

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

И.Ю. Грязнова
М.С. Лабутина
Н.В. Прончатов-Рубцов

ТЕОРИЯ ОДНОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ВОЛН И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ АКУСТИКИ ПРИРОДНЫХ СРЕД

Учебное пособие

Рекомендовано Ученым Советом радиофизического факультета
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
03.03.03 «Радиофизика» и 02.03.02 «Фундаментальная информатика и
информационные технологии»

Нижний Новгород
2016

УДК 534.2 (075.8)
ББК В32я73
Г 92

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор **В.Г. Гавриленко**,
канд. физ.-мат. наук, доцент **О.В. Болховская**

Грязнова И.Ю., Лабутина М.С., Прончатов-Рубцов Н.Р. ТЕОРИЯ
ОДНОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ВОЛН И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ
АКУСТИКИ ПРИРОДНЫХ СРЕД: Учебное пособие. – Нижний Новгород:
Нижегородский госуниверситет, 2016. – 80 с.

Методическое пособие посвящено изучению физических основ распространения и рассеяния волн на флуктуациях неоднородной непрерывной среды. Оно знакомит студентов с основными статистическими характеристиками случайных полей и волн, уравнениями для волн, распространяющихся в случайно-неоднородных средах. Особое внимание уделяется изучению теории однократного рассеяния в приложении к задачам акустики. Изложены основы расчета рассеянных волн в борновском приближении, приведены вычисления средней интенсивности рассеянных волн. Обсуждаются особенности рассеяния на крупномасштабных и мелкомасштабных неоднородностях.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов IV курса радиофизического факультета ННГУ, изучающих курсы ООП «Распространение и рассеяние акустических волн в случайно-неоднородных средах», «Акустика океана» и «Акустика океана - численные методы».

Работа по подготовке данного пособия выполнена в рамках базовой части госзадания №134/14, проект 1822.

Ответственный за выпуск:
заместитель председателя методической комиссии радиофизического
факультета ННГУ
д.ф.-м.н., доцент **Е.З. Грибова**

УДК 534.2 (075.8)
ББК В32я73

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах	7
1.1. Статистические характеристики случайных полей	7
1.2. Уравнения для волн в случайно-неоднородных средах	14
1.3. Рассеянное поле в борновском приближении	19
1.4. Средняя интенсивность рассеяния	23
1.5. Эффективный поперечник рассеяния	26
1.6. Селективный характер рассеяния	31
1.7. Многократное рассеяние волн в случайно-неоднородных средах	35
1.8. Эффект затухания среднего поля	42
2. Акустические волны в случайно-неоднородных средах	43
2.1. Задачи рассеяния акустических волн	43
2.2. Рассеяние акустических волн на дискретных случайных неоднородностях	46
2.3. Средняя интенсивность обратного рассеяния	50
2.4. Рассеяние акустических волн на абсолютно жесткой уединённой сфере	53
2.5. Эффекты интерференции при обратном рассеянии	59
2.6. Коллективные эффекты рассеяния	63
2.7. Особенности распространения акустических волн в океане	71
Заключение	76
Литература	77

Введение

Случайные неоднородности реальных сред влияют на характеристики волн, распространяющихся в этих средах, и возникающие при этом явления чрезвычайно разнообразны. Мерцание звезд и флуктуации радиоизлучения от внеземных источников, замирание радиоволн и релеевское рассеяние света, уширение лазерных пучков в тропосфере и рассеяние звука в море – это лишь немногие примеры наблюдаемых эффектов.

Следует отметить, что явление рассеяния присуще волнам любой природы, будь то электромагнитное излучение, волны, описывающие движение ядерных частиц, сейсмические волны или гидролокационные сигналы. Так рассеяние звука случайными неоднородностями играет важную роль в формировании акустических полей в океане. Вследствие рассеяния возникает дополнительная многолучевость, появляются пространственно-временные флуктуации распространяющихся волн, уменьшается или вовсе утрачивается когерентность сигналов. Рассеянные поля – основная причина морской реверберации, уменьшающей эффективность работы гидроакустических устройств различного назначения. Причинами рассеяния в океане могут служить, например, флуктуации температуры и показателя преломления или дискретные препятствия. К дискретным рассеивателями относятся пузырьки воздуха, занесенные в воду ветром и поверхностным волнением, живые организмы, а также донные неоднородности, в том числе железо-марганцевые конкреции. Теория рассеяния звука в океане базируется на теории рассеяния случайными объемными неоднородностями среды и на теории рассеяния статистически неровными поверхностями.

С другой стороны, рассеянные сигналы содержат полезную информацию о параметрах самих неоднородностей, которая может быть извлечена из результатов измерений посредством решения обратных задач теории рассеяния. В зависимости от конкретной ситуации преобладают те или иные механизмы рассеяния.

Развитие теории распространения волн в случайно-неоднородных средах относится в основном ко второй половине XX века. Ей посвящены фундаментальные труды Рытова С.М., Кравцова Ю.А., Татарского В.И. [1], Чернова Л.А. [2], Бреховских Л.М., Лысанова Ю.П. [3], Кляцкина В.И. [4], Исимару А. [5,6]. Современные публикации позволяют оценить актуальность исследований в области изучения статистических характеристик полей и волн в случайных средах [7-12].

Задачи о распространении волн в средах с флуктуирующими параметрами решаются, как правило, приближенными методами. Дело в том, что соответствующие дифференциальные уравнения содержат в коэффициентах случайные функции координат и времени, описывающие неоднородную среду. Точное решение такой задачи практически не осуществимо. Это вынуждает обращаться к приближенным методам. Значительная часть этих задач может быть решена при помощи небольшого числа разработанных к настоящему времени приближенных методов.

В общем виде распространяющуюся в случайно-неоднородной среде волну U той или иной природы можно описать уравнением:

$$\hat{L}U = q,$$

где функция $q(\vec{r}, t)$ - характеризует распределение источников в пространстве и времени, оператор \hat{L} описывает неоднородную среду.

В связи с подобной постановкой динамической волновой задачи случайными могут быть:

- 1) источники (q);
- 2) случайная среда (\hat{L});
- 3) форма и положения границ раздела сред (s);
- 4) условия приема и регистрации волн.

К этим четырем схемам сводится постановка большинства задач статистической волновой теории. Возможны задачи и смешанного типа.

Мы остановимся на случае 2), опираясь на статистическую теорию волн, которая описывает распространение, затухание и рассеяние волн различной

природы в случайно-неоднородных средах, рассматривая при этом линейные не квантовые задачи.

Если относительные флуктуации параметров среды достаточно слабы, а рассеянное поле мало по сравнению с полем первичной волны, то применяется метод малых возмущений. Анализ полей, рассчитанных в первом порядке теории возмущений, составляет содержание теории однократного рассеяния.

При нарушении условий применимости теории однократного рассеяния (флуктуации в среде велики, рассеянное поле не мало) необходимо принимать во внимание двух-, трех- и так далее кратное рассеяние поле, то есть нужно строить теорию с учетом многократного рассеяния волн.

Цель данного методического пособия – показать достоинства и ограничения теории однократного рассеяния для расчета статистических характеристик волн, распространяющихся в случайно-неоднородных средах, показать возможности использования ее для решения задач акустики.

ГЛАВА 1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

1.1. Статистические характеристики случайных полей

В отличие от случайных процессов $\xi(t)$, являющихся функциями одного параметра – времени, случайные поля $\xi(\vec{r}, t)$ представляют собой случайные функции четырех параметров – координат и времени. Свойства случайной функции одного параметра могут быть распространены и обобщены на случайные поля.

Обозначим $Q(t, \vec{r})$ некоторую точку в четырехмерном пространстве. Тогда случайное поле можно рассматривать как функцию четырехмерного вектора $\xi(Q)$.

Полное задание случайного поля означает, что известны все n -мерные плотности вероятности данного поля

$$W_n(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n = P\{\xi_v \leq \xi(Q_v) \leq \xi_v + d\xi_v\}, v = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1.1)$$

где $P\{\xi_v \leq \xi(Q_v) \leq \xi_v + d\xi_v\}$ - вероятность того что значение случайного поля попадает в данный интервал значений. При этом плотности вероятности случайного поля должны обладать следующими свойствами:

- 1) неотрицательность;
- 2) симметричность;
- 3) согласованность;
- 4) нормировка.

Зная многоточечные плотности вероятности, можно вычислить моменты случайного поля любого порядка. Во многих задачах наибольший интерес представляют низшие статистические моменты. Корреляционная теория случайных полей имеет дело с моментами 1-го и 2-го порядков. Статистический момент первого порядка – среднее значение случайного поля – вычисляется при помощи одномерной плотности вероятности:

$$\langle \xi(Q) \rangle = \int \xi W_1(\xi) d\xi.$$

Для вычисления статистического момента второго порядка необходимо использовать двумерную плотность вероятности:

$$B_{\xi}(Q_1, Q_2) = \langle \xi(Q_1)\xi(Q_2) \rangle = \iint \xi_1 \xi_2 W_2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Функция корреляции (автокорреляции) случайного поля является аналогом ковариационной функции случайного процесса и находится следующим образом:

$$\Psi_{\xi}(Q_1, Q_2) = \langle \tilde{\xi}(Q_1)\tilde{\xi}(Q_2) \rangle = B_{\xi}(Q_1, Q_2) - \langle \xi(Q_1) \rangle \langle \xi(Q_2) \rangle, \quad (1.1.2)$$

$\tilde{\xi} = \xi - \langle \xi \rangle$ - флуктуирующая часть поля.

Для случайного поля с нулевым средним функция корреляции и статистический момент второго порядка совпадают.

Дисперсия (или средний квадрат флуктуаций) случайного поля равна

$$D_{\xi} = \sigma_{\xi}^2 = \langle [\xi(Q) - \langle \xi(Q) \rangle]^2 \rangle = \Psi_{\xi}(Q_1, Q_2),$$

где среднеквадратичное отклонение, как и в случае случайных процессов, обозначено σ_{ξ}

Для случайных полей может быть введено и новое понятие - пространственная корреляционная функция.

Пусть случайное поле зависит только от координат \vec{r} .

Кроме того, предположим, что это поле комплексно:

$$\zeta(\vec{r}) = \xi(\vec{r}) + i\eta(\vec{r}).$$

Тогда его автокорреляционная функция (пространственная корреляционная функция) равна:

$$\Psi_{\zeta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \tilde{\zeta}(\vec{r}_1)\tilde{\zeta}^*(\vec{r}_2) \rangle, \quad (1.1.3)$$

Положив $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$, получим дисперсию в точке \vec{r} :

$$D_{\zeta} = \sigma_{\zeta}^2(\vec{r}) = \sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 = \Psi_{\zeta}(\vec{r}, \vec{r}).$$

Пространственная корреляционная функция обладает следующими свойствами.

1) Корреляционная функция эрмитова:

$$\Psi_{\zeta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi_{\zeta}^*(\vec{r}_2, \vec{r}_1).$$

2) Квадрат модуля функции корреляции не превышает произведения дисперсий:

$$|\Psi_{\zeta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 \leq \sigma_{\zeta}^2(\vec{r}_1)\sigma_{\zeta}^2(\vec{r}_2).$$

Если отнормировать пространственную корреляционную функцию на произведение дисперсий, получится величина не больше единицы, ее называют коэффициентом корреляции пространственного поля:

$$K_{\zeta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\Psi_{\zeta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\sigma_{\zeta}^2(\vec{r}_1)\sigma_{\zeta}^2(\vec{r}_2)},$$

$$|K_{\zeta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)| \leq 1.$$

3) Как и все корреляционные функции, функция пространственной корреляции обладает свойством положительной определенности:

$$\iint_V \Psi_{\zeta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) U(\vec{r}_1) U^*(\vec{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2 \geq 0,$$

где $U(\vec{r}_1)$ - произвольная функция, V – произвольный объем интегрирования.

Для того, чтобы случайное поле было статистически однородно (в широком смысле), должна выполняться инвариантность относительно сдвига $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \delta\vec{r}$ для среднего значения и момента второго порядка:

$$\langle \zeta(\vec{r}) \rangle = \langle \zeta(\vec{r} + \delta\vec{r}) \rangle \Rightarrow \langle \zeta(\vec{r}) \rangle = const,$$

$$\Psi_{\zeta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi_{\zeta}(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}, \vec{r}_2 + \delta\vec{r}).$$

Положив $\delta\vec{r} = -\vec{r}_2$, получим, что $\Psi_{\zeta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi_{\zeta}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Введем обозначение $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, тогда $\Psi_{\zeta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi_{\zeta}(\vec{\rho})$.

Несложно доказать свойства функции пространственной корреляции однородного случайного поля:

$$1) \Psi_{\zeta}(\vec{\rho}) = \Psi_{\zeta}^*(-\vec{\rho});$$

$$2) |\Psi_{\zeta}(\vec{\rho})| \leq \sigma_{\zeta}^2;$$

$$3) \int d^3 \vec{r}_1 \int d^3 \vec{r}_2 \Psi_{\zeta}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) U(\vec{r}_1) U^*(\vec{r}_2).$$

Из первого свойства следует, что если корреляционная функция четная, то случайное поле вещественное; и наоборот.

Статистически изотропными называются случайные поля, у которых корреляционная функция зависит только от модуля, а не от направления вектора $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$:

$$\Psi_{\zeta}(\vec{\rho}) = \Psi_{\zeta}(\rho) \quad (1.1.4)$$

Для статистически изотропных случайных полей корреляционная функция всегда четная, а следовательно, вещественная.

Примерами корреляционных функций однородных изотропных полей могут являться гауссова $\Psi_{\zeta}(\rho) = \sigma_{\zeta}^2 \exp(-\rho^2/\rho_0^2)$ и экспоненциальная $\Psi_{\zeta}(\rho) = \sigma_{\zeta}^2 \exp(-\rho/\rho_0)$ функции. Характерный масштаб спада корреляционной функции здесь обозначен ρ_0 и носит название радиуса корреляции.

Для случайных полей произвольного вида вводят эффективный радиус корреляции:

$$\rho_{\text{эфф}} = \frac{1}{\sigma_{\zeta}^2} \int_0^{\infty} \Psi_{\zeta}(\rho) d\rho \quad (1.1.5)$$

Случайное поле можно также характеризовать структурной функцией, которая представляет собой средний квадрат модуля приращения флуктуационной компоненты поля:

$$D_{\zeta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle |\tilde{\zeta}(\vec{r}_1) - \tilde{\zeta}(\vec{r}_2)|^2 \rangle \quad (1.1.6)$$

При $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ структурная функция обращается в нуль.

Введем также понятие приращения среднего поля:

$$f_{\zeta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \zeta(\vec{r}_1) \rangle - \langle \zeta(\vec{r}_2) \rangle \quad (1.1.7)$$

Если приращение среднего поля (1.1.7) и структурная функция (1.1.6) зависят только от разностного вектора

$$\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2,$$

то такие поля называются локально однородными. Условия локальной однородности налагают определенные ограничения на моменты приращений случайного поля, а не на моменты самих полей, поэтому такие поля называются еще полями с однородными приращениями.

Несложно получить связь между структурной функцией и функцией корреляции. Так для локально однородных и изотропных полей

$$D_\zeta(\rho) = 2[\psi_\zeta(0) - \psi_\zeta(\rho)],$$

$$\psi_\zeta(\rho) = \frac{1}{2}[D_\zeta(\infty) - D_\zeta(\rho)].$$

Важное свойство структурной функции заключается в том, что на нее не влияют большие по пространственной протяженности флуктуации случайного поля, т.е. флуктуации с характерным масштабом $l \gg \rho$.

Обусловленные такими флуктуациями возмущения практически одинаковы в точках, находящихся на расстоянии ρ , следовательно, мал их вклад в структурную функцию. А корреляционная функция учитывает в равной мере флуктуации любого масштаба, поэтому использование именно структурной, а не корреляционной функции оправдано в тех случаях, когда крупномасштабные флуктуации поля не сказываются на рассматриваемые в конкретной задаче явления.

Для однородных случайных полей можно ввести понятие пространственного спектра. Запишем формальное разложение однородного случайного поля в трехкратный интеграл Фурье:

$$\tilde{\zeta}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3\vec{k},$$

$\zeta(\vec{k})$ -пространственная спектральная амплитуда, которая выражается при помощи обратного преобразования Фурье:

$$\zeta(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\zeta}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3\vec{r}.$$

Корреляционная функция однородного случайного поля равна:

$$\Psi_{\zeta}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \langle \tilde{\zeta}(\vec{r}_1) \tilde{\zeta}(\vec{r}_2) \rangle = \iint \langle \zeta(\vec{k}') \zeta^*(\vec{k}'') \rangle e^{i(\vec{k}'\vec{r}_1 - \vec{k}''\vec{r}_2)} d^3k' d^3k'' \quad (1.1.8)$$

Для спектральных амплитуд справедливо соотношение:

$$\langle \zeta(\vec{k}') \zeta^*(\vec{k}'') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^6} \iint \langle \tilde{\zeta}(\vec{r}_1) \tilde{\zeta}^*(\vec{r}_2) \rangle e^{-i(\vec{k}'\vec{r}_1 - \vec{k}''\vec{r}_2)} d^3r_1 d^3r_2 \quad (1.1.9)$$

Введем новые переменные интегрирования:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2, \\ \vec{\rho} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \end{aligned}$$

После интегрирования (1.1.9) по \vec{R} получаем, что спектральные амплитуды дельта-коррелированы:

$$\langle \zeta(\vec{k}') \zeta^*(\vec{k}'') \rangle = \Phi_{\zeta}(\vec{k}') \delta(\vec{k}' - \vec{k}'').$$

Здесь введено обозначение $\Phi_{\zeta}(\vec{k})$ для величины, которая называется пространственным спектром:

$$\Phi_{\zeta}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\zeta}(\rho) e^{-i\vec{k}\vec{\rho}} d^3\rho \quad (1.1.10)$$

Пространственные спектры обладают следующими свойствами.

- 1) $\Phi_{\zeta}(\vec{k})$ - вещественная функция;
- 2) $\Phi_{\zeta}(\vec{k})$ - неотрицательная функция;
- 3) $\Phi_{\zeta}(-\vec{k}) = \Phi_{\zeta}(\vec{k})$ для четных корреляционных функций. В этом случае

функция корреляции и спектральная плотность связаны косинус-преобразованием Фурье.

Для изотропных однородных случайных полей пространственные спектры зависят только от модуля k . Чтобы показать это, перейдем в интеграле

(1.1.10) к полярным координатам с полярной осью, направленной вдоль волнового вектора:

$$\vec{k}\vec{\rho} = k\rho \cos \theta.$$

Тогда спектральная плотность связана с корреляционной функцией через однократный интеграл:

$$\Phi_{\zeta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \Psi_{\zeta}(\rho) e^{-ik\rho \cos \theta} \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k} \int_0^{\infty} \Psi_{\zeta}(\rho) \rho \sin(k\rho) d\rho. \quad (1.1.11)$$

Аналогичный результат получаем, если в выражении для корреляционной функции перейдем к полярным координатам с осью вдоль $\vec{\rho}$.

$$\psi_{\zeta}(\rho) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \Phi_{\zeta}(k) e^{-ik\rho \cos \theta} k^2 \sin \theta d\varphi d\theta dk = \frac{4\pi}{\rho} \int_0^{\infty} \Phi_{\zeta}(k) \sin(k\rho) k dk. \quad (1.1.12)$$

Для изотропных однородных полей можно сформулировать соотношение неопределенностей для ширины пространственного спектра и ширины функции пространственной корреляции:

$$\Delta k \Delta \rho \geq 1.$$

Следовательно, коротко коррелированным полям соответствуют широкие пространственные спектры, тогда как при больших радиусах корреляции ширина спектров мала.

1.2. Уравнения для волн в случайно-неоднородных средах

Прежде чем перейти к рассмотрению приближенных методов расчета статистических характеристик случайных полей, необходимо вывести уравнение для волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде. Поскольку исторически такие уравнения впервые были получены для электромагнитных волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере, покажем, как это было сделано.

Запишем уравнения Максвелла, обозначим \vec{e} и \vec{h} электрическое и магнитное поля соответственно.

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{h} = \frac{1}{c} \frac{d \vec{e}}{dt}, \\ \operatorname{div} \vec{h} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{e} = 4\pi\rho = 0. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

При этом предполагалось, что магнитная проницаемость $\mu=1$, а проводимость среды равна нулю.

Пусть в случайно-неоднородной среде значение диэлектрической проницаемости ε испытывает флуктуации, которые являются более медленными, чем период электромагнитного поля. Тогда электрическое и магнитное поля можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \vec{E}(\vec{r}, t) e^{-i\omega t}, \\ \vec{h} &= \vec{H}(r, t) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

где \vec{E}, \vec{H} -медленно меняющиеся во времени комплексные амплитуды.

Подставляя (1.2.2) в (1.2.1), имеем

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = ik\vec{H} - \frac{1}{c} \frac{d\vec{H}}{dt}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = -ik\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{E}\varepsilon}{dt}, \\ \operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = 0. \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Применив оператор rot к 1-му уравнению системы (1.2.3) и подставив в получившееся выражение 2-ое уравнение из (1.2.3) для $\operatorname{rot} \vec{H}$, получим уравнение только для электрического поля

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = k^2 \varepsilon \vec{E} + 2 \frac{ik}{c} \frac{d\varepsilon \vec{E}}{dt} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E} \varepsilon}{dt^2}. \quad (1.2.4)$$

Из векторного и тензорного анализа известно, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\Delta \vec{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}. \quad (1.2.5)$$

Перепишем выражение (1.2.4) с учетом (1.2.5):

$$\Delta \vec{E} + k^2 \varepsilon \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \frac{2ik}{c} \frac{d\varepsilon \vec{E}}{dt} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \varepsilon \vec{E}}{dt^2}, \quad (1.2.6)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \operatorname{grad} \varepsilon = 0,$$

а поскольку из 3-го уравнения системы (1.2.3) имеем $\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = 0$, следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{\vec{E} \operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon} = -\vec{E} \operatorname{grad} \ln \varepsilon.$$

Подставляем полученное выражение в (1.2.6)

$$\Delta \vec{E} + k^2 \varepsilon \vec{E} = \operatorname{grad} (-\vec{E} \operatorname{grad} \ln \varepsilon) - \frac{2ik}{c} \frac{d\varepsilon \vec{E}}{dt} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \varepsilon \vec{E}}{dt^2}. \quad (1.2.7)$$

Выразим значение диэлектрической проницаемости как

$$\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle + \varepsilon_1, \quad (1.2.8)$$

ε_1 - флуктуирующая часть ε .

Флуктуации диэлектрической проницаемости обычно очень слабые, поэтому будем считать, что $\varepsilon_1 \ll \langle \varepsilon \rangle$.

Не теряя общности, положим

$$\langle \varepsilon \rangle = 1, \langle \varepsilon_1 \rangle = 0.$$

Тогда

$$\varepsilon = 1 + \varepsilon_1. \quad (1.2.9)$$

Для флуктуирующей атмосферы, например, $\varepsilon_1 \sim 10^{-5} - 10^{-6}$.

С учетом (1.2.9) выражение (1.2.7) будет иметь следующий вид

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = -\varepsilon_1 k^2 \vec{E} - \underset{(a)}{\text{grad}(\vec{E} \text{grad} \varepsilon_1)} - \underset{(b)}{\frac{2ik}{c} \frac{d\varepsilon \vec{E}}{dt}} + \underset{(c)}{\frac{1}{c^2} \frac{d^2 \varepsilon \vec{E}}{dt^2}}. \quad (1.2.10)$$

Для дальнейшего упрощения необходимо оценить слагаемые (а), (б), (в), (г) в правой части уравнения (1.2.10) по порядку величины.

Первое слагаемое (а) оценить несложно: $k^2 \varepsilon_1 \vec{E} \sim \frac{\varepsilon_1 \vec{E}}{\lambda^2}$, ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$).

Оценка второго слагаемого (б) в формуле (1.2.10) сложнее

Пусть l_0 - характерный масштаб изменения флуктуирующей части, тогда $\text{grad} \varepsilon_1 \sim \varepsilon_1 / l_0$ и оценки показывают

$$\text{grad}(\vec{E} \text{grad} \varepsilon_1) \sim \text{grad}(\vec{E} \frac{\varepsilon_1}{l_0}) \sim \frac{\vec{E} \varepsilon_1}{l_0^2} + \frac{\vec{E} \varepsilon_1}{\lambda l_0}.$$

Рассмотрим предельные случаи:

1) $l_0 \gg \lambda \rightarrow$ крупномасштабные неоднородности, где l_0 - масштаб неоднородностей, λ - длина волны.

$$\text{grad}(\vec{E} \text{grad} \varepsilon_1) \sim \frac{\varepsilon_1 \vec{E}}{\lambda l_0};$$

2) $\lambda \gg l_0 \rightarrow$ мелкомасштабные неоднородности

$$\text{grad}(\vec{E} \text{grad} \varepsilon_1) \sim \frac{\vec{E} \varepsilon_1}{l_0^2}.$$

Оценим слагаемое (в) в формуле (1.2.10):

$$\frac{2ik}{c} \frac{d\varepsilon \vec{E}}{dt} = \frac{2ik}{c} \frac{d(1 + \varepsilon_1) \vec{E}}{dt} = 2ik(1 + \varepsilon_1) \frac{d\vec{E}}{dt} + 2ik\vec{E} \frac{d\varepsilon_1}{dt} = 2ik(\vec{E} \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\vec{E}}{dt}).$$

Положим, что параметр ε_1 изменяется за счет существования скорости движения неоднородностей v , то есть изменение в данной точке диэлектрической проницаемости возникает из-за того, что неоднородности сносит, например, ветром.

При этом характерное время изменения диэлектрической проницаемости

$$\tau \sim \frac{l_0}{v}.$$

Тогда можно сделать следующие оценки:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} \sim \frac{\varepsilon_1}{\tau}; \quad \vec{E} \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sim \frac{\vec{E}\varepsilon_1}{\tau} \sim \frac{\vec{E}\varepsilon_1 v}{l_0}.$$

Естественно предположить, что изменение амплитуды поля вызывается изменением диэлектрической проницаемости, поэтому их характерные временные масштабы одинаковы:

$$\frac{d\vec{E}}{dt} \sim \frac{\vec{E}}{\tau} \sim \frac{\vec{E}v}{l_0}.$$

Следовательно, по порядку величины третье слагаемое в правой части уравнения (1.2.10) равно

$$\frac{2ik}{c} \frac{d\varepsilon\vec{E}}{dt} \sim 2i \frac{k}{c} \frac{v\vec{E}}{l_0} (\varepsilon_1 + 1) \sim \frac{2ik}{c} \frac{v\vec{E}}{l_0} \sim \frac{2iv}{c} \frac{\vec{E}}{\lambda l_0}, \quad \varepsilon_1 \ll 1.$$

Если $l_0 \gg \lambda$ (крупномасштабные неоднородности), то

$$\frac{\varepsilon_1 \vec{E}}{\lambda^2} \gg \frac{\vec{E}\varepsilon_1}{\lambda l_0},$$

следовательно,

$$\frac{\varepsilon_1 \vec{E}}{\lambda^2} \gg \frac{v}{c} \frac{\vec{E}}{\lambda l_0}.$$

Для распространения волн в турбулентной атмосфере справедливо соотношение параметров задачи $\frac{v}{c} \sim 10^{-8}$, а $\varepsilon_1 \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, поэтому

$$\frac{v}{c} \frac{\vec{E}}{\lambda l_0} \ll \frac{\varepsilon_1 \vec{E}}{\lambda l_0}.$$

Таким образом, слагаемыми (в) и (г) в уравнении (1.2.10) можно пренебречь, тогда вид его значительно упростится:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = -k^2 \varepsilon_1 \vec{E} - \text{grad}(\vec{E} \text{grad} \varepsilon_1). \quad (1.2.11)$$

Если имеем крупномасштабные неоднородности: $l_0 \gg \lambda$ ($\delta \ll a$), то получаем так называемое стохастическое уравнение Гельмгольца:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = -k^2 \varepsilon_1 \vec{E} \quad . \quad (1.2.12)$$

Уравнение (1.2.12) описывает распространение волн в случайно-неоднородных средах, с учетом крупномасштабности этих неоднородностей. Особенностью векторного уравнения (1.2.12) является то, что при проецировании оно распадается на три независимых скалярных уравнения, отличающихся лишь величиной невозмущенного значения соответствующей компоненты поля. Аналогичные скалярные уравнения могут быть использованы и для описания распространения и рассеяния акустических волн в случайно-неоднородных средах.

1.3. Рассеянное поле в борновском приближении

Пусть на объем V случайно неоднородной среды падает плоская электромагнитная волна известной амплитуды E_0 . За счет флуктуаций показателя преломления возникает рассеяние падающей волны во все стороны. Чтобы рассчитать поле рассеянной волны, в первом приближении будем считать, что рассеяние мало. Тогда уравнение (1.2.11) можно решать методом возмущений и ограничиться первым порядком малости.

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = -k^2 \varepsilon_1 \vec{E} - \text{grad}(\vec{E} \text{grad} \varepsilon_1), \\ \text{div} \vec{E}_0 = 0. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Представим поле в произвольной точке вне рассеивающего объема в виде суперпозиции падающей и рассеянной волн

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_s, \quad (1.3.2)$$

причем $E_s \approx \varepsilon_1 E_0 \ll E_0$. Подставив (1.3.2) в выражение (1.3.1), получим систему уравнений для падающей и рассеянной волн:

$$\begin{cases} \Delta \vec{E}_0 + k^2 \vec{E}_0 = 0, \\ \Delta \vec{E}_s + k^2 \vec{E}_s = -k^2 \varepsilon_1 \vec{E}_0 - \text{grad}(\vec{E}_0 \text{grad} \varepsilon_1). \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Заметим, что первое уравнение системы (1.3.3) – невозмущенное уравнение Гельмгольца, которому удовлетворяет невозмущенная волна. Второе уравнение системы (1.3.3) – уравнение для рассеянного поля E_s в первом приближении теории возмущения или в борновском приближении. С точки зрения математики это линейное неоднородное уравнение вида:

$$\Delta \vec{E}_s + k^2 \vec{E}_s = \vec{f}(r). \quad (1.3.4)$$

Правая часть этого уравнения

$$\vec{f}(r) = -k^2 \varepsilon_1 \vec{E}_0 - \text{grad}(\vec{E}_0 \text{grad} \varepsilon_1), \quad (1.3.5)$$

не зависит от \vec{E}_s .

Уравнение типа (1.3.4) решается методом функций Грина. Сначала нужно решить уравнение для точечного источника

$$\Delta \vec{E}_s + k^2 \vec{E}_s = \delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

его решением является функция Грина

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp\{ik|\vec{r} - \vec{r}'|\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.3.6)$$

Затем, представив правую часть уравнения (1.3.4) в виде

$$f(\vec{r}) = \int \vec{f}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}',$$

воспользуемся свойством суперпозиции линейных уравнений:

$$\vec{E}_s = \int \vec{f}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}'.$$

Таким образом, с учетом (1.3.6) и (1.3.5) поле рассеянной волны может быть вычислено как:

$$\vec{E}_s = \frac{-1}{4\pi} \int \vec{f}(\vec{r}') \frac{\exp\{ik|\vec{r} - \vec{r}'|\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\exp\{ik|\vec{r} - \vec{r}'|\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \{k^2 \varepsilon_1 \vec{E}_0(\vec{r}') + \text{grad}(\vec{E}_0(\vec{r}') \text{grad} \varepsilon_1(\vec{r}'))\} d^3 r' \quad (1.3.7)$$

Используем интегральное тождество $\int_v u \text{grad} v dV = \int_s u v d\vec{\sigma} - \int_v v \text{grad} u dv$,

обозначая

$$u = \frac{\exp\{ik|\vec{r} - \vec{r}'|\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

$$v = \vec{E}_0(\vec{r}') \text{grad} \varepsilon_1(\vec{r}').$$

Получим из (1.3.7)

$$\vec{E}_s = -\frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\exp\{ik|\vec{r} - \vec{r}'|\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} k^2 \varepsilon_1 \vec{E}_0(\vec{r}') d^3 r' + \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\exp\{ik|\vec{r} - \vec{r}'|\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{E}_0(\vec{r}') \text{grad} \varepsilon_1(\vec{r}') d\vec{\sigma} - \frac{1}{4\pi} \int_v \vec{E}_0(\vec{r}') \text{grad} \varepsilon_1(\vec{r}') \text{grad} \frac{\exp\{ik|\vec{r} - \vec{r}'|\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV. \quad (1.3.8)$$

Пренебрегаем поверхностным интегралом (вторым слагаемым) в сравнении с объемным, учитывая, что для достаточно большого рассеивающего объема роль поверхностных эффектов мала по сравнению с объемными:

$$\vec{E}_s = \frac{k^2}{4\pi} \int_v \frac{\exp\{ik|\vec{r} - \vec{r}'|\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \varepsilon_1(\vec{r}') \vec{E}_0(\vec{r}') d\vec{r}' - \frac{1}{4\pi} \int_v (\vec{E}_0(\vec{r}') \text{grad} \varepsilon_1(\vec{r}')) \text{grad}_{\vec{r}'} \frac{\exp\{ik|\vec{r} - \vec{r}'|\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'. \quad (1.3.9)$$

Вычислим сначала градиент от функции Грина в выражении (1.3.9):

$$\text{grad}_{\vec{r}}|\vec{r}-\vec{r}'| = -\left[\frac{ik \exp\{ik|\vec{r}-\vec{r}'|\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{\exp\{ik|\vec{r}-\vec{r}'|\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right] \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (1.3.10)$$

Предположим, что точка наблюдения находится вне рассеивающего объема. Кроме того, расстояние от точки приема до рассеивающего объема будем считать много большим длины волны (условие волновой зоны)

$$k|\vec{r}-\vec{r}'| \gg 1, \quad (1.3.11)$$

Это позволяет отбросить последнее слагаемое в (1.3.10):

$$\text{grad}_{\vec{r}}|\vec{r}-\vec{r}'| = -\frac{ik \exp\{ik|\vec{r}-\vec{r}'|\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (1.3.12)$$

С учетом (1.3.12) рассеянное поле (1.3.9) в волновой зоне равно

$$\vec{E}_s = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\exp\{ik|\vec{r}-\vec{r}'|\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left\{ k^2 \varepsilon_1 \vec{E}_0(\vec{r}') + \frac{ik(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} (\vec{E}_0(\vec{r}') \text{grad} \varepsilon_1(\vec{r}')) \right\} d\vec{r}'. \quad (1.3.13)$$

Аналогичным образом упростим второе слагаемое в формуле (1.3.13):

$$\begin{aligned} & \frac{ik}{4\pi} \int_V d\vec{r}' \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \exp\{ik|\vec{r}-\vec{r}'|\} (\vec{E}_0(\vec{r}') \text{grad} \varepsilon_1(\vec{r}')) = \\ & = -\frac{ik}{4\pi} \int_V d\vec{r}' \varepsilon_1(\vec{r}') \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left[E_{0l}(\vec{r}') \frac{\vec{r}_l - \vec{r}'_l}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \exp\{ik|\vec{r}-\vec{r}'|\} \right]. \end{aligned}$$

Учтём, что $\text{div} \vec{E}_0 = \frac{\partial}{\partial x_l} E_{0l}(\vec{r}') = 0$, и применим условие волновой зоны (1.3.11),

получим:

$$\begin{aligned} & -\frac{ik}{4\pi} \int_V d\vec{r}' \varepsilon_1(\vec{r}') \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left[E_{0l}(\vec{r}') \frac{\vec{r}_l - \vec{r}'_l}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \exp\{ik|\vec{r}-\vec{r}'|\} \right] = \\ & = \frac{ik}{4\pi} \int_V d\vec{r}' \varepsilon_1(\vec{r}') \sum_{l=1}^3 E_{0l}(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{\vec{r}_l - \vec{r}'_l}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \exp\{ik|\vec{r}-\vec{r}'|\} \right] = \\ & = -\frac{k^2}{4\pi} \int_V d\vec{r}' \varepsilon_1(\vec{r}') \frac{\vec{r}_l - \vec{r}'_l}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left(E_{0l}(\vec{r}') \frac{\vec{r}_l - \vec{r}'_l}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{\exp\{ik|\vec{r}-\vec{r}'|\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right). \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Подставив (1.3.14) в (1.3.13), имеем:

$$\vec{E}_s(\vec{r}) = \frac{k^2}{4\pi} \int_V \frac{\exp\{ik|\vec{r}-\vec{r}'|\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \varepsilon_1(\vec{r}') \left\{ \vec{E}_0(\vec{r}') - \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left(\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{E}_0(\vec{r}') \right) \right\} d\vec{r}'. \quad (1.3.15)$$

Введем обозначение $\vec{n}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ для единичного вектора, направленного из точки рассеяния в точку наблюдения. Тогда окончательное выражение для поля рассеянной волны можно записать в компактном виде

$$\vec{E}_s(\vec{r}) = \frac{k^2}{4\pi} \int_V \frac{\exp\{ik|\vec{r}-\vec{r}'|\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \varepsilon_1(\vec{r}') [\vec{n}[\vec{E}_0(\vec{r}')\vec{n}]] d\vec{r}'. \quad (1.3.16)$$

Физический смысл полученного результата (1.3.16) достаточно прост – квазиточечный переизлучатель с амплитудой $Q = \varepsilon_1(\vec{r}')\Delta V$ дает в точке наблюдения волну, пропорциональную Q , пропорциональную функции Грина точечного источника, к тому же волна является поперечной и представляет собой суперпозицию волн от всех вторичных источников.

В заключении данного раздела напомним, что при выводе уравнения (1.3.16) использовались следующие приближения:

- 1) квазистатическое приближение (изменение во времени флуктуаций среды медленное, что позволяет не учитывать производные по времени в уравнении (1.2.10));
- 2) малость рассеянного поля по сравнению с полем первичной волны (использование борновского приближения);
- 3) условие волновой зоны для наименьшего расстояния от рассеивающего объема до точки наблюдения R ($kR \gg 1$).

1.4. Средняя интенсивность рассеяния

Среднюю интенсивность рассеяния электромагнитной волны можно выразить через вектор Пойнтинга-Умова – вектор плотности потока энергии электромагнитного поля.

Вектор Пойнтинга-Умова на языке комплексных амплитуд выражается следующим образом:

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[\vec{E}_s \times \vec{H}_s^*].$$

Запишем уравнение Максвелла для электрической компоненты поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = ik\vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

В силу малости второго слагаемого относительно первого в квазистатическом приближении ($c \gg v$) пренебрежём членом $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$. С учетом этого выразим значение рассеянной составляющей магнитного поля:

$$\vec{H}_s(\vec{r}) = \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \vec{E}_s(\vec{r}).$$

Поддействуем оператором rot на формулу (1.3.16) для электрической компоненты рассеянного поля.

Тогда получим выражение:

$$\vec{H}_s(\vec{r}) = \frac{k^2}{4\pi} \iiint_V \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \varepsilon_1(\vec{r}') \cdot [\vec{n} \times \vec{E}_0] d\vec{r}'. \quad (1.4.1)$$

Подставим (1.4.1) в выражение для вектора Пойнтинга-Умова:

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \operatorname{Re} \iiint_V \iiint_V \frac{\exp\{ik(|\vec{r}-\vec{r}'| - |\vec{r}-\vec{r}''|)\}}{|\vec{r}-\vec{r}'| \cdot |\vec{r}-\vec{r}''|} \varepsilon_1(\vec{r}') \varepsilon_1(\vec{r}'') \left[\vec{E}_0' \cdot \vec{n}' \left(\vec{E}_0' \cdot \vec{n}' \right) \left[\vec{n}'' \times \vec{E}_0'' \right] \right] d\vec{r}' \cdot d\vec{r}''; \quad (1.4.2)$$

В ней в свою очередь введены обозначения для электрической компоненты падающего поля и для единичного вектора направления рассеянной волны в соответствующих точках пространства:

$$\begin{aligned}\vec{E}_0' &= \vec{E}_0'(\vec{r}'), \vec{E}_0'' = \vec{E}_0''(\vec{r}''), \\ \vec{n}' &= \vec{n}(\vec{r}, \vec{r}'), \vec{n}'' = \vec{n}(\vec{r}, \vec{r}'').\end{aligned}$$

Предположим, что пространственное поле $\varepsilon(\vec{r})$ статистически однородное, тогда ковариационная функция зависит только от разности пространственных переменных:

$$\langle \varepsilon_1(\vec{r}') \varepsilon_1(\vec{r}'') \rangle = B_{\varepsilon_1}(\vec{r}' - \vec{r}'').$$

Если модуль разностного вектора

$$\vec{\rho} = \vec{r}' - \vec{r}''$$

больше радиуса корреляции неоднородностей среды, то вектор плотности потока энергии электромагнитного поля стремится к нулю в силу малости ковариационной функции.

Усредним формулу (1.4.2) по ансамблю реализаций $\varepsilon(\vec{r})$:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \operatorname{Re} \iiint_V \iiint_V \frac{\exp\{ik(|\vec{r} - \vec{r}'| - |\vec{r} - \vec{r}''|)\}}{|\vec{r} - \vec{r}'| \cdot |\vec{r} - \vec{r}''|} B_{\varepsilon}(\vec{r}' - \vec{r}'') [(\vec{E}_0' - \vec{n}'(\vec{E}_0 \vec{n}')) \cdot [\vec{n}'' \times \vec{E}_0^{*'}]] d\vec{r}' d\vec{r}'' . \quad (1.4.3)$$

Заметим, что на практике усреднение по ансамблю осуществляется усреднением по квазистатическому времени, используя свойство эргодичности процесса рассеяния.

Введем характерное расстояние от рассеивающего объема до наблюдателя:

$$\tilde{R} \approx |\vec{r} - \vec{r}'|, |\vec{r} - \vec{r}''|.$$

Будем предполагать, что оно много больше радиуса корреляции неоднородностей среды (внешнего масштаба турбулентности):

$$\tilde{R} \gg L_0. \quad (1.4.4)$$

Разложим единичный вектор направления рассеянной волны \vec{n}'' в ряд Тейлора, ограничиваясь первым порядком малости:

$$\vec{n}'' = \frac{\vec{r} - \vec{r}''}{|\vec{r} - \vec{r}''|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}' + \vec{\rho}}{|\vec{r} - \vec{r}' + \vec{\rho}|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{\rho} + \vec{n}'(\vec{\rho} \cdot \vec{n}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

В силу малости второго слагаемого по сравнению с единицей

$$\frac{\vec{\rho} + \vec{n}'(\vec{\rho} \cdot \vec{n}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \ll 1,$$

согласно условию (1.4.4), можем считать

$$\vec{n}'' = \vec{n}', \quad (1.4.5)$$

С учётом условия (1.4.5) выражение (1.4.3) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{c}{8\pi} \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \operatorname{Re} \iiint_V \iiint_V \frac{\exp\{ik(|\vec{r}-\vec{r}'|-|\vec{r}-\vec{r}''|)\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} B_\varepsilon(\vec{r}'-\vec{r}'') [(\vec{E}_0' - \vec{n}'(\vec{E}_0 \vec{n}')) \cdot [\vec{n}' \times \vec{E}_0''^*]] d\vec{r}' d\vec{r}'' = \\ &= \frac{c}{8\pi} \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \operatorname{Re} \iiint_V \iiint_V \frac{\exp\{ik(|\vec{r}-\vec{r}'|-|\vec{r}-\vec{r}''|)\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} B_\varepsilon(\vec{r}'-\vec{r}'') \cdot \vec{n}' \cdot \{(\vec{E}_0' \vec{E}_0''^*) - (\vec{E}_0' \vec{n}')(\vec{E}_0''^* \vec{n}')\} d\vec{r}' d\vec{r}'' \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Заметим, что именно изучение энергетических характеристик рассеянных волн на практике используется как для оценки искажений, вносимых неоднородной средой в распространение через нее сигналов различной физической природы, так и для получения информации о самих неоднородностях.

1.5. Эффективный поперечник рассеяния

Пусть падающая волна создается источником, расположенным в точке с координатами \vec{R} , а точка наблюдения по-прежнему находится в точке \vec{r} (рис. 1.5.1). Зададим конкретный вид падающей волны:

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{A}_0(\vec{r}') \exp(ik|\vec{R} - \vec{r}|),$$

где $\vec{A}_0(\vec{r}')$ - функция, описывающая диаграмму направленности излучателя.

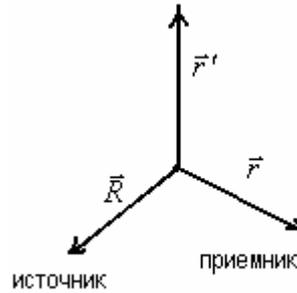


Рис. 1.5.1

Пусть $\vec{A}_0(\vec{r}')$ медленно изменяется на масштабах $\sim \lambda, L_0$, (λ - длина волны, L_0 - радиус корреляции неоднородностей). Тогда можно считать, что

$$\vec{A}_0(\vec{r}') \cong \vec{A}_0(\vec{r}'').$$

С учетом этого сделаем следующее преобразование величин, входящих в выражение (1.4.6)

$$(\vec{E}'_0 \vec{E}''^*) - (\vec{E}'_0 \vec{n}')(\vec{E}''^*, \vec{n}') \approx |\vec{A}_0(\vec{r}')|^2 \sin^2(\chi(\vec{r}')) \times \exp\left\{ik\left[|\vec{R} - \vec{r}'| - |\vec{R} - \vec{r}''|\right]\right\}.$$

Здесь введено обозначение: χ - угол между $\vec{A}_0(\vec{r}')$ и \vec{n}' . тогда среднее значение вектора Умова-Пойнтинга (1.4.6) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{c}{8\pi} \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \operatorname{Re} \iint_{VV} \frac{\vec{n}(\vec{r}') |\vec{A}_0(\vec{r}')|^2 \sin^2(\chi(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \times B_\varepsilon(\vec{r}', \vec{r}'') \times \\ &\times \exp\left\{ik\left[|\vec{r} - \vec{r}'| - |\vec{r} - \vec{r}''| + |\vec{R} - \vec{r}'| - |\vec{R} - \vec{r}''|\right]\right\} d\vec{r}' d\vec{r}'' \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Вновь обратимся к обозначению разностного вектора $(\vec{r}' - \vec{r}'') = \vec{\rho}$, модуль которого должен быть $\rho \ll L_0$, если интеграл (1.5.1) не равен нулю, поскольку в

этой области $B_\varepsilon(\vec{\rho}) \neq 0$. Следовательно, $\vec{\rho}$ - малый параметр. Разложим по малому параметру $\vec{\rho}$ в ряд Тейлора модуль разности следующих векторов

$$|\vec{r} - \vec{r}''| = |\vec{r} - \vec{r}' + \vec{\rho}| = |\vec{r} - \vec{r}'| + |\vec{n}'\rho| - \frac{1}{2|\vec{r} - \vec{r}'|} \{ \rho^2 - (\vec{\rho}, \vec{n}') \} + \dots \quad (1.5.2)$$

$$|\vec{R} - \vec{r}''| = |\vec{R} - \vec{r}' + \vec{\rho}| = |\vec{R} - \vec{r}'| - (\vec{m}'\vec{\rho}) + \frac{1}{2|\vec{R} - \vec{r}''|} \{ \rho^2 - (\vec{\rho}, \vec{m}')^2 \} + \dots$$

где $\vec{m}' = \frac{\vec{r}' - \vec{R}}{|\vec{r}' - \vec{R}|}$, $\vec{n}' = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$.

Заметим, что \vec{m}' и \vec{n}' - единичные вектора, при этом вектор \vec{m}' направлен от излучателя в точку элементарного рассеивателя (рис. 1.5.2).

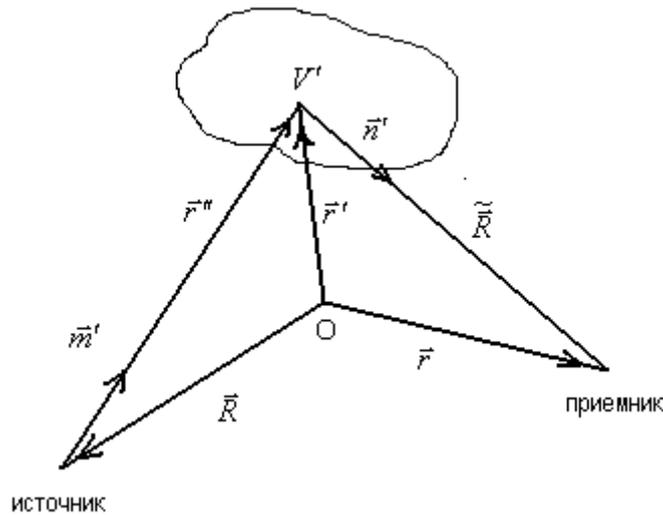


Рис. 1.5.2

Первые слагаемые в выражениях (1.5.2) сокращаются с соответствующими в показателе экспоненты уравнения (1.5.1), вторые слагаемые мы оставляем, а следующими членами можем пренебречь при следующем условии

$$\frac{kL_0^2}{\tilde{R}} \approx \frac{L_0^2}{\tilde{R}\lambda} \ll 1. \quad (1.5.3)$$

Здесь использовано обозначение \tilde{R} - расстояние от объема V до приемника.

Неравенство (1.5.3) - условие зоны Фраунгофера наблюдателя по отношению к рассеивающему объему. При этом радиус корреляции поля

неоднородностей много меньше радиуса первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda \tilde{R}}$ - характерного масштаба, от которого сигналы на приемник приходят в фазе.

С учетом (1.5.3) запишем:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \operatorname{Re} \iint_{VU} \frac{n(\vec{r}') A_0^2(\vec{r}') \sin^2(\chi')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \times \times B_\varepsilon(\vec{r}' - \vec{r}'') \times \exp \left\{ i(\vec{K}(\vec{r}')(\vec{r}' - \vec{r}'')) \right\} d\vec{r}' d\vec{r}'' . \quad (1.5.4)$$

Обозначим $\vec{K}(\vec{r}') = k[\vec{m}(\vec{r}') - \vec{n}(\vec{r}')] -$ вектор рассеяния, его можно представить как

$$\vec{K} = \vec{k}_0 - \vec{k}_s ,$$

$\vec{k}_0 = k\vec{m}$ - волновой вектор падающей волны,

$\vec{k}_s = k\vec{n}$ - волновой вектор рассеянной волны.

Сделаем замену переменных в формуле (1.5.4), переходя к переменным $\vec{r}', \vec{\rho} = \vec{r}' - \vec{r}''$:

$$\langle S(\vec{r}') \rangle = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \operatorname{Re} \int_V \left\{ \int_V B_\varepsilon(\vec{\rho}) \exp \{ i\vec{k}\vec{\rho} \} d\vec{\rho} \right\} \frac{n(\vec{r}') A_0^2(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \times \sin^2(\chi(\vec{r}')) d\vec{r}' . \quad (1.5.5)$$

Если к тому же радиус корреляции неоднородностей много меньше линейного размера рассеющего объема $L_0 \ll L$, то возможен переход

$$\int_V B_\varepsilon(\vec{\rho}) \exp \{ i\vec{k}\vec{\rho} \} d\vec{\rho} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_\varepsilon(\vec{\rho}) \exp \{ i(\vec{k}\vec{\rho}) \} d\vec{\rho} .$$

Напомним, что функция пространственной корреляции связана с пространственным спектром преобразованием Фурье (см. раздел 1):

$$B_\varepsilon(\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\varepsilon(\vec{k}) \exp \{ -i(\vec{k}\vec{\rho}) \} d\vec{k} ,$$

$$\Phi_\varepsilon(\vec{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_\varepsilon(\vec{\rho}) \exp \{ i(\vec{k}\vec{\rho}) \} d\vec{\rho} . \quad (1.5.6)$$

Следовательно, с учетом (5.6) можно записать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_\varepsilon(\vec{\rho}) \exp \{ i(\vec{k}\vec{\rho}) \} d\vec{\rho} = 8\pi^3 \Phi_\varepsilon(\vec{k}) .$$

Поле рассеяния будем считать статистически однородным и изотропным:

$$B_\varepsilon(\vec{\rho}) = B_\varepsilon(\rho) , \quad \Phi_\varepsilon(\vec{k}) = \Phi_\varepsilon(k) .$$

В этом случае спектральная плотность находится по формуле (1.1.11):

$$\Phi_{\varepsilon}(\kappa) = \frac{1}{2\pi^2 \varpi} \int_0^{+\infty} \rho B_{\varepsilon}(\rho) \sin(\kappa \rho) d\rho.$$

Введем угол θ между векторами \vec{k}_0 и \vec{k}_s рассеянной волны, тогда из геометрии (рис. 1.5.3) следует:

$$|\vec{K}| = |\vec{K}(k, \theta)| = 2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

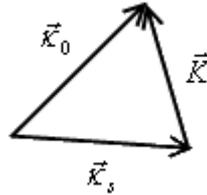


Рис. 1.5.3

Тогда выражение (1.5.5) можно записать

$$\langle S(\vec{r}) \rangle = \frac{ck^4}{16} \int_V \vec{n}(\vec{r}') \frac{|A_0(\vec{r}')|^2 \sin^2(\chi(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \times \Phi_{\varepsilon}(2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)) d\vec{r}'. \quad (1.5.7)$$

Перепишем (5.7) в дифференциальном виде

$$\langle dS(\vec{r}') \rangle = \vec{n}(\vec{r}') \frac{ck^4 |A_0|^2}{16 |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \sin^2(\chi(\vec{r}')) \Phi_{\varepsilon}(2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)) dV', \quad (1.5.8)$$

$\langle dS \rangle$ характеризует плотность потока энергии, переизлучаемой объемом неоднородной среды в направлении \vec{n}' .

Обозначим плотность потока энергии падающей волны $S_0(\vec{r}) = \frac{c|A_0|^2}{8\pi}$.

Умножим выражение (1.5.8) на $\vec{n}' |\vec{r} - \vec{r}'|^2 d\Omega$, получим dE - энергию, рассеянную в направлении \vec{n}' в телесный угол $d\Omega$:

$$dE = S_0(\vec{r}') \sigma_0(\vec{r}') dV' d\Omega.$$

Коэффициент пропорциональности обозначим между энергией рассеянной и падающей волн обозначен:

$$\sigma_0(\vec{r}') = \frac{\pi}{2} k^4 \Phi_{\varepsilon}(2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)) \sin^2(\chi(\vec{r}')), \quad (1.5.9)$$

$\sigma_0(\vec{r}')$ - эффективный поперечник рассеяния из единицы объема в единичный телесный угол в направлении \vec{n}'

С учетом (1.5.9) перепишем (1.5.7) в виде

$$\langle S(\vec{r}) \rangle = \int_v \frac{\vec{n}(\vec{r}') S_0(\vec{r}') \sigma_0(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV' . \quad (1.5.10)$$

Таким образом, плотность потока рассеянной в направлении на точку наблюдения энергии равна интегралу от произведения плотности потока энергии, падающей на рассеивающий объем, эффективного поперечника рассеяния из единичного объема в направлении на приемник и множителя, описывающего геометрическое затухание рассеянной волны.

1.6. Селективный характер рассеяния

Вернемся к обсуждению формулы для эффективного поперечника рассеяния. Из (1.5.9) видно, что за рассеяние на угол θ отвечает лишь одна спектральная компонента неоднородностей, соответствующая пространственному периоду

$$l(\theta) = \frac{2\pi}{2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\lambda}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (1.6.1)$$

Формула (1.6.1) является известным условием Вульфа-Брегга для дифракции на чисто синусоидальных пространственных структурах (например, рентгеновского излучения на кристаллических решетках). Таким образом, рассеяние можно интерпретировать, как рассеяние на случайных дифракционных решетках, на совокупность которых можно мысленно разбить случайное поле неоднородностей.

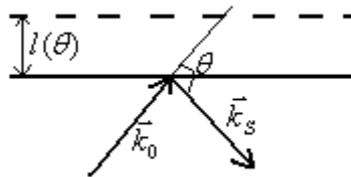


Рис. 1.6.1

Выражение (1.6.1) определяет пространственный период той гармоники, на который волна дифрагирует под углом θ (рис. 1.6.1). При этом пространственный спектр флуктуаций среды содержит бесконечный набор таких гармоник - объемных дифракционных решеток со всевозможными периодами и ориентациями.

Селективный характер рассеяния заключается в том, что в заданном направлении \vec{n} дают вклад волны, рассеянные лишь на выделенной решетке - с пространственным периодом $l(\theta)$ и с ориентацией, отвечающей закону отражения в точке \vec{r}' первичной волны из точки \vec{R} в точку \vec{r} (рис. 1.6.1). Интенсивность этой гармоники пропорциональна спектральной плотности $\Phi_\varepsilon(\vec{K})$.

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда происходит на крупномасштабных неоднородностях. Напомним, что крупномасштабными называются неоднородности, внутренний масштаб турбулентности которых много меньше длины волны ($l_0 \gg \lambda$). Следовательно $kl_0 \gg 1$. Это значит, что модуль $\Phi_\varepsilon(k)$ для пространственных периодов $kl_0 \geq 1$ уже очень мал. Входящий в выражение (1.5.9) множитель $\Phi_\varepsilon(2k \sin(\frac{\theta}{2}))$ практически равен нулю, как только $2k \sin(\frac{\theta}{2}) \approx \frac{1}{l_0}$. Но если неоднородности крупномасштабные, то

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \frac{1}{2kl_0} \ll 1. \quad (1.6.2)$$

При значениях углов θ , удовлетворяющих условию (1.6.2), рассеяние происходит в очень узкий конус углов относительно направления распространения падающей волны. В этом случае направления, в которые эффективно рассеивается волна \vec{n}' , близки к направлению \vec{m}' падающей волны, и угол $\chi(\vec{r}') \approx \pi/2$, поэтому $\sin^2(\chi(\vec{r}') \approx 1$, и

$$\sigma_0(\vec{r}') \approx \frac{\pi}{2} k^4 \Phi_\varepsilon(k\theta). \quad (1.6.3)$$

В этом случае направление рассеянной волны практически совпадает с направлением падающей волны. Для электромагнитных волн будет совпадать и их поляризация. Индикатриса рассеяния сильно вытянута вперед.

Аналогичные выводы мы могли сделать ранее, анализируя выражение (1.2.11). Мы показали, что в случае крупномасштабных неоднородностей второе слагаемое в правой части много меньше первого. А именно за счет этого слагаемого существует взаимодействие различных компонент вектора электрического поля, и, следовательно, может происходить изменение поляризации – поворот \vec{E} . Если отбросить это слагаемое, то уравнение (1.2.11) приобретает вид (1.2.12), которое распадается на три совершенно одинаковых уравнения для трех компонент вектора \vec{E} . В силу линейности этих уравнений их

решение можно представить в виде $E_{i_0}A(\vec{r})$, где E_{i_0} - начальные компоненты вектора \vec{E} , а $A(\vec{r})$ - общая для всех компонент функция. Таким образом, $\vec{E}_0A(\vec{r})$. Следовательно, поляризация рассеянной волны в случае рассеяния на крупномасштабных неоднородностях не изменяется, изменяется лишь модуль поля. Поэтому в этом случае вместо полной системы из трех уравнений для компонент поля можно пользоваться одним скалярным уравнением для любой из компонент.

Детальный расчет однократного рассеяния в рамках векторного уравнения (1.2.11) показал механизм такого сохранения поляризации рассеянной волны как следствие узкой диаграммы рассеяния – рассеяния вперед.

При распространении ультракоротких и световых волн неоднородности практически всегда можно считать крупномасштабными (для турбулентной атмосферы ($l_0 \approx 1\text{см}$, $\lambda \ll l_0$)) и пользоваться скалярным уравнением

$$\Delta E + k^2 E = -k^2 \varepsilon_1 E \quad (1.6.4)$$

Кроме того, как уже говорилось, подобному скалярному уравнению удовлетворяют и звуковые волны.

Учет изменения поляризации волны сильно усложняет техническую сторону решения задач – приводит к громоздким вычислениям, но с точки зрения математических методов не привносит ничего нового. Поэтому в дальнейшем мы будем иллюстрировать использование различных методов на примере скалярного уравнения (1.6.4), так называемого стохастического уравнения Гельмгольца.

В случае рассеяния на мелкомасштабных неоднородностях корреляционная функция поля неоднородностей очень узкая, а пространственный спектр, напротив, широкий и практически не зависит от k . Эффективный поперечник рассеяния при этом равен

$$\sigma_0(\vec{r}') = 2\pi^2 k^4 \Phi_\varepsilon(0). \quad (1.6.5)$$

Диаграмма рассеяния в случае мелкомасштабных неоднородностей практически изотропна.

Заметим также, что в реальных случаях излучение и прием осуществляется направленными антеннами. При этом область интегрирования остается конечной и тогда, когда неоднородности заполняют все пространство. Рассеивающий объем в этом случае создается пересечением двух диаграмм направленности – передающей и приемной антенн.

1.7. Многократное рассеяние волн в случайно-неоднородных средах

В предыдущих разделах мы рассматривали распространение волн в случайно-неоднородных средах в рамках теории однократного рассеяния (ТОР). Подобный подход уже более 50 лет позволяет для разных типов волн в любых средах рассчитывать статистические характеристики рассеянных полей. Пользуясь борновским приближением, было проанализировано различных ситуаций и задач, в том числе:

1. выяснение пространственной, угловой и частотной корреляции рассеянных волн, вероятностных распределений рассеянного поля;
2. анализ рассеяния в различных средах (атмосфера, плазма, океан и т.д.) волн различной природы (электромагнитных, акустических и других);
3. рассеяние волн на нестационарных неоднородностях;
4. рассеяние на дискретных неоднородностях;
5. рассеяние на анизотропных неоднородностях;
6. распространение модулированных и импульсных сигналов;
7. анализ частных случаев, связанных с различными соотношениями между параметрами сигнала и среды (например, между радиусом корреляции неоднородностей и раскрытия диаграммы направленности антенн).

Наряду с решением задач в рамках однократного рассеяния делались попытки выйти за рамки данного приближения. Коротко можно сформулировать следующие причины для ее создания теории многократного рассеяния (ТМР):

1. При рассеянии на крупномасштабных неоднородностях на достаточно длинных трассах распространения волна, рассеянная в направлении распространения падающей волны, снова рассеивается. В результате на длинных трассах рассеянное поле становится сравнимо с падающим, и приближение однократного рассеяния уже не может быть использовано.
2. В случае достаточно больших флуктуаций среды рассеянное поле становится значительным уже на сравнительно малых трассах.
3. Для более строгого обоснования справедливости приближения ТОР необходимо показать, что учет многократного рассеяния дает добавки,

пренебрежимо малые по сравнению величинами, учтенными в ТОР. Чтобы показать это, необходимо вычислить хотя бы двукратное рассеяние, то есть решить уравнение для рассматриваемых полей во втором приближении метода последовательных приближений.

Перейдем к обсуждению эффектов многократного рассеяния волн. Как уже было сказано выше, множество задач, связанных с теоретическим исследованием распространения волн различной физической природы в неоднородных средах, сводится к решению стохастического уравнения Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = -k^2 \varepsilon U, \quad (1.7.1)$$

где U – волновое поле (любой физической природы).

Уравнение (1.7.1) заведомо точно не решается, поэтому для его решения приходится строить различные приближенные теории. Как известно, в приближенных математических методах удобно оперировать каким-либо малым параметром. В частности, в ТОР использовалась малость рассеянного поля. В ТМР рассеянное поле по определению не мало. Приходится при построении приближенной теории использовать малость других параметров, которые остаются малыми при большом рассеянном поле. Приведем примеры таких параметров, используемых в ТМР:

1. $\frac{\lambda}{l_0}$ или $\frac{l_0}{\lambda}$, где l_0 - масштаб неоднородностей, λ - длина волны.
2. σ_ε^2 – дисперсия флуктуаций поля неоднородностей.

Исторически первыми были попытки учесть многократное рассеяние в лоб. Покажем, как это делалось. Заметим, что уравнение (1.7.1) можно рассматривать как неоднородное уравнение, считая правую часть известной - $f(\vec{r}) = -k^2 \varepsilon_1 U$. Тогда

$$\Delta U + k^2 U = f(\vec{r}), \quad (1.7.2)$$

Решаем уравнение (1.7.2) методом функции Грина

$$U(\vec{r}) = U_0(\vec{r}) + \int G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') d\vec{r}'. \quad (1.7.3)$$

Функция U_0 удовлетворяет невозмущенному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta U_0 + k^2 U_0 = 0.$$

Уравнению для точечного источника и соответствующим граничным условиям должна удовлетворять функция Грина $G: \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') - k^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r}, \vec{r}')$.

Подставляя в (7.3) функцию $f(\vec{r})$, получаем

$$U(\vec{r}) = U_0(\vec{r}) - k^2 \int G(\vec{r}, \vec{r}') \varepsilon_1(\vec{r}') U(\vec{r}') d\vec{r}'. \quad (1.7.4)$$

Уравнение (1.7.4) эквивалентно уравнению (1.7.1) и тоже точно не решается. Но оно оказывается удобным при отыскании решений методом итераций (последовательных приближений).

Чтобы получить первую итерацию, запишем поле в точке $\vec{r} = \vec{r}'$:

$$U(\vec{r}') = U_0(\vec{r}') - k^2 \int G(\vec{r}', \vec{r}'') \varepsilon_1(\vec{r}'') U(\vec{r}'') d\vec{r}'' \quad (1.7.5)$$

и подставим в правую часть (7.5) поле в виде (7.4):

$$U(\vec{r}') = U_0(\vec{r}') - k^2 \int G(\vec{r}', \vec{r}'') \varepsilon_1(\vec{r}'') U_0(\vec{r}'') d\vec{r}'' + k^4 \int G(\vec{r}', \vec{r}'') \varepsilon_1(\vec{r}'') d\vec{r}'' \int G(\vec{r}'', \vec{r}''') \varepsilon_1(\vec{r}''') U(\vec{r}''') d\vec{r}''' \quad (1.7.6)$$

Записав значение поля в точке $\vec{r} = \vec{r}''$, и подставив его в правую часть уравнения (7.6), получим вторую итерацию:

$$U(\vec{r}''') = U_0(\vec{r}''') - k^2 \int G(\vec{r}'', \vec{r}''') \varepsilon_1(\vec{r}''') U(\vec{r}''') d\vec{r}''',$$

$$U(\vec{r}') = U_0(\vec{r}') - k^2 \int G(\vec{r}', \vec{r}'') \varepsilon_1(\vec{r}'') U_0(\vec{r}'') d\vec{r}'' + k^4 \int G(\vec{r}', \vec{r}'') \varepsilon_1(\vec{r}'') d\vec{r}'' \int G(\vec{r}'', \vec{r}''') \varepsilon_1(\vec{r}''') U_0(\vec{r}''') d\vec{r}''' -$$

$$- k^6 \iiint G(\vec{r}', \vec{r}'') G(\vec{r}'', \vec{r}''') G(\vec{r}''', \vec{r}''''') \varepsilon_1(\vec{r}'') \varepsilon_1(\vec{r}''') \varepsilon_1(\vec{r}''''') U_0(\vec{r}''''') + \dots \quad (1.7.7)$$

В итоге получаем бесконечный ряд теории возмущений – результат последовательных итераций

$$U_n(\vec{r}') = U_0(\vec{r}') - k^2 \int G(\vec{r}', \vec{r}'') \varepsilon_1(\vec{r}'') U_{n-1}(\vec{r}'') d\vec{r}'', \quad (1.7.8)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Очевидно, что нулевой член ряда (1.7.7) – невозмущенное решение уравнения Гельмгольца, первый член ряда дает приближение однократного рассеяния, по установившейся терминологии второй член описывает двукратное рассеяние и т.д. Заметим, что n -кратное рассеяние пропорционально n -му

моменту ε_l . Подобный подход позволяет разложить рассеянное поле по кратности рассеяния:

$$U_s = U - U_0 = U_1 + U_2 + U_3 + \dots \quad (1.7.9)$$

где U_1 - однократно рассеянное поле, U_2 - двукратно рассеянное поле и т.д.

В математике ряд (1.7.7) называется рядом Неймана для интегрального уравнения (1.7.4), а в физике – борновским разложением. Именно Борн впервые применил теорию возмущений для потенциала взаимодействия в квантовой механике в 1926 году. Однако задолго до этого метод возмущений в сходной форме был использован Рэлеем при изучении рассеяния света на прозрачных телах. В оптике и теперь говорят о рэлеевском, а не о борновском рассеянии света.

Вернемся к обсуждению борновского разложения рассеянного поля. В силу того, что в формулу (1.7.7) входят n -ые моменты ε_l , то для вычисления даже среднего значения поля U надо знать моменты поля неоднородностей любого порядка. При произвольной статистике ε_l нахождение таких моментов само по себе представляет сложную задачу. Но если даже она разрешима (как в случае гауссова распределения), то остается открытым вопрос о методах суммирования усредненных рядов теории возмущений.

Следует отметить, что рассчитать гораздо труднее, чем однократное. Учет каждого следующего члена рассеяния катастрофически усложняет расчеты.

Попытки учесть только двукратное рассеяние оказались неэффективными. Дело в том, что если рассеянное поле мало, то двукратное рассеяние дает вклад в рассеянное поле во столько же раз меньший однократного, во сколько раз однократное меньше поля падающей волны. Таким образом, в случае малого рассеяния громоздкие расчеты двукратного рассеяния практически ничего не дают.

Если же рассеянное поле велико, то двукратное рассеяние дает вклад порядка однократного, и такой же порядок имеют поля любой другой кратности рассеяния. Следовательно, необходимо вычислить все члены ряда Неймана, что практически невозможно.

Только по двум причинам имеет смысл вычислять эффекты двукратного рассеяния волн в случайно-неоднородных средах:

1. Необходимо оценить границы приближения однократного рассеяния (ТОР справедлива пока двукратное рассеяние много меньше однократного).
2. Требуется исследовать эффекты, которые не улавливаются в рамках ТОР. К таким эффектам относится, например, эффект затухания среднего поля.

1.8. Эффект затухания среднего поля

Рассмотрим первое приближение метода итераций (1.7.7) – приближение однократного рассеяния:

$$U_1(\vec{r}) = U_0(\vec{r}) - k^2 \int G(\vec{r}, \vec{r}') \varepsilon_1(\vec{r}') U_0(\vec{r}') d\vec{r}'.$$

Заметим, что в этом случае среднее поле при прохождении волны через случайно-неоднородную среду не изменяется:

$$\langle U_1 \rangle = U_0,$$

поскольку среднее от флуктуирующей части поля неоднородностей равно нулю $\langle \varepsilon_1 \rangle = 0$. Напомним, что согласно (1.2.8) $\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle + \varepsilon_1$.

Между тем хорошо известно, что рассеяние приводит к появлению фазовых сдвигов и, как следствие, к затуханию среднего поля:

$$\langle U_1 \rangle < U_0.$$

А в области, где многократное рассеяние существенно, значение среднего поля стремится к нулю.

Учет двукратного рассеяния позволяет уловить эффект затухания среднего поля, поскольку во втором приближении метода итераций (1.7.7) в выражение для среднего поля входит второй статистический момент флуктуирующей части ε . Попытки хотя бы частично просуммировать ряд Неймана привели к появлению методов селективного суммирования. Идея данных методов заключается в том, чтобы из каждого акта рассеяния выделить наиболее важные слагаемые для объяснения того или иного эффекта, которые удастся просуммировать. Приведем один из способов вывода уравнения для среднего поля, частично суммирующего вклады от всех порядков рассеяния.

В качестве исходного уравнения используем стохастическое уравнение Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = -k^2 \varepsilon_1 U \quad . \quad (1.8.1)$$

Представим решение уравнения (1.8.1) U в виде суммы его среднего значения поля и его флуктуирующей части Ψ

$$U = \langle U \rangle + \Psi. \quad (1.8.2)$$

Напомним, что по определению среднее от флуктуирующей части равно нулю: $\langle \Psi \rangle = 0$.

Подставив волну в виде (1.8.2) в уравнение (1.8.1), получим

$$\Delta \langle U \rangle + \Delta \Psi + k^2 \langle U \rangle + k^2 \Psi = -k^2 \varepsilon_1 \langle U \rangle - k^2 \varepsilon_1 \Psi. \quad (1.8.3)$$

Усреднив выражение (1.8.3), имеем следующее уравнение для среднего поля $\langle U \rangle$:

$$\Delta \langle U \rangle + k^2 \langle U \rangle = -k^2 \langle \varepsilon_1 \Psi \rangle. \quad (1.8.4)$$

Вычитая (1.8.4) из (1.8.3), получаем уравнение для флуктуирующей части рассеянного поля:

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = -k^2 \varepsilon_1 \langle U \rangle - k^2 \varepsilon_1 \Psi + k^2 \langle \varepsilon_1 \Psi \rangle. \quad (1.8.5)$$

Заметим, что последние два слагаемые в выражении (1.8.5) имеют второй порядок малости. Поэтому в первом приближении решение уравнения (1.8.5) в интегральном виде запишем как

$$\Psi = -k^2 \int G(\vec{r}, \vec{r}') \varepsilon_1(\vec{r}') \langle U(\vec{r}') \rangle d\vec{r}'. \quad (1.8.6)$$

Подставив выражение для Ψ в виде (1.8.6) в уравнение (1.8.4), получаем

$$\Delta \langle U \rangle + k^2 \langle U \rangle = k^4 \int \langle \varepsilon(\vec{r}) \varepsilon(\vec{r}') \rangle G(\vec{r}, \vec{r}') \langle U(\vec{r}') \rangle d\vec{r}'. \quad (1.8.7)$$

Выражение для функции Грина в однородной среде известно:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp\{ik|\vec{r} - \vec{r}'|\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

кроме того, для статистически однородного поля случайной среды корреляционная функция зависит лишь от разности $\vec{r} - \vec{r}'$

Окончательно уравнение (1.8.7) для среднего поля будет иметь вид:

$$\Delta \langle U \rangle + k^2 \langle U \rangle = k^4 \int B_\varepsilon(\vec{r} - \vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') \langle U(\vec{r}') \rangle d\vec{r}'. \quad (1.8.8)$$

Детальное сравнение (1.8.8) с рядом Неймана показывает, что среднее поле, найденное с помощью уравнения (1.8.8), учитывает точно однократное и двукратное рассеяние и учитывает также часть четырехкратного и некоторых других порядков рассеяния. Более того, найдя решение уравнения (1.8.5) во втором приближении, можно показать, что данный метод удачно суммирует многократное рассеяние в случае мелкомасштабных неоднородностей.

Качественные оценки показывают, что для того, чтобы уравнение (1.8.8) достаточно точно описывало среднее поле многократно рассеянной волны, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия: $\sigma_{\varepsilon}^2 k^2 l_0^3 \ll 1$; $kl_0 \ll 1$. Таким образом, метод селективного суммирования хорошо работает для сред с мелкомасштабными по сравнению с длиной волны неоднородностями и дополнительным ограничением на дисперсию флуктуаций неоднородностей среды.

ГЛАВА 2. АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

2.1. Задачи рассеяния акустических волн

Рассеяние звука случайными неоднородностями играет важную роль в формировании акустических полей в океане. Вследствие рассеяния возникает дополнительная многолучевость, появляются пространственно-временные флуктуации распространяющихся волн, уменьшается или вовсе утрачивается когерентность сигналов. Рассеянные поля – основная причина морской реверберации, уменьшающей эффективность работы гидроакустических устройств различного назначения.

С другой стороны, рассеянные сигналы содержат полезную информацию о параметрах самих неоднородностей, которая может быть извлечена из результатов измерений посредством решения обратных задач теории рассеяния. В зависимости от конкретной ситуации преобладают те или иные механизмы рассеяния.

Теория рассеяния звука в океане базируется на теории рассеяния случайными объемными неоднородностями среды и на теории рассеяния статистически неровными поверхностями. Причинами рассеяния в океане могут служить, например, флуктуации температуры и показателя преломления или дискретные препятствия. К основным дискретным рассеивателями относятся пузырьки воздуха, занесенные в воду ветром и поверхностным волнением, живые организмы, а также донные неоднородности.

Различают три основных типа морской реверберации: объемную, поверхностную и донную. Причиной объемной реверберации служат, как правило, эффекты, связанные с так называемыми звукорассеивающими слоями – протяженными горизонтально биологическими скоплениями, залегающими в основном в пределах верхней тысячи метров водной толщи открытого океана. Характерной особенностью звукорассеивающих слоев являются их ежедневные вертикальные миграции. Поверхностная реверберация создаётся не только

волнением поверхности моря, но и прилегающим к нему слоем воздушных пузырьков, а иногда и поднимающимися в верхние слои воды животными. Донная реверберация возникает из-за существования неровностей дна и неоднородности верхнего осадочного слоя (наличия дискретных рассеивателей).

Зондирование на основе рассеяния звука является дистанционным методом диагностики и в ряде случаев является наиболее предпочтительным в практике океанических исследований. Большой интерес представляет изучение местоположения и поведения источников обратного рассеяния, обусловленных планктоном и живыми организмами [7]. Не менее важна задача регистрации дистанционным методом газовых пузырьков или пелены пузырьков, появление которых может быть вызвано техногенными процессами и катастрофами. Например, утечка газа из-за аварии на газопроводах, участки которых проложены по дну водоемов. Особую актуальность имеет дистанционное акустическое зондирование морского дна, это вызвано решением практических задач инженерной сейсморазведки, поиска объектов в осадочных слоях и экологического контроля в районах расположения портов, морских трубопроводов и морских добывающих платформ [13].

Если в среде, в которой распространяется акустическая волна, имеются неоднородности, то скорость звука $c(\mathbf{r})$ наряду с регулярными изменениями испытывает и флуктуации.

Представим показатель преломления $n(\mathbf{r}) = c_0/c(\mathbf{r})$ в виде суммы регулярной $n_0(\mathbf{r})$ и флуктуационной $\mu(\mathbf{r})$ компонент [14]:

$$n(\mathbf{r}) = n_0(\mathbf{r}) + \mu(\mathbf{r}). \quad (2.1.1)$$

При этом $\langle \mu \rangle = 0$.

Тогда для уравнения Гельгольца

$$\Delta p + k_0^2 n^2(\mathbf{r}) p = 0, \quad k_0 = \omega/c_0, \quad (2.1.2)$$

Решение можно искать в виде

$$p = p_0 + p_s, \quad (2.1.3)$$

где $p_0(\mathbf{r})$ - первичное акустическое поле - решение невозмущенного уравнения Гельмгольца (при $\mu = 0$), p_s – рассеянное акустическое поле.

Полагая, что рассеянное поле мало ($|p_s| \ll |p_0|$), подставим выражения (2.1.1) и (2.1.3) в уравнение (2.1.2). Тогда, группируя слагаемые по порядку малости, для рассеянной компоненты поля получаем уже знакомое стохастическое уравнение Гельмгольца:

$$\Delta p_s + k_0^2 n_0^2(\mathbf{r}) p_s = -2k_0^2 n(\mathbf{r}) \mu(\mathbf{r}) p_0(\mathbf{r}), \quad (2.1.4)$$

которое описывают рассеяние первичного поля $p_0(\mathbf{r})$ на случайных неоднородностях среды $\mu(\mathbf{r})$.

Методы решения уравнения (2.1.4) были рассмотрены нами в предыдущих параграфах. Заметим, что общий волновой подход к проблемам распространения и рассеяния излучения, позволяет находить пути оптимального решения задач рассеяния любых типов волн в любых средах.

2.2. Рассеяние акустических волн на дискретных случайных неоднородностях

Интерес к исследованию эффектов, возникающих при обратном рассеянии акустических волн в океане на дискретных неоднородностях, связан, прежде всего, с необходимостью разработки и совершенствования эффективных дистанционных методов разведки месторождений железомарганцевых конкреций (ЖМК) на дне океана [15-18]. Являясь многокомпонентными рудами, ЖМК в настоящее время рассматриваются как важный источник минерального сырья. По данным многочисленных экспедиций, ЖМК залегают на слоях осадочных пород, слабо отражающих звуковые волны, а плотность конкреций и скорость звука в них заметно превышают эти параметры окружающего осадка.

Суть акустических методов обнаружения ЖМК – по рассеянному дном акустическому сигналу оценить запасы ЖМК, то есть их концентрацию. Однако на интенсивность сигнала, рассеянного в обратном направлении, влияет не только концентрация конкреций в озвученной области дна, но и ряд других факторов.

Теоретически задача о рассеянии волн на дискретных неоднородностях рассмотрена, например, в монографии [1], где в приближении однократного рассеяния рассмотрено рассеяние монохроматической волны на совокупности неподвижных частиц, занимающих некоторый объем. Показано, что среднюю интенсивность рассеянного поля можно представить как сумму трех компонент – когерентной, независимой и коллективной, причем коллективная компонента зависит от корреляции взаимного расположения рассеивателей. Если же дискретные неоднородности располагаются на плоской поверхности, то возникает вопрос о влиянии на среднюю интенсивность обратного рассеяния сигнала, отраженного от подстилающей рассеиватели плоскости. При наклонном зондировании такой неоднородной поверхности могут возникнуть эффекты затенения, когда одни рассеиватели как бы заслоняют собой другие, и оценка

концентрации неоднородностей по данным акустического мониторинга может быть неточна.

Поскольку в натуральных условиях невозможно проконтролировать изменение всех параметров задачи, для детального изучения эффектов, возникающих при обратном рассеянии, целесообразно использовать физическое моделирование процессов рассеяния акустических волн на дискретных донных вкраплениях [19].

Для изучения эффектов, возникающих при рассеянии акустических волн дискретными частицами, рассмотрим задачу дистанционного акустического зондирования случайных дискретных неоднородностей, расположенных на плоском слабо отражающем дне.

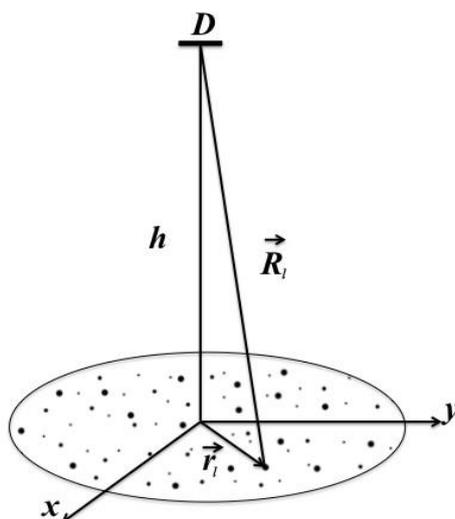


Рис. 2.2.1

Пусть преобразователь с апертурой D , совмещающий в себе излучатель и приёмник, расположен на высоте h над рассеивателями (рис. 2.2.1), его диаграмму направленности аппроксимируем гауссовой кривой:

$$D = e^{-\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2},$$

где θ_0 – ширина основного лепестка диаграммы направленности, по порядку величины равная отношению апертуры преобразователя к длине волны (λ/D).

Будем полагать, что подстилающая дискретные неоднородности поверхность является плоской и звукопрозрачной, а рассеиватели представляют собой абсолютно жесткие шарики одинакового радиуса. Воспользуемся теорией однократного рассеяния, применение которой оправдано в случае относительно небольших размеров частиц и их расположения на достаточно большом расстоянии друг от друга. Будем считать, что каждая частица рассеивает падающую волну так, словно рядом нет других частиц.

Тогда акустическое поле, рассеянное одной частицей, запишется в следующем виде:

$$p_l = \frac{|\alpha(ka)|p_0}{R_l^2} e^{2ikR_l} e^{-2\left(\frac{r_l D}{h\lambda}\right)^2}, \quad (2.2.1)$$

где $\alpha(ka)$ – коэффициент обратного рассеяния акустической волны на уединённой сфере (a – ее характерный размер, k – волновое число), p_0 – амплитуда излучаемой волны, $r_l = \sqrt{x_l^2 + y_l^2}$, $R_l = \sqrt{h^2 + r_l^2}$ – расстояние от l -ой частицы до преобразователя.

Суммарное поле, рассеянное в обратном направлении N одинаковыми неоднородностями, будет выглядеть следующим образом:

$$p = |\alpha(ka)|p_0 \sum_{l=1}^N \frac{1}{h^2 + r_l^2} \times \exp\left\{-2\left(\frac{r_l D}{h\lambda}\right)^2 + 2ik\sqrt{h^2 + r_l^2}\right\}, \quad (2.2.2)$$

где N – число неоднородностей, r_l – проекция вектора R_l на плоскость дна.

При условии $h^2 \gg r_l^2$ можно не учитывать в знаменателе формулы (2.2.2) вклад r_l^2 , а в фазе можем воспользоваться разложением R_l в ряд Тейлора,

поскольку $\frac{r_l^2}{h^2} \ll 1$: $\sqrt{h^2 + r_l^2} = h\sqrt{1 + \frac{r_l^2}{h^2}} \approx h\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r_l^2}{h^2}\right)\right)$.

В результате выражение будет иметь вид:

$$p = \frac{|\alpha(ka)|p_0}{h^2} \times \sum_{l=1}^N \exp\left\{-2\left(\frac{r_l D}{h\lambda}\right)^2 + 2ikh\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r_l^2}{h^2}\right)\right)\right\}. \quad (2.2.3)$$

Выражение для среднего поля, рассеянного совокупностью неоднородностей, в приближении однократного рассеяния можно вычислить следующим образом:

$$\langle p \rangle = |\alpha(ka)| p_0 N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ikR}}{R^2} e^{-2\left(\frac{rD}{h\lambda}\right)^2} W(r) dr \approx \frac{iA_0 \alpha(ka) \langle n \rangle \lambda}{2h} e^{2ikh} = \frac{iA_0 \alpha(ka) \langle n \rangle \pi}{hk} e^{2ikh}, \quad (2.2.4)$$

где $R = \sqrt{h^2 + r^2}$, $\langle n \rangle = NW(r)$ – средняя поверхностная концентрация дискретных неоднородностей. Здесь усреднение ведется по одноточечной функции распределения $W(r)$, которую при хаотическом, но в среднем равномерном расположении неоднородностей по плоскости дна можно считать постоянной.

Таким образом, среднее поле акустической волны, рассеянной на совокупности хаотически расположенных по плоскости дна рассеивателей, определяется параметрами падающей волны, средней поверхностной концентрацией неоднородностей $\langle n \rangle$ и глубиной их залегания h , а также коэффициентом рассеяния на отдельной частице $\alpha(ka)$.

2.3. Средняя интенсивность обратного рассеяния

В большинстве прикладных задач акустики особый интерес представляет средняя интенсивность отраженной волны, поскольку именно её измерения наиболее просты и несут информацию о характеристиках исследуемых объектов. Для нахождения средней интенсивности рассеянного в обратном направлении поля в приближении однократного рассеяния воспользуемся соотношением (2.2.3) для полей, рассеянных l -й и m -й частицами, находящимися в дальней зоне преобразователя:

$$\langle I \rangle = \langle p_l p_m^* \rangle = \left(\frac{|\alpha(ka)| p_0}{h^2} \right)^2 \times \left\langle \sum_{l=1, m=1}^N \exp \left\{ -\frac{x_l^2 + y_l^2}{h^2} \left(2 \left(\frac{D}{\lambda} \right)^2 - ikh \right) - \frac{x_m^2 + y_m^2}{h^2} \left(2 \left(\frac{D}{\lambda} \right)^2 + ikh \right) \right\} \right\rangle. \quad (2.3.1)$$

В первом приближении рассмотрим случай хаотического расположения неоднородностей на дне, тогда бинарную функцию распределения можно будет представить как произведение одноточечных функций распределения:

$$W(\vec{r}_l, \vec{r}_m) = W(\vec{r}_l) W(\vec{r}_m). \quad (2.3.2)$$

Представим выражение (2.3.1) в виде суммы двух слагаемых (при $l=m$ и $l \neq m$) и, полагая число слагаемых бесконечно большим, перейдем от суммирования к интегрированию:

$$\begin{aligned} \langle I \rangle = & \left(\frac{|\alpha(ka)| p_0}{h^2} \right)^2 \left(\langle N \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} W(\vec{r}_l) e^{-4 \left(\frac{r_l D}{h \lambda} \right)^2} d\vec{r}_l + \right. \\ & \left. + \left(\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle \right) \int_{-\infty}^{+\infty} W(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \exp \left\{ -\left(\frac{r_l}{h} \right)^2 \left(2 \left(\frac{D}{\lambda} \right)^2 - ikh \right) - \left(\frac{r_m}{h} \right)^2 \left(2 \left(\frac{D}{\lambda} \right)^2 + ikh \right) \right\} d\vec{r}_l d\vec{r}_m \right). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Среднее число рассеивателей в интересующей нас области будем считать большим $\langle N \rangle \gg 1$, поэтому во втором слагаемом выражения (2.3.3) можно пренебречь $\langle N \rangle$ по сравнению с $\langle N^2 \rangle$.

После вычисления интегралов с учетом того, что рассеивающая поверхность находится в зоне Фраунгофера излучателя, выражение для средней

интенсивности отраженного от совокупности дискретных неоднородностей сигнала примет вид:

$$\langle I \rangle = \left(\frac{|\alpha(ka)|p_0\pi}{kh} \right)^2 \left(\frac{\pi}{D^2} \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 \right). \quad (2.3.4)$$

Данное выражение является суммой когерентной и независимой компонент:

$$\langle I \rangle = I_{ind} + I_{coh}.$$

Независимая (или некогерентная) составляющая представляет из себя сумму интенсивностей сигналов, приходящих от отдельных рассеивателей, вклад ее пропорционален числу рассеивателей:

$$I_{ind} = \left(\frac{|\alpha(ka)|p_0\pi}{kh} \right)^2 \frac{\pi}{D^2} \langle n \rangle,$$

Когерентная же компонента суммирует поля с учетом их фаз, она имеет квадратичную зависимость от средней концентрации дискретных неоднородностей и будет доминировать при больших концентрациях рассеивателей:

$$I_{coh} = \left(\frac{|\alpha(ka)|p_0\pi}{kh} \right)^2 \langle n \rangle^2.$$

Для удобства будем использовать не среднюю концентрацию, а коэффициент упаковки неоднородностей, характеризующий площадь дна, занятую рассеивателями $\varepsilon = \langle n \rangle \pi a^2$.

На рис. 2.3.1 представлена зависимость средней интенсивности поля обратного рассеяния от коэффициента упаковки.

Однако результаты физического моделирование не подтвердили монотонный рост средней интенсивности рассеянного сигнала с увеличением средней концентрации дискретных неоднородностей [19].

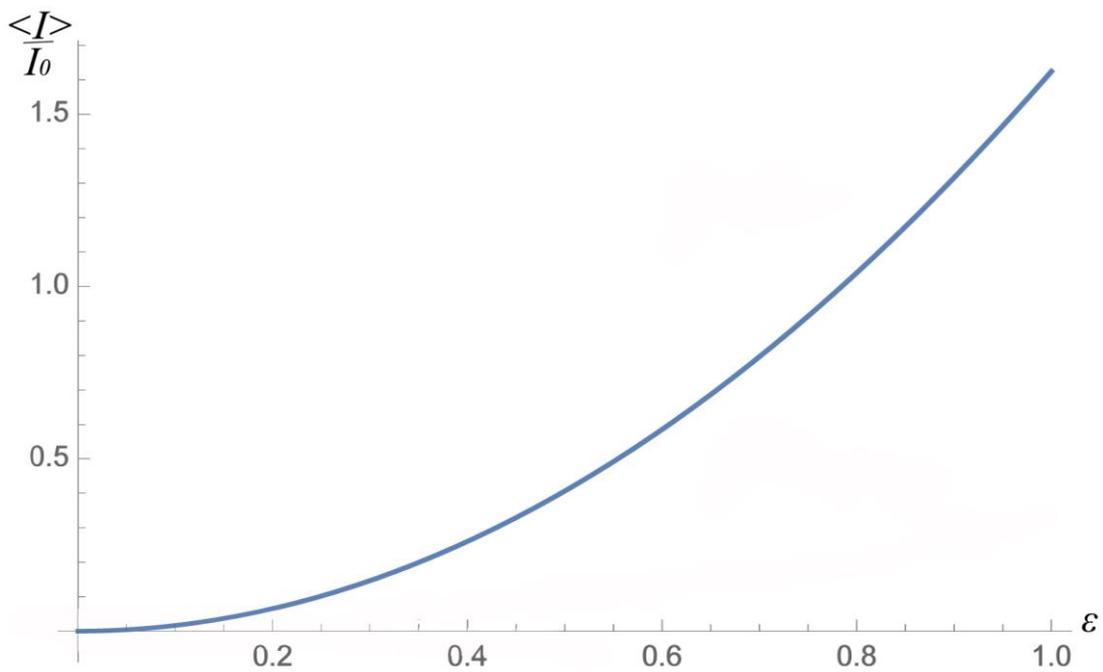


Рис. 2.3.1

Чтобы понять возможные причины возникновения несоответствия экспериментальных данных предложенной теории, следует обратиться к модели обратного рассеяния с учетом сигнала, отраженного от дна [19].

2.4. Рассеяние акустических волн на абсолютно жесткой уединённой сфере

Прежде чем перейти к сравнению результатов, предсказанных теорией однократного рассеяния акустических волн на дискретных случайных неоднородностях, с результатами физических экспериментов, обратимся к теории рассеяния на отдельной частице.

Рассеяние от многих тел, имеющих более сложную форму, можно описать, используя результаты рассеяния для сфер (т.е. акустическое малое несферическое тело, размеры которого меньше длины звуковой волны, рассеивает звук так же, как и сфера, имеющая тот же объем и те же средние значения физических параметров) [20].

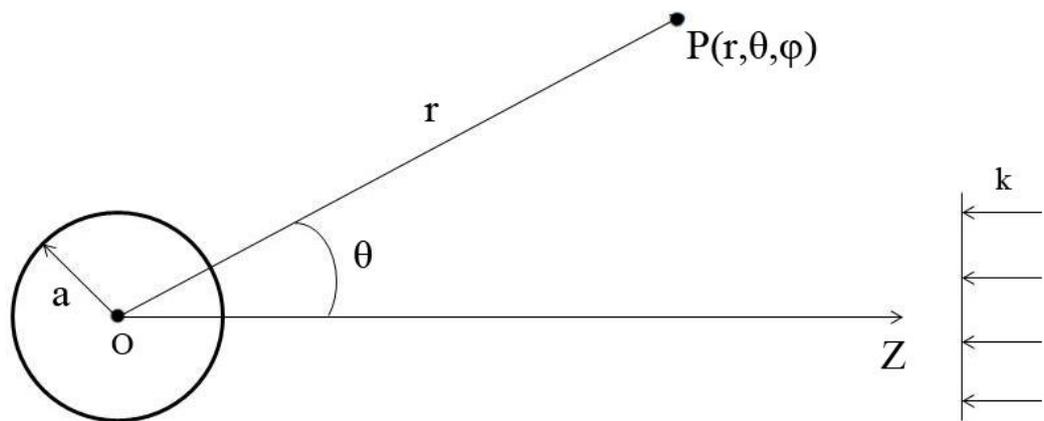


Рис. 2.4.1

Рассмотрим случай рассеяния на сфере радиуса a , облучаемой гармонической волной от источника, помещенного на бесконечности (рис. 2.4.1).

Будем считать, что сфера является идеально жесткой, т.е. на ее поверхности выполняется однородное условие Неймана

$$\left. \frac{\partial p_i}{\partial r} + \frac{\partial p_s}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (2.4.1)$$

Давление в падающей монохроматической волне единичной амплитуды можно записать в сферической системе координат:

$$p_i = e^{i\vec{k}\vec{r}} e^{-i\omega t} = e^{ikr \cos(\pi-\theta)} e^{-i\omega t} = e^{-ikr \cos\theta} e^{-i\omega t}.$$

Из данного выражения видно, что зависимость от второй угловой координаты φ отсутствует. Это связано с тем, что полярная ось Z коллинеарна волновому вектору \vec{k} падающей волны, вследствие чего задача оказывается осесимметричной. Временной множитель $e^{-i\omega t}$ для сокращения записей в дальнейшем будем опускать.

Разложим давление p_i в ряд по собственным функциям уравнения Гельмгольца в сферической системе координат:

$$p_i = e^{-ikr \cos\theta} e^{-i\omega t} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m P_m(\cos\theta), \quad (2.4.2)$$

где $P_m(\cos\theta)$ – полином Лежандра, являющийся в осесимметричном случае решением разделенного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка для координаты θ .

Полиномы Лежандра ортогональны друг другу в интервале углов θ от 0^0 до 180^0 , т.е.

$$\int_{-1}^1 P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) d(\cos\theta) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2m+1}, & m = n \end{cases}. \quad (2.4.3)$$

Для того, чтобы воспользоваться ортогональностью полиномов Лежандра, умножим обе части уравнения (2.4.2) на $P_n(\cos\theta)$ и проинтегрируем правую и левую части по $\cos\theta$ от -1 до $+1$:

$$\int_{-1}^1 P_n(\cos\theta) e^{-ikr \cos\theta} d(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_{-1}^1 P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta) d(\cos\theta) = A_n \frac{2}{2n+1},$$

откуда получаем:

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(\cos\theta) e^{-ikr \cos\theta} d(\cos\theta) = (2n+1) i^{-n} j_n(kr), \quad (2.4.4)$$

где $j_n(kr)$ – сферическая функция Бесселя.

Подставляя (2.4.4) в (2.4.2), окончательно имеем для падающей волны

$$p_i = e^{-ikr \cos \theta} = \sum_{m=0}^{\infty} i^{-m} (2m+1) P_m(\cos \theta) j_m(kr). \quad (2.4.5)$$

Давление в рассеянной волне p_s также представим в виде ряда по собственным функциям, но в качестве радиальных функций возьмем сферические функции Ханкеля 1-го рода

$$h_m^{(1)}(kr) = j_m(kr) + in_m(kr),$$

где $n_m(kr)$ – сферическая функция Неймана. Функции $n_m^{(1)}(kr)$ удовлетворяют условию излучения (условию Зоммерфельда). Тогда для p_s имеем

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(\cos \theta) h_m^{(1)}(kr), \quad (2.4.6)$$

где a_m - неизвестные коэффициенты разложения, которые находятся из граничного условия на поверхности сферы.

Подставляя (2.4.6) и (2.4.5) в граничное условие (2.4.1) и используя еще раз свойство ортогональности полиномов Лежандра, найдем неизвестные коэффициенты разложения:

$$a_m = -\frac{j_m'(ka)}{h_m^{(1)'}(ka)} i^{-m} (2m+1), \quad (2.4.7)$$

где штрих обозначает производную по координате.

Окончательное выражение для давления в рассеянной волне с учетом (2.4.7) принимает вид

$$p_s = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{j_m'(ka)}{h_m^{(1)'}(ka)} i^{-m} (2m+1) P_m(\cos \theta) h_m^{(1)}(kr). \quad (2.4.8)$$

Заметим, что если дискретный сферический рассеиватель является абсолютно мягкой частицей, то на поверхности сферы ($r=a$) выполняется однородное условие Дирихле, которое в случае акустической волны записывается в виде

$$p_i + p_s|_{r=a} = 0, \quad (2.4.9)$$

тогда давление в рассеянной волне будет равно

$$p_s = -\sum_{m=0}^{\infty} i^{-m} (2m+1) \frac{j_m'(ka)}{h_m^{(1)'}(ka)} P_m(\cos \theta) h_m^{(1)}(kr), \quad (2.4.10)$$

Выражения (2.4.8) и (2.4.10) можно записать единой формулой с помощью оператора Ω :

$$p_s = -\sum i^{-m} (2m+1) \frac{\Omega j_m(kr_0)}{\Omega h_m^{(1)}(kr_0)} P_m(\cos\theta) h_m^{(1)}(kr), \quad (2.4.11)$$

где $\Omega = 1$ для мягкой сферы; $\Omega = \partial p_i / \partial r$ для жесткой сферы.

В дальнейшем поле можно представить следующим образом:

$$p_s = \frac{e^{ikr}}{r} D(\theta). \quad (2.4.12)$$

Функции Ханкеля $h_m^{(1)}(kr)$ при больших kr (в зоне Фраунгофера) в свою очередь имеет асимптотическое представление:

$$h_m^{(1)}(kr) \approx \frac{i^{-n-1}}{kr} e^{ikr}. \quad (2.4.13)$$

Подставляя (2.4.13) в (2.4.11) и используя представление (2.4.12) получим следующее выражение для угловой характеристики рассеяния:

$$D(\theta) = \frac{i}{k} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1) \frac{\Omega j_m(ka)}{\Omega h_m^{(1)}(ka)} P_m(\cos\theta). \quad (2.4.14)$$

Модули угловых характеристик жесткой сферы (индикатрисы рассеяния) для разных волновых размеров представлены на рис. 2.4.2.

Как видно из рисунка, рассеяние звука на малой сфере практически изотропно (А). С увеличением волнового размера сферы возрастает максимум рассеянного поля, направленного вперед (В, С, D, Е, F).

Однако в обратном направлении рассеяние по-прежнему остается в основном изотропным.

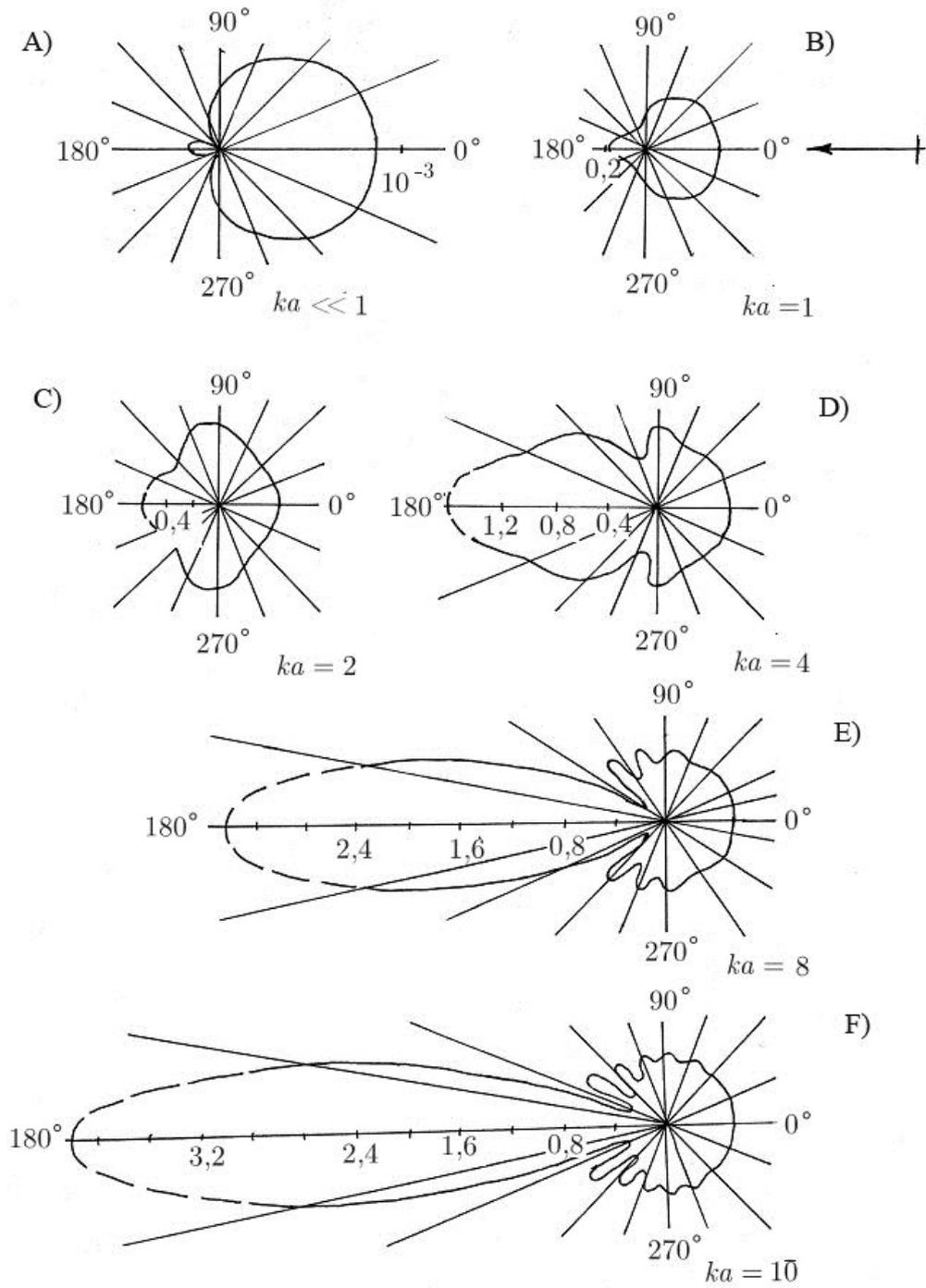


Рис. 2.4.2

Исследованию рассеяния на жёсткой сфере посвящены разделы в монографиях [6, 21]. Показано, что звуковое давление, рассеянное на малой абсолютно жёсткой сфере, пропорционально её объёму и обратно пропорционально квадрату длины волны (подобно давлению, создаваемому абсолютно жёсткой осциллирующей сферой). В монографии [22] представлен подробный расчет коэффициента обратного рассеяния на уединённой жесткой сфере. Отметим, что расчет коэффициента отражения на уединенной частице для каждой конкретной задачи представляет собой сложную задачу, решаемую методами численного моделирования. Для качественных теоретических оценок в работе [19] была предложена аппроксимация поведения $\alpha(ka)$ следующими функциями:

$$\begin{aligned} \alpha(ka) &= \frac{a}{2} \exp(-i(2ka + \varphi_0)) \quad \text{при } ka \gg 1; \\ \alpha(ka) &= -i \frac{a}{2} (ka)^2 \quad \text{при } ka < 1. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Во многих акустических приложениях удобно использовать формулу (2.4.15) для изучения особенностей поведения средней интенсивности поля обратного рассеяния.

2.5. Эффекты интерференции при обратном рассеянии

Изучив теорию рассеяния акустических волн на отдельной частице, вернемся к случаю дистанционного зондирования донных дискретных неоднородностей. В отличие от случая звукопрозрачного дна, рассмотренного в параграфах 2.2 и 2.3, предположим, что плоскость, на которой случайным образом располагаются дискретные частицы, сама отражает звуковые волны. В этом случае возможна интерференция акустических сигналов, отраженного от дна и рассеянного на совокупности дискретных неоднородностей.

Задачу о нахождении средней интенсивности рассеянного акустического поля с учетом сигнала, отраженного от дна, будем решать методом возмущений, полагая, что в первом приближении исследуемый сигнал является суммой отраженного дном p_b и рассеянного сферами p_s полей:

$$p = p_s + p_b.$$

Следовательно, среднее поле будет находиться как

$$\langle p \rangle = \langle p_s \rangle + \langle p_b \rangle,$$

а средняя интенсивность результирующего сигнала может быть рассчитана следующим образом:

$$\langle I \rangle = \langle |p_s + p_b|^2 \rangle = \langle (p_s + p_b)(p_s^* + p_b^*) \rangle.$$

Запишем коэффициент отражения от плоскости дна

$$V = V_0 \exp(i\varphi_v),$$

его модуль и фаза будут определяться плотностью, скоростью звука и коэффициентом его затухания в подложке.

Коэффициент обратного рассеяния на отдельной частице представим аналогичным образом

$$\alpha(ka) = \alpha_0(ka) \exp(i\varphi_\alpha(ka)).$$

Учтем также, что эффективный центр рассеяния находится в центре неоднородности, т.е. на расстоянии a от плоскости дна. Тогда в выражении для средней интенсивности обратного рассеяния

$$\langle I \rangle = \left(\frac{A_0}{2h} \right)^2 \left\{ (\alpha_0 \lambda)^2 \left(\frac{\pi \langle n \rangle}{d^2} + \langle n \rangle^2 \right) + V_0^2 + 2V_0 \alpha_0 (ka) \lambda \langle n \rangle \sin(2ka + \varphi_v - \varphi_a) \right\}, \quad (2.5.1)$$

кроме суммы интенсивностей сигналов, рассеянного неоднородностями и отраженного от незанятого рассеивателями дна

$$\langle I \rangle = I_s + I_b + I_{\text{int}},$$

возникает слагаемое I_{int} :

$$I_{\text{int}} = 2 \left(\frac{A_0}{2h} \right)^2 V_0 \alpha_0 (ka) \lambda \langle n \rangle \sin(2ka + \varphi_v - \varphi_a), \quad (2.5.2)$$

описывающее интерференцию их когерентных компонент.

Отнормируем выражение (2.5.1) на интенсивность сигнала, отраженного «чистым» дном, и введём эмпирический множитель $(1-\varepsilon)$, который показывает относительную площадь, не занятую рассеивателями. Тогда можно записать выражение для среднего квадрата эффективного коэффициента отражения:

$$\langle V^2 \rangle = \left(\frac{2\alpha_0}{ka} \right)^2 \left(\frac{\pi\varepsilon}{D^2} + \frac{\varepsilon^2}{a^2} \right) + V_0^2 (1-\varepsilon)^2 + 4 \frac{V_0}{ka} \frac{\alpha_0}{a} \varepsilon (1-\varepsilon) \sin(2ka + \varphi_v - \varphi_a) .$$

С ростом концентрации неоднородностей в зависимости от фазовых соотношений может наблюдаться как увеличение, так и уменьшение среднего значения квадрата эффективного коэффициента отражения, а значит, и средней интенсивности рассеянного сигнала.

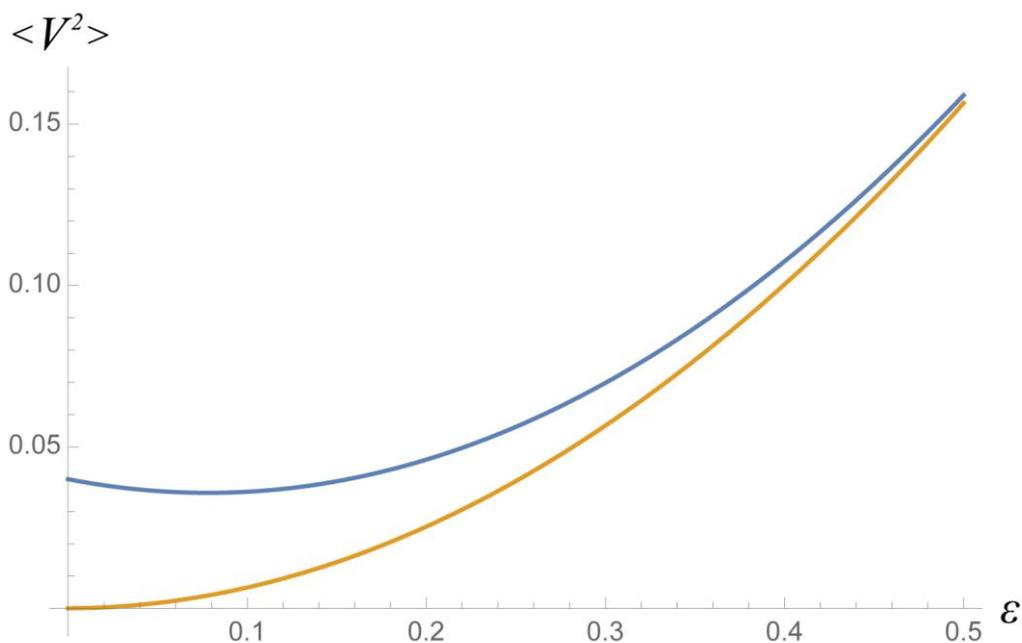


Рис. 2.5.1

На рис. 2.5.1 представлено сравнение зависимостей среднего квадрата эффективного коэффициента отражения от коэффициента упаковки ϵ при учете отражения от подложки (синяя кривая) и при «звукотранSPARENTном» дне (оранжевая кривая). Параметры задачи выбирались из условий проведенного в Нижегородском государственном университете исследований по обратному рассеянию акустических волн на имитаторах ЖМК. Последние располагались на дне экспериментальной ванны, наполненной водой. Запись амплитуды рассеянного сигнала происходила по мере передвижения каретки с жестко закрепленной на ней приемопередаточной системой вдоль ванны с постоянной скоростью 0,47 см/с. Работа проводилась на частоте 150 кГц в локационном режиме. Для имитации квазинепрерывного сигнала была выбрана частота повторения импульсов равная 90Гц, что обеспечивало прием большого числа рассеянных импульсов за время смещения локатора на расстояние порядка поперечного радиуса корреляции рассеянного поля. В то же время длительность зондирующего импульса (180 мкс) позволяла считать сигнал монохроматическим. ЖМК моделировались стальными шариками диаметром 3,175 мм. Все рассеиватели имели одинаковые размеры. Шариками располагались по дну случайным образом, однако средняя поверхностная плотность их

расположения (средняя концентрация) в каждом опыте оставалась постоянной. Исследовался случай нормального падения акустических сигналов на дно. В качестве излучателя и приемника использовался пьезокерамический преобразователь апертурой 7см. Рассеиватели находились в зоне Фраунгофера по отношению к излучателю. Экспериментально было определено, что модуль коэффициента отражения от дна нормально падающей волны был равен 0,2.

Результаты численного моделирования показывают, что вклад интерференционного слагаемого в среднюю интенсивность незначителен. Однако, при малых концентрациях рассеивателей наличие сигнала, отраженного от дна, приводит к относительно большому увеличению интенсивности по сравнению с интенсивностью сигнала, отраженного только от неоднородностей. При определённых фазовых соотношениях может происходить немонотонное возрастание средней интенсивности обратного рассеяния с увеличением коэффициента упаковки, как показано на рис. 2.5.1., что и наблюдалось в экспериментах, обсуждаемых в работе [19].

2.6. Коллективные эффекты рассеяния

Все предыдущие рассуждения касались случая хаотического и в среднем равномерного расположения неоднородностей на плоскости. Однако исследования [23] показывают, что расположение рассеивателей в океане можно считать равномерным и статистически независимым лишь в первом приближении.

Для учета статистической зависимости взаимного расположения частиц в бинарную функцию распределения (2.3.2) введем функцию $\mu(\vec{r}_l, \vec{r}_m)$, которая будет учитывать корреляцию в расположении рассеивателей [1]:

$$W(\vec{r}_l, \vec{r}_m) = W(\vec{r}_l)W(\vec{r}_m)(1 + \mu(\vec{r}_l, \vec{r}_m)). \quad (2.6.1)$$

Нетрудно найти её связь с корреляционной функцией концентрации рассеивателей.

Положим, что поле неоднородностей статистически однородно и изотропно, то есть функция $\mu(\vec{r}_l, \vec{r}_m)$ зависит только от расстояния между рассеивателями $\vec{\rho} = \vec{r}_l - \vec{r}_m$, а концентрация частиц на плоскости может быть представлена в виде

$$n(\vec{r}) = \sum_{l=1}^N \delta(x - x_l) \delta(y - y_l). \quad (2.6.2)$$

По определению корреляционная функция концентрации рассеивателей находится следующим образом:

$$\psi_n(\vec{\rho}) = \langle n(\vec{r})n(\vec{r} + \vec{\rho}) \rangle. \quad (2.6.3)$$

Подставляя (2.6.2) в выражение (2.6.3), получим

$$\psi_n(\vec{\rho}) = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \langle \delta(\vec{r} - \vec{r}_l) n(\vec{r} + \vec{\rho} - \vec{r}_m) \rangle. \quad (2.6.4)$$

В выражении (2.6.4) перейдём от суммирования к интегрированию и выделим слагаемые с $l=m$ и $l \neq m$:

$$\begin{aligned} \psi_n(\vec{\rho}) = N \int_{-\infty}^{\infty} W(\vec{r}_l) \delta(\vec{r} - \vec{r}_l) n(\vec{r} + \vec{\rho} - \vec{r}_m) d\vec{r}_l + \\ + (N^2 - N) \int_{-\infty}^{\infty} W(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \delta(\vec{r} - \vec{r}_l) n(\vec{r} + \vec{\rho} - \vec{r}_m) d\vec{r}_l d\vec{r}_m. \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Будем считать число рассеивателей в озвучиваемой области большим, поэтому в выражении (2.6.5) можно пренебречь N по сравнению с N^2 , а также примем $N^2/S^2 = \langle n^2 \rangle$, $\langle n^2 \rangle = \langle n \rangle^2$, как для случайного пуассоновского процесса. Тогда из выражения (2.6.5) с учётом (2.6.1) получим связь между корреляционной функцией концентрации неоднородностей $\psi_n(\vec{\rho})$ и функцией $\mu(\vec{\rho})$:

$$\psi_n(\vec{\rho}) = \langle n \rangle \delta_a(\vec{\rho}) + \langle n \rangle^2 (1 + \mu(\vec{\rho})). \quad (2.6.6)$$

Определённые требования, которым должна удовлетворять функция $\mu(\vec{\rho})$, можно найти из условия согласованности бинарной функции распределения

$$W(\vec{r}_l) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\vec{r}_l, \vec{r}_m) d\vec{r}_m. \quad (2.6.7)$$

Подставим (2.6.1) в выражение (2.6.7):

$$W(\vec{r}_l) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\vec{r}_l) W(\vec{r}_m) d\vec{r}_m + \int_{-\infty}^{\infty} W(\vec{r}_l) W(\vec{r}_m) \mu(\vec{r}_l, \vec{r}_m) d\vec{r}_m = W(\vec{r}_l) + W(\vec{r}_l) \int_{-\infty}^{\infty} W(\vec{r}_m) \mu(\vec{r}_l, \vec{r}_m) d\vec{r}_m. \quad (2.6.8)$$

Из формулы (2.6.8) видно, что равенство будет выполняться, когда $\int_{-\infty}^{\infty} W(\vec{r}_m) \mu(\vec{r}_l, \vec{r}_m) d\vec{r}_m = 0$, а поскольку $W(\vec{r}_l) = W(\vec{r}_m) = const$,

$$\int_0^{\infty} \mu(\vec{\rho}) d\vec{\rho} = 0 \text{ или } \int_0^{\infty} \mu(\rho) \rho d\rho = 0. \quad (2.6.9)$$

Таким образом, модели функции $\mu(\vec{\rho})$ для описания возможной группировки неоднородностей должны удовлетворять условию (2.6.9).

Для описания взаимного расположения рассеивателей удобно использовать одномасштабную модель, впервые предложенную в работе [24],

$$\mu(\rho) = \mu_0 e^{-\frac{\rho^2}{\rho_0^2}} \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right), \quad (2.6.10)$$

одномасштабность которой заключается в том, что один и тот же пространственный период ρ_0 описывает как размеры скоплений неоднородностей при их группировке, так и расстояниях между этими скоплениями.

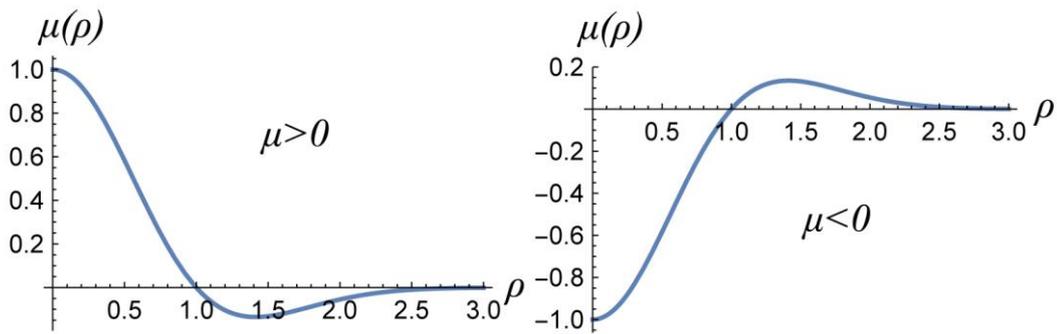


Рис. 2.6.1

При этом стоит отметить, что константа μ_0 может быть как положительной, так и отрицательной, что соответствует корреляции или антикорреляции взаимного расположения рассеивателей (рис.2.6.1).

Перейдём к рассмотрению влияния группировки частиц на среднюю интенсивность обратного рассеяния. Для этого в выражение (2.3.3) подставим двухточечную функцию распределения (2.6.1). Тогда в выражении для средней интенсивности обратного рассеяния появится ещё одно слагаемое, будем называть его коллективной составляющей:

$$I_{col} = \left(\frac{|\alpha(ka)|p_0}{h^2} \right)^2 \langle n \rangle^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \exp \left\{ -\left(\frac{r_l}{h} \right)^2 \left(2 \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 - ikh \right) - \left(\frac{r_m}{h} \right)^2 \left(2 \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 + ikh \right) \right\} d\vec{r}_l d\vec{r}_m. \quad (2.4.11)$$

Очевидно, что вид коллективной составляющей средней интенсивности (2.4.11) будет определяться функцией $\mu(\rho)$.

Используя модель (2.6.10), получим выражение для коллективной составляющей средней интенсивности обратного рассеяния акустического сигнала:

$$I_{col} = \left(\frac{|\alpha(ka)|p_0}{kh} \right)^2 \langle n \rangle^2 \mu_0 \pi^6 \left(\frac{1 + \frac{2h^2}{k^2 \rho_0^4}}{\left(\left(\frac{D}{\rho_0} \right)^2 + \pi^2 \right)^2} \right). \quad (2.6.12)$$

Таким образом, корреляция или антикорреляция взаимного расположения рассеивателей на плоскости дна может привести к изменению средней интенсивности регистрируемого сигнала неизменной концентрации рассеивателей.

Выражение (2.6.12) позволяет также заметить зависимость коллективного слагаемого от безразмерного параметра D/ρ_0 , который можно рассматривать как отношение диаграмм направленности зондирующего и переизлученного от области с характерным размером ρ_0 сигналов. Чем больше размер эффективной области переизлучения ρ_0 , тем уже диаграмма направленности обратного рассеяния, и тем большая интенсивность рассеянного сигнала должна регистрироваться приемным устройством.

Представляется возможным также создание двухмасштабной модели функции $\mu(\rho)$:

$$\mu(\rho) = \mu_1(\rho) + \mu_2(\rho),$$

так, что масштаб функции $\mu_1(\rho) - l_6$ - характеризовал бы «ближний порядок» в расположении неоднородностей и совпадал с размером отдельной частицы a_0 , а масштаб функции $\mu_2(\rho) - l_d$ - «дальний порядок» и совпадал со средними размерами скоплений неоднородностей ρ_0 [25]. При этом «дальний порядок» описывал бы группировку рассеивателей в кучки, тогда как «ближний порядок» учитывал бы конечные размеры частиц и отражал тот факт, что вероятность попадания второго рассеивателя в местонахождение первого равняется нулю: $\mu_1(0) = -1 - \mu_2(0)$.

Не останавливаясь подробно на построении двухмасштабной модели корреляции взаимного расположения частиц, приведем лишь иллюстрации поведения коллективного слагаемого средней интенсивности обратного рассеяния при различных соотношениях между внутренним и внешним масштабами корреляции (рис. 2.6.2). Здесь синими кривыми показана зависимость коллективного слагаемого средней интенсивности при использовании одномасштабной модели, оранжевой – при использовании двухмасштабной модели, предложенной в работе [26].

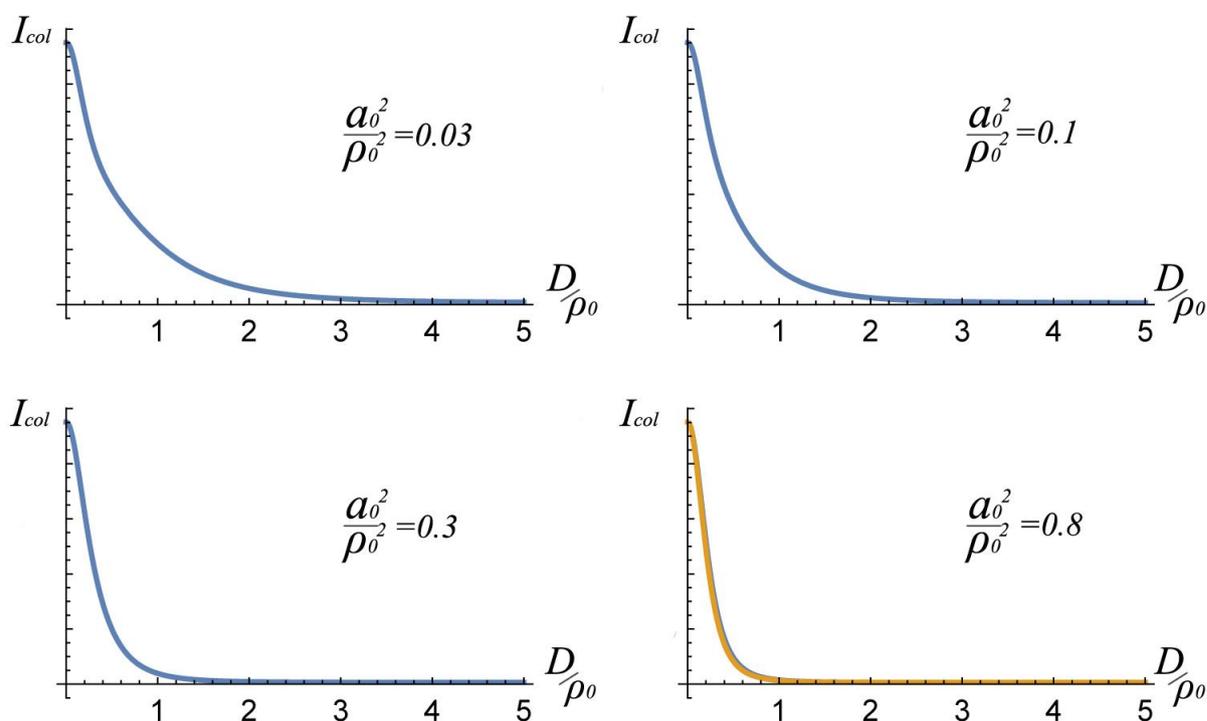


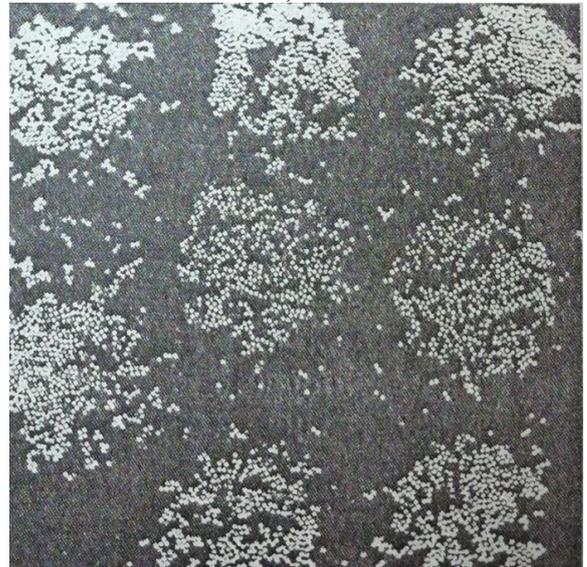
Рис. 2.6.2

Поскольку величина средней интенсивности принимаемого акустического поля зависит от соотношения между D и ρ_0 , рассмотрим предельные случаи. Если $D \gg \rho_0$, или $\left(\frac{D}{h\lambda\rho_0}\right)^2 \gg \left(\frac{1}{h\lambda}\right)^2$, то корреляция между положениями рассеивателей не влияет на значение средней интенсивности рассеянного поля, что видно из рис. 2.6.2.



а)

б)



в)

г)

Рис. 2.6.3

Если же $D \ll \rho_0$, или $\left(\frac{D}{h\lambda\rho_0}\right)^2 \ll \left(\frac{1}{h\lambda}\right)^2$, то на значение средней интенсивности принимаемого поля будет влиять знак и величина μ_0 . При $\mu_0 > 0$ значение средней интенсивности будет больше, чем в случае отсутствия корреляции. При отрицательном значении μ_0 регистрируемая приемником средняя интенсивность, наоборот, уменьшится по сравнению со случаем

акустического зондирования той же приемно-излучающей системой дна, на котором находится то же количество частиц, но расположение которых некоррелировано.

Таким образом, сильная корреляция между положениями рассеивателей заметно сказывается на величине средней интенсивности принимаемого поля, что подтверждено результатами физического моделирования [24]. На рис. 2.6.3 показано расположение дискретных неоднородностей с одинаковой поверхностной концентрацией на плоскости дна в лабораторном эксперименте: при хаотическом расположении рассеивателей (а), при расположении рассеивателей с радиусом пространственной корреляции 2,2 см (б), 5,2 см (в), 8 см (г).

При этом значения радиусов пространственной корреляции оценивались по результатам оптической обработки расположения неоднородностей на плоскости дна.

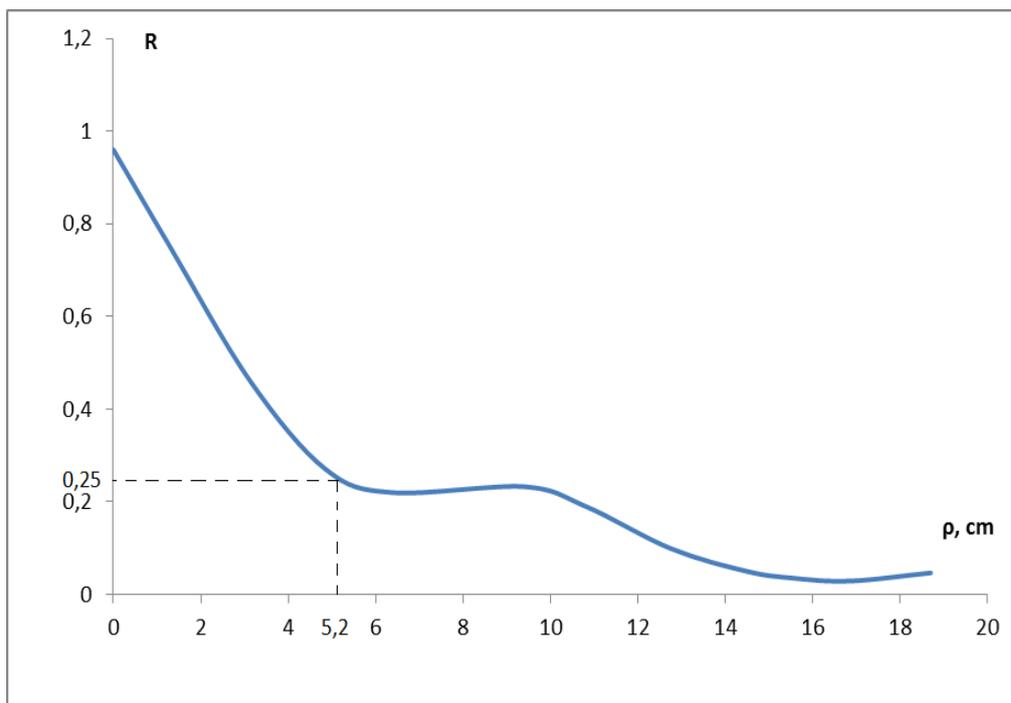


Рис. 2.6.4

Для примера на рис. 2.6.4 показана корреляционная функция взаимного расположения рассеивателей, соответствующая оптической обработке данных эксперимента (в) на рис.2.6.3. При этом, очевидно, параметр $\mu_0 > 0$, и наличии группировки в положении частиц приведет к увеличению средней

интенсивности обратного рассеяния, что было подтверждено при физическом моделировании коллективных эффектов рассеяния [24]. В проведенных на кафедре акустики ННГУ лабораторных экспериментах было получено увеличение средней интенсивности в четыре раза по сравнению с рассеянием на хаотически расположенных неоднородностях той же концентрации. Это свидетельствует о том, что при решении обратной задачи акустики следует учитывать корреляцию взаимного расположения рассеивателей.

2.7. Особенности распространения акустических волн в океане

В заключительном параграфе позволим себе сказать несколько слов о применении методов и подходов теории распространения и рассеяния волн в случайно-неоднородных средах к акустике океана.

Океан с акустической точки зрения исключительно изменчив: в нем возникают течения, вихри, внутренние волны, мелкомасштабная турбулентность. Кроме распространенного представления о горизонтально-слоистого распределения скорости звука [27], необходимо принимать во внимание наблюдаемые пространственные и временные флуктуации распространяющихся звуковых сигналов [2]. Вследствие этого структура звукового поля в океанических волноводах оказывается весьма сложной.

Границы крупномасштабных течений (например, Гольфстрима) представляют собой фронтальные зоны, разделяющие водные массы с существенно различными физическими характеристиками. В пределах таких фронтальных зон температура, соленость, плотность и скорость звука испытывают резкие перепады. Например, на северной границе Гольфстрима перепад температур достигает 10°C на 5 морских миль (морская миля равна 1852 м). Наиболее крупные синоптические вихри наблюдаются как раз вблизи интенсивных фронтальных течений. В зоне вихря возникает сложная пространственная структура скорости звука. При распространении звука через циклоническое кольцо наблюдаются две особенности: понижение силы звука из-за утечки энергии в глубинный подводный звуковой канал и уменьшение горизонтальной протяженности зон конвергенции. Таким образом, циклоническое кольцо вызывает значительное возмущение звукового поля. Кроме того, заметные флуктуации интенсивности и фазы акустических волн возникают под действием внутренних волн, т.е. волн, возникающих внутри жидкости.

Современные исследования показывают, что такие характеристики вод океана, как соленость, температура, плотность, скорость течения, изменяются с

глубиной не плавно, а как бы скачками. Они остаются почти неизменными в пределах некоторых слоев и быстро изменяются при переходе от слоя к слою [28]. Толщина этих слоев изменяется от десятков сантиметров до десятков метров, а их горизонтальная протяженность может достигать десятков километров. Такая тонкая слоистая структура океана может существенно влиять на акустические поля. Эксперименты показывают, что тонкая слоистая структура вод приводит к многолучевому механизму передачи звука в случае, когда без такой структуры имелся бы лишь единственный луч, соединяющий источник с приемником [29]. Следствием многолучевости являются дополнительные флуктуации фазы и амплитуды звукового сигнала.

Важной акустической характеристикой океана являются его собственные подводные шумы [2]. Они содержат большой объем информации о состоянии поверхности океана, атмосферы над ним, о тектонических процессах в земной коре под океаном, о поведении морских животных. На низких частотах (0,1-10 Гц) основными источниками шума являются землетрясения, извержения подводных вулканов, отдаленные штормы, турбулентность в атмосфере и океане, а также некоторые процессы на поверхности океана. В полосе частот 50-300 Гц подводный шум обусловлен главным образом судами. Одновременно более 1000 судов находятся только в северной части Атлантического океана. А поскольку затухание звука на этих частотах мало, то создается сплошной шумовой фон. В полосе частот 0,5-50 кГц подводный шум непосредственно связан с состоянием поверхности океана и силой ветра в данном месте. Существует несколько механизмов генерации шума в этой полосе. Это обрушение волн, захлопывание воздушных пузырьков в насыщенном воздухом приповерхностном слое (кавитационный шум) и т.д. На частотах выше 100 кГц преобладают молекулярные тепловые шумы.

К собственным шумам моря относят и биологические шумы. Они создаются различными морскими животными для связи друг с другом, обнаружения жертвы, отпугивания врагов. Этот вид шума важен для изучения индивидуального и коллективного поведения представителей морской фауны.

Другим специфическим видом морских шумов являются подледные шумы. Они связаны в основном с динамикой ледяного покрова: колебаниями отдельных льдин и целых ледяных полей, трением льдин между собой, дроблением льда и т.п.

Скорость звука является одной из важнейших акустических характеристик морской среды. Величина скорости звука может быть определена либо путём непосредственных измерений с помощью специальных приборов - скоростемеров, либо вычислением по эмпирическим формулам [30]. Среднее значение величины скорости звука в Мировом океане принято равным 1500 м/с, а возможный диапазон изменения 1400-1600 м/с. Наибольшая изменчивость наблюдается в приповерхностном слое воды с глубинами до 100-200м.

Для решения задач о распространении звука важно не абсолютное значение скорости, а зависимость скорости звука от глубины - профиль скорости звука. При различных типах вертикального распределения скорости звука возникают гидроакустические явления, оказывающие благоприятное, либо неблагоприятное воздействие на дальность его распространения. Основными величинами, от которых зависит скорость распространения звука в морской среде, являются температура, солёность и гидростатическое давление. Поскольку наибольшее влияние на скорость звука оказывает температура, то в верхних слоях океана, пока влияние гидростатического давления мало, а температурные градиенты значительны, вертикальное распределение скорости звука приблизительно повторяет вертикальное распределение температуры с небольшими отклонениями за счёт солёности. В глубинных слоях скорость звука возрастает за счёт увеличения гидростатического давления.

Ситуация, когда скорость звука практически неизменна по всей глубине наиболее характерна для мелководных районов, когда гидростатическое давление не оказывает существенного влияния на скорость звука [31]. В осеннее и зимнее время года в результате интенсивного охлаждения поверхности моря более холодная, и, следовательно, более плотная вода с поверхности опускается вниз, а тёплая вода нижних слоёв поднимается вверх. Происходит конвективная

вертикальная циркуляция воды, выравнивающая её температуру и солёность по всей глубине.

Особый интерес представляет случай, когда скорость звука на некоторой глубине имеет минимальное значение [30-33]. При этом образуется подводный звуковой канал, что создаёт благоприятные условия для распространения звука на значительные расстояния. Глубина, соответствующая минимальному значению скорости звука, называется осью подводного звукового канала. Возрастание скорости звука при отклонении от оси канала вверх, в направлении поверхности, обусловлено в основном повышением температуры, при отклонении вниз, в сторону дна - ростом гидростатического давления и возможным увеличением температуры и солёности. Если скорость звука ниже оси канала увеличивается из-за роста гидростатического давления, такой канал называется «гидростатическим». Иногда в океане ниже некоторой глубины обнаруживаются тёплые водные массы с повышенной солёностью. Возникающий в результате звуковой канал называется «термическим». Типичным термическим является звуковой канал в Балтийском и Чёрном морях. Более или менее выраженный минимум скорости звука наблюдается почти во всех морях. Глубина оси подводного звукового канала в океане обычно составляет 1000-1200 м. В тропической зоне она опускается до 2000 м, а в умеренных широтах устанавливается ближе к поверхности. В Центральной Атлантике глубина оси канала меняется в пределах 800-1200 м.

Таким образом, профиль скорости звука оказывает весьма существенное влияние на распространение звука. При одном профиле дальность распространения звука может достигать сотен и даже тысяч километров, а при другом профиле звук той же частоты имеет дальность распространения всего лишь десятки или единицы километров. Исследования флуктуаций скорости звука в морях и океанах продолжаются и в настоящее время [34].

Акустическое поле в любой точке океана формируется в результате влияния на процесс распространения звуковых волн рефракции, интерференции, дифракции, отражения и рассеяния.

Экспериментальные исследования распространения звука низких частот в мелкой воде, когда глубина водного слоя мала по сравнению с длиной волны, началось во второй половине 20 века. Следует отметить классические работы Ирвинга и Ворцеля [35], Пекереса [36], а также Толстого [37].

Особенности распространения акустических волн в мелкой воде обусловлены тем, что влияние свойств дна на звуковые поля в этом случае гораздо сильнее, чем в случае глубокого моря, и свойства подводного грунта могут быть исследованы глубже и детальнее [38].

Одной из первых теоретических работ, посвященной расчетом акустических полей в океанических волноводах с различными профилями скорости звука была монография [27]. Первые экспериментальные исследования в данном направлении описаны в работе [39]. Численное моделирование распространения волн в океанических звуковых каналах было сделано впервые в работах [40, 41]. И сегодня тема не потеряла своей актуальности – проводятся как натурные [42], так и модельные исследования [43].

Заключение

В данном методическом пособии были получены уравнения для волн, распространяющихся в случайно-неоднородных средах, и подробно рассмотрено их решение в приближении однократного рассеяния. Приведены примеры решения задач подводной акустики с использованием данного приближения. Кроме этого, обсужден общий подход к описанию многократного рассеяния волн и показано, что точного решения для рассеянного поля не существует. Именно поэтому необходимо использовать и разрабатывать приближенные методы для расчета распространяющихся и рассеянных волн в случайно-неоднородных средах в тех случаях, когда борновское приближение не работает. Большинство известных к настоящему времени таких методов предложено для случая крупномасштабных неоднородностей. Эти методы можно разделить на две группы.

К первой группе относятся методы, основанные на переходе от стохастического уравнения Гельмгольца к более простым приближенным стохастическим уравнениям, учитывающим эффекты многократного рассеяния. Это уравнения для волн в приближениях параболического уравнения, геометрической оптики (акустики), метода плавных возмущений Рытова.

Вторая группа методов использует статистические свойства волн и сред. Наиболее распространенными являются методы, основанные на выводе уравнений для моментов случайных волн, близких к уравнениям, используемым в теории марковских процессов.

Подробнее с этими методами вы сможете познакомиться при освоении магистерских программ обучения на радиофизическом факультете Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Литература

1. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Случайные поля. Ч.2. - М.: Наука, 1978. 463 с.
2. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. - Л.: Гидрометеоздат, 1982. 264 с.
3. Чернов Л.А. Волны в случайно-неоднородных средах. - М.: Наука, 1977. 170 с.
4. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М: Наука, 1980, с. 337.
5. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т.1. Однократное рассеяние и теория переноса. М. Мир, 1981, 280 с.
6. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т.2. Многократное рассеяние, турбулентность, шероховатые поверхности и дистанционное зондирование. М. Мир, 1981, 317 с.
7. Буланов В.А., Стороженко А.В. О возможности акустической оценки распределения планктона в море // Техническая акустика . 2011. №11, 12 с.
8. Ивакин А.Н. Рассеяние звука дном океана: результаты теоретических и экспериментальных исследований последних лет. //Акуст. журн. 2012. Т.58. №2 С.222-226.
9. Джеббаров Ф.С., Львов Д.В., Забелин К.С. Моделирование многократного малоуглового рассеяния нейтронов на полидисперсных системах рассеивателей// Труды научной сессии МИФИ. 2008.Т.3.С.183-184.
10. Зайцев В.Ю., Гурбатов С.Н., Прончатов-Рубцов Н.В. Нелинейные акустические явления в структурно-неоднородных средах: эксперименты и модели. Н.Новгород, Изд-во ИПФ РАН, 2009, 268 с.

11. M. S. Labutina, A. I. Malekhanov, and A. V. Smirnov. Estimation of Efficiency of Vertical Antenna Arrays in Underwater Sound Channels // PHYSICS OF WAVE PHENOMENA, 2016.Т. 24. N 2. Pp. 161-167.
12. Гурбатов С.Н., Грязнова И.Ю., Иващенко Е.Н. Исследование обратного рассеяния акустических волн дискретными неоднородностями разных размеров»// Акуст.журн. 2016. – Т. 62, №2. С. 203-207.
13. Крылов В.В. Основы теории излучения и рассеяния звука. - М.: Изд-во Московского университета, 1989. 118 с.
14. Акустика в задачах / Под ред. Гурбатова С.Н. и Руденко О.В. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2009, 336 с.
15. Зотов А.И., Кузнецов В.Н., Савельев В.В. Глубоководный гидроакустический комплекс //Океанология. 1984.Т.24.С. 175-179.
16. Житковский Ю.Ю., Зотов А.И., Краснобородько В.В., Фокин А.В., Чепурин Ю.А. Об акустическом методе оценки концентрации конкреций на дне океана // Океанология. 1985.Т.25. №5. С. 219-223.
17. Дмитриевский Н.Н., Житковский Ю.Ю., Куликов А.В. Экспериментальные исследования рассеяния звука на слое сферических тел // Акуст. журн. 1986. Т.32.№3. С. 329-333.
18. Житковский Ю.Ю., Зотов А.И., Савельев В.В., Фокин А.В. Особенности рассеяния звука дном океана, содержащим железомарганцевые конкреции // Акуст.журн. 1987. Т.33. №5.С. 884-888.
19. Горская Н.В., Грязнова И.Ю., Гурбатов С.Н., Николаев Г.Н. Физическое моделирование процессов обратного рассеяния акустических сигналов на дискретных неоднородностях // Акуст. журн. 1990. Т. 36.№ 3.С. 410-415.
20. Аббасов И.Б. Рассеяние нелинейно-взаимодействующих акустических волн: сфера, цилиндр, сфероид. //М.: Физматлит, 2007. 160 с.
21. Лепендин Л.Ф. Акустика.//М.:Высшая школа, 1978.-448 с.
22. Скучик Е. Основы акустики. Т.2.//М.: Мир, 1976. - 542с

23. Бунчук А.В., Ивакин А.Н. Энергетические характеристики эхосигнала от дискретных рассеивателей дна океана // Акуст.журн. 1989. Т.35. №1. С. 8-18.
24. Горская Н.В., Грязнова И.Ю., Гурбатов С.Н., Николаев Г.Н. Исследование коллективных эффектов рассеяния акустических сигналов на дискретных неоднородностях // Акустический журнал, 1990.Т.36, №4. С. 637-643.
25. Займан Дж. Модели беспорядка. Теоретическая физика однородно-неупорядоченных систем/ Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 529 с.
26. Грязнова И.Ю., Иващенко Е.Н. Сравнение эффектов, возникающих при неравномерности пространственного расположения рассеивателей и распределения их по размерам // Труды XIX научной конференции по радиофизике ННГУ, 2015. С. 234-236.
27. Бреховских Л. М., Волны в слоистых средах, М., 1975. 343 с.
28. Федоров К.Н. Тонкая структура гидрофизических полей в океане – В кн.: Физика океана, т.1. Гидрофизика океана. М., 1978, 184 с.
29. Ewart T.E. Acoustic fluctuations in the open ocean – a measurement using a fixed refracted path. – J.Acoust.Soc.America, 1977, V.62. №6. P.1382-1388.
30. Справочник по гидроакустике /А.П. Евтютов, А.Е. Колесников, Е.А. Корепин и др. - Л.: Судостроение, 1988. - 552 с.
31. Клещев А.А., Клюкин И.И. Основы гидроакустики. - Л.: Судостроение, 1987. - 224 с.
32. Физика океана / Под ред. Ю.П. Дорониной. - Л.: Гидрометеиздат, 1976. - 294 с.
33. Физика океана. Гидродинамика океана/ Под ред. Каменковича, А.С. Мониной. - М.: Наука, 1978. - 456 с.
34. Kuperman W.A., Cornuelle B.D., Aulanier F., Hodgkiss W.S., Song H.C. Analyzing sound fluctuations in shallow water from group-velocity versus phase-velocity data representation // J.Acoust.Soc.America, 2013. V.133. N4. P.1945-1952.

35. Ирвинг М., Ворцель Д. Распространение звука взрывов в мелкой воде / Сб.статей «Распространение звука в океане». М.:ИЛ, 1951, с.157.
36. Пекерис К. Теория распространения звука взрыва в мелкой воде / Сб.статей «Распространение звука в океане». М.:ИЛ, 1951, с. 48.
37. Tolstoy I. Shallow water test of theory of layered waveguides/ J. acoust. Soc. America, 1958, V.30. N4. P.348.
38. Григорьев В.С., Кряжев Ф.И. Исследование распространения звука низких частот в мелкой воде, 1960. С. 34-42
39. Kiblewhite A.C., DenHam R.N. Experiment on propagation in surface sound channels // J.Acoust.Soc.America, 1965. V.38. N1. C.63
40. Nicolas N.C., Vberall H. Normal-mode propagation calculation for a parabolic velocity profil // J.Acoust.Soc.America, 1970. V.48. P.744
41. Vberall H., Nicolas N.C. Range focusing in deep-ocean sound channel with parabolic ptofiles // J.Acoust.Soc.America, 1968. V.44. N5. P.1259
42. Traer J., Gerstoft P. Coherent averaging of the passive fathometer response using short correlation time // J.Acoust.Soc.America, 2011. V. 130. N 6. P.3633-3641
43. Sturm F., Korakas A. Comparisons of laboratory scale measurements of three-dimensional acoustic propagation with solution by parabolic equation model // J.Acoust.Soc.America, 2013. V.133. N1. P.108-118.

Ирина Юрьевна **Грязнова**
Мария Сергеевна **Лабутина**
Николай Васильевич **Прончатов-Рубцов**

**ТЕОРИЯ ОДНОКРАТНОГО РАССЕЙЯНИЯ ВОЛН И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ
К ЗАДАЧАМ АКУСТИКИ ПРИРОДНЫХ СРЕД**

Учебное пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования "Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского"
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.