

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

**Теории качения упругой шины  
для применения при исследовании шимми колес  
транспортных средств**

*Учебно-методическое пособие*

Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород  
2016

УДК 629.7.027.23(072)

ББК 39.53р30

Т33

Т33 ТЕОРИИ КАЧЕНИЯ УПРУГОЙ ШИНЫ ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ШИММИ КОЛЕС ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ: Учебно-методическое пособие. Составители: Метрикин В.С., Пейсель М.А. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 49 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор **Д.В. Баландин**

Настоящее учебно-методическое пособие посвящено математическому моделированию процесса деформации шины в составе изделий (как авиационных, так и наземных транспортных) при взаимодействии последних со взлетно-посадочными устройствами и покрытиями дорог. Приводятся аналитические зависимости для сил и моментов, действующих в плоскости земли на упругую шину при угловых и поперечных смещениях обода колеса для различных значений параметров установки колеса на опоре и шины. Также включены некоторые элементы развития теории М.В. Келдыша в сфере математического описания процессов качения упругой шины транспортного средства и математические модели и методики их исследования. Имеются численные расчеты для конкретных типов шин.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов и магистрантов старших курсов Института информационных технологий, математики и механики ННГУ, а также для аспирантов и научных работников соответствующих специализаций.

Ответственный за выпуск:  
заместитель председателя методической комиссии  
Института информационных технологий, математики и механики ННГУ  
к.т.н., доцент **В.М. Сморкалова**

УДК 629.7.027.23(072)

ББК 39.53р30

## Содержание

Введение .....	4
1. Теория М.В. Келдыша и частотные характеристики шины .....	5
1.1. Силы реакции со стороны земли, возникающие при качении шины .....	5
1.2. Кинематические связи, возникающие при качении шины по опорной плоскости .....	7
1.3. Частотные характеристики шины .....	8
1.4. Случаи упрощения кинематических связей .....	15
1.5. Уравнения шимми одноколесной передней опоры с демпфером .....	17
2. Струнная модель .....	19
2.1. Описание модели и силы реакции земли при деформации шины .....	19
2.2. Кинематическая связь, накладываемая на качение шины .....	24
2.3. Частотные характеристики шины .....	27
2.4. Приближенные выражения частотных характеристик шины .....	31
2.5. Уравнения шимми колеса опоры с демпфером .....	33
3. Теория качения с учетом продольной деформации шины .....	35
3.1. Связи между функциями, описывающими движение обода колеса и деформации шины .....	35
3.2. Реакции земли на шину .....	38
3.3. Уравнения шимми передней опоры со заблокированными колесами .....	39
3.4. Частотные характеристики при продольных колебаниях колес .....	41
4. Проект настольного стенда для исследования моделей колесных опор шасси летательных аппаратов .....	44
Заключение .....	47
Литература .....	48

## Введение

При движении транспортного средства по земле на определенной скорости могут возникнуть самовозбуждающиеся колебания колес – шимми. Это может привести к разрушению опор, поэтому данное явление недопустимо [1].

На этапе проектирования проводятся расчеты и выбираются средства по обеспечению безопасности от автоколебаний. Для этого разрабатываются новые физические модели опоры, их математические модели, описывающие боковые и угловые смещения колеса опоры, находятся жесткостные, массовые и демпфирующие параметры [2–10].

При этом важной частью аналитических работ по предотвращению шимми является выбор процесса и составление уравнений, отражающих механизм взаимодействия шины с землей [13–14].

Успех в достижении цели (предотвращение явления шимми в каждом конкретном случае) существенно зависит от тщательного анализа уже существующих теорий качения и моделей шины, устранения (если необходимо) недостатков с целью развития теории качения и, наконец, нахождения соотношений для расчета действующих на колесо усилий со стороны земли.

Настоящее учебно-методическое пособие посвящено решению перечисленных выше проблем и является непосредственным обобщением и продолжением работ [11, 12, 15, 16].

# 1. Теория М.В. Келдыша и частотные характеристики шины

В работе [1] приводится результат изучения качения колеса с упругой шиной в составе передней опоры самолета. В ней предполагается, что шина обладает вертикальной, боковой и пяточной жесткостями. При поперечных смещениях обода деформация шины характеризуется тремя составляющими, причем масса деформируемой части предполагается пренебрежимо малой. Также не учитывается диссипация энергии, связанная с деформацией шины, и не рассматривается продольная деформация шины.

В настоящем учебно-методическом пособии приводятся исследования динамики опоры при движении самолета по земле, для чего составлены выражения для величин сил реакции, действующих на колесо, и указана связь составляющих деформации шины с координатами и параметрами опоры.

## 1.1. Силы реакции со стороны земли, возникающие при качении шины

Рассмотрим вначале неподвижное колесо с упругой шиной, обжатое вертикальной нагрузкой (рис. 1.1). В месте контакта с землей образуется площадка. Равнодействующая  $N$  элементарных вертикальных усилий в площадке приложена в центре  $O_k$ .

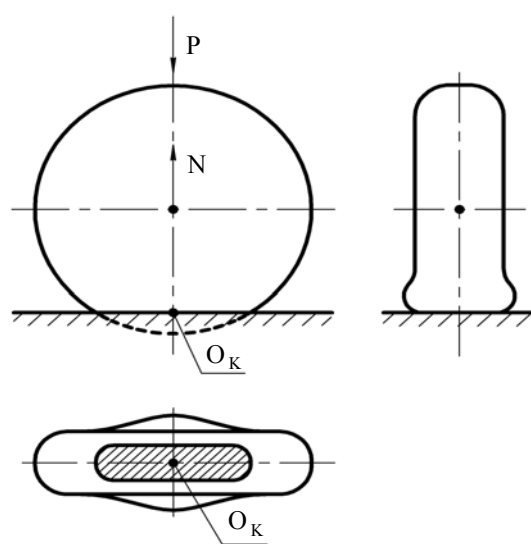


Рис. 1.1. Колесо с упругой шиной, обжатое вертикальной нагрузкой

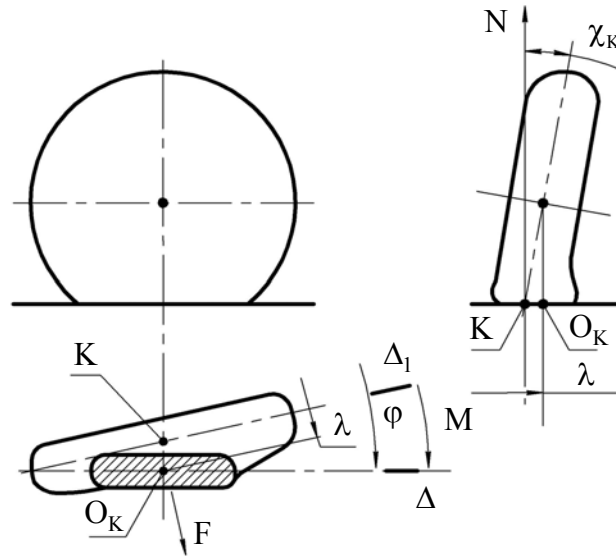


Рис. 1.2. Колесо, наклоненное к вертикальной плоскости

Назовем экваториальной линией шины линию пересечения средней плоскости колеса с поверхностью недеформированной шины. Пусть колесо смещено вбок, затем повернуто на угол  $\varphi$  относительно вертикальной оси колеса и окончательно наклонено к вертикальной плоскости на угол  $\chi_k$  (рис. 1.2).

Обозначим линию пересечения диаметральной плоскости смещенного обода с опорной плоскостью через  $\Delta_1$ , а  $\Delta$  – касательную к средней линии площадки контакта в центре контакта. Деформация шины характеризуется координатами  $\lambda, \varphi, \chi_k$ , где  $\lambda$  – расстояние от линии  $\Delta_1$  до центра  $O_k$  контакта,  $\varphi$  – угол между прямыми  $\Delta$  и  $\Delta_1$ .

Реакции опорной плоскости на шину при смещении колеса, приведенные к точке К пересечения прямой наибольшего наклона, проходящей в средней плоскости колеса через его центр, с опорной плоскостью, приводятся к нормальной силе  $N$ , поперечной  $F$  и моментам  $M$  и  $M^{\chi_k}$  соответственно относительно вертикальной оси и оси, перпендикулярной плоскости чертежа:

$$\begin{aligned} F &= a\lambda + \sigma_{ш} N \chi_k \\ M &= b \varphi \\ M^{\chi_k} &= N (\sigma_{ш} \lambda + \rho_{ш} \chi_k), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $a, b$  – боковая и пяточная жесткости шины,  $\sigma_{ш}$  и  $\rho_{ш}$  – коэффициенты. Константы  $a, b, \sigma_{ш}, \rho_{ш}$  должны определяться экспериментально.

Для колеса, катящегося с постоянной угловой скоростью, находящегося под постоянной вертикальной нагрузкой, совершающего малые поперечные смещения из положения невозмущенного качения, введены аналогичные параметры деформации шины  $\lambda, \varphi, \chi_k$ . Считаем, что реакции опорной поверхности также определяются выражениями (1.1).

## 1.2. Кинематические связи, возникающие при качении шины по опорной плоскости

Отсутствие проскальзывания поверхности контакта шины является предположением, на основании которого в теории М.В. Келдыша составляются уравнения кинематических связей. Так как деформация шины характеризуется тремя параметрами  $\lambda, \varphi, \chi_k$ , отсутствие скольжения будет учитываться только для поверхности контакта в целом.

Назовем геометрическое место центров  $O_k$  площадки контакта при качении шины линией качения. Отсутствие скольжения шины учитывается следующими двумя условиями:

1. Касательная к линии качения шины совпадает с осью поверхности контакта (при этом экваториальная линия деформированной шины совпадает в площадке контакта с линией качения, имея с ней общую касательную в точке  $O$  и общую кривизну).

2. Кривизна линии качения шины однозначно определяется параметрами деформации  $\lambda, \varphi, \chi_k$ .

Сформулированные выше два условия отсутствия скольжения шины при её качении по плоскости приводят к двум уравнениям кинематических связей. Обозначая через  $Z_1$  абсциссу центра площадки контакта шины, а через  $\theta$  – угол между направлением невозмущенного движения (осью  $S$ ) и следом средней плоскости колеса на дороге (рис.1.3), из первого условия качения шины без проскальзывания получим уравнение

$$\frac{dz_1}{ds} + \theta + \varphi = 0, \quad (1.2)$$

где  $s = V\tau$  – путь, пройденный колесом за время  $\tau$ .

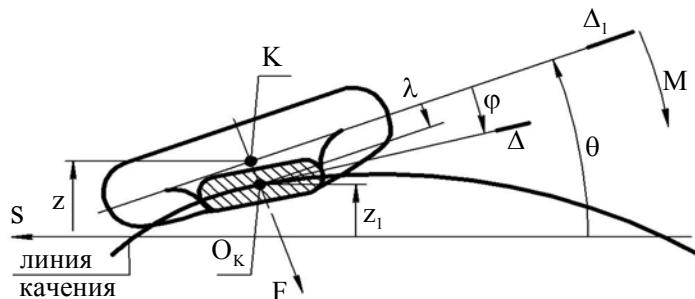


Рис.1.3. Линии качения шины

Далее, принимая во внимание, что кривизна линии качения равна

$$\frac{1}{R} = \frac{d(\theta + \varphi)}{ds},$$

и, в то же время, принимая

$$\frac{1}{R} = \alpha\lambda - \beta\varphi - \gamma\chi_k,$$

запишем второе условие качения шины без проскальзывания в виде

$$\frac{d(\theta + \varphi)}{ds} = \alpha\lambda - \beta\varphi - \gamma\chi_k. \quad (1.3)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – кинематические коэффициенты.

Заменяя в (1.2), (1.3)  $ds$  на  $Vd\tau$  и учитывая, что  $z_1 = z + \lambda$ , получим уравнения:

$$\dot{z} + \dot{\lambda} + V\dot{\theta} + V\dot{\varphi} = 0, \quad (1.4)$$

$$\dot{\theta} + \dot{\varphi} - V(\alpha\lambda - \beta\varphi - \gamma\chi_k) = 0, \quad (1.5)$$

которые представляют уравнения кинематических связей, накладываемых на упругую шину при качении ее по плоскости без проскальзывания.

При рассмотрении устойчивости качения колеса необходимо анализировать зависимости параметров деформации шины, а также действующих на шину сил, от частоты колебаний. Для этого представим колесо в виде динамического звена, обладающего передаточными функциями.

### 1.3. Частотные характеристики шины

Пусть колесо с упругой шиной катится прямолинейно с постоянной скоростью  $V$ , находясь под постоянной вертикальной нагрузкой, в составе опоры шасси летательного аппарата (рис. 1.4).

Свяжем с точкой  $O$  крепления стойки к фюзеляжу прямоугольную систему координат  $OXYZ$ . Будем считать невозмущенным движение колеса в плоскости  $OXY$ . Опишем возмущенное движение обода смещением  $z(\tau)$  оси колеса, углом  $\theta(\tau)$  поворота колеса относительно оси стойки и углом  $\psi(\tau)$  поворота стойки относительно оси  $OX$ .

Пусть величина  $z$  связана с углами  $\theta$  и  $\psi$  следующим образом:

$$z = t\theta + L_c\psi, \quad (1.6)$$

где  $t$  и  $L$  – параметры установки колеса на опоре шасси летательного аппарата.:

$$t\dot{\theta} + L_c\dot{\psi} + \dot{\lambda} + V\dot{\theta} + V\dot{\varphi} = 0, \quad (1.7)$$

$$\dot{\theta} + \dot{\varphi} - \alpha V\lambda + \beta V\varphi - \gamma V\psi = 0. \quad (1.8)$$

Координаты  $\psi, \theta, \lambda, \varphi$  являются функциями времени  $\tau$  или пути  $S$ .



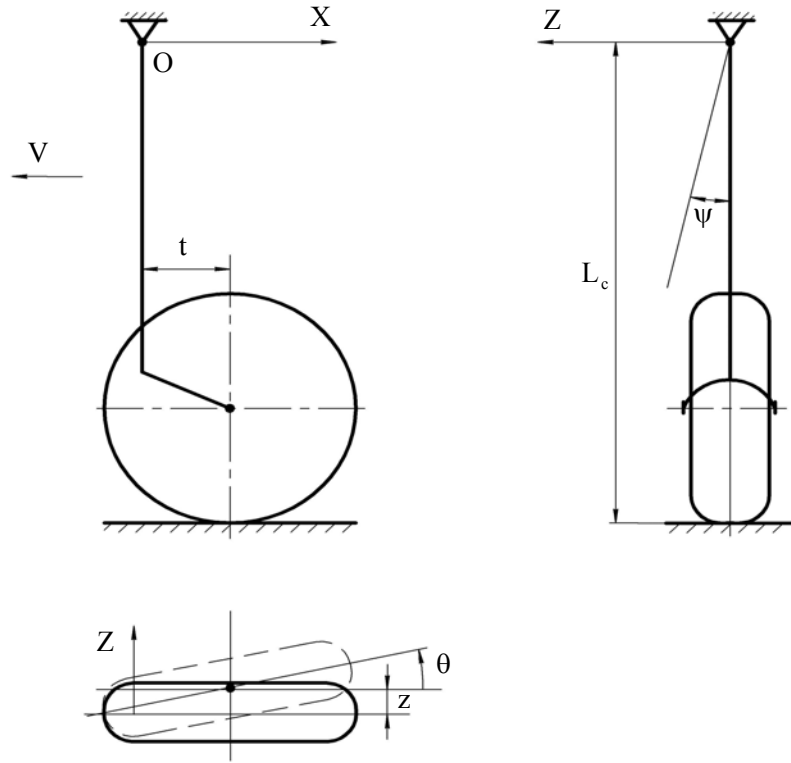


Рис. 1.4. Опора шасси летательного аппарата

Предположим, что колесо при качении совершает гармонические колебания по углу  $\theta$  или по углу  $\psi$ . Выразим  $\lambda$  и  $\varphi$  через  $\theta$  и  $\psi$ . Обозначая символ дифференцирования  $d/d\tau = p$ , представим уравнения (1.7), (1.8) в операторном виде. Подставляя  $p = j\omega$ , получим

$$\tilde{\lambda} = -[(\operatorname{Re}W_{\lambda\theta} + j\operatorname{Im}W_{\lambda\theta})\tilde{\theta} + (\operatorname{Re}W_{\lambda\psi} + j\operatorname{Im}W_{\lambda\psi})\tilde{\psi}] \quad (1.9)$$

$$\tilde{\varphi} = -[(\operatorname{Re}W_{\varphi\theta} + j\operatorname{Im}W_{\varphi\theta})\tilde{\theta} + (\operatorname{Re}W_{\varphi\psi} + j\operatorname{Im}W_{\varphi\psi})\tilde{\psi}] \quad (1.10)$$

где волнистая черта обозначает преобразование Фурье, а

$$\operatorname{Re}W_{\lambda\theta} = \frac{t\omega^4 + \omega^2V^2(\beta^2t - \alpha t - \beta) + \beta\alpha V^4}{\omega^4 + \omega^2V^2(\beta^2 - 2\alpha) + \alpha^2V^4}, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{Im}W_{\lambda\theta} = \frac{\omega\beta V^3(\alpha t - \beta)}{\omega^4 + \omega^2V^2(\beta^2 - 2\alpha) + \alpha^2V^4}, \quad (1.12)$$

$$\operatorname{Re}W_{\lambda\psi} = \frac{L\omega^4 + \omega^2V^2(\beta^2L - \alpha L - \gamma) + \gamma\alpha V^4}{\omega^4 + \omega^2V^2(\beta^2 - 2\alpha) + \alpha^2V^4}, \quad (1.13)$$

$$\operatorname{Im}W_{\lambda\psi} = \frac{\omega\beta V^3(\alpha L - \gamma)}{\omega^4 + \omega^2V^2(\beta^2 - 2\alpha) + \alpha^2V^4}, \quad (1.14)$$

$$\operatorname{Re}W_{\varphi\theta} = \frac{\omega^4 + \alpha\omega^2V^2(\beta t - 2) + \alpha^2V^4}{\omega^4 + \omega^2V^2(\beta^2 - 2\alpha) + \alpha^2V^4}, \quad (1.15)$$

$$\text{Im}W_{\varphi\theta} = \frac{\omega V(\alpha t - \beta)(-\omega^2 + \alpha V^2)}{\omega^4 + \omega^2 V^2(\beta^2 - 2\alpha) + \alpha^2 V^4}, \quad (1.16)$$

$$\text{Re}W_{\varphi\psi} = \frac{\beta\omega^2 V(\alpha L - \gamma)}{\omega^4 + \omega^2 V^2(\beta^2 - 2\alpha) + \alpha^2 V^4}, \quad (1.17)$$

$$\text{Im}W_{\varphi\psi} = \frac{\omega V(\alpha L - \gamma)(-\omega^2 + \alpha V^2)}{\omega^4 + \omega^2 V^2(\beta^2 - 2\alpha) + \alpha^2 V^4}. \quad (1.18)$$

Считая входными воздействиями  $\psi$  и  $\theta$ , а выходными  $\varphi$  и  $\lambda$ , можно вычислять отношение амплитуд и фазы этих координат.

Введем обозначение путевой частоты  $\omega_s = \omega/V$ . С целью уменьшения числа параметров в выражениях (1.11) – (1.18), приведем их к безразмерной форме. В качестве масштабов для перехода к безразмерным координатам выберем радиус колеса  $r$ , массу колеса  $m$  и боковую жесткость шины  $a$ . Соотношения между размерными (без черточек сверху) и безразмерными (черточки сверху) параметрами следующие

$$t = \bar{t}r, \quad L = \bar{L}r, \quad \alpha = \frac{\bar{\alpha}}{r^2}, \quad \beta = \frac{\bar{\beta}}{r}, \quad \gamma = \frac{\bar{\gamma}}{r}, \quad \omega = \bar{\omega}\sqrt{\frac{a}{m}}, \quad V = \bar{V}\sqrt{\frac{a}{m}}, \quad \omega_s = \frac{\bar{\omega}_s}{r}.$$

С учетом этих соотношений действительные и мнимые части передаточных функций между смещениями обода колеса и параметрами деформации шины будут иметь вид:

$$\text{Re}W_{\lambda\theta} = r \frac{\bar{t}\bar{\omega}_s^4 + \bar{\omega}_s^2[(\bar{\beta}^2 - \bar{\alpha})\bar{t} - \bar{\beta}] + \bar{\beta}\bar{\alpha}}{\bar{\omega}_s^4 + \bar{\omega}_s^2(\bar{\beta}^2 - 2\bar{\alpha}) + \bar{\alpha}^2}, \quad (1.19)$$

$$\text{Im}W_{\lambda\theta} = r \frac{\bar{\omega}_s\bar{\beta}(\bar{\alpha}\bar{t} - \bar{\beta})}{\bar{\omega}_s^4 + \bar{\omega}_s^2(\bar{\beta}^2 - 2\bar{\alpha}) + \bar{\alpha}^2}, \quad (1.20)$$

$$\text{Re}W_{\lambda\psi} = r \frac{\bar{L}\bar{\omega}_s^4 + \bar{\omega}_s^2[(\bar{\beta}^2 - \bar{\alpha})\bar{L} - \bar{\gamma}] + \bar{\gamma}\bar{\alpha}}{\bar{\omega}_s^4 + \bar{\omega}_s^2(\bar{\beta}^2 - 2\bar{\alpha}) + \bar{\alpha}^2}, \quad (1.21)$$

$$\text{Im}W_{\lambda\psi} = r \frac{\bar{\omega}_s\bar{\beta}(\bar{\alpha}\bar{L} - \bar{\gamma})}{\bar{\omega}_s^4 + \bar{\omega}_s^2(\bar{\beta}^2 - 2\bar{\alpha}) + \bar{\alpha}^2}, \quad (1.22)$$

$$\text{Re}W_{\varphi\theta} = \frac{\bar{\omega}_s^4 + \alpha\bar{\omega}_s^2(\bar{\beta}\bar{t} - 2) + \bar{\alpha}^2}{\bar{\omega}_s^4 + \bar{\omega}_s^2(\bar{\beta}^2 - 2\bar{\alpha}) + \bar{\alpha}^2}, \quad (1.23)$$

$$\text{Im}W_{\varphi\theta} = \frac{\bar{\omega}_s(\bar{\alpha}\bar{t} - \bar{\beta})(-\bar{\omega}_s^2 + \bar{\alpha})}{\bar{\omega}_s^4 + \bar{\omega}_s^2(\bar{\beta}^2 - 2\bar{\alpha}) + \bar{\alpha}^2}, \quad (1.24)$$

$$\text{Re}W_{\varphi\psi} = \frac{\beta\bar{\omega}_s^2(\bar{\alpha}\bar{L} - \bar{\gamma})}{\bar{\omega}_s^4 + \bar{\omega}_s^2(\bar{\beta}^2 - 2\bar{\alpha}) + \bar{\alpha}^2}, \quad (1.25)$$

$$\text{Im}W_{\varphi\psi} = \frac{\bar{\omega}_s(\bar{\alpha}\bar{L} - \bar{\gamma})(-\bar{\omega}_s^2 + \bar{\alpha})}{\bar{\omega}_s^4 + \bar{\omega}_s^2(\bar{\beta}^2 - 2\bar{\alpha}) + \bar{\alpha}^2}. \quad (1.26)$$

При  $\omega_s \rightarrow 0$   $\text{Re}W_{\lambda\theta} \rightarrow r\bar{\beta}/\bar{\alpha}$ ,  $\text{Im}W_{\lambda\theta} \rightarrow 0$ ,  $\text{Re}W_{\lambda\psi} \rightarrow \gamma/\alpha$ ,  $\text{Im}W_{\lambda\psi} \rightarrow 0$ ,  $\text{Re}W_{\varphi\theta} \rightarrow 1$ ,  $\text{Im}W_{\varphi\theta} \rightarrow 0$ ,  $\text{Re}W_{\varphi\psi} \rightarrow 0$ ,  $\text{Im}W_{\varphi\psi} \rightarrow 0$ .

Согласно (1.1), реакция земли на шину в плоскости контакта при пренебрежении составляющими, зависящими от  $N$  и стремящимися к нулю, приводится к поперечной силе  $F = a\lambda$  и моменту  $M = b\varphi$ . Отметим, что для сил и моментов в преобразованном по Фурье виде, имеют место соотношения

$$\tilde{F} = \tilde{F}_\theta + \tilde{F}_\psi, \tilde{M} = \tilde{M}_\theta + \tilde{M}_\psi, \quad (1.27)$$

где

$$\tilde{F}_\theta = a \tilde{\lambda}_\theta = a (\text{Re}W_{\lambda\theta} + j \text{Im}W_{\lambda\theta}) \theta \quad (1.28)$$

$$\tilde{F}_\psi = a \tilde{\lambda}_\psi = a (\text{Re}W_{\lambda\psi} + j \text{Im}W_{\lambda\psi}) \psi \quad (1.29)$$

$$\tilde{M}_\theta = b \tilde{\varphi}_\theta = b (\text{Re}W_{\varphi\theta} + j \text{Im}W_{\varphi\theta}) \theta \quad (1.30)$$

$$\tilde{M}_\psi = b \tilde{\varphi}_\psi = b (\text{Re}W_{\varphi\psi} + j \text{Im}W_{\varphi\psi}) \psi \quad (1.31)$$

В качестве примера на рис. 1.5 приведены графики передаточных функций

$$\frac{\text{Re}W_{\lambda\theta}}{\text{Re}_{\lambda\theta} \omega \rightarrow 0} = \text{Re}W_{\lambda\theta}^*, \frac{\text{Im}W_{\lambda\theta}}{\text{Re}_{\lambda\theta} \omega \rightarrow 0} = \text{Im}W_{\lambda\theta}^*,$$

$$\text{Im}W_{\varphi\theta}, \text{Re}W_{\varphi\theta}, \frac{\text{Re}W_{\lambda\psi}}{\text{Re}_{\lambda\psi} \omega \rightarrow 0} = \text{Re}W_{\lambda\psi}^*,$$

$$\frac{\text{Im}W_{\lambda\psi}}{\text{Re}_{\lambda\psi} \omega \rightarrow 0} = \text{Im}W_{\lambda\psi}^*, \text{Im}W_{\varphi\psi}, \text{Re}W_{\varphi\psi},$$

$$\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 4, \bar{\gamma} = 1, \bar{L}_c = 2, \bar{t} = -0.2, 0, 0.2.$$

На рисунке 1.5 кривые (черные и красные) рассчитаны для значений (начиная с верхней)  $t=0.2, 0, -0.2$  соответственно. Характер изменения составляющих передаточных функций от частоты  $\omega_s$  и их количественные значения определяются соотношением

$$\text{Re}W_{\varphi\theta}, \text{Im}W_{\varphi\theta}, \text{Re}W_{\lambda\theta}, \text{Im}W_{\lambda\theta} \quad (1.32)$$

между значением выноса  $\bar{t}$  и величиной  $\bar{\beta}/\bar{\alpha}$ .

Существенным является то, что при  $\bar{t} < \bar{\beta}/\bar{\alpha}$  мнимые части  $\text{Im}W_{\lambda\theta}$ ,  $\text{Im}W_{\varphi\theta}$  (при малых  $\omega_s$ ) отрицательны. Значения  $\text{Im}W_{\lambda\psi}$ ,  $\text{Re}W_{\varphi\psi}$ ,  $\text{Im}W_{\varphi\psi}$ ,  $\text{Im}W_{\varphi}$ ,  $\text{Re}W_{\lambda\psi}$  положительны при

$$\begin{aligned} (\bar{\beta}^2 - \bar{\alpha})\bar{L}_c - \bar{\gamma} &> 0, \\ \bar{\alpha}\bar{L}_c - \bar{\gamma} &> 0, \bar{\alpha} - \bar{\omega}_s^2 > 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

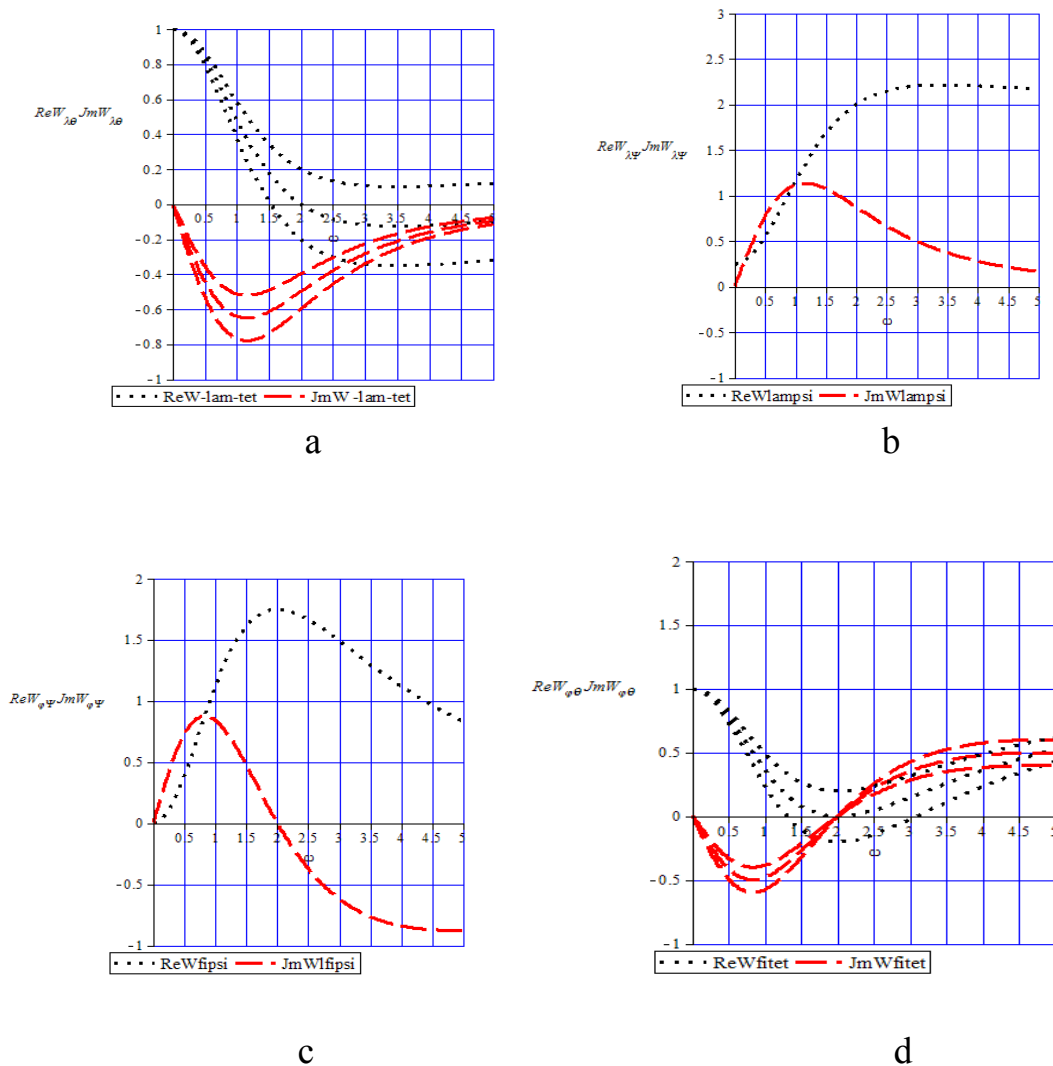


Рис. 1.5. Зависимости действительных и мнимых частей депердаточных функций от частоты

Рассмотрим линейный упругий элемент с демпфированием (рис. 1.6). Жесткость пружины обозначим  $C_{\phi}$ , а коэффициент сопротивления  $h_{\phi}$ .

При гармоническом перемещении  $x$  сила сопротивления элемента

$$P = C_{\phi}x + j\omega h_{\phi}x. \quad (1.34)$$

Динамической жесткостью элемента является комплексное выражение

$$D = P/x = C_{\phi} + j\omega h_{\phi}, \quad (1.35)$$

где коэффициенты  $C_{\phi}$  и  $h_{\phi}$  постоянны в случае идеальных пружины и демпфера. В общем случае эти значения зависят от частоты  $\omega$  и амплитуды колебаний координаты  $x$ .

В случае схематизации конструкции, действующей при повороте подвижного элемента, перемещение  $x$  является углом поворота, а вместо усилия  $P$  будет момент  $M$ . Проведем аналогию между шиной и элементом (рис. 1.6).

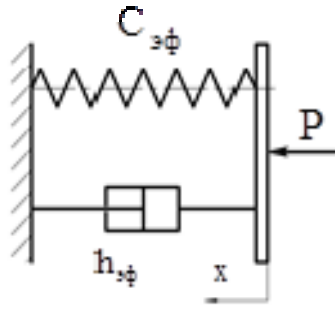


Рис. 1.6. Схема линейного упругого элемента с демпфированием

В системе уравнений шимми ориентирующегося колеса (1.2)–(1.7) моменты  $M_y$  относительно оси стойки и  $M_x$  относительно продольной оси записываются следующим образом

$$M_y = -Ft - M = -at\lambda - b\varphi, \quad (1.36)$$

$$M_x = -FL_c = -aL_c\lambda. \quad (1.37)$$

При гармонических колебаниях можно записать в размерном виде

$$M_y = -at(-\operatorname{Re}W_{\lambda\theta} - j\operatorname{Im}W_{\lambda\theta})\theta + (-\operatorname{Re}W_{\lambda\psi} - j\operatorname{Im}W_{\lambda\psi})\psi - b[(-\operatorname{Re}W_{\varphi\theta} - j\operatorname{Im}W_{\varphi\theta})\theta + (-\operatorname{Re}W_{\varphi\psi} - j\operatorname{Im}W_{\varphi\psi})\psi], \quad (1.38)$$

$$M_x = -aL_c[(-\operatorname{Re}W_{\lambda\theta} - j\operatorname{Im}W_{\lambda\theta})\theta + (-\operatorname{Re}W_{\lambda\psi} - j\operatorname{Im}W_{\lambda\psi})\psi] \quad (1.39)$$

Обозначим

$$a \operatorname{Re}W_{\lambda\theta} = C_{F\theta}, \quad a \operatorname{Im}W_{\lambda\theta} = h_{F\theta}\omega, \quad (1.40)$$

$$a \operatorname{Re}W_{\lambda\psi} = C_{F\psi}, \quad a \operatorname{Im}W_{\lambda\psi} = h_{F\psi}\omega, \quad (1.41)$$

$$b \operatorname{Re}W_{\varphi\theta} = C_{M\theta}, \quad b \operatorname{Im}W_{\varphi\theta} = h_{M\theta}\omega, \quad (1.42)$$

$$b \operatorname{Re}W_{\varphi\psi} = C_{M\psi}, \quad b \operatorname{Im}W_{\varphi\psi} = h_{M\psi}\omega. \quad (1.43)$$

Тогда (1.38) и (1.39) можно представить как

$$M_y = [C_{F\theta}\theta + C_{F\psi}\psi + j\omega(h_{F\theta}\theta + h_{F\psi}\psi)]t + C_{M\theta}\theta + C_{M\psi}\psi + j\omega(h_{M\theta}\theta + h_{M\psi}\psi), \quad (1.44)$$

$$M_x = [C_{F\theta}\theta + C_{F\psi}\psi + j\omega(h_{F\theta}\theta + h_{F\psi}\psi)]L. \quad (1.45)$$

где  $C_{F\theta}$ ,  $C_{F\psi}$ ,  $C_{M\theta}$ ,  $C_{M\psi}$ ,  $h_{F\theta}$ ,  $h_{F\psi}$ ,  $h_{M\theta}$ ,  $h_{M\psi}$  – соответственно жесткости пружин и коэффициенты демпфирования упругих элементов, представляющих шину при колебаниях,  $\omega$  – частота колебаний.

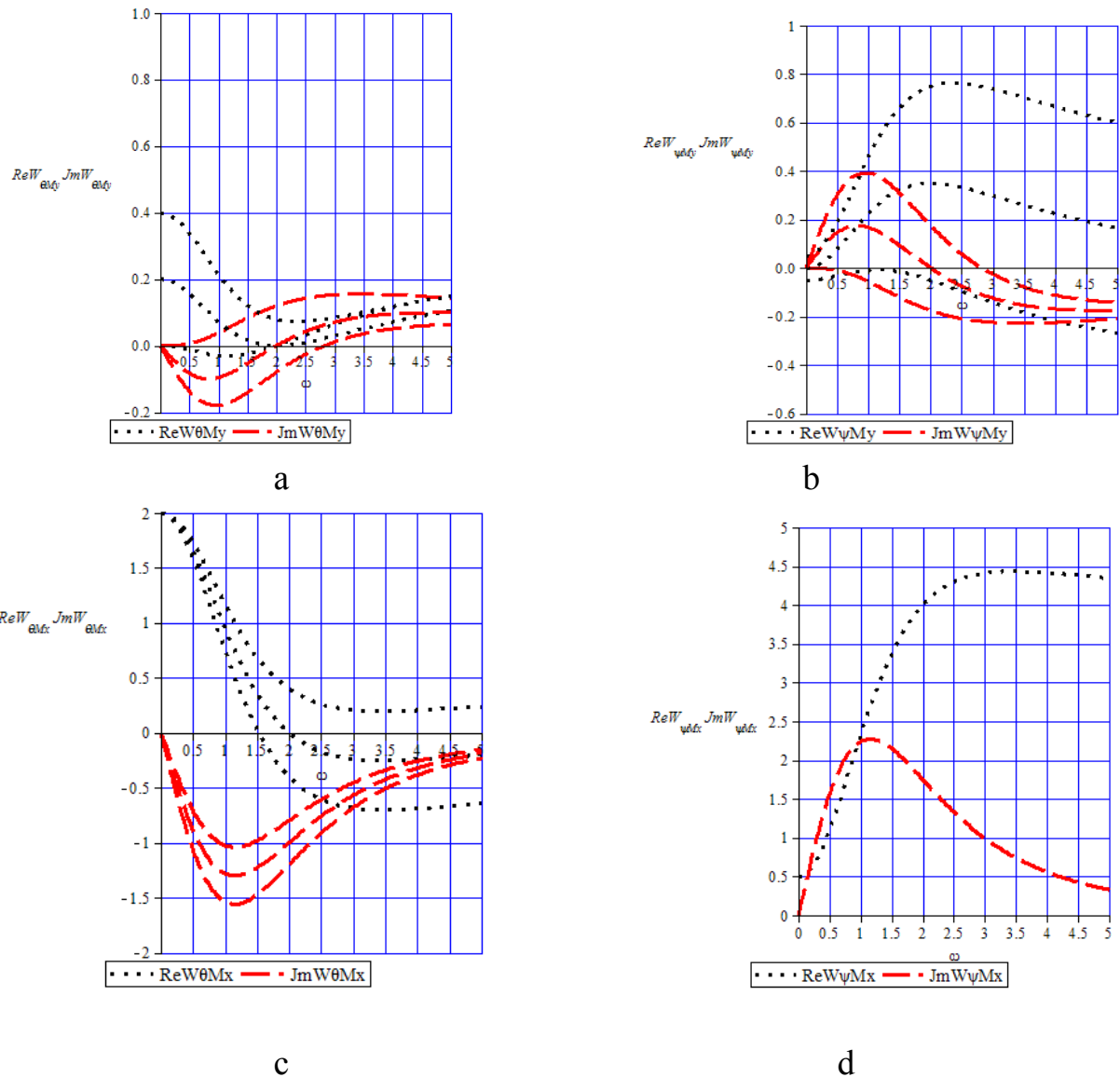


Рис. 1.7. Зависимости действительных и мнимых частей депердаточных функций от частоты

При гармоническом отклонении колеса от линии невозмущенного движения на величину  $Z = t\theta$  (стойка бесконечно жесткая в боковом направлении) воздействие шины на опору эквивалентно воздействию пружины с жесткостью  $C_{F\theta}t + C_{M\theta} = \text{Re}W_{\theta M_y}$  и демпфера с коэффициентом демпфирования  $h_{F\theta}t + h_{M\theta} = \text{Jm}W_{\theta M_y} / \omega$ , создающих момент  $M_y$ . При гармоническом перемещении колеса на  $z = L_c\psi$  (стойка бесконечно жесткая на кручение) воздействие шины на опору эквивалентно воздействию пружины с жесткостью  $C_{F\psi} = \text{Re}W_{\psi M_x}$  и демпфера с коэффициентами демпфирования  $h_{F\psi} = \text{Jm}W_{\psi M_x} / \omega$ , создающих момент  $M_x$ .

Приведем (1.44) и (1.45) к безразмерному виду и запишем их как

$$\bar{M}_y = (\operatorname{Re} \bar{W}_{\theta M_y} + j \operatorname{Im} \bar{W}_{\theta M_y}) \theta + (\operatorname{Re} \bar{W}_{\psi M_y} + j \operatorname{Im} \bar{W}_{\psi M_y}) \psi$$

$$\bar{M}_x = (\operatorname{Re} \bar{W}_{\theta M_x} + j \operatorname{Im} \bar{W}_{\theta M_x}) \theta + (\operatorname{Re} \bar{W}_{\psi M_x} + j \operatorname{Im} \bar{W}_{\psi M_x}) \psi$$

где

$$\operatorname{Re} \bar{W}_{\theta M_y} = \bar{t} \operatorname{Re} W_{\lambda \theta}^* \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} + \bar{b} \operatorname{Re} W_{\varphi \theta} \quad \operatorname{Im} \bar{W}_{\theta M_y} = \bar{t} \operatorname{Im} W_{\lambda \theta}^* \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} + \bar{b} \operatorname{Im} W_{\varphi \theta}$$

$$\operatorname{Re} \bar{W}_{\psi M_y} = \bar{t} \operatorname{Re} W_{\lambda \psi}^* \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} + \bar{b} \operatorname{Re} W_{\varphi \psi} \quad \operatorname{Im} \bar{W}_{\theta M_x} = \bar{L}_C \operatorname{Im} W_{\lambda \theta}^* \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$$

$$\operatorname{Im} \bar{W}_{\psi M_y} = \bar{t} \operatorname{Im} W_{\lambda \psi}^* \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} + \bar{b} \operatorname{Im} W_{\varphi \psi}, \quad \operatorname{Re} \bar{W}_{\theta M_x} = \bar{L}_C \operatorname{Re} W_{\lambda \theta}^* \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$$

$$\operatorname{Re} \bar{W}_{\psi M_x} = \bar{L}_C \operatorname{Re} W_{\lambda \psi}^* \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}, \quad \operatorname{Im} \bar{W}_{\psi M_x} = \bar{L}_C \operatorname{Im} W_{\lambda \psi}^* \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$$

По характеру изменения кривых (рис.1.7) и по их знаку можно судить о величине и знаке жесткостей и коэффициентов демпфирования эквивалентных пружин и демпферов.

#### 1.4. Случаи упрощения кинематических связей

Предположим, что скорость качения колеса достаточно велика. Вводя малый параметр  $\mu = \frac{1}{V}$ , запишем уравнения (1.7)–(1.8) в виде

$$\mu \frac{d\lambda}{d\tau} = -\theta - \varphi - L_c \frac{d\psi}{ds} - t \frac{d\theta}{ds},$$

$$\mu \frac{d\varphi}{d\tau} = \alpha\lambda - \beta\varphi + \gamma\psi - \frac{d\theta}{ds}.$$

При малом  $\mu \approx 0$  можно записать

$$\theta + \varphi + L_c \frac{d\psi}{ds} + t \frac{d\theta}{ds} = 0,$$

$$\alpha\lambda - \beta\varphi + \gamma\psi - \frac{d\theta}{ds} = 0. \quad (1.46)$$

Выражая из (1.46)  $\varphi$ ,

$$\varphi = -\theta - L_c \frac{d\psi}{ds} - t \frac{d\theta}{ds},$$

приходим к соотношению

$$\left(t - \frac{1}{\beta}\right)\dot{\theta} + L_c \dot{\psi} = -\frac{\alpha}{\beta} V \lambda - \frac{\gamma}{\beta} V \psi - V \theta.$$

Используя преобразование Лапласа  $L[x]$ , запишем

$$\left(\left(t - \frac{1}{\beta}\right)p + V\right)L[\theta] + \left[L_c p + \frac{\gamma}{\beta} V\right]L[\psi] = -\frac{\alpha V}{\beta} L[\lambda],$$

откуда

$$L[\lambda] = -\frac{\left(t - \frac{1}{\beta}\right)p + V}{\frac{\alpha}{\beta} V} L[\theta] - \frac{L_c p + \frac{\gamma}{\beta} V}{\frac{\alpha}{\beta} V} L[\psi].$$

Предполагая изменение переменных  $\theta$  и  $\psi$  по гармоническому закону, вводя обозначение путевой частоты и выражая параметры в безразмерной форме, получим действительные и мнимые части передаточных функций  $W_{\lambda\theta}$  и  $W_{\lambda\psi}$  в виде

$$\operatorname{Re} W_{\lambda\theta} = r \frac{\bar{\beta}}{\alpha},$$

$$\operatorname{Im} W_{\lambda\theta} = \frac{r}{\alpha} (\bar{t} \bar{\beta} - 1) \bar{\omega}_s,$$

$$\operatorname{Re} W_{\lambda\psi} = r \frac{\bar{\gamma}}{\alpha},$$

$$\operatorname{Im} W_{\lambda\psi} = \frac{r}{\alpha} \bar{\beta} L_c \bar{\omega}_s.$$

Действительные части передаточных функций представляют собой постоянные величины. Мнимые части пропорциональны  $\omega_s$ .

Рассмотрим случай больших величин коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma$ . Выражая конечные величины  $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0$  так, что

$$\alpha^0 = \mu \alpha, \beta^0 = \mu \beta, \gamma^0 = \mu \gamma,$$

где  $\mu$  – малый параметр, запишем второе уравнение (1.8) следующим образом:

$$\mu(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) = \alpha^0 V \lambda - \beta^0 V \varphi + \gamma^0 V \psi.$$

Как и выше, имеем дифференциальное уравнение с малым параметром при производной.

При  $\mu \approx 0$

$$\alpha^0 \lambda - \beta^0 \varphi + \gamma^0 \psi = 0, \tag{1.47}$$



или, что-то же самое,

$$\alpha\lambda - \beta\varphi + \gamma\psi = 0. \quad (1.48)$$

Находя  $\varphi$  из (1.48) и подставляя в уравнение (1.7), получим

$$t\dot{\theta} + L_c\dot{\psi} + \dot{\lambda} + V\theta + \frac{\alpha}{\beta}V\lambda + \frac{\gamma}{\beta}V\psi = 0.$$

Связь преобразований Лапласа переменной  $\lambda$  и переменных  $\theta$  и  $\psi$  записывается следующим образом

$$L[\lambda] = -\frac{t\varphi + V}{p + \frac{\alpha}{\beta}V}L[\theta] - \frac{Lp + \frac{\gamma}{\beta}V}{p + \frac{\alpha}{\beta}V}L[\psi].$$

Составляющие передаточных функций  $W_{\lambda\theta}$  и  $W_{\lambda\psi}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}W_{\lambda\theta} &= r \frac{\bar{t}\bar{\omega}_s^2 + \frac{\bar{\alpha}}{\beta}}{\frac{\bar{\alpha}^2}{\beta^2} + \bar{\omega}_s^2}, \quad \operatorname{Im}W_{\lambda\theta} = r \frac{-1 + \bar{t}\frac{\bar{\alpha}}{\beta}}{\frac{\bar{\alpha}^2}{\beta^2} + \bar{\omega}_s^2} \bar{\omega}_s, \\ \operatorname{Re}W_{\lambda\psi} &= r \frac{\bar{L}_c\bar{\omega}_s + \frac{\bar{\gamma}\bar{\alpha}}{\beta^2}}{\frac{\bar{\alpha}^2}{\beta^2} + \bar{\omega}_s^2}, \quad \operatorname{Im}W_{\lambda\psi} = r \frac{\bar{L}_c\frac{\bar{\alpha}}{\beta} - \frac{\bar{\gamma}}{\beta}}{\frac{\bar{\alpha}^2}{\beta^2} + \bar{\omega}_s^2} \bar{\omega}_s. \end{aligned}$$

## 1.5. Уравнения шимми одноколесной передней опоры с демпфером

Движение колеса опоры при малых отклонениях от стационарного состояния можно описать следующими уравнениями [4]

$$\begin{aligned} J_x\ddot{\psi} + C_\psi l^2\psi + J_{xy}\ddot{\theta} + Vi\dot{\theta}/r - aL_C\lambda &= 0 \\ J_{xy}\ddot{\psi} - Vi\dot{\psi}/r + J_y\ddot{\theta} + C_\theta(\theta - \chi) - at\lambda - b\varphi &= 0 \\ h\dot{\chi} - C_\theta(\theta - \chi) &= 0 \\ L_C\dot{\psi} + t\dot{\theta} + \dot{\lambda} + V(\theta + \varphi) &= 0 \\ \dot{\varphi} + \dot{\theta} - V(\alpha\lambda - \beta\varphi + \gamma\psi) &= 0 \end{aligned}$$

где

$J_x, J_y, J_{xy}$  – моменты инерции установки колес относительно осей  $x, y$  и центробежный момент инерции,  
 $i$  – момент инерции колеса относительно оси вращения,  
 $C_\psi$  – боковая жесткость заделки стойки на планере ЛА,

$C_\theta$  – жесткость стойки на кручение,

$h$  – коэффициент сопротивления демпфера.

Первые два уравнения выражают равновесие моментов сил, действующих на колесо относительно осей  $x$  и  $y$ , третье – равновесие моментов сил на демпфер, причем демпфер представлен в виде идеального демпфера, смещающегося на угол  $\chi$  и соединенного последовательно с пружиной жесткостью  $C_\theta$ .

В случае движения с большой скоростью  $V$  со стороны колеса на стойку действует момент

$$M_y = -at\lambda - b(\theta - L_C\dot{\psi}/V - t\dot{\theta}/V),$$

а вместо двух уравнений кинематических связей имеем одно:

$$(t - 1/\beta)\dot{\theta} + L_C\dot{\psi} + (\alpha\lambda/\beta + \gamma\psi/\beta + \theta)V = 0.$$

При больших значениях кинематических параметров  $\alpha, \beta, \gamma$

$$M_y = -at\lambda - b(\alpha\lambda + \gamma\psi)/\beta,$$

а уравнение кинематической связи имеет вид

$$t\dot{\theta} + L_C\dot{\psi} + \dot{\lambda} + (\alpha\lambda/\beta + \gamma\psi/\beta + \theta)V = 0.$$

## 2. Струнная модель

Модель Шлиппе [10] (струнная модель) основана на замене реальной шины натянутой струной на упругом основании. В недеформированном состоянии струна располагается по экваториальной линии шины. При исследовании взаимодействия с землей катящегося колеса не учитывается масса струны и рассеяние энергии при колебаниях.

### 2.1. Описание модели и силы реакции земли при деформации шины

На рис. 2.1 представлена струна, схематизирующая шину и располагающаяся по ее деформированной экваториальной линии. Струна упруго закреплена по своей длине боковыми пружинами так, что при смещении элемента струны из среднего положения на него действует сила, пропорциональная смещению, с коэффициентом пропорциональности  $K$ . По длине контакта 1 – 2 на струну действует распределенная боковая нагрузка  $P$ .

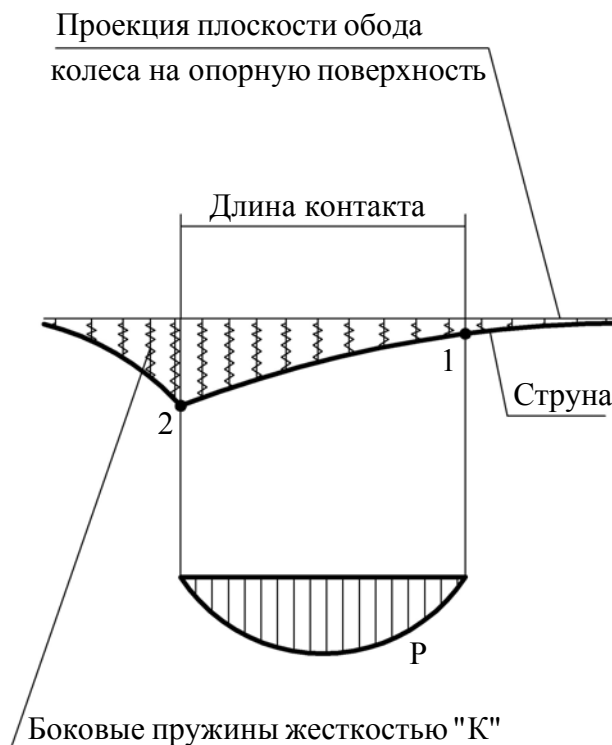


Рис. 2.1. Струнная схема упругой шины

Для определения усилий, действующих на шины со стороны опорной поверхности, рассмотрим вначале вывод уравнения малых поперечных колебаний струны.

Пусть струна (рис. 2.2), натянутая с силой  $T$ , находилась в прямолинейном положении равновесия. Введем оси координат  $\nu$ ,  $\lambda$  так, чтобы

ось  $\nu$  совпала с равновесным положением струны, а ось  $\lambda$  была ей перпендикулярна. При отклонении струны от среднего положения отдельно взятый участок струны длиной  $\Delta\nu$  будет находиться в равновесии под действием распределенной боковой нагрузки  $P(\nu, \tau)$ , силы упругости пружин  $K\lambda(\nu, \tau)\Delta\nu$  и усилий натяжения струны, приложенных к концам участка. Под струной понимается тонкая нить, которая не сопротивляется изгибу, не связанному с изменением ее длины. Таким образом, если разрезать отклоненную струну в точке  $\nu$ , то действие одного участка струны на другой (сила натяжения  $T$ ) будет направлена по касательной к струне в точке  $\nu$ .

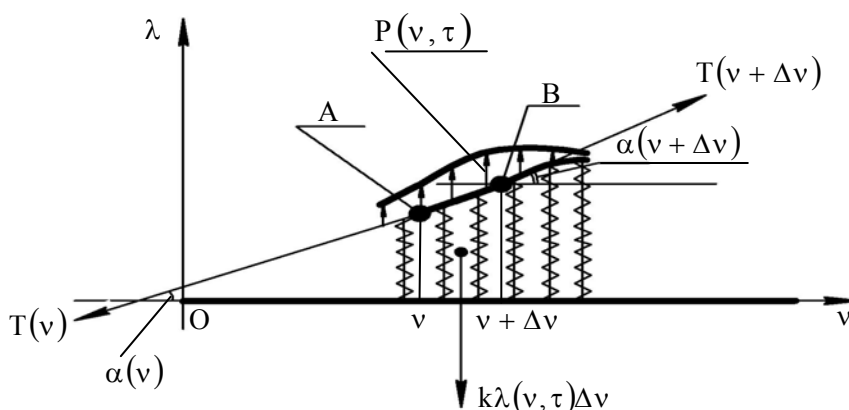


Рис. 2.2. Струнная схема упругой шины

Выделим участок струны от  $\nu$  до  $\nu + \Delta\nu$  и спроектируем все действующие на этот участок силы на оси координат. Сумма проекций всех сил должна равняться нулю. Примем во внимание, что рассматриваются малые колебания струны. Это значит, что в процессе вывода уравнений мы будем пренебрегать квадратом величины  $\frac{\partial \lambda}{\partial \nu}$ .

Длина  $S_{AB}$  дуги  $AB$  выражается интегралом

$$S_{AB} = \int_{\nu}^{\nu + \Delta\nu} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \nu}\right)^2} d\nu \approx \Delta\nu.$$

Это означает, что удлинения участков струны в процессе колебаний практически не происходит и величина натяжения  $T$  не зависит от  $\nu$ .

Найдем проекции всех сил в момент  $\tau$  на ось  $\lambda$ :

$$T[\sin \alpha(\nu + \Delta\nu) - \sin \alpha(\nu)] - K\lambda(\nu, \tau)\Delta\nu = -P(\nu, \tau)\Delta\nu;$$

$$T \left[ \frac{\operatorname{tg} \alpha(\nu + \Delta\nu)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(\nu + \Delta\nu)}} - \frac{\operatorname{tg} \alpha(\nu)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(\nu)}} \right] - K\lambda(\nu, \tau)\Delta\nu =$$

$$\begin{aligned}
&= T \left[ \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial v}(v + \Delta v, \tau)}{\sqrt{1 + \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial v}(v + \Delta v, \tau) \right]^2}} - \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial v}(v, \tau)}{\sqrt{1 + \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial v}(v, \tau) \right]^2}} \right] - K\lambda(v, \tau)\Delta v \cong \\
&\cong T \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial v}(v + \Delta v, \tau) - \frac{\partial \lambda}{\partial v}(v, \tau) \right] - K\lambda(v, \tau)\Delta v = \\
&= T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2}(v, \tau)\Delta v - K\lambda(v, \tau)\Delta v.
\end{aligned}$$

Следовательно, равновесие струны в зоне действия распределенной нагрузки выражается формулой

$$-T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2}(v, \tau) + K\lambda(v, \tau) = P(v, \tau), \quad (2.1)$$

а вне зоны распределенной нагрузки – формулой

$$-T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2}(v, \tau) + K\lambda(v, \tau) = 0. \quad (2.2)$$

Струна, схематизирующая упругую шину катящегося колеса и располагающаяся по его деформированной экваториальной линии, представлена на рис. 2.3.

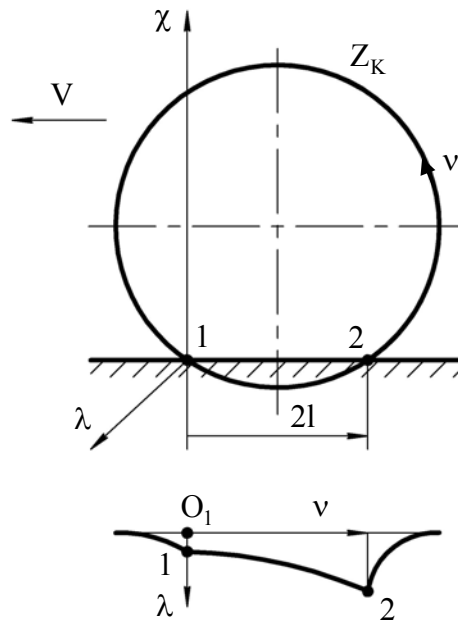


Рис. 2.3. Струнная схема упругой шины

Предполагается, что струна связана с ободом колеса боковыми пружинами. Введем прямоугольную систему координат  $O_1, \lambda, v, \chi$ , причем ось  $v$  расположим в средней плоскости колеса по окружности шины, а ось  $\lambda$  – в

плоскости опорной поверхности. Обозначим длину участка струны 1 – 2 в контакте с землей через  $2l$ , а длину струны вне контакта –  $L$ . Будем считать отклонение струны от средней плоскости обода функцией пути  $S$  и координаты  $\nu$ , то есть  $\lambda = \lambda(S, \nu)$ . Тогда уравнение равновесия струны в контакте и вне его запишутся аналогично (2.1) и (2.2) в виде:

$$-T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \nu^2}(\nu, S) + K\lambda(\nu, S) = P(\nu, S), \quad (2.3)$$

$$-T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \nu^2}(\nu, S) + K\lambda(\nu, S) = 0. \quad (2.4)$$

Общее решение уравнения (2.4) не зависит от пути  $S$  и записывается следующим образом:

$$\lambda = C_1' e^{\frac{\nu}{\sigma}} + C_2' e^{-\frac{\nu}{\sigma}}, \quad (2.5)$$

где  $\sigma = \sqrt{\frac{T}{K}}$ . Решение уравнения (2.5) можно переписать для удобства следующим образом:

$$\lambda = C_1 e^{\frac{\nu-(2l+L)}{\sigma}} + C_2 e^{\frac{2l-\nu}{\sigma}}, \quad (2.6)$$

приняв постоянные  $C_1$  и  $C_2$  соответственно равными

$$C_1 = C_1' e^{-\frac{2l+L}{\sigma}}, \quad C_2 = C_2' e^{\frac{2l}{\sigma}}.$$

Подстановка в (2.6) граничных условий

$$\lambda = \lambda_1 \quad \text{при} \quad \nu = 2l + L,$$

$$\lambda = \lambda_2 \quad \text{при} \quad \nu = 2l,$$

дает

$$\lambda = \lambda_1 e^{\frac{\nu-(2l+L)}{\sigma}} + \lambda_2 e^{\frac{2l-\nu}{\sigma}},$$

откуда можно получить важное условие

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial \nu} \right|_{\nu=2l+L} = \frac{\lambda_1}{\sigma}$$

при пренебрежении членом  $\lambda_2 e^{\frac{2l-(2l+L)}{\sigma}}$ , так как величина  $e^{-\frac{L}{\sigma}} \approx e^{-\sigma}$  близка к нулю.

Если перенести начало системы координат в центр проекции средней плоскости обода колеса на опорную поверхность и изменить направление продольной оси  $\nu$  по сравнению с предыдущим случаем (рис. 2.4), то можно записать

$$\lambda = \lambda_1 e^{\frac{1-\nu}{\sigma}} + \lambda_2 e^{\frac{\nu-(l+L)}{\sigma}},$$

откуда

$$\left. \frac{\partial \lambda(S, \nu)}{\partial \nu} \right|_{\nu=1} = -\frac{\lambda_1(S)}{\sigma}, \quad \left. \frac{\partial \lambda(S, \nu)}{\partial \nu} \right|_{\nu=1+L} = \frac{\lambda_2(S)}{\sigma}.$$

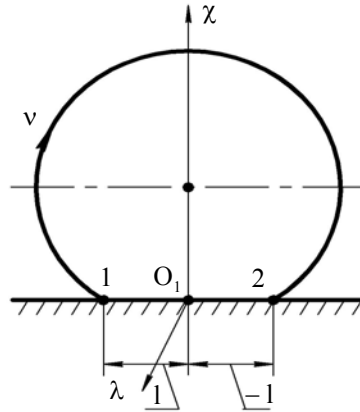


Рис. 2.4. Схема упругой шины

Уравнение равновесия струны в площадке контакта имеет вид (2.3). Сила  $F(S)$  и момент  $M(S)$ , действующие со стороны земли на шину, выражаются так:

$$F(S) = \int_{-1}^1 P(S, \nu) d\nu, \quad (2.7)$$

$$M(S) = \int_{-1}^1 \nu P(S, \nu) d\nu. \quad (2.8)$$

Раскроем значения интегралов в (2.7) и (2.8):

$$\int_{-1}^1 P(S, \nu) d\nu = \int_{-1}^1 [-T \frac{\partial^2 \lambda(S, \nu)}{\partial \nu^2} + K\lambda(S, \nu)] d\nu = - \int_{-1}^1 T \frac{\partial^2 \lambda(S, \nu)}{\partial^2 \nu} d\nu + \int_{-1}^1 K\lambda(S, \nu) d\nu;$$

$$- \int_{-1}^1 T \frac{\partial^2 \lambda(S, \nu)}{\partial^2 \nu} d\nu = -T \frac{\partial \lambda(S, \nu)}{\partial \nu} \Big|_{-1}^1 = -T \left[ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \nu} \right)_{\nu=1} - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \nu} \right)_{\nu=-1} \right] = T \left[ \frac{\lambda_1(S)}{\sigma} + \frac{\lambda_2(S)}{\sigma} \right] = K\sigma [\lambda_1(S) + \lambda_2(S)];$$

$$\int_{-1}^1 \nu P(S, \nu) d\nu = \int_{-1}^1 \nu [-T \frac{\partial^2 \lambda(S, \nu)}{\partial \nu^2} + K\lambda(S, \nu)] d\nu;$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 -T \frac{\partial^2 \lambda(S, \nu)}{\partial^2 \nu} \nu d\nu &= -T \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\partial \lambda(S, \nu)}{\partial \nu} \right) \nu d\nu = \\
&= -T \frac{\partial \lambda(S, \nu)}{\partial \nu} \nu \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\partial \lambda(S, \nu)}{\partial \nu} d\nu = \\
&= T \left[ \left( -\frac{\lambda_1(S)}{\sigma} + \frac{\lambda_2(S)}{\sigma} \right) l - (\lambda_1(S) - \lambda_2(S)) \right] = \\
&= K\sigma(l + \sigma)[\lambda_1(S) - \lambda_2(S)].
\end{aligned}$$

Таким образом

$$F(S) = K \int_{-1}^1 \lambda(S, \nu) d\nu + K\sigma[\lambda_1(S) + \lambda_2(S)], \quad (2.9)$$

$$M(S) = -K \int_{-1}^1 \lambda(S, \nu) \nu d\nu - K\sigma(l + \sigma)[\lambda_1(S) - \lambda_2(S)]. \quad (2.10)$$

В данном случае принимается, что боковая жесткость «К» струны одинакова как в площадке контакта, так и вне ее.

При ином расположении системы координат  $\lambda, \nu$  (рис. 2.3) сила F и момент M определяются по формулам

$$F(S) = K \int_0^{2l} \lambda(S, \nu) d\nu + K\sigma[\lambda_1(S) + \lambda_2(S)],$$

$$M(S) = -K \int_0^{2l} \lambda(S, \nu)(l - \nu) d\nu \mp K\sigma(l + \sigma)[\lambda_1(S) - \lambda_2(S)]$$

Для более подробной записи боковой силы F и момента M обратимся к уравнению кинематической связи, накладываемой на качение упругой шины без проскальзывания.

## 2.2. Кинематическая связь, накладываемая на качение шины

Пусть конструкция, с которой связано колесо, крепится в точке «О» (рис. 2.5) к перемещающемуся прямолинейно и равномерно со скоростью V изделию. Предположим, что шина катится без проскальзывания. Будем полагать, что участок струны 1–2, находящийся в контакте с опорной поверхностью, совпадает с траекторией качения шины, а отклонение струны от средней плоскости обода вне контакта определяется уравнением (2.4). Обозначим через n – n линию пересечения плоскости колеса с опорной плоскостью. Свяжем с прямой n – n систему координат  $O_1, \lambda, \nu$ , центр которой лежит в точке, совпадающей с передней точкой контакта 1 при наличии лишь радиальной деформации шины.



При малых отклонениях колеса от прямой «m – m» расстояние от прямой «m – m» до точки С – проекции центра колеса на прямую «n – n» – и угол  $\theta_1$  отклонения прямой «n – n» от прямой «m – m» можно считать функциями пути центра С и обозначать  $z(S)$  и  $\theta_1(S)$ . Боковое смещение любой точки экваториальной линии шины в контакте с опорной поверхностью относительно прямой «m - m» обозначим через  $v$ .

Предположим, что в точке 1 – передней точке контакта, которая является границей между участком действия боковой нагрузки  $P(S, v)$  и участком, свободным от этой нагрузки, угол экваториальной линии по отношению к прямой n – n непрерывен. Это сводится к тому, что, когда шина прокатывается на бесконечно малую величину вперед, бесконечно малая дуга средней линии, расположенная непосредственно перед контактом, накатывается на свою проекцию на земле и становится частью контакта.

Таким образом, средняя линия непосредственно перед контактом имеет общую касательную со средней линией внутри контакта.

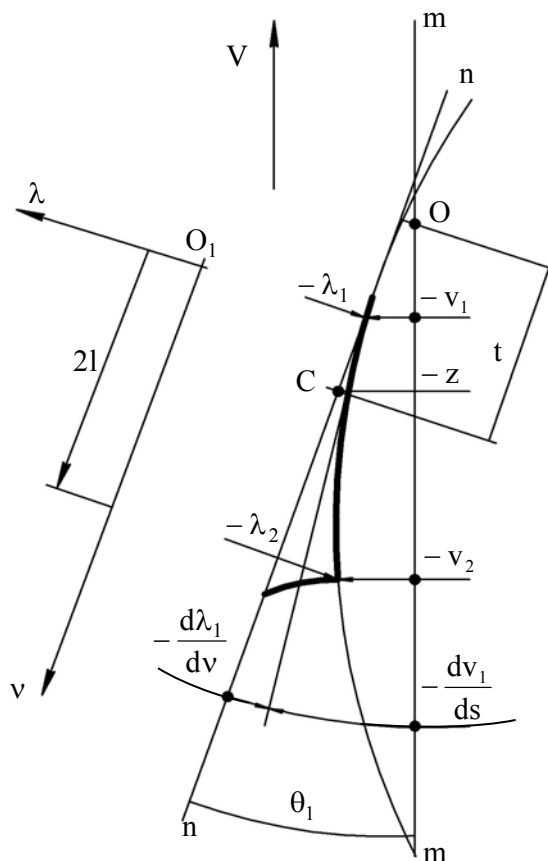


Рис. 2.5. Схема конструкции крепления опоры самолета с колесом

Рассмотрение углов касательной и экваториальной линии шины в точке «1» по отношению к прямым «m – m» и «n – n» (рис. 2.5) приводит к соотношению:

$$\frac{dv_1}{dS} - \frac{d\lambda_1}{dv} = -\theta_1. \quad (2.11)$$

Подставляя вместо  $\frac{d\lambda_1}{d\nu}$  величину  $\frac{\lambda_1}{\sigma}$  и выражая  $\lambda_1$ , из уравнения

$$v_1 = z - l\theta_I - \lambda_1, \quad (2.12)$$

получим искомое уравнение кинематической связи:

$$\frac{dv_1}{dS} + \frac{v_1}{\sigma} - \frac{z}{\sigma} + \frac{l\theta_I}{\sigma} = -\theta_I. \quad (2.13)$$

Поскольку качение шины происходит без проскальзывания, абсолютная скорость в поперечном направлении любой точки экваториальной линии, находящейся в контакте с опорной поверхностью, равна нулю. Это означает, что в период прохождения какой-либо точкой экваториальной линии участка контакта 1 – 2 расстояние от прямой  $m - m$  до этой точки остается постоянным и равным расстоянию, при котором точка вошла в контакт, будучи точкой 1. Эта особенность качения выражается формулой

$$v(S, \nu) = v_1(S - \nu). \quad (2.14)$$

Для любой точки контакта отклонение  $\lambda$  выражается следующим образом

$$\lambda(S, \nu) = z(S) - v(S - \nu) - (l - \nu)\theta_I(S).$$

Используя (2.14), можно записать

$$\lambda(S, \nu) = z(S) - v_1(S - \nu) - (l - \nu)\theta_I(S), \quad (2.15)$$

$$\lambda(S, 0) = \lambda_1(S) = z(S) - v_1(S) - l\theta_I(S), \quad (2.16)$$

$$\lambda(S, 2l) = \lambda_2(S) = z(S) - v_1(S - 2l) + l\theta_I(S). \quad (2.17)$$

Подставляя в (2.9) и (2.10) формулы (2.15) – (2.17), получаем

$$F(S) = K \int_0^{2l} [z(S) - v_1(S - \nu) - (l - \nu)\theta_I(S)] d\nu + \\ + K\sigma [2z(S) - v_1(S) - v_1(S - 2l)],$$

$$M(S) = -K \int_0^{2l} [z(S) - v_1(S - \nu) - (l - \nu)\theta_I(S)] (l - \nu) d\nu + \\ - K\sigma(l + \sigma)[-v_1(S) - v_1(S - 2l) - 2l\theta_I(S)].$$

Расстояние  $v_1$  от прямой  $m - m$  до передней точки контакта «1» связано с переменными  $z(S)$  и  $\theta_I(S)$  посредством уравнения кинематической связи (2.13).

Если обозначить  $\frac{d\lambda_1}{d\nu} = \frac{\lambda_1}{\sigma} = \varphi$  и принять  $z = t\theta + L_c\psi$ , то уравнение (2.11) с учетом (2.12) можно записать в виде

$$(t - l)\dot{\theta} + V\theta - \sigma\dot{\varphi} - V\varphi + L_c\dot{\psi} = 0. \quad (2.18)$$

### 2.3. Частотные характеристики шины

Обозначая чертой сверху преобразование Лапласа, запишем его для силы  $F(S)$  и момента  $M(S)$  в виде:

$$\begin{aligned}\bar{F}(S) &= K \left\{ \int_0^{2l} [\bar{z}(S) - \bar{v}_1(S - \nu) - (l - \nu)\bar{\theta}_I(S)] d\nu + \right. \\ &\quad \left. + \sigma[2\bar{z}(S) - \bar{v}_1(S) - \bar{v}_1(S - 2l)] \right\} = K[2(l + \sigma)\bar{z}(S) - \\ &\quad - \int_0^{2l} \bar{v}_1(S - \nu) d\nu - \int_0^{2l} (l - \nu)\bar{\theta}_I(S) d\nu - \sigma\bar{v}_1(S) - \\ &\quad - \sigma\bar{v}_1(S - 2l)], \\ \bar{M}(S) &= -K \left\{ \int_0^{2l} [\bar{z}(S) - \bar{v}_1(S - \nu) - (l - \nu)\bar{\theta}_I(S)](l - \nu) d\nu + \right. \\ &\quad \left. + K\sigma(l + \sigma)[-\bar{v}_1(S) - \bar{v}_1(S - 2l) - 2l\bar{\theta}_I(S)] \right\},\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}\bar{v}_1(S - \nu) &= e^{-\nu p_S} \bar{v}_1(S), \\ \bar{v}_1(S) &= \frac{\bar{z}(S) - (l + \sigma)\bar{\theta}_I(S)}{\sigma p_S + 1}, \\ \int_0^{2l} (l - \nu)\bar{\theta}_I(S) d\nu &= 0, \\ - \int_0^{2l} \bar{v}_1(S - \nu) d\nu &= \frac{e^{2lp_S} - 1}{p_S(\sigma p_S + 1)} [\bar{z}(S) - (l + \sigma)\bar{\theta}_I(S)], \\ \int_0^{2l} \bar{z}(S)(l - \nu) d\nu &= 0, \\ - \int_0^{2l} \bar{v}_1(S - \nu)(l - \nu) d\nu &= l \frac{e^{2lp_S} - 1}{p_S(\sigma p_S + 1)} [\bar{z}(S) - (l + \sigma)\bar{\theta}_I(S)] + \\ &\quad + \frac{\bar{z}(S) - (l + \sigma)\bar{\theta}_I(S)}{\sigma p_S + 1} \frac{1}{p_S} \left[ \frac{1}{p_S} (1 - e^{-2lp_S}) - 2le^{-2lp_S} \right],\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}\bar{F}(S) &= K \left\{ \left[ 2(l + \sigma) - \frac{1}{\sigma p_S + 1} \left( -\frac{1}{p_S} (e^{-2lp_S} - 1) + \sigma(e^{-2lp_S} + 1) \right) \right] \bar{z}(S) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l + \sigma}{\sigma p_S + 1} \left[ -\frac{1}{p_S} (e^{-2lp_S} - 1) + \sigma(e^{-2lp_S} + 1) \right] \bar{\theta}_I(S) \right\},\end{aligned}\tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}(S) = & -K \left\{ \frac{1}{p_S(\sigma p_S + 1)} \left[ \left[ \left[ l - \frac{1}{p_S} + \sigma(l + \sigma)p_S \right] (1 - e^{-2lp_S}) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - 2le^{-2lp_S} \right] \bar{z}(S) - \left[ \left[ 2l \left[ \frac{l^2}{3} + \sigma(l + \sigma) \right] + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{l + \sigma}{p_S(\sigma p_S + 1)} \left[ \left( l + \frac{1}{p_S} + \sigma(l + \sigma)p_S \right) (e^{-2lp_S} - 1) - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - 2le^{-2lp_S} \right] \right] \bar{\theta}_I(S) \right\}. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Обозначая в выражении (2.19) коэффициенты при  $\bar{z}(S)$  и  $\bar{\theta}_I(S)$  через  $F_{\bar{z}}(p_S)$  и  $F_{\bar{\theta}_I}(p_S)$ , запишем (2.19) следующим образом:

$$\bar{F}(S) = \bar{F}_{\bar{z}}(S)\bar{z}(S) + \bar{F}_{\bar{\theta}_I}(S)\bar{\theta}_I(S). \tag{2.21}$$

Коэффициент  $F_{\bar{z}}(p_S)$  представляет собой передаточную функцию шины при наличии боковых перемещений колеса  $z(S)$  и отсутствии угловых поворотов на угол  $\theta_1(S)$ . Соответственно  $F_{\bar{\theta}_I}(p_S)$  представляет собой передаточную функцию только от угловых поворотов колеса  $\theta_1(S)$ .

Подставляя в (2.19) вместо  $p_S$  выражение  $j\omega_S$  и используя формулу Эйлера

$$e^{-2lj\omega_S} = \cos 2l\omega_S - j \sin 2l\omega_S,$$

получим после несложных преобразований следующее выражение для частотной передаточной функции  $F_{\bar{z}}(j\omega_S)$ :

$$\begin{aligned}
F_{\bar{z}}(j\omega_S) = & K \left\{ 2(1 + \sigma) - \frac{1}{1 + \sigma^2 \omega_S^2} \left( \left[ \sigma(\cos 2l\omega_S + 1) + \frac{\sin 2l\omega_S}{\omega_S} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sigma \omega_S \left[ \frac{\cos 2l\omega_S - 1}{\omega_S} - \sigma \sin 2l\omega_S \right] \right) + \frac{j}{1 + \sigma^2 \omega_S^2} \left( \left[ -\frac{\cos 2l\omega_S - 1}{\omega_S} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \sigma \sin 2l\omega_S \right] + \sigma \omega_S \left[ \frac{\sin 2l\omega_S}{\omega_S} + \sigma(\cos 2l\omega_S + 1) \right] \right) \right\} = \\
& = \operatorname{Re} F_{\bar{z}}(j\omega_S) + j \operatorname{Im} F_{\bar{z}}(j\omega_S). \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Частотная передаточная функция  $F_{\bar{\theta}_I}(j\omega_S)$  имеет вид:

$$F_{\bar{\theta}_I}(j\omega_S) = K \frac{1 + \sigma}{1 + \sigma^2 \omega_S^2} \left\{ \left[ \left[ \sigma(\cos 2l\omega_S + 1) + \frac{\sin 2l\omega_S}{\omega_S} \right] + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma \omega_S \left[ \frac{\cos 2l\omega_S - 1}{\omega_S} - \sigma \sin 2l\omega_S \right] + j \left( \left[ \frac{\cos 2l\omega_S - 1}{\omega_S} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \sigma \sin 2l\omega_S \right] - \sigma \omega_S \left[ \frac{\sin 2l\omega_S}{\omega_S} + \sigma (\cos 2l\omega_S + 1) \right] \right) \Bigg\} = \\
& = \operatorname{Re} F_{\bar{\theta}_I}(j\omega_S) + j \operatorname{Im} F_{\bar{\theta}_I}(j\omega_S). \tag{2.23}
\end{aligned}$$

На основании (2.21)–(2.23)  $\bar{F}(S)$  записывается так

$$\begin{aligned}
\bar{F}(S) = & [\operatorname{Re} F_{\bar{z}}(j\omega_S) + j \operatorname{Im} F_{\bar{z}}(j\omega_S)] \bar{z}(S) + [\operatorname{Re} F_{\bar{\theta}_I}(j\omega_S) + \\
& + j \operatorname{Im} F_{\bar{\theta}_I}(j\omega_S)] \bar{\theta}_I(S).
\end{aligned}$$

Аналогичным образом получим выражение для  $\bar{M}(S)$ :

$$\begin{aligned}
\bar{M}(S) = & -\{[\operatorname{Re} M_{\bar{z}}(j\omega_S) + j \operatorname{Im} M_{\bar{z}}(j\omega_S)] \bar{z}(S) + [\operatorname{Re} M_{\bar{\theta}_I}(j\omega_S) + \\
& + j \operatorname{Im} M_{\bar{\theta}_I}(j\omega_S)] \bar{\theta}_I(S)\}. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \bar{M}_{\bar{z}}(j\omega_S) = & -\frac{K}{\sigma^2 \omega_S^2 + 1} \left[ (l - \sigma) \frac{\sin 2l\omega_S}{\omega_S} + \sigma(l + \sigma)(\cos 2l\omega_S - \right. \\
& \left. - 1 - \sigma \omega_S \sin 2l\omega_S) + \frac{\cos 2l\omega_S - 1}{\omega_S} + \sigma(\cos 2l\omega_S + 1) \right], \\
\operatorname{Im} \bar{M}_{\bar{z}}(j\omega_S) = & -\frac{K}{\sigma^2 \omega_S^2 + 1} \left[ \sin 2l\omega_S \left( \sigma + \frac{1}{\omega_S^2} \right) + \sigma(l + \sigma)(\sin 2l\omega_S - \right. \\
& \left. + \sigma \omega_S \cos 2l\omega_S - \omega_S \sigma) + \frac{\sigma(\cos 2l\omega_S - 1)}{\omega_S} + \frac{l(\cos 2l\omega_S + 1)}{\omega_S} \right], \\
\operatorname{Re} M_{\bar{\theta}_I}(j\omega_S) = & -2Kl \left[ \frac{l^2}{3} + \sigma(l + \sigma) \right] - (l + \sigma) \operatorname{Re} M_{\bar{z}}(j\omega_S), \\
\operatorname{Im} M_{\bar{\theta}_I}(j\omega_S) = & (l + \sigma) \operatorname{Im} M_{\bar{z}}(j\omega_S).
\end{aligned}$$

При  $z = t\theta_1 + L\psi$  формулы для частотных характеристик примут вид

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} F_{\bar{\theta}_I}(j\omega_S) = & K \left\{ 2t(l + \sigma) - \frac{t}{1 + \sigma^2 \omega_S^2} \left[ \frac{\sin 2l\omega_S}{\omega_S} + \sigma(\cos 2l\omega_S + 1) \right] - \right. \\
& - \frac{t\sigma\omega_S}{1 + \sigma^2 \omega_S^2} \left[ \frac{\cos 2l\omega_S - 1}{\omega_S} - \sigma \sin 2l\omega_S \right] + \frac{l + \sigma}{1 + \sigma^2 \omega_S^2} \left[ \frac{\sin 2l\omega_S}{\omega_S} + \right. \\
& \left. \left. + \sigma(\cos 2l\omega_S + 1) \right] + \frac{\sigma(l + \sigma)\omega_S}{1 + \sigma^2 \omega_S^2} \left[ \frac{\cos 2l\omega_S - 1}{\omega_S} - \sigma \sin 2l\omega_S \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im} F_{\bar{\theta}_1}(j\omega_s) = K \left\{ -\frac{t}{1+\sigma^2\omega_s^2} \left[ \frac{\cos 2l\omega_s - 1}{\omega_s} - \sigma \sin 2l\omega_s \right] + \right. \\ \left. + \frac{t\sigma\omega_s}{1+\sigma^2\omega_s^2} \left[ \frac{\sin 2l\omega_s}{\omega_s} - \sigma(\cos 2l\omega_s + 1) \right] + \frac{l+\sigma}{1+\sigma^2\omega_s^2} \left[ \frac{\cos 2l\omega_s - 1}{\omega_s} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma \sin 2l\omega_s \right] - \frac{\sigma(l+\sigma)\omega_s}{1+\sigma^2\omega_s^2} \left[ \frac{\sin 2l\omega_s}{\omega_s} + \sigma(\cos 2l\omega_s + 1) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re} M_{\bar{\theta}_1}(j\omega_s) = -K \frac{t-(l+\sigma)}{1+\sigma^2\omega_s^2} \left[ (l-\sigma) \frac{\sin 2l\omega_s}{\omega_s} + \sigma(l+\sigma)(\cos 2l\omega_s - 1 - \right. \\ \left. - \sigma\omega_s \sin 2l\omega_s) + \frac{\cos 2l\omega_s - 1}{\omega_s} + 2l(\cos 2l\omega_s + 1) \right] + 2Kl \left[ \frac{l^2}{3} + 2(l+\sigma) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im} M_{\bar{\theta}_1}(j\omega_s) = K \frac{t-(l+\sigma)}{1+\sigma^2\omega_s^2} [(\sigma l + \omega_s^{-2}) \sin u + \sigma(l+\sigma)(\sin u + \\ + \sigma\omega_s(\cos u - 1)) + \sigma(\cos u - 1)\omega_s^{-1} - l(\cos u + 1)\omega_s^{-1}], u = 2l\omega_s \end{aligned}$$

$$\text{Re} F_{\psi}(j\omega_s) = \text{Re} F_{\bar{\psi}}(j\omega_s)L, \quad \text{Im} F_{\psi}(j\omega_s) = \text{Im} F_{\bar{\psi}}(j\omega_s)L,$$

$$\text{Re} M_{\psi}(j\omega_s) = \text{Re} M_{\bar{\psi}}(j\omega_s)L,$$

$$\text{Im} M_{\psi}(j\omega_s) = \text{Im} M_{\bar{\psi}}(j\omega_s)L.$$

При  $\omega_s \rightarrow 0$

$$\text{Re} F_{\bar{\theta}_1}(j\omega_s) \rightarrow 2K(l+\sigma)^2, \quad \text{Re} M_{\bar{\theta}_1}(j\omega_s) \rightarrow 2Kl \left[ \frac{l^2}{3} + \sigma(l+\sigma) \right].$$

Эти выражения представляют собой коэффициент сопротивления боковому уводу и пяточную жесткость шины.

Частотные передаточные функции  $F_{\theta}$ ,  $M_{\theta}$ ,  $F_{\psi}$  и  $M_{\psi}$  представляют собой комплексные жесткости шины по усилию и моменту при установившихся гармонических колебаниях по углам  $\theta$  и  $\psi$ .

Графики зависимостей

$$\frac{\text{Re} F_{\theta}}{\text{Re} F_{\theta} \omega_s \rightarrow 0} = \text{Re} F_{\theta}^*, \quad \frac{\text{Im} F_{\theta}}{\text{Re} F_{\theta} \omega_s \rightarrow 0} = \text{Im} F_{\theta}^*, \quad \frac{\text{Re} M_{\theta}}{\text{Re} M_{\theta} \omega_s \rightarrow 0} = \text{Re} M_{\theta}^*,$$

$$\frac{\text{Im} M_{\theta}}{\text{Re} M_{\theta} \omega_s \rightarrow 0} = \text{Im} M_{\theta}^*, \quad \frac{\text{Re} F_{\psi}}{\text{Re} F_{\theta} \omega_s \rightarrow 0} = \text{Re} F_{\psi}^*, \quad \frac{\text{Im} F_{\psi}}{\text{Re} F_{\theta} \omega_s \rightarrow 0} = \text{Im} F_{\psi}^*,$$

$$\frac{\text{Re} M_{\psi}}{\text{Re} M_{\theta} \omega_s \rightarrow 0} = \text{Re} M_{\psi}^*, \quad \frac{\text{Im} M_{\psi}}{\text{Re} M_{\theta} \omega_s \rightarrow 0} = \text{Im} M_{\psi}^*$$

от путевой частоты  $\omega_s$  приведены на рис. 2.6.

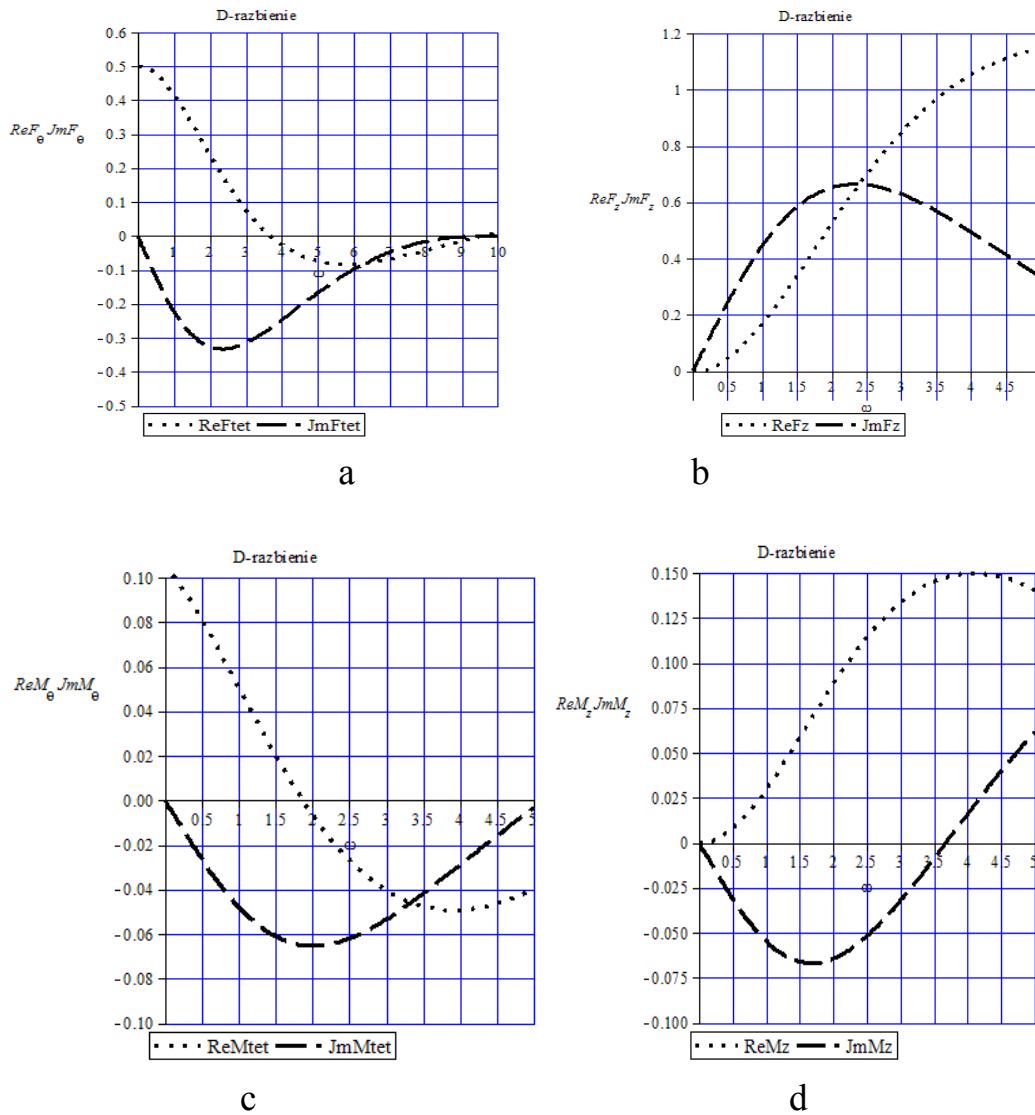


Рис. 2.6. Частотные передаточные функции

## 2.4. Приближенные выражения частотных характеристик шины

Если к уравнению кинематической связи

$$(t-l)\dot{\theta} + V\theta + L_{cm}\dot{\psi} - \sigma\varphi - V\varphi = 0$$

применим преобразование Лапласа (при нулевых начальных условиях), тогда получим

$$[(t-l)p + V]L[\theta] + L_{cm}pL[\psi] - (\sigma p + V)\varphi = 0.$$

Положим  $\psi = 0$ .

Отношение преобразований Лапласа есть передаточная функция вида

$$\frac{L[\varphi]}{L[\theta]} = \frac{(t-l)p + V}{\sigma p + v} = W(p).$$

При гармоническом изменении угла  $\theta$  частотная передаточная функция  $W_{\varphi\theta}(j\omega)$  выглядит следующим образом:

$$W_{\varphi\theta}(j\omega) = \frac{(t-l)j\omega + V}{\sigma j\omega + V} \frac{V - \sigma j\omega}{V - \sigma j\omega} = \frac{(t-l)\sigma\omega^2 + V^2}{\sigma^2\omega^2 + V^2} + j \frac{(t-l) - \sigma}{\sigma^2\omega^2 + V^2} \omega V = \operatorname{Re}W_{\varphi\theta}(j\omega) + j\operatorname{Im}W_{\varphi\theta}(j\omega)$$

Введем  $\omega_S = \frac{\omega}{V}$  или  $\omega = \omega_S V$ , тогда

$$\operatorname{Re}W_{\varphi\theta} = \frac{(t-l)\sigma\omega^2 + V^2}{\sigma^2\omega^2 + V^2} = \frac{(t-l)\sigma\omega_S^2 V^2 + V^2}{\sigma^2\omega_S^2 V^2 + V^2} = \frac{(t-l)\sigma\omega_S^2 + 1}{\sigma^2\omega_S^2 + 1},$$

$$\operatorname{Im}W_{\varphi\theta} = \frac{(t-l) - \sigma}{\sigma^2\omega^2 + V^2} \omega V = \frac{(t-l) - \sigma}{\sigma^2\omega_S^2 V^2 + V^2} \omega_S V^2 = \frac{(t-l) - \sigma}{\sigma^2\omega_S^2 + 1} \omega_S.$$

Усилие, действующее на шину  $F = K_{yb}\varphi$ , можно записать в виде

$$L[F] = K_{yb}L[\phi] = K_{yb} \left[ \frac{(t-l)\sigma\omega_S^2 + 1}{\sigma^2\omega_S^2 + 1} + j\omega_S \frac{(t-l) - \sigma}{\sigma^2\omega_S^2 + 1} \right] L[\theta],$$

$$\frac{L[F]}{L[\theta]} = K_{yb} \left[ \frac{(t-l)\sigma\omega_S^2 + 1}{\sigma^2\omega_S^2 + 1} + j\omega_S \frac{(t-l) - \sigma}{\sigma^2\omega_S^2 + 1} \right],$$

$$\operatorname{Re}L[F_\theta] = K_{yb} \frac{(t-l)\sigma\omega_S^2 + 1}{\sigma^2\omega_S^2 + 1}, \quad \operatorname{Re}L[F_\theta]_{\omega_S \rightarrow 0} = K_{yb},$$

$$\operatorname{Im}L[F_\theta] = K_{yb} \frac{(t-l) - \sigma}{\sigma^2\omega_S^2 + 1} \omega_S.$$

$$\frac{\operatorname{Re}L[F_\theta]}{\operatorname{Re}L[F_\theta]_{\omega_S \rightarrow 0}} = \frac{(t-l)\sigma\omega_S^2 + 1}{\sigma^2\omega_S^2 + 1} = \operatorname{Re}F'_\theta,$$

$$\frac{\operatorname{Im}L[F_\theta]}{\operatorname{Re}L[F_\theta]_{\omega_S \rightarrow 0}} = \frac{(t-l) - \sigma}{\sigma^2\omega_S^2 + 1} \omega_S = \operatorname{Im}F'_\theta.$$

Аналогично получаем выражения для  $M = b\varphi$

Теперь положим  $\theta = 0$ .

$$L_{ct} pL[\psi] - (\sigma p + V)L[\phi] = 0.$$

Передаточную функцию запишем как отношение преобразований Лапласа:

$$\frac{L[\phi]}{L[\psi]} = \frac{L_{cm}p}{\sigma p + V} = W(p).$$

При гармоническом изменении угла частотная передаточная функция выглядит следующим образом:



$$W_{\varphi\psi} = \frac{L_{cm}j\omega}{\sigma j\omega + V} = \frac{L_{cm}\sigma\omega^2}{\sigma^2\omega^2 + V^2} + j \frac{VL_{cm}\omega}{\sigma^2\omega^2 + V^2} =$$

$$= \operatorname{Re}W_{\varphi\psi}(j\omega) + j \operatorname{Im}W_{\varphi\psi}(j\omega).$$

При обозначении  $\omega_s = \frac{\omega}{V}$  или  $\omega = \omega_s V$ , получим:

$$\operatorname{Re}W_{\varphi\psi} = \frac{L_{cm}\sigma\omega_s^2 V^2}{V^2(\sigma^2\omega_s^2 + 1)} = \frac{\sigma L_{cm}\omega_s^2}{\sigma^2\omega_s^2 + 1},$$

$$\operatorname{Im}W_{\varphi\psi} = \frac{L_{cm}\omega_s V^2}{V^2(\sigma^2\omega_s^2 + 1)} = \frac{L_{cm}\omega_s}{\sigma^2\omega_s^2 + 1}.$$

Усилие, действующее на шину  $F = K_{y\psi}\varphi$  запишем

$$L[F] = K_{y\psi}L[\phi] = K_{y\psi} \left[ \frac{L_{ct}\sigma\omega_s^2}{\sigma^2\omega_s^2 + 1} + j\omega_s \frac{L_{cm}}{\sigma^2\omega_s^2 + 1} \right] L[\psi],$$

$$\frac{L[F]}{L[\psi]} = K_{y\psi} \left[ \frac{L_{ct}\sigma\omega_s^2}{\sigma^2\omega_s^2 + 1} + j\omega_s \frac{L_{cm}}{\sigma^2\omega_s^2 + 1} \right],$$

$$\operatorname{Re}L[F_\psi] = K_{y\psi} \frac{L_{ct}\sigma\omega_s^2}{\sigma^2\omega_s^2 + 1}, \quad \operatorname{Re}L[F_\psi]_{\omega_s \rightarrow 0} = K_{y\psi},$$

$$\operatorname{Im}L[F_\psi] = K_{y\psi} \frac{L_{cm}}{\sigma^2\omega_s^2 + 1} \omega_s.$$

$$\frac{\operatorname{Re}L[F_\psi]}{\operatorname{Re}L[F_\psi]_{\omega_s \rightarrow 0}} = \frac{L_{ct}\sigma\omega_s^2}{\sigma^2\omega_s^2 + 1} = \operatorname{Re}F'_\psi,$$

$$\frac{\operatorname{Im}L[F_\psi]}{\operatorname{Re}L[F_\psi]_{\omega_s \rightarrow 0}} = \frac{L_{cm}}{\sigma^2\omega_s^2 + 1} \omega_s = \operatorname{Im}F'_\psi.$$

Аналогично получаем выражения для  $M = b\varphi$ .

## 2.5. Уравнения шимми колеса опоры с демпфером

Линеаризованные уравнения движения колеса относительно невозмущенного положения имеют вид

$$\begin{cases} J_x \ddot{\psi} + C_\psi \psi + J_{xy} \ddot{\theta} + \frac{Vi}{r} \dot{\theta} + F(\varphi)L_c = 0 \\ J_{xy} \ddot{\psi} - \frac{Vi}{r} \dot{\psi} + J_y \ddot{\theta} + C_\theta(\theta - \chi) + tF(\varphi) + M(\varphi) = 0 \\ h\dot{\chi} - C_\theta(\theta - \chi) = 0 \\ (t-l)\dot{\theta} + V\theta + L_c \dot{\psi} - \sigma\dot{\varphi} - V\varphi = 0 \end{cases}$$

где

$$F(\varphi) = k_y b \varphi = 2k(l + \sigma)^2 \varphi,$$

$$M(\varphi) = 2kl \left[ \frac{l^2}{3} + \sigma(l + \sigma) \right] \varphi$$

Предполагается, что струна, моделирующая шину, на участке контакта с землей прямолинейна и расположена под углом  $\varphi = \lambda_1 / \sigma$ .

Система уравнений с использованием частотных характеристик шины записывается следующим образом

$$\begin{cases} (C_\psi - J_x V^2 \omega_s^2 + L_c^2 F_{\bar{z}}) \tilde{\psi} + \left[ \frac{V^2 i}{r} j \omega_s - J_{xy} V^2 \omega_s^2 + L_c (F_{\bar{z}t} + F_{\bar{\theta}}) \right] \tilde{\theta} = 0 \\ (t F_{\bar{z}} L_c - J_{xy} V^2 \omega_s^2 - V^2 i / r + M_{\bar{z}} L_c) \tilde{\psi} + [-J_y V^2 \omega_s^2 + (C_\theta + t)(F_{\bar{z}t} + F_{\bar{\theta}} + M_{\bar{z}t} + M_{\bar{\theta}})] \tilde{\theta} = C_\theta \tilde{\chi} \\ (h v j \omega_s + C_\theta) \tilde{\chi} - C_\theta \tilde{\theta} = 0 \end{cases}$$

где  $F_{\bar{z}}$  определяется из (2.2.21),  $F_{\bar{z}t} + F_{\bar{\theta}} = \text{Re}(F_{\bar{z}t} + F_{\bar{\theta}}) + j \text{Im}(F_{\bar{z}t} + F_{\bar{\theta}})$ ,

$M_{\bar{z}}$  находится из (2.22), а  $M_{\bar{z}t} + M_{\bar{\theta}} = \text{Re}(M_{\bar{z}t} + M_{\bar{\theta}}) + j \text{Im}(M_{\bar{z}t} + M_{\bar{\theta}})$ .

(Систему обозначим через (2.25)).

Используя эту систему уравнений для составления характеристического полинома, можно произвести Д-разбиение по параметрам  $h, C_\eta$  для различных  $\omega_s$ .

### 3. Теория качения с учетом продольной деформации шины

Одним из средств борьбы с шимми двухколесной или управляемой опоры шасси самолета является блокировка колес, то есть соединение их между собой валом. Этот вал с двух сторон жестко соединен с ободами колес. Вал имеет возможность вращаться в подшипниках, установленных в нижней части штока (рис. 3.1). Здесь 1 – цилиндр стойки, 2 – шток, 3 – подшипники, 4 – блокирующий вал, 5 – обод колеса.

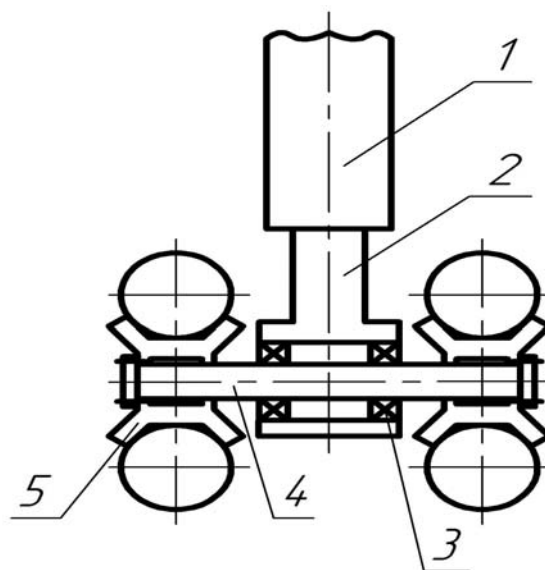


Рис. 3.1. Схема блокировки колес опоры шасси самолета

В работе Гоздека В.С. [14] развита теория качения шины сблокированного колеса, в которой рассмотрены вопросы связи поперечных и продольных колебаний колеса с параметрами деформации шины, а также даны выражения реакций земли, действующих на колесо при его колебаниях.

#### 3.1. Связи между функциями, описывающими движение обода колеса и деформации шины

Пусть колесо с упругой шиной, прижатой к земле постоянной вертикальной нагрузкой, катится с постоянной скоростью  $V$ , совершая малые поперечные колебания. Выберем движущуюся с той же скоростью  $V$  прямоугольную систему координат  $OXYZ$ , ось  $OX$  которой лежит на земле и направлена против движения, а ось  $OY$  перпендикулярна земле (рис. 3.2).

Свяжем с недеформируемым ободом колеса прямоугольную систему координат  $O'X'Y'Z'$ , причем расположим ось  $O'X'$  на поверхности земли в диаметральной плоскости колеса, а ось  $O'Y'$  направим через центр колеса. Выразим возмущенное движение обода смещением  $z^*(\tau)$  точки  $O'$  вдоль оси  $OZ$ , углом  $\theta(\tau)$  между осями  $OX$  и  $O'X'$  и углом  $\psi(\tau)$  между осями  $OY$  и  $O'Y'$ .

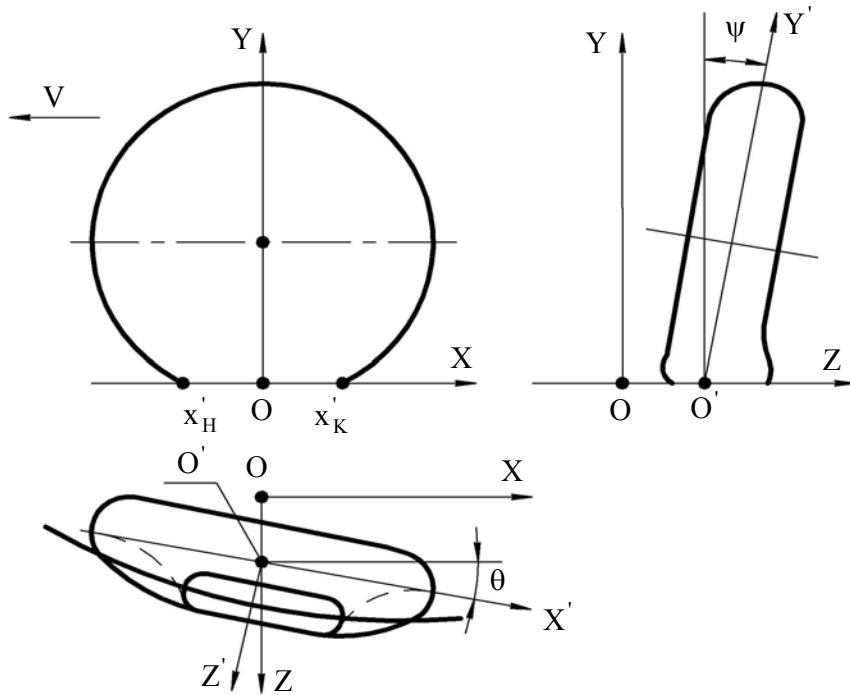


Рис. 3.2. Схема колеса с упругой шиной, прижатой к земле

Будем называть линию, образованную точками поверхности шины, лежащими в диаметральной плоскости колеса при невозмущенном качении, средней линией шины, а точку средней линии, совпадающую при невозмущенном движении с точкой  $O'$  – центром контакта. Шину будем считать идеально упругим невесомым телом. Будем характеризовать точки средней линии при невозмущенном движении расстоянием  $x'$  от точки  $O'$  вдоль дуги средней линии, принимая положительными значения  $x'$ , отсчитываемые в направлении оси  $O'X'$ . Пусть точки  $x'_н$  и  $x'_к$  лежат соответственно в начале и в конце зоны контакта шины с землей. Предположим, что вызываемая поперечными колебаниями обода реакция на шину со стороны земли определяется углом  $\psi$  и смещением  $\Lambda(x', \tau)$  из плоскости  $X'O'Y'$  точек средней линии внутри зоны ее контакта с землей, причем  $\Lambda(x', \tau)$  представимо рядом

$$\Lambda(x', \tau) = \lambda(\tau) + x' \varphi(\tau) + \frac{x'^2}{2} \varepsilon(\tau), \quad (3.1)$$

где  $\lambda(\tau), \varphi(\tau), \varepsilon(\tau)$  – смещение и поворот средней линии относительно обода колеса, а также кривизна при  $x' = 0$ .

Если предположить, что при качении шины не происходит проскальзывания вбок точек средней линии относительно земли, то функция  $\Lambda(x', \tau)$  должна удовлетворять уравнению, отражающему равенство нулю абсолютной скорости перемещения вбок любой точки средней линии. Абсолютная скорость складывается из переносной скорости в системе координат  $OXYZ$

$$V_{\text{пер}} = \frac{dz^*}{d\tau} + V\theta + \omega_{y,x'}$$

и относительной

$$V_{\text{омн}} = \frac{d\Lambda}{d\tau} = \frac{\partial\Lambda}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \tau} - \frac{\partial\Lambda}{\partial \tau}.$$

Так как  $\omega_y = \frac{d\theta}{d\tau}$ , а  $\frac{dx'}{d\tau} = -V$ , получаем окончательно

$$V_{\text{пер}} - V_{\text{омн}} = x' \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\partial\Lambda}{\partial \tau} + \frac{dz^*}{d\tau} + \frac{\partial\Lambda}{\partial x'} V + V\theta = 0 \quad (x'_n < x' < x'_k) \quad (3.2)$$

Подчиним функцию (3.1) уравнению (3.2) в окрестности точки  $O'$  с точностью до слагаемых, пропорциональных  $x'^2$ . Это приводит к следующей зависимости между функциями, характеризующими движение обода и деформацию шины:

$$\frac{dz^*}{d\tau} + V\theta + V\varphi + \frac{d\lambda}{d\tau} = 0, \quad (3.3)$$

$$V\varepsilon + \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d\theta}{d\tau} = 0.$$

Допустим, что благодаря условиям равновесия элементов шины кривизна ее средней линии в плоскости земли в обе стороны от зоны контакта с землей линейно зависит от угла  $\psi$ , а также от значений функции  $\Lambda(x', \tau)$  и ее первых производных по  $x'$  в точках  $x'_n$  и  $x'_k$ . В передней точке контакта материал шины свободно прилегает к земле, поэтому кривизна средней линии в плоскости земли, определяемая до сцепления точек шины с землей равновесием элементов шины, должна оставаться непрерывной в точке  $x'_n$ . Следовательно, функция  $\varepsilon(\tau)$  связана линейной зависимостью с функциями  $\lambda(\tau), \varphi(\tau), \psi(\tau)$

$$\varepsilon(\tau) = \alpha\lambda(\tau) - \beta\varphi(\tau) + \gamma\psi(\tau), \quad (3.4)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – постоянные, зависящие от реального обжатия шины и его геометрических и жесткостных характеристик.

Условия (3.3) и (3.4) связывают поперечные колебания катящегося колеса с деформацией шины.

Движение обода колеса при продольных колебаниях характеризуется смещением  $x^*(\tau)$  точки  $O'$  вдоль оси  $OX$ , смещением  $y^*(\tau)$  центра колеса вдоль оси  $OY$ , и приращением  $\omega(\tau)$  угловой скорости вращения обода в сравнении с невозмущенным движением. Пусть точки средней линии внутри зоны контакта смещаются вдоль оси  $O'X'$  на величину  $\Xi(x', \tau)$  из положения, занимаемого этими точками при невозмущенном движении

$$\Xi(x', \tau) = \xi(\tau) + x'v(\tau) \quad (x'_n < x' < x'_k) \quad (3.5)$$

где  $\xi(\tau)$  и  $v(\tau)$  – смещение центра контакта и продольное относительное растяжение материала шины в точке  $O'$ .

При отсутствии проскальзывания точек средней линии в продольном направлении функция  $\Xi(x', \tau)$  должна удовлетворять уравнению

$$V \frac{\partial \Xi}{\partial x'} + \frac{\partial \Xi}{\partial \tau} + \frac{dx^*}{d\tau} + r_0 \omega = 0 \quad (x'_n < x' < x'_k) \quad (3.6)$$

где  $r_0$  – радиус качения шины при невозмущенном движении колеса. Пусть функция (3.5) удовлетворяет уравнению (3.6) только в точке  $O'$ . Тогда функции  $\xi(\tau)$ ,  $v(\tau)$ ,  $x^*(\tau)$  и  $\omega(\tau)$  связаны соотношением

$$V v(\tau) + \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{dx^*}{d\tau} + r_0 \omega = 0. \quad (3.7)$$

Предположим, что вызываемая продольными колебаниями обода реакция на шину со стороны земли зависит как от смещения  $\Xi(x', \tau)$ , так и от приращения радиального обжатия  $y^*(\tau)$ . Принимая во внимание особенность процесса качения шины, аналогично изложенной при рассмотрении поперечных колебаний обода, получим следующую зависимость между функциями  $\xi(\tau)$ ,  $v(\tau)$  и  $y^*(\tau)$ :

$$v(\tau) = \mu \xi(\tau) + \sigma y^*(\tau), \quad (3.8)$$

где  $\mu$  и  $\sigma$  – постоянные, характеризующие свойства шины. Условия (3.7) и (3.8) связывают продольное движение обода колеса с деформацией его шины.

### 3.2. Реакции земли на шину

Представим реакции со стороны земли на колесо при его поперечных колебаниях боковой силой  $F_z$  и моментом  $M_y$ , приложенными в точке  $O'$ , без учета перераспределения нормальной нагрузки на шину при ее деформации. Выразим компоненты реакции земли функциями переменных  $\psi, \lambda, \varphi, \varepsilon$ , учитывая симметрию шины:

$$F_z = a\lambda + a_1\varepsilon + a_2\psi; M_y = b\varphi$$

где  $a$  и  $b$  – боковая и пяточная жесткости шины соответственно. Коэффициенты  $a_1, a_2$ , стремящиеся к нулю с уменьшением вертикальной нагрузки на колесо, примем равными нулю в связи с относительной малостью составляющей силы  $F_z$ , зависящей от переменных  $\varepsilon, \psi$ , на режимах шимми колес.

Если пренебречь влиянием смещения точки приложения равнодействующей сил нормального давления со стороны земли на шину при его деформации, то дополнительная реакция со стороны земли при продольных колебаниях может быть представлена силами

$$F_x = c\xi, F_y = -(k_y^* + k_1 v),$$

приложенными в точке  $O'$ . Здесь  $c$  и  $k$  - продольная и радиальная жесткости шины. Коэффициент  $k_1$ , стремящийся к нулю при уменьшении радиальной усадки шины, примем равным нулю из-за относительной малости на режимах шимми колес составляющей силы  $F_z$ , зависящей от переменной  $\nu$ .

### 3.3. Уравнения шимми передней опоры со заблокированными колесами

Представим опору шасси схемой (рис. 3.3).

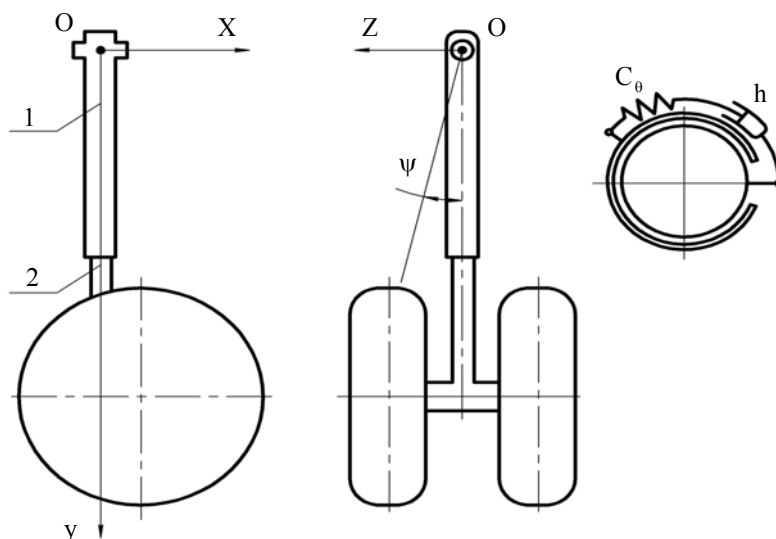


Рис. 3.3. Схема передней опоры шасси со заблокированными колесами

Абсолютно жесткий в боковом направлении цилиндр 1 упруго заделан на фюзеляже ЛА в точке  $O$  и может поворачиваться относительно оси  $OX$  на угол  $\psi$ . В цилиндре установлена ориентирующаяся часть 2, способная поворачиваться относительно оси  $OY$  на угол  $\theta$ . Между цилиндром и ориентирующейся частью включены последовательно демпфер с коэффициентом сопротивления  $h$  и пружина жесткостью  $C_\theta$ . Колеса 3 соединены между собой упругим на кручение валом.

Обозначим долю угла  $\theta$ , обусловленную перемещением демпфера через  $\chi$ , а углы поворота левого и правого колес относительно оси вращения – через  $\eta_1$  и  $\eta_2$ .

Так как для данной схемы  $x^* = d\theta + r\eta$  и  $y^* = d\psi$ , на основании (3.8), (3.9) уравнение кинематической связи примет вид

$$d\dot{\theta} + r\dot{\eta} + \dot{\xi} + \mu\nu\xi/r - d\nu\psi\sigma/r = 0 \quad (3.12)$$

Обозначим через  $M_x^0, M_y^0, M_1^0, M_2^0$  моменты сил, действующих со стороны земли на два колеса относительно осей  $O_x, O_y$  и на каждое из колес

относительно оси вращения, а углы поворота левого и правого (по движению самолета) относительно оси вращения – через  $\eta_1, \eta_2$ . Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} M_x^0 &= 2[a(l+r)\lambda + F_y dy^*] = \\ &= 2[a(l+r)\lambda - kd^2\psi], \\ M_y^0 &= 2[at\lambda + b\varphi + F_x d] \\ &= 2[at\lambda + b\varphi + cd\xi] \\ i\ddot{\eta}_1 + C_\eta(\eta_1 - \eta_2) &= M_1^0, \\ i\ddot{\eta}_2 - C_\eta(\eta_1 - \eta_2) &= M_2^0, \\ M_1^0 &= -M_2^0 = cr\xi \end{aligned}$$

Малые колебания колес относительно невозмущенного качения можно описать системой линеаризованных уравнений вида

$$\begin{aligned} J_x \ddot{\psi} + (C_\psi l^2 + 2kd^2)\psi + J_{xy} \ddot{\theta} + 2vi\dot{\theta}/r - 2a(l+r)\lambda &= 0 \\ J_{xy} \ddot{\psi} - 2vi\dot{\psi}/r + J_y \ddot{\theta} + C_\theta(\theta - \chi) - 2at\lambda - 2b\varphi - 2cd\xi &= 0 \\ h\dot{\chi} - C(\theta - \chi) &= 0 \\ i\ddot{\eta} + 2C_\eta\eta - cr\xi &= 0 \\ (l+r)\dot{\psi} + t\dot{\theta} + \dot{\lambda} + V\theta + V\varphi &= 0 \\ \dot{\phi} + \dot{\theta} - \alpha V\lambda + \beta V\varphi - \gamma V\psi &= 0 \\ d\dot{\theta} + r\dot{\eta} + \dot{\xi} - \sigma dV\xi/r + \mu V\xi/r &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Приведем (3.14) к безразмерной форме, используя следующие соотношения между размерными и безразмерными величинами в виде

$$\begin{aligned} l &= \bar{l}r, t = \bar{t}r, d = \bar{d}r, \lambda = \bar{\lambda}r, \xi = \bar{\xi}r, \\ J_x &= \bar{J}_x 2mr^2, J_y = \bar{J}_y 2mr^2, J_{xy} = \bar{J}_{xy} 2mr^2, \\ i &= \bar{i}mr^2, b = \bar{b}ar^2, c = \bar{c}a, k = \bar{k}a, \\ C_\theta &= \bar{C}_\theta 2ar^2, C_\psi = \bar{C}_\psi 2a, C_\eta = \bar{C}_\eta 2ar^2, \\ h &= \bar{h}2\sqrt{amr^2}, v = \bar{v}\sqrt{ar/m}, \alpha = \bar{\alpha}/r^2, \beta = \bar{\beta}/r, \gamma = \bar{\gamma}/r \end{aligned}$$

Здесь  $m$  – масса колеса,  $a$  – боковая жесткость шины,  $r$  – радиус шины. Система уравнений (черточки над переменными опущены) запишется в виде

$$\begin{aligned} \{ J_x \ddot{\psi} + (C_\psi l^2 + kd^2)\psi + J_{xy} \ddot{\theta} + iv\dot{\theta} - (l+1)\lambda &= 0, \\ J_{xy} \ddot{\psi} - iv\dot{\psi} + J_y \ddot{\theta} + C_\theta(\theta - \chi) - t\lambda - b\varphi - cd\xi &= 0, \\ h\dot{\chi} - C_\theta(\theta - \chi) &= 0, \\ i\ddot{\eta} = 4C_\eta\eta - c\xi &= 0, \\ (l+1)\dot{\psi} + t\dot{\theta} + \dot{\lambda} + v\theta + v\varphi &= 0, \\ \dot{\theta} + \dot{\phi} - v(\alpha\lambda - \beta\varphi + \gamma\psi) &= 0, \\ d\dot{\theta} + \dot{\eta} + \dot{\xi} - v(\sigma d\psi - \mu\xi) &= 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$



### 3.4. Частотные характеристики при продольных колебаниях колес

Влияние блокировки колес отражено в (3.16) дополнительным слагаемым  $M_\xi = -cd\xi$  в уравнении моментов относительно оси «у» по сравнению с опорой с независимо вращающимися колесами. Выразим  $\xi$  через координаты  $\psi, \theta$ , а момент  $M_\xi$  представим как  $\tilde{M}_\xi = W_{\xi\psi}\tilde{\psi} + W_{\xi\theta}\tilde{\theta}$ , где  $W_{\xi\psi}, W_{\xi\theta}$  – передаточные функции.

Для этого рассмотрим четвертое и седьмое уравнения (3.15)

$$i\ddot{\eta} = 4C_\eta\dot{\eta} - c\xi = 0, \quad (3.16)$$

$$d\dot{\theta} + \dot{\eta} + \dot{\xi} - V(\sigma d\psi - \mu\xi) = 0 \quad (3.17)$$

Применяя к (3.16), (3.17) преобразование Лапласа и подставляя  $p = j\omega$ , выразим действительные и мнимые части передаточных функций в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}W_{\xi\psi} &= -cdB_1B_2 / z_n, \operatorname{Im}W_{\xi\psi} = \omega cdB_1B_2 / z_n, \\ \operatorname{Re}W_{\xi\theta} &= -cdB_3B_4\omega^2 / z_n, \operatorname{Im}W_{\xi\theta} = -\omega cdB_4B_2 / z_n, \\ B_1 &= A(-i\omega^2 + 4C_\eta), A = dv\sigma, \\ B_2 &= \mu v(-i\omega^2 + 4C_\eta), B_3 = (-i\omega^2 + 4C_\eta) + C, \\ B_4 &= -d(-i\omega^2 + 4C_\eta) \end{aligned} \quad (3.18)$$

В качестве примера построим зависимости (3.18) для следующих значений параметров  $\mu = 1, \sigma = 0.33, i = 0.25, C_\eta = 1; 3, C = 2, d = 0.5, \omega \in [0, 2], V = 0.5 \dots 2$ .

На рис. 3.4 приведены зависимости (3.18) от  $\omega$  при двух значениях  $C_\eta$  для скоростей  $V \in [0.5; 2]$ . Видно, что значения  $\operatorname{Re}W_{\xi\psi}$  отрицательны и с ростом  $\omega$  уменьшаются по модулю, а значения  $\operatorname{Im}W_{\xi\psi}$  положительны и имеют максимум по  $\omega$ . Изменение жесткости  $C_\eta$  и скорости  $v$  слабо влияет на составляющие передаточной функции  $W_{\xi\psi}$ .

Аналогичные зависимости составляющих передаточной функции  $W_{\xi\theta}$  показаны на рис. 3.4.

Видно, что  $\operatorname{Re}W_{\xi\theta}$  и  $\operatorname{Im}W_{\xi\theta}$  положительны и с изменением  $\omega$  имеют максимум. Можно показать, что для данной схемы опоры с двумя колесами применены блокировки эквивалентно введению между ориентирующей и неориентирующей частями дополнительного элемента, состоящего из параллельно соединенных пружины с коэффициентом жесткости  $C_{ef} = \operatorname{Re}W_{\xi\theta}$  и линейного демпфера с коэффициентом сопротивления

$$h_{ef} = \operatorname{Im}W_{\xi\theta} / \omega$$

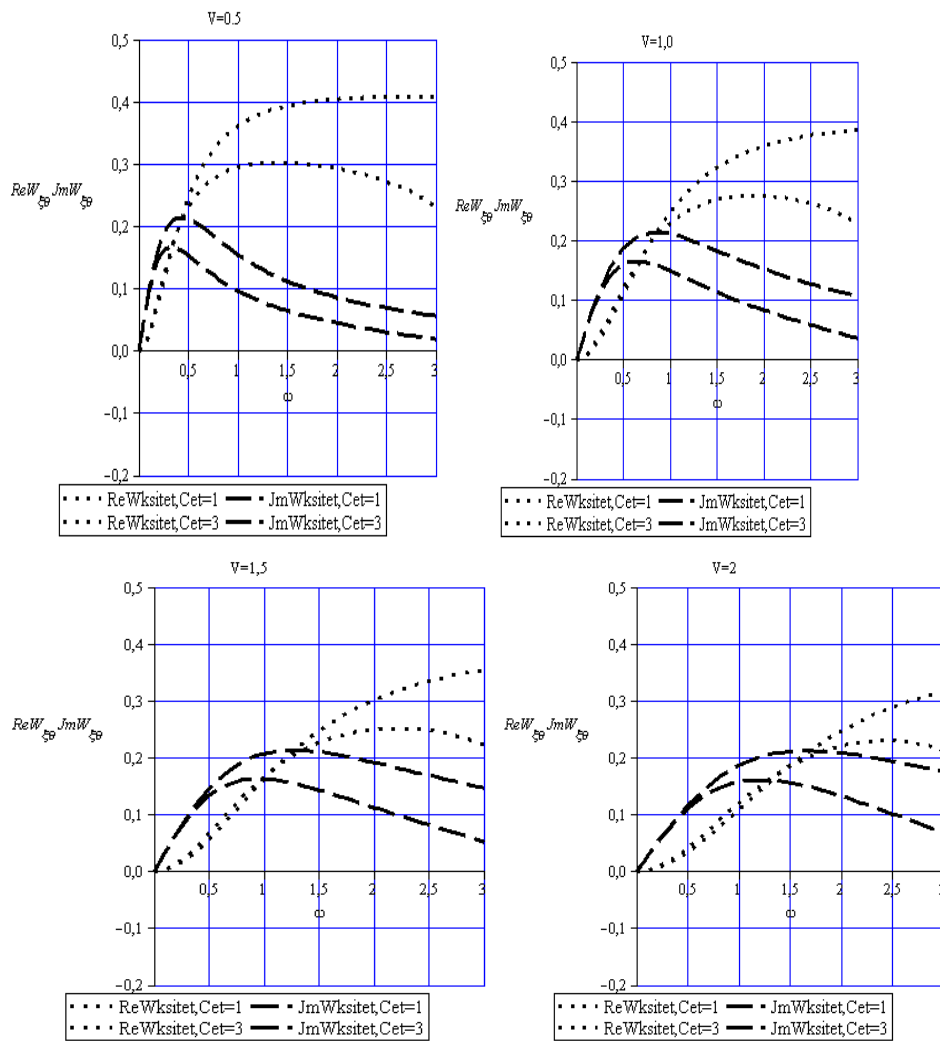


Рис. 3.4. Зависимости действительных и мнимых частей депердаторных функций от частоты

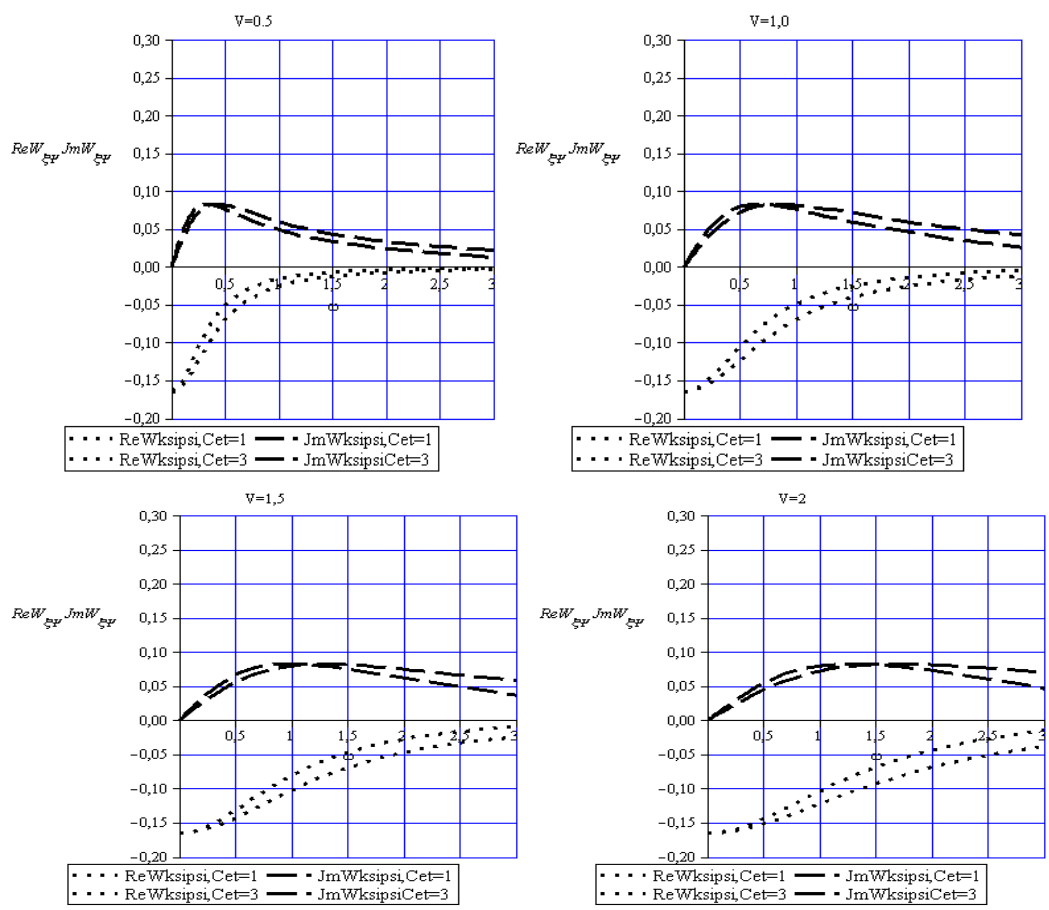


Рис. 3.5. Зависимости действительных и мнимых частей депердаточных функций от частоты

#### **4. Проект настольного стенда для исследования моделей колесных опор шасси летательных аппаратов**

Стенд относится к области машиностроения и может быть использован для изучения динамики моделей колесных опор шасси летательных аппаратов, при качении колеса по ровной поверхности и при сбросе опоры с некоторой высоты на перемещающуюся поверхность, а также использован для учебных целей.

Известны полноразмерные стенды для лабораторных динамических испытаний реальных опор шасси. На таких стендах проводятся испытания на шимми и работоспособность. Такие стенды содержат имеющую возможность вертикального перемещения клетки копра, на которой установлено приспособление с укрепленной на нем опорой шасси, а также вращающийся барабан. При испытаниях на шимми колесо опоры опускается на барабан, обжимается заданной нагрузкой, принудительно выводится из состояния невозмущенного качения и резко отпускается. Характеристики последующего свободного поперечного движения колеса определяют соответствие требованиям по устойчивости качения или необходимость доработки опоры. При испытаниях можно изменять нагрузку на колесо и скорость качения колеса.

Известен полноразмерный стенд, содержащий балку содержащий балку, на конце которой укреплена опора шасси, колесо которой имеет возможность по вращающемуся барабану. Балка схематизирует фюзеляж самолета. Испытания на таких стендах могут проводиться на реальных спроектированных и изготовленных опорах, имеющих неизменяемые геометрические, массовые и жесткостные параметры – при фиксированном обжатие амортизатора. Если по результатам испытаний требуется существенное изменение параметров для обеспечения устойчивости качения колеса, то это связано с большими материальными затратами и потерями времени.

В связи с большим разнообразием конструкций опор шасси (передних и основных), для каждой конкретной опоры необходимо проведение отдельных испытаний на полноразмерном стенде. Исследование устойчивости колес различных опор и влияние отдельных параметров на подверженность шимми потребует существенных затрат на агрегаты и испытания.

Целью настоящего проекта является повышение надежности конструктивных решений по обеспечению устойчивости колес от шимми, экономия средств, – путем проведения исследований на модели опоры во время проектирования реальной опоры.

Указанная цель достигается созданием настольного стенда, содержащего плиту – основание с установленным на ней имеющим возможность вращения относительно горизонтальной оси, цилиндром (барабаном), приводимым во вращение электродвигателем постоянного тока, обороты которого регулируются рукояткой трансформатора, электрическая цепь между

трансформатором и электродвигателем содержит мостик из диодов, имитирующая фюзеляж самолета. Конструкция крепится к находящимся на некоторой высоте над верхней плоскостью стенда проушинам с параллельной оси барабана горизонтальной осью, установленным на вертикально расположенном и прикрепленном к плите-основанию стержне, а на другом конце – имитирующей фюзеляж конструкции прикреплена модель опоры с колесом (колесами) таким образом, что касание колесом вращающегося барабана происходит при вертикальном положении опоры или под некоторым углом к вертикали, соответствующим положению реальной опоры на реальном самолете, при этом модель реальной опоры выполнена с геометрическими, инерциальными и жесткостными параметрами установки колеса (колес), рассчитанными на основании теории подобия с использованием следующих масштабов для перехода к безразмерным параметрам:

- радиус модельного колеса “ $r$ ”;
- масса колеса “ $m$ ”;
- боковая жесткость модельной шины “ $a$ ”.

Соотношения между размерными и безразмерными параметрами определяются согласно соотношениям работы [3].

На рисунке 4.1 изображен общий вид настольного стенда, а на рисунке 4.2 – его принципиальная схема.



Рис. 4.1. Общий вид настольного стенда

Стенд имеет плиту 1 с двумя опорами 2 барабана, содержащими подшипники качения 3. В опорах установлена ось для вращения барабана 4.

С одной боковой стороны барабана имеется жестко связанный с ним шкив 5. На некотором расстоянии от барабана имеется электродвигатель 6 постоянного тока, вал 7 которого соосен с осью барабана 4. На валу 7 имеется шкив 8. Передача вращения от шкива 8 на шкив барабана 5 осуществляется через ремень 9. К плите 1 прикреплена вертикально расположенная стойка 10, на верхнем конце которой имеются проушины 11 с отверстиями, ось которых параллельна оси барабана. К проушинам крепится имеющая возможность поворота в вертикальной плоскости узел 12 для установки модели 13 опоры. Модель опоры устанавливается на узле 12 таким образом, чтобы колесо (колеса) находилось на верхней части барабана, а угол установки модели опоры относительно вертикали был равен углу установки натурной опоры.

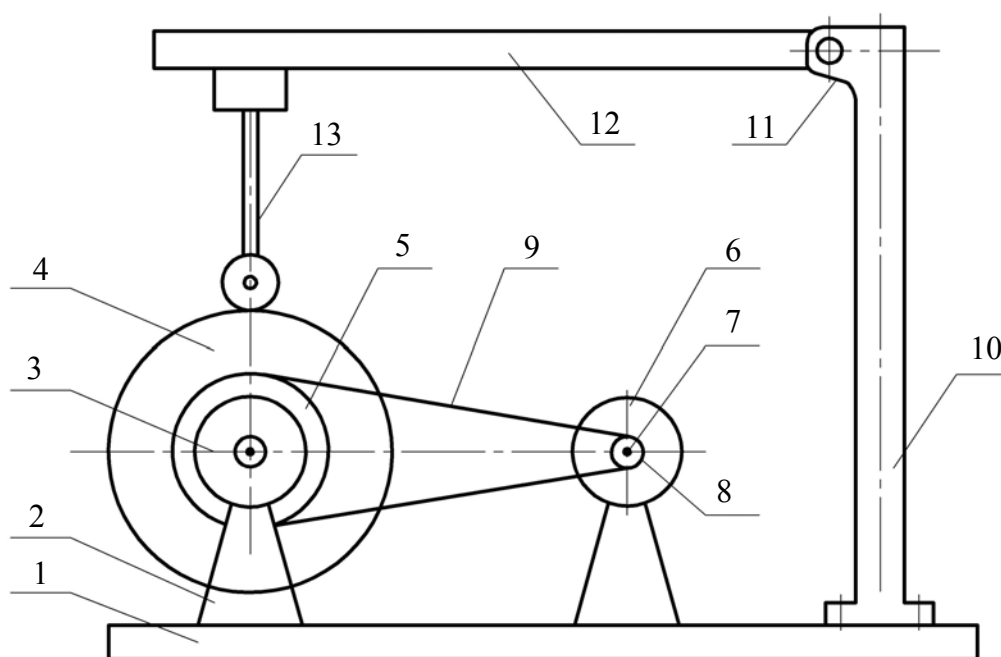


Рис. 4.2. Принципиальная схема стенда

Испытания модели опоры на настольном стенде позволят устранить расходы на доработку реальной опоры в части обеспечения устойчивости колес от шимми.

## Заключение

В настоящем учебно-методическом пособии приведен ряд известных теорий (М.В. Келдыша, В.С. Гоздека, Шлиппе и других) качения упругой шины, используемых при исследовании явления шимми авиационных и транспортных колес в составе изделий различного назначения. При этом также приведены новые математические модели и результаты численно-аналитических исследований авторов при изучении устойчивости и управляемости конкретных изделий, в частности, летательных аппаратов.

Большая часть содержания пособия относится к разработке методик по составлению уравнений, отражающих механизм взаимодействия шины с землей, которые могли быть пригодными при решении вопроса по предотвращению шимми колес транспортных средств.

Приведены новые физические и математические модели опор транспортных средств, описывающие боковые и угловые смещения колеса опоры, а также их жесткостные, массовые и демпфирующие параметры.

Следует заметить, что пособие содержит тщательный анализ уже существующих теорий качения и моделей шины, и современное развитие этих теорий качения. Найдены также аналитические зависимости для расчета действующих на колесо усилий и определены передаточные функции между угловыми, боковыми и продольными смещениями центра контакта шины и усилиями со стороны земли.

## Литература

1. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса шасси самолета // Труды ЦАГИ, № 564, 1945.
2. Певзнер Я.М. О качении автомобильных шин при быстро меняющихся режимах увода // Автомобильная промышленность, № 6, 1968.
3. Пчелин И.К., Хачатуров А.А. Исследование кинематических связей колеса с эластичной шиной и исследование его качения при переменном угле увода // Автомобильная промышленность, № 12, 1964.
4. Пчелин И.К., Хачатуров А.А. Применение уравнений кинематических связей для исследования устойчивости движения автомобиля с помощью аналоговых вычислительных машин // Автомобильная промышленность, № 5, 1966.
5. Тураев Х.Т., Фуфаев Н.А., Шишкин В.И. Определение кинематических параметров для изучения динамики транспортных машин // Автомобильная промышленность, № 12, 1974.
6. Ковалева О.Б. Применение моделей шины для анализа неустановившегося увода. Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н., Москва, 1975.
7. Кольцов В.И., Хачатуров А.А., Юдин В.С., Яковлев Е.И. Упрощенные упругие модели шин // Труды МАДИ, Вып. 91, 1974.
8. Segel L. "Forces and moment response of pneumatic tires to lateral motion input", ASME, Journal of Engineering for Industry, No 65, Aug. 1965.
9. Pacejka H.B. "The wheel shimmy phenomenon", P.H.D. thesis, Dec. 1966, Delft Technical Institute, Holland.
10. Von Schlippe V. "Shimmying of pneumatic wheel", NASA TM-1365, 1962.
11. Метрикин В.С., Пейсель М.А., Антоновская О.Г. К теории деформации колес летательного аппарата (Часть 1). Теория М.В.Келдыша и ее современные аспекты. Учебно-методическая разработка. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2004. – 35 с.
12. Метрикин В.С., Пейсель М.А., Антоновская О.Г. К теории деформации колес летательного аппарата (Часть 2). Теория М.В. Келдыша – В.С. Гоздека. Струнные модели. Учебно-методическое пособие. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2005. 43 с.
13. Гоздек В.С. О влиянии различных параметров на устойчивость движения ориентирующихся колес // Труды ЦАГИ, Вып. 915. М., 1964.
14. Гоздек В.С. Устойчивость качения заблокированных ориентирующихся колес шасси// Труды Цаги, Вып. 1196. М., 1970.
15. Метрикин В.С., Пейсель М.А. Об автоколебаниях колеса основной опоры шасси самолета// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. №4. Часть 2. 2011.С.230-231.
16. Метрикин В.С., Пейсель М.А. К расчету колебаний колеса основной опоры ЛА с учетом сил торможения// Известия Вузов. Авиационная техника, 2012, №2. С. 24-27.



**ТЕОРИИ КАЧЕНИЯ УПРУГОЙ ШИНЫ  
ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ШИММИ КОЛЕС  
ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ**

*Учебно-методическое пособие*

Составители:

**Владимир Семенович Метрикин**  
**Михаил Абрамович Пейсель**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского»  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.  
Усл. печ. л. Уч.-изд. л.  
Заказ № . Тираж 50 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета  
им. Н.И. Лобачевского  
603 000, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37