+ai)^{-n}\right)^{(k)}=(-1)^k n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)(z+ai)^{-n-k}.$$

Подставляя в общее выражение для производной *k*=*n*-1, получаем:

$\left((z+ai)^{-n}\right)^{(n-1)}=(-1)^{n-1}n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n-2)(z+ai)^{-2n+1}$ и подставляем в (*).

$$\operatorname{res} f(ai)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to ai}\left(\frac{1}{(z+ai)^n}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n-2)}{(n-1)!}\lim_{z\to ai}(z+ai)^{-2n+1}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n-2)}{\left((n-1)!\right)^2(2ai)^{2n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{\left((n-1)!\right)^2(2a)^{2n-1}i^{2n-1}}=\frac{-i\cdot(2n-2)!}{\left((n-1)!\right)^2(2a)^{2n-1}}$$

Тогда $I_n=\text{v.p.}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\frac{1}{2}2\pi i\cdot\operatorname{res} f(ai)=\frac{\pi\cdot(2n-2)!}{\left((n-1)!\right)^2(2a)^{2n-1}}$, $n>1$.

Пример 4: Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^n},\ n\geq 2-$натуральное число.

Решение: При нечетных n $f(x)=\frac{1}{1+x^n}$ является функцией общего вида, поэтому рассматривать интеграл на всей числовой оси при $-\infty<x<\infty$ нельзя. Рассмотрим ее аналитическое продолжение на комплексную плоскость $f(z)=\frac{1}{1+z^n}$ и найдем ее особые точки $z_k=\sqrt[n]{-1}=e^{i\frac{\pi+2\pi k}{n}}=e^{i\frac{\pi(2k+1)}{n}},\ k=0,1,2,\ldots,(n-1)$ - полюса первого порядка. Для упрощения вычислений вычислим вычет только в одной точке $z_1=e^{i\frac{\pi}{n}}$

$\operatorname{res} f\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)=\left.\frac{1}{\left(1+z^n\right)'}\right|_{e^{i\frac{\pi}{n}}}=\left.\frac{1}{nz^{n-1}}\right|_{e^{i\frac{\pi}{n}}}=\frac{1}{ne^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}}=\frac{1}{ne^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{n}}}=-\frac{1}{ne^{-i\frac{\pi}{n}}}$ и рассмотрим вспомогательную область, ограниченную отрезком действительной оси $0\leq x\leq R$, лучом $\varphi=\frac{2\pi}{n}$ и частью дуги окружности $|z|=R,\ 0\leq \arg z\leq\frac{2\pi}{n}$ (рис.8).

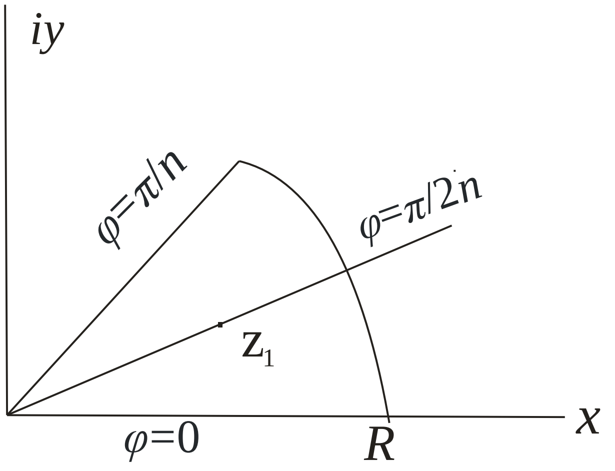

Рис.8

Очевидно, что точка $z_1=e^{i\frac{\pi}{n}}$ находится внутри выбранной области, тогда по основной теореме теории вычетов получаем:

$$\oint\limits_C\frac{dz}{1+z^n}=\int\limits_0^R\frac{dx}{1+x^n}+\int\limits_{C_R}\frac{dz}{1+z^n}+\int\limits_{\varphi=\frac{2\pi}{n}}\frac{dz}{1+z^n}=2\pi i\operatorname{res} f\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)=-\frac{2\pi i}{ne^{-i\frac{\pi}{n}}}.\quad (*)$$

Вычислим интеграл по лучу $\varphi=\frac{2\pi}{n}$:

$$\int\limits_{\varphi=\frac{2\pi}{n}}\frac{dz}{1+z^n}=\left|\begin{matrix} z=\rho e^{i\frac{2\pi}{n}} \\ dz=e^{i\frac{2\pi}{n}}d\rho\end{matrix}\right|=\int\limits_R^0\frac{e^{i\frac{2\pi}{n}}d\rho}{1+\rho^n e^{i2\pi}}=-e^{i\frac{2\pi}{n}}\int\limits_0^R\frac{d\rho}{1+\rho^n}=-e^{i\frac{2\pi}{n}}\int\limits_0^R\frac{dx}{1+x^n}.$$

Так как интеграл Римана не зависит от обозначения переменной интегрирования. Тогда формулу (*) можно переписать в виде

$$\left(1--e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\cdot\int\limits_0^R\frac{dx}{1+x^n}+\int\limits_{C_R}\frac{dz}{1+z^n}=-\frac{2\pi i}{ne^{-i\frac{\pi}{n}}}.$$

Перейдем в ней к пределу при $R\to\infty$:

$$\left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\cdot\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R\frac{dx}{1+x^n}+\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}\frac{dz}{1+z^n}=-\frac{2\pi i}{ne^{-i\frac{\pi}{n}}}.(**).$$

Слагаемое справа в (**) не зависит от *R*. Очевидно, что $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_0^R\frac{dx}{1+x^n}=\int\limits_0^\infty\frac{dx}{1+x^n}$.

Оценим интеграл по дуге окружности:

$$\left|\int\limits_{C_R}\frac{dz}{1+z^n}\right|=\left|\begin{matrix}z=Re^{i\varphi}\\ dz=i\,\mathrm{Re}^{i\varphi}\,d\varphi\end{matrix}\right|=\left|\int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}}\frac{i\,\mathrm{Re}^{i\varphi}\,d\varphi}{1+R^ne^{in\varphi}}\right|\le\int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}}\left|\frac{i\,\mathrm{Re}^{i\varphi}}{1+R^ne^{in\varphi}}\right|d\varphi<\int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}}\frac{R\left|e^{i\varphi}\right|}{R^n\left|e^{in\varphi}\right|}d\varphi=\frac{1}{R^{n-1}}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}}d\varphi=\frac{2\pi}{nR^{n-1}}.$$

Так как $\lim\limits_{R\to\infty}\frac{2\pi}{nR^{n-1}}=0$ при $n\ge 2$, то $\left|\int\limits_{C_R}\frac{dz}{1+z^n}\right|\to 0$ при $R\to\infty$, а значит $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}\frac{dz}{1+z^n}=0$.

Поэтому переходя к пределу при $R\to\infty$ в выражении (**), получаем:

$$\left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\cdot\int\limits_0^\infty\frac{dx}{1+x^n}=-\frac{2\pi i}{ne^{-i\frac{\pi}{n}}}\ \text{или}$$

$$I=\int\limits_0^\infty\frac{dx}{1+x^n}=-\frac{2\pi i}{ne^{-i\frac{\pi}{n}}\left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)}=-\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{n}}-e^{i\frac{\pi}{n}}}{2i}}=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\dfrac{e^{i\frac{\pi}{n}}-e^{-i\frac{\pi}{n}}}{2i}}=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Пример 5: Вычислить интеграл $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{(x+1)\left(x^2+4\right)}$.

Решение: Функция $f(z)=\frac{z}{(z+1)\left(z^2+4\right)}$ аналитическая всюду, за исключением точек $z=\pm2i$ и $z=-1$, она удовлетворяет условиям леммы 1. В верхней полуплоскости функция имеет простой полюс $z=2i$ и полюс первого порядка $z=-1$ на действительной оси. Поэтому для вычисления интеграла применяем формулу (27). Вычеты в простых полюсах считаем по формуле (13):

$$\mathrm{res}\,f(2i)=\lim_{z\to2i}\frac{z(z-2i)}{(z+1)(z-2i)(z+2i)}=\lim_{z\to2i}\frac{z}{(z+1)(z+2i)}=\frac{2i}{4i(1+2i)}=\frac{1-2i}{10},$$

$$\mathrm{res}\,f(-1)=\lim_{z\to-1}\frac{z(z+1)}{(z+1)(z^2+4)}=\lim_{z\to-1}\frac{z}{z^2+4}=\frac{-1}{5},$$

Тогда $\mathrm{v.p.}I=2\pi i\cdot\mathrm{res}\,f(2i)+\pi i\cdot\mathrm{res}\,f(-1)=\frac{2\pi i(1-2i)}{2\cdot5}-\frac{\pi i}{5}=\frac{2\pi}{5}$.

3.4.2. Несобственные интегралы первого рода вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)e^{imx}dx$

Для вычисления таких несобственных интегралов применяется лемма Жордана.

Лемма Жордана:

Пусть функция Ф(z) является аналитической в верхней полуплоскости Imz>0, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равномерно относительно $\arg z \,(0 \le \arg z \le \pi)$ *стремится к нулю при* $|z| \to \infty$. *Тогда при m>0* $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C'_R} e^{imz}\Phi(z)dz = 0$, *где* C'_R *- дуга полуокружности* $|z| = R$ *в верхней полуплоскости.*

Замечание:

Условие равномерного относительно $\arg z$ стремления $\Phi(z)$ к нулю при $|z| \to \infty$ означает справедливость следующей оценки $|\Phi(z)| < \varepsilon(R)\,\text{при}\,|z| = R$, причем $\varepsilon(R) \to 0\,\text{при}\,R \to \infty$. Лемма Жордана справедлива при значительно более слабых ограничениях на функцию Ф(z), чем лемма 1. Это связано с наличием у подынтегральной функции множителя e^{imz}, который при m>0 обеспечивает достаточно быстрое ее убывание при $|z| \to \infty$.

Теорема 2:

Пусть функция Ф*(x), заданная на всей действительной оси* $-\infty < x < +\infty$, *может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} z \ge 0$, *а ее аналитическое продолжение Ф(z) в верхней полуплоскости удовлетворяет условиям леммы Жордана и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда существует главное значение несобственного интеграла* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)e^{imx}dx$ *(m>0), равное:*

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)e^{imx}dx = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ (\operatorname{Im} z_k > 0)}}^{n} \operatorname{res}\Phi(z_k)e^{imz_k}\,, \qquad (28)$$

где $z_1, z_2, ..., z_n$ *- изолированные особые точки функции Ф(z), лежащие в верхней полуплоскости.*

Доказательство: полностью аналогично ранее доказанной теореме 1.

Замечания:

1. Рассмотренный интеграл позволяет найти значения сразу двух интегралов функций действительного переменного

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\cos mx\,dx = \operatorname{Re} I\,,$$

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\sin mx\,dx = \operatorname{Im} I,$$

где $I = \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)e^{imx}dx$.

2. Теорема 2 позволяет вычислять несобственный интеграл по половине действительной оси

$\int_{0}^{\infty}\Phi(x)\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\cos mx\,dx$ - для четной $\Phi(x)$,

$\int_{0}^{\infty}\Phi(x)\sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\sin mx\,dx$ - для нечетной $\Phi(x)$.

3. При наличии особых точек $x_1, x_2,..., x_m$ у функции $\Phi(x)$ на действительной оси рассматриваемый интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)e^{imx}dx$ является несобственным интегралом первого и второго рода одновременно. Его главное значение вычисляется по формуле, аналогичной (27):

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)e^{imx}dx = 2\pi i\cdot\sum_{\substack{k=1 \\ (\operatorname{Im} z_k>0)}}^{n}\operatorname{res}\Phi(z_k)e^{imz_k} + +\pi i\cdot\sum_{j=1}^{m}\operatorname{res}\Phi(x_j)e^{imx_j}. \qquad (29)$$

Пример 6: Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx$.

Решение: Используя замечание 1, интеграл I представим в виде: $I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+1}{x^2+2x+2}e^{i2x}dx$, где $\Phi(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$. Ее аналитическое продолжение $\Phi(z) = \frac{z+1}{z^2+2z+2}$ равномерно относительно $\arg z$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$. Действительно, на дуге окружности $|z| = R$ $z = Re^{i\varphi}$ $(0\le\varphi\le\pi)$

$$\left|\Phi(Re^{i\varphi})\right| = \left|\frac{Re^{i\varphi}+1}{R^2e^{i2\varphi}+2Re^{i\varphi}+2}\right| = \frac{R\left|e^{i\varphi}+\frac{1}{R}\right|}{R^2\left|e^{i2\varphi}+\frac{e^{i\varphi}}{R}+\frac{1}{R^2}\right|} < \frac{\left|e^{i\varphi}+\frac{1}{R}\right|}{R\left|e^{i2\varphi}\right|} < \frac{2}{R}\to 0$$ при $R\to\infty$, т.е.

выполнены условия леммы Жордана.

Особыми точками $\Phi(z)$ являются простые полюса $z_{1,2} = -1\pm i$, в верхней полуплоскости находится $z_1 = -1+i$. Считаем вычет в этой точке по формуле (14):

$$\operatorname{res}\left(\Phi(z)e^{i2z}, -1+i\right) = \left.\frac{(z+1)e^{i2z}}{\left(z^2+2z+2\right)'}\right|_{z=-1+i} = \left.\frac{(z+1)e^{i2z}}{2(z+1)}\right|_{z=-1+i} = \frac{1}{2}e^{2i(-1+i)} = \frac{e^{-2}}{2}(\cos 2 - i\sin 2)$$

и находим главное значение интеграла, подставляя в (28):

$$\text{v.p.}I = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2} e^{i2x} dx = \operatorname{Im}\left(2\pi i \cdot \frac{e^{-2}}{2}(\cos 2 - i\sin 2)\right) = \pi e^{-2}\cos 2 .$$

Пример 7: Вычислить интеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2+a^2}$, $a > 0$.

Решение: Так как под знаком интеграла стоит четная функция $\Phi(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, то

$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2+a^2} = \text{v.p.}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\, dx}{x^2+a^2}\right)$. Аналитическое продолжение $\Phi(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, (т.к. $\left|\Phi(Re^{i\varphi})\right| = \frac{1}{\left|R^2 e^{i2\varphi} + a^2\right|} = \frac{1}{R^2\left|e^{i2\varphi} + \frac{a^2}{R^2}\right|} < \frac{1}{R^2} \to 0$) и имеет полюс первого порядка $z=ia$ в верхней полуплоскости. Согласно (14) вычет в простом полюсе равен:

$$\operatorname{res}\left(\Phi(z)e^{iz}, ia\right) = \left.\frac{e^{iz}}{\left(z^2+a^2\right)'}\right|_{z=ia} = \left.\frac{e^{iz}}{2z}\right|_{z=ia} = \frac{1}{2ia}e^{i(ia)} = \frac{e^{-a}}{2ia} .$$

Тогда по формуле (28) находим

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\, dx}{x^2+a^2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i \frac{e^{-a}}{2ia}\right) = \frac{\pi e^{-a}}{2a} .$$

Пример 8: Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx\, dx}{1-x^4}$, t- действительное число.

Решение: Запишем интеграл в виде: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx\, dx}{1-x^4} = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1-x^4} dx$.

Аналитическое продолжение подынтегральной функции $\Phi(z) = \frac{1}{1-z^4}$ на верхнюю полуплоскость удовлетворяет условиям леммы Жордана. Однако лемма Жордана выполняется только при t>0, а по условию задачи t-действительное число.

Особыми точками $\Phi(z)$ являются полюса первого порядка $z=\pm i$ и $z=\pm 1$, их можно найти, разложив знаменатель дроби на множители и приравняв нулю: $z^4 - 1 = \left(z^2+1\right)\left(z^2-1\right) = (z-i)(z+i)(z-1)(z+1) = 0$. В верхней полуплоскости лежит точка $z=i$ и две точки $z=\pm 1$ – на действительной оси. Найдем вычеты в них по формуле (14):

$$\operatorname{res}\left(\Phi(z)e^{itz},i\right)=\left.\frac{e^{itz}}{\left(1-z^4\right)'}\right|_{z=i}=-\left.\frac{e^{itz}}{4z^3}\right|_{z=i}=-\frac{e^{it(i)}}{4i^3}=\frac{e^{-t}}{4i}$$

$$\operatorname{res}\left(\Phi(z)e^{itz},1\right)=-\left.\frac{e^{itz}}{4z^3}\right|_{z=1}=-\frac{e^{it}}{4} \qquad (*)$$

$$\operatorname{res}\left(\Phi(z)e^{itz},-1\right)=-\left.\frac{e^{itz}}{4z^3}\right|_{z=-1}=\frac{e^{-it}}{4}$$

1. При t>0 главное значение несобственного интеграла первого и второго рода одновременно находим по формуле (29):

$$\text{v.p.}I=\operatorname{Re}\left(\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{1-x^4}dx\right)=\operatorname{Re}\left(2\pi i\cdot\operatorname{res}\left(\Phi(z)e^{itz},i\right)+\pi i\cdot\left(\operatorname{res}\left(\Phi(z)e^{itz},1\right)+\operatorname{res}\left(\Phi(z)e^{itz},-1\right)\right)\right)= \qquad (**)$$

$$=\operatorname{Re}\left(2\pi i\frac{e^{-t}}{4i}+\pi i\cdot\left(-\frac{e^{it}}{4}+\frac{e^{-it}}{4}\right)\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{\pi}{2}e^{-t}-\frac{\pi i^2}{2}\cdot\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)=\frac{\pi}{2}e^{-t}+\frac{\pi}{2}\sin t=\frac{\pi}{2}\left(e^{-t}+\sin t\right)$$

2. При t<0 в интеграле сделаем замену переменных, чтобы можно было воспользоваться леммой Жордана.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{1-x^4}dx=\left|\begin{matrix}x=-u\\ dx=-du\end{matrix}\right|=\int_{\infty}^{-\infty}\frac{e^{it(-u)}}{1-u^4}(-du)=-\int_{\infty}^{-\infty}\frac{e^{i(-t)u}}{1-u^4}du=\int_{\infty}^{-\infty}\frac{e^{i(-t)u}}{1-u^4}du=\int_{\infty}^{-\infty}\frac{e^{i(-t)x}}{1-x^4}dx.$$

При (-t)>0 для интеграла выполняется лемма Жордана и его главное значение совпадает со значением (**) для случая t>0, если вместо t взять (-t). Тогда $\text{v.p.}I=\operatorname{Re}\left(\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{1-x^4}dx\right)=\frac{\pi}{2}\left(e^{-(-t)}+\sin(-t)\right)$.

3. При t=0 рассматриваемый интеграл становится несобственным интегралом первого вида $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1-x^4}$, главное значение которого считаем по формуле (27). При этом вычеты в особых точках легко найти из (*) при t=0.

$$\operatorname{res}(f(z),i)=\frac{1}{4i},\quad \operatorname{res}(f(z),1)=-\frac{1}{4},\quad \operatorname{res}(f(z),-1)=\frac{1}{4},$$

$$\text{v.p.}I=\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1-x^4}=2\pi i\cdot\frac{1}{4i}+\pi i\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Обобщая все три случая, записываем общий ответ:

$\text{v.p.}\ I=\frac{\pi}{2}\left(e^{-|t|}+\sin|t|\right)$, t- действительное число.

Задачи для самостоятельного решения

1. $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2dx}{x^4+10x^2+9}$, **2.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)dx}{(x^2+1)\left(x^2+4\right)}$, **3.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+2x+10)^3}$, **4.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^3}$, $(a>0)$,

5. $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^4dx}{(x^2+1)^2\left(x^2+4\right)}$, **6.** $\int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2+4}$, **7.** $\int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin mx\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}$, $(a>0,\ m>0)$, **8**. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+1)\left(x^2+9\right)}$,

9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x dx}{x^2+2x+10}$, **10.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-1)\left(x^2+1\right)}$, **11.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(2x+1)dx}{x(x^2+x-2)}$, **12.** $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x(x^2+1)}$,

13. $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x(x^2+1)^2}$.

Ответы

1. $\frac{\pi}{8}$, **2.** $\frac{\pi}{6}$, **3.** $-\frac{\pi}{648}$, **4.** $\frac{\pi}{8a^3}$, **5.** $\frac{5\pi}{36}$, **6.** πe^{-2},**7**. $\frac{\pi m}{4a}e^{-ma}$, **8**. $\frac{\pi}{24e^3}(3e^2-1)$,

9. $\frac{\pi e^{-3}}{3}(\cos 1-3\sin 1)$, **10.** $-\frac{\pi}{2}$, **11.** 0, **12.** $\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-1}\right)$, **13.** $\frac{\pi}{8}\left(4-3e^{-1}\right)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной.- М.: Физматлит, 2004.

2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного.- М.: Наука, 1987.

3. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного.- М.: Физматлит, 2002.

4. Семерикова Н.П., Дубков А.А., Харчева А.А. Ряды аналитических функций. Учебно-методическое пособие (электр.). Нижний Новгород, ННГУ,2016 (35с), http://www.unn.ru/books/met_files/raf-2016.pdf

Надежда Петровна **Семерикова**
Александр Александрович **Дубков**
Анна Александровна **Харчева**

ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования “Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского”.
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.