МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Часть 3

Рекомендовано методической комиссией Института ИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки
09.03.03 «Прикладная информатика»

Нижний Новгород
2017

УДК 519.21
ББК В171

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. Часть 3 / Составители: В.И. Мухин, В.М.Сморкалова - Н.Новгород: ННГУ, 2017. – 42 с.

Рецензент: к.т.н., доцент П.Д. Басалин

Сборник предназначен для студентов Института информационных технологий, математики и механики, обучающихся по направлению подготовки «Прикладная информатика». Приводятся 214 задач с ответами к практическим занятиям по темам: «Определение случайной величины», «Дискретные случайные величины», «Абсолютно непрерывные случайные величины», «Законы распределения функций одного случайного аргумента», «Числовые характеристики одной случайной величины».

УДК 519.21
ББК В171

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

П.р. – плотность распределения вероятностей
С.в. – случайная величина
Ф.р. – функция распределения

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1.1 Проверить следующие свойства индикаторов:

1) $I_A + I_{\bar{A}} = 1,$

2) $I_{AB} = I_A \cdot I_B,$

3) $I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{AB},$

4) $I_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = 1 - \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 - I_{A_k}\right),$

5) $I_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{A_k}} = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 - I_{A_k}\right),$

6) Если $A_i A_j = \varnothing$, $i \neq j$, то $I_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} I_{A_k},$

7) $I_{A \Delta B} = \left(I_A - I_B\right)^2,$

8) $I_{\Delta_{k=1}^{n} A_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} I_{A_k} - 2 \cdot \sum\limits_{1 \le i < j \le n} I_{A_i} I_{A_j} + \ldots + (-2)^{n-1} \prod\limits_{k=1}^{n} I_{A_k}.$

1.2 Пусть ξ и η - случайные величины, определенные на измеримом пространстве (Ω, F). Доказать, что множества $A = \{\omega : \xi(\omega) < \eta(\omega)\}$, $B = \{\omega : \xi(\omega) = \eta(\omega)\}$, $D = \{\omega : \xi(\omega) \le \eta(\omega)\}$ являются событиями.

1.3 Пусть (Ω, F) - измеримое пространство такое, что $\Omega = R^1$, а $F = \{\Omega, \varnothing\}$. Будет ли случайной величиной на таком измеримом пространстве функция $\varphi(\omega)$, если: *a*) $\forall \omega \in \Omega \quad \varphi(\omega) = c$, где c - константа; *b*) $\varphi(\omega) = \begin{cases} c_1, & \omega \in (-\infty, 1) \\ c_2, & \omega \in [1, +\infty) \end{cases}$, где c_1, c_2 - константы, $c_1 \neq c_2$.

1.4 Шестигранный игральный кубик подбрасывается 3 раза. Пусть пространство элементарных исходов этого эксперимента $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, где ω_i - 6 очков на верхней грани кости выпало *i* раз, *i*=0,1,2,3. Введем функцию $\xi(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \{\omega_0, \omega_1\} \\ 1, & \omega = \omega_2 \\ 2, & \omega = \omega_3 \end{cases}$. Построить наименьшую σ- алгебру F такую, что $\xi(\omega)$ является с.в. на измеримом пространстве (Ω, F).

1.5 Эксперимент состоит в том, что наудачу выбирается месяц календарного года. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{12}\}$, где ω_i - порядковый номер выбранного месяца равен *i*, *i*=1,…,12. Введем функцию

$$\xi(\omega)=\begin{cases}28, & \omega=\omega_2\\ 30, & \omega\in\{\omega_4,\omega_6,\omega_9,\omega_{11}\}\\ 31, & \omega\in\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_8,\omega_{10},\omega_{12}\}\end{cases}$$. Построить наименьшую σ-алгебру F такую, что $\xi(\omega)$ является с.в. на измеримом пространстве (Ω,F).

1.6 Пусть ξ и η - случайные величины, определенные на (Ω,F) и $A\in F$. Является ли функция $\Theta(\omega)=\xi(\omega)I_A(\omega)+\eta(\omega)I_{\bar{A}}(\omega)$ с.в.?

1.7 Пусть (Ω,F) - измеримое пространство и $\xi(\omega)$ - вещественная функция, определенная на Ω такая, что для каждого $c\in R^1$, множество $A_c=\{\omega:\xi(\omega)=c\}\in F$. Обязана ли $\xi(\omega)$ быть с.в.?

1.8 Пусть (Ω,F) - измеримое пространство и $\xi(\omega)$ - вещественная функция, определенная на Ω. Обязана ли $\xi(\omega)$ быть случайной величиной, если случайной величиной является: *a*) ξ^2; *b*) $|\xi|$; *c*) $\cos\xi$; *d*) e^{ξ}; *e*) $[\xi]$ ($[\cdot]$- целая часть)?

1.9 Пусть (Ω,F) - измеримое пространство с $\Omega=\{\omega:\ \omega=(x_1x_2\ldots);\ x_i\in\{0,1\},i=1,2,\ldots\}$ и σ- алгеброй F не более чем счетных подмножеств и их дополнений. Являются ли случайными величинами на (Ω,F) следующие функции:

1) $\xi(\omega)=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n, & \textit{если ряд сходится},\\ 0\quad, & \textit{если ряд расходится}\end{cases}$;

2) $\xi(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k, & \textit{если предел существует},\\ 0\quad, & \textit{если предел не существует}\end{cases}$;

3) $\xi(\omega)=\begin{cases}y(\omega), & \textit{если } y(\omega)-\textit{число рациональное},\\ 0\quad, & \textit{если } y(\omega)-\textit{число иррациональное}\end{cases}$

$(y(\omega)=0,x_1x_2x_3\ldots\ -\textit{двоичное разложение})$.

1.10 Пусть ξ и η - две случайные величины, принимающие значения *1,2,...,N*. Предположим, что $F_\xi=F_\eta$. Показать, что существует такая перестановка $(k_1,k_2,\ldots,k_N)$ чисел *1,2,...,N*, что для каждого *j=1,2,...,N* $\{\omega:\xi(\omega)=j\}=\{\omega:\eta(\omega)=k_j\}$.

1.11 Пусть ξ и η - случайные величины на (Ω,F). Доказать, что следующие функции являются случайными величинами:
a) $\xi+\eta$, *b)* $\xi-\eta$, *c)* $\xi\cdot\eta$, *d)* $|\xi|$, *e)* $\max(\xi,\eta)$, *f)* $\min(\xi,\eta)$, *g)* $\xi^+=\max(\xi,0)$, *h)* $\xi^-=-\min(\xi,0)$, *i)* ξ^n, *j)* $\sin\xi$, *k)* $\cos\xi$, *l)* $tg\,\xi$.

1.12 В урне 3 белых и 2 черных шара. Эксперимент состоит в последовательном извлечении всех шаров из урны. Построить вероятностное пространство. Описать σ- алгебру, порожденную с.в. ξ,

если: *a)* ξ - число белых шаров, предшествующих первому черному шару; *b)* ξ - число черных шаров среди извлеченных;
c) $\xi=\xi_1+\xi_2$, где ξ_1 - число белых шаров, предшествующих первому черному шару, а ξ_2 - число черных шаров, предшествующих первому белому шару.

1.13 В урне n белых и n черных шаров. Эксперимент состоит в последовательном извлечении всех шаров из урны. Построить вероятностное пространство. Описать σ- алгебру, порожденную случайной величиной $\xi=\xi_1+\xi_2$, где ξ_1 - число белых шаров, предшествующих первому черному шару, а ξ_2 - число черных шаров, предшествующих первому белому.

1.14 Пусть (Ω,F) - измеримое пространство с $\Omega=[0;1]$ и σ- алгеброй F борелевских множеств отрезка [0;1]. Описать σ- алгебру, порожденную случайной величиной ξ, если:

a) $\xi(\omega)=\begin{cases}1/4, & \omega\in[0;1/4)\\ 1/2, & \omega\in[1/4;\,3/4)\\ 1, & \omega\in[3/4;1]\end{cases}$; *b)* $\xi(\omega)=\dfrac{\omega}{2}$; *c)* $\xi(\omega)=\dfrac{1}{2}$.

1.15 Пусть $(\Omega,F)=(R^1,\mathrm{B}_1)$. Описать σ- алгебру, порожденную с.в. $\xi(\omega)=\cos\omega$.

1.16 На измеримом пространстве (Ω,F) с $\Omega=[0;1]$ и σ- алгеброй F борелевских множеств отрезка [0;1] задана последовательность случайных величин $\xi_1,\xi_2,...$ следующим образом: $\xi_n(\omega)=\omega^n,\ n=1,2,\ldots$. Положим $A_n=\left\{\omega:\xi_n(\omega)<\dfrac{1}{n}\right\},\ n=1,2,\ldots$. Найти $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

1.17 Пусть $\nu,\xi_1,\ldots,\xi_n$ - случайные величины на общем измеримом пространстве и ν принимает значения *0,1,...,n*. Положим $S_0=0,\ S_k=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_k,\ 1\le k\le n$. Показать, что S_ν есть с.в.

1.18 Пусть $\nu,\xi_1,\ldots,\xi_n$ - случайные величины на общем измеримом пространстве и ν принимает значения *1,...,n*. Показать, что функция ξ_ν есть случайная величина.

1.19 Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$- случайные величины, заданные на измеримом пространстве (Ω,F), и $D=\{D_1,D_2,...,D_n\}$ разбиение ($\bigcup\limits_{k=1}^{n}D_k=\Omega,\ D_i\neq\varnothing,\ D_i\cap D_j=\varnothing$, при $i\neq j$), причем $D_i\in F,\ i=1,2,\ldots,n$. Показать, что функция $\eta(\omega)=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)I_{D_k}(\omega)$ является случайной величиной.

2. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1 Ряд распределения с. в. ξ имеет вид

ξ	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Требуется: *a*) построить многоугольник распределения; *b*) найти ф.р. и начертить ее график; *c*) найти $P(|\xi| \le 1)$.

2.2 С.в. ξ имеет ряд распределения

ξ	-3	0	1	2
p	$2p$	$7p^2$	p	$3p$

Найти: *a*) *p*; *b*) ф.р. и начертить ее график.

2.3 С.в. ξ имеет ряд распределения

ξ	0	1	2	3
p	0,2	0,1	p	0,3

Найти: *a*) *p*; *b*) ф.р. и начертить ее график.

2.4 Ф.р. с. в. ξ имеет следующий вид

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0,3, & 2 < x \le 3 \\ 0,5, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

a) Построить ряд распределения с. в. ξ; *b*) Найти $P(\xi \ge 3,5)$ и $P(|\xi| \le 2,5)$.

2.5 Распределение с.в. ξ определяется формулами $P(\xi = k) = \dfrac{c}{k(k+1)}, \quad k = 1,2,\dots$. Найти: *a*) постоянную *c* ; *b*) $P(\xi \le 3)$; *c*) $P(n_1 \le \xi \le n_2)$.

2.6 Распределение с.в. ξ определяется формулами $P(\xi = k) = \dfrac{c}{k(k+1)(k+2)}, \quad k = 1,2,\dots$. Найти: *a*) постоянную *c* ; *b*) $P(\xi \ge 3)$; *c*) $P(n_1 \le \xi \le n_2)$.

2.7 Дважды бросается игральная кость. С.в. ξ - сумма очков при двух бросаниях. Построить ряд распределения этой с.в.

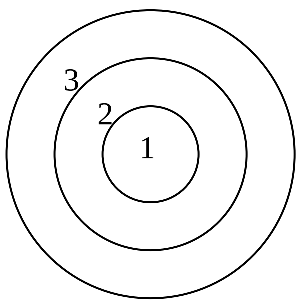

Рис.1

2.8 Мишень (см. рис.1) состоит из круга №1 и двух колец - №2 и №3. Попадание в круг №1 дает 10 очков, в кольцо №2 – 5 очков, а в кольцо №3 – (-1) очко. Полагая, что для данного стрелка вероятности попадания в указанные части мишени равны соответственно 0,5; 0,3 и 0,2, построить ряд распределения случайного числа очков, выбитых данным стрелком в результате трех попаданий в мишень.

2.9 Производится стрельба из орудия по удаляющейся мишени. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,8, при каждом следующем выстреле вероятность попадания уменьшается в два раза. Пусть ξ -число попаданий в мишень при двух выстрелах. Построить ряд распределения и ф.р. с.в. ξ.

2.10 Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, а для второго – 0,4. Построить ряд распределения и ф.р. с.в. ξ - общего числа попаданий в мишень. Найти $P\{0 \le \xi < 2\}$.

2.11 Отдел технического контроля проверяет последовательно 3 изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие является стандартным, для первого проверяемого изделия равна 0,8, для второго – 0,6 и для третьего – 0,7. Построить ряд распределения и ф.р. с.в. ξ - числа стандартных изделий среди проверенных. Найти $P\{0 \le \xi < 2\}$.

2.12 В урне 5 белых и 25 черных шаров. Из урны наудачу извлекается один шар. Пусть ξ- число вынутых белых шаров. Построить ряд распределения и ф.р. с.в. ξ.

2.13 Из урны, содержащей 3 белых и 6 черных шаров, случайным образом и без возвращения извлекаются 2 шара. С.в. ξ- число белых шаров в выборке. Построить ряд распределения и ф.р. этой с.в. Найти $P\{1 \le \xi < 3\}$.

2.14 Из партии в 25 изделий, среди которых имеется 6 бракованных, выбрали случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа ξ бракованных изделий, содержащихся в выборке.

2.15 Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров случайным образом без возвращения извлекается три шара. Пусть ξ - число белых шаров в выборке. Построить ряд распределения и ф. р. с.в. ξ.

2.16 Построить ряд распределения и ф.р. случайного числа ξ попаданий мячом в корзину при двух бросаниях, если вероятность попадания при одном броске равна 0,4.

2.17 Бросают 3 монеты. Требуется построить ряд распределения и ф.р. с.в. ξ, равной числу выпавших «решеток», если вероятность выпадения герба для каждой монеты равна 1/2.

2.18 В ячейку памяти ЭВМ записывается 8 – разрядное двоичное число. Значения 0 и 1 в каждом разряде появляются независимо от других разрядов с равной вероятностью. Найти ряд распределения ξ - числа единиц в записи двоичного числа, $P(\xi = 4)$ и $P(\xi > 4)$.

2.19 Произведено три независимых выстрела по мишени в неизменных условиях. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Пусть ξ - число промахов. Построить ряд распределения данной с.в. Найти $P\{\xi \geq 1\}$.

2.20 Последовательно посылается 4 радиосигнала. Вероятность приема каждого из них не зависит от того, приняты или нет остальные сигналы, и равна 0,4. Пусть ξ - число принятых радиосигналов. Построить ряд распределения данной с.в. Найти $P\{\xi \geq 2\}$.

2.21 Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. За каждое попадание стрелку засчитывается 5 очков. Построить ряд распределения с.в. ξ – числа выбитых очков.

2.22 После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту 3 дополнительных вопроса. Вероятность того, что экзаменующийся ответит на дополнительный вопрос, равна 0,9. Построить ряд распределения с.в. ξ - числа заданных дополнительных вопросов, на которые студент ответит. Найти $P\{\xi \geq 2\}$.

2.23 Две игральные кости бросаются до появления числа 6 хотя бы на одной из них. Пусть ξ - номер шага, на котором впервые появится шестерка. Найти закон распределения с.в. ξ.

2.24 Изделия испытываются на перегрузку. Число изделий не ограничено. Для каждого изделия вероятность выдержать перегрузку равна 0,8. После того как первое изделие не выдержит перегрузку, испытания прекращаются. Найти закон распределения с.в. ξ, равной числу испытанных изделий.

2.25 Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока на верхней грани кости не выпадет 6 очков. Пусть ξ - число произведенных подбрасываний кости. Найти ряд распределения с.в. ξ и $P(\xi \geq 6)$.

2.26 Проводятся последовательные испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения случайного числа ξ испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0,9.

2.27 На пути движения автомашины четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Построить ряд распределения и ф.р. с.в. ξ - числа светофоров, пройденных автомашиной до первого запрещающего ей движение сигнала светофора.

2.28 В гирлянде 4 лампочки. Вероятность быть перегоревшей для каждой лампочки одинакова и равна 0,2. Лампочки проверяются по очереди друг за другом до обнаружения первой перегоревшей. Найти ряд распределения случайного числа проверенных лампочек.

2.29 Стрелок ведет стрельбу по мишени до первого попадания, имея боезапас из 4-х патронов. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,6. Построить ряд распределения и ф.р. с.в. ξ - числа израсходованных патронов. Найти $P\{1 \le \xi < 3\}$.

2.30 В урне находятся 6 шаров, пронумерованных от 1 до 6. Из урны случайным образом, без возвращения, последовательно один за другим извлекаются шары до тех пор, пока не появится шар с четным номером. Построить ряд распределения и ф.р. с.в. ξ - числа извлеченных шаров. Найти $P\{2 \le \xi < 4\}$.

2.31 В урне 6 шаров: 2 белых и 4 красных. Шары берут по одному, последовательно, без возвращения до тех пор, пока не появится белый шар. Построить ряд распределения с.в. ξ - числа извлеченных шаров. Найти $P\{1 \le \xi < 3\}$.

2.32 В ящике лежат 5 внешне одинаковых ламп, две из которых исправны, а три испорчены. Требуется выбрать одну исправную лампу. Для этого из ящика наугад вынимают одну лампу и проверяют ее. Если она неисправна, наугад берут другую, проверяют ее и так до тех пор, пока не попадется исправная лампа. Построить ряд распределения и ф.р. с.в. ξ - числа проверенных ламп. Найти $P\{1 \le \xi < 3\}$.

2.33 После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Вопросы задаются последовательно один за другим до тех пор, пока студент не продемонстрирует незнание заданного вопроса, либо пока число дополнительных вопросов не станет равным четырем. Вероятность того, что наудачу выбранный студент ответит на первый дополнительный вопрос, равна 0,9, на второй – 0,8, на третий – 0,6 и на четвертый – 0,5. Пусть ξ - число дополнительных вопросов, на которые ответил наудачу взятый экзаменующийся. Построить ряд распределения данной с.в. Найти $P\{\xi \ge 2\}$.

2.34 Один раз брошены три игральные кости. С.в. ξ принимает значение 1, если выпала хотя бы одна шестерка; значение 0, если шестерок не выпало, но выпала по крайней мере одна пятерка; значение -1 в остальных случаях. Найти ряд распределения и ф. р. с.в. ξ.

2.35 Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна p_1, для второго - p_2. Пусть ξ - суммарное число попаданий в мишень. Найти ряд распределения с.в. ξ.

2.36 Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для *i*-го стрелка равна p_i, *i*=1,2. Найти ряд распределения с.в. ξ - разности между числом попаданий 1-го и 2-го стрелков.

2.37 Производится два независимых выстрела по мишени. Рассматривается с.в. ξ - разность между числом попаданий и числом промахов. Найти ряд распределения с.в. ξ, если вероятность попадания при одном выстреле равна *p*.

2.38 Имеется *n* заготовок для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из каждой заготовки равна *p*. *a*) Найти ряд распределения числа заготовок, оставшихся после изготовления первой годной детали. *b*) Построить ряд распределения для случайного числа использованных заготовок.

2.39 Симметричная монета подбрасывается *n* раз. Рассматривается с.в. ξ - число выпавших гербов. Построить ряд распределения этой с.в.

2.40 Производится *n* независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью *p* может произойти событие *A*. Найти ряд распределения с.в. ξ - числа наступлений противоположного *A* события $\overline{A}$ в *n* опытах.

2.41 Производится *n* независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью *p* может произойти событие *A*. Рассматривается с.в. ξ - частота наступления события *A* в *n* опытах. Найти ряд распределения с.в. ξ.

2.42 Имеется *n* лампочек. Каждая из них с вероятностью *p* имеет дефект. Лампочка ввинчивается в патрон и включается ток. При включении тока дефектная лампочка сразу перегорает, после чего заменяется другой. Рассматривается с.в. ξ - число лампочек, которое будет испробовано. Построить ее ряд распределения.

2.43 Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет *k* гербов. Пусть ξ - число «решеток», выпавших до окончания эксперимента. Найти закон распределения с.в. ξ, если вероятность выпадения герба при одном броске равна *p*.

2.44 Производится ряд попыток включить двигатель. Каждая попытка заканчивается успехом (включением двигателя) независимо от других с вероятностью *p*. Каждая попытка занимает время *t*. Найти закон распределения общего времени *T*, которое потребуется для запуска двигателя.

2.45 В условиях предыдущей задачи будем считать, что вероятность p_k включения двигателя при *k*-й попытке зависит от номера попытки *k* (*k*=1,2,…). Найти закон распределения с.в. *T*.

2.46 Точка $x \in R^1$ является точкой роста функции *f(x)*, если для всякого $\varepsilon > 0$ $f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon) > 0$. Привести пример дискретной с.в. такой, что каждая точка $x \in R^1$ является точкой роста ее ф.р.

3. АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

3.1 Найти ф.р. с.в. ξ, определенной на вероятностном пространстве (Ω, F, P), представляющем собой отрезок [0,1] с σ- алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега в качестве вероятности, если:

1) $\xi(\omega) = \omega$; 2) $\xi(\omega) = \omega^2$; 3) $\xi(\omega) = \sin \pi\omega$; 4) $\xi(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & 0 \le \omega \le 1/2 \\ 2(1-\omega), & 1/2 < \omega \le 1 \end{cases}$;

5) $\xi(\omega) = \begin{cases} 1/4, & 0 \le \omega \le 1/4 \\ 1, & 1/4 < \omega \le 3/4 \\ 1/4, & 3/4 < \omega \le 1 \end{cases}$.

3.2 Пусть с.в. ξ определена на вероятностном пространстве (Ω, F, P), где $\Omega -$треугольник с вершинами в точках (0,0), (2,1), (2,0), F - σ- алгебра борелевских подмножеств указанного треугольника, P – мера Лебега. Найти ф.р. и п.р. с.в. ξ, если: 1) ξ - абсцисса случайно выбранной точки треугольника; 2) ξ - ордината случайно выбранной точки треугольника.

3.3 Ф.р. с.в. ξ определяется формулой

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ (x-2)^2, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}.$$

Найти: *a*) п.р. $f_\xi(x)$; *b*) вероятность попадания ξ в интервал (1; 2,5); *c*)вероятность попадания ξ в интервал (2,5; 3,5).

3.4 П.р. с.в. ξ определяется формулой

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [1,2] \\ x - 1/2, & x \in [1,2] \end{cases}.$$

Найти ф.р. $F_\xi(x)$ и построить ее график.

3.5 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [3,7] \\ \dfrac{7-x}{8}, & x \in [3,7] \end{cases}$. Найти ф.р. $F_\xi(x)$ и $P(2 \le \xi \le 4)$.

3.6 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x)=\begin{cases}0, & |x|\geq 3\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}, & |x|<3\end{cases}$. Найти ф.р. $F_\xi(x)$ и $P(1{,}5\leq\xi\leq 4)$.

3.7 С.в. ξ распределена по «закону прямоугольного треугольника» в интервале (0,*a*) (рис.2). Найти $f_\xi(x)$, $F_\xi(x)$ и $P(\frac{a}{2}\leq\xi<a)$.

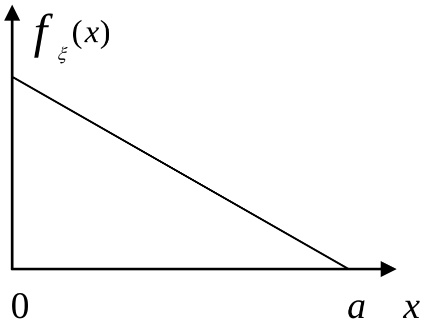

Рис.2

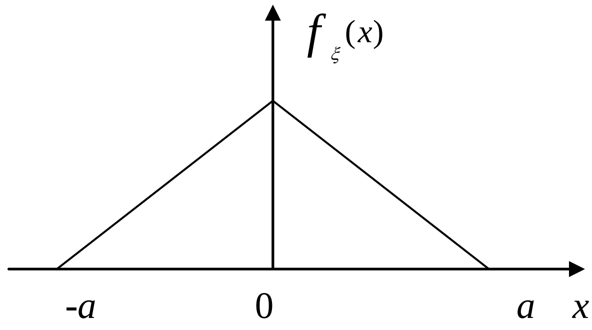

Рис.3

3.8 С.в. ξ подчинена закону Симпсона («закону равнобедренного треугольника») на интервале (-*a*,*a*) (рис.3). Найти $f_\xi(x)$, $F_\xi(x)$ и $P(-\frac{a}{2}\leq\xi<a)$.

3.9 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x)=\begin{cases}a(x-1)^2, & x\in[1{,}5]\\ 0, & x\notin[1{,}5]\end{cases}$. Найти константу *a* и $P(3\leq\xi<4)$.

3.10 С.в. ξ распределена по закону Коши: $f_\xi(x)=\dfrac{a}{1+x^2}$. Найти: 1)константу *a*; 2) ф.р. $F_\xi(x)$; 3) $P(|\xi|\leq 1)$.

3.11 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x)=\dfrac{a}{e^x+e^{-x}}$. Найти: 1) коэффициент *a*; 2)вероятность попадания ξ в интервал $(0,+\infty)$.

3.12 Ф.р. с.в. ξ имеет вид $F_\xi(x)=A+B\cdot arctg\,x$. Найти *A*,*B*, $f_\xi(x)$ и $P(|\xi|>\sqrt{3})$.

3.13 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{Ax}{1+x^4}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$. Найти *A*, $F_\xi(x)$, $P(0\leq\xi\leq 1)$.

3.14 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x)=\begin{cases}A\sin x, & x\in[0,\pi]\\ 0, & x\notin[0,\pi]\end{cases}$. Найти *A*, $F_\xi(x)$, $P(0\le\xi\le\frac{\pi}{4})$.

3.15 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x)=\begin{cases}A\cos x, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ 0, & x\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$. Найти *A* и $P(|\xi|<\frac{\pi}{4})$.

3.16 С.в. ξ подчинена показательному закону распределения с параметром λ: $f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$, $\lambda>0$. Найти $F_\xi(x)$ и $P(\xi<\lambda^{-1})$.

3.17 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ Axe^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\end{cases}$. Найти *A* и $P(\xi>\sqrt{\ln 2})$.

3.18 С.в. ξ- расстояние от точки попадания до центра мишени – распределена по закону Рэлея: $f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ Axe^{-\sigma^2x^2}, & x>0\end{cases}$. Найти: 1)коэффициент *A*; 2) моду м с.в. ξ, т.е. абсциссу максимума ее п.р.; 3)вероятность того, что в результате выстрела расстояние от точки попадания до центра мишени окажется меньше, чем мода.

3.19 В теории надежности технических устройств в качестве закона распределения времени безотказной работы устройства часто применяется закон Вейбулла с ф.р. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-ax^n}, & x>0\end{cases}$, где *a>0* – некоторая константа, а *n* – натуральное число. Найти п.р. $f(x)$.

3.20 С.в. ξ подчинена закону Лапласа: $f_\xi(x)=Ae^{-\lambda|x|}$, $\lambda>0$. Найти: 1)коэффициент *A*; 2) ф.р. $F_\xi(x)$; 3) постоянную *B* такую, что $P(|\xi|\le B)=\frac{1}{2}$.

3.21 С.в. ξ распределена по закону Коши: $F_\xi(x)=A+B\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. Найти значения параметров *A*, *B*, *a*.

3.22 Ф.р. с.в. ξ определяется формулой

$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ ax^2+bx+\frac{2}{5}, & -1<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$. Найти *a*, *b* и $f_\xi(x)$, если ξ - непрерывная с.в.

3.23 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_{\xi}(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{x}, & x\in(1,2)\\ 0, & x\notin(1,2)\end{cases}$. Найти константу c, ф.р. с.в. ξ и $P(0<\xi<1{,}5)$.

3.24 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_{\xi}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\in(1,a)\\ 0, & x\notin(1,a)\end{cases}$. Найти константу a, ф.р. ξ и $P(1<\xi<\frac{e}{2})$.

3.25 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_{\xi}(x)=\begin{cases}2\cos x, & x\in(0,a)\\ 0, & x\notin(0,a)\end{cases}$. Найти константу a и $P(0<\xi<\frac{\pi}{12})$.

3.26 С.в. ξ распределена по нормальному закону: $f_{\xi}(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $a\in R^1, \sigma>0$. Найти $P(|\xi|<150)$ и $P(\xi\le 0)$, если $a=-50, \sigma=100$.

3.27 С.в. ξ распределена по нормальному закону: $f_{\xi}(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $a\in R^1, \sigma>0$. Найти $P(30<\xi<80)$, если $a=40, \sigma^2=400$.

3.28 С.в. ξ распределена по нормальному закону. Известно, что $P(\xi<1{,}06)=0{,}15$ и $P(\xi>3{,}38)=0{,}1$. Определить a и σ^2.

3.29 Можно ли подобрать постоянную c так, чтобы функция cx^{-3} определяла п.р. вероятностей на: a) луче $[1,+\infty)$; b) луче $(0, +\infty)$; c) отрезке [-2,-1]?

3.30 Однородная проволока длиной один метр растягивается за концы и разрывается. С.в. ξ - длина большего куска проволоки. Найти ф.р. $F_{\xi}(x)$.

3.31 Время ожидания ξ у бензоколонки автозаправочной станции имеет показательное распределение с параметром λ. Найти вероятности следующих событий: $A=\left\{\frac{1}{2\lambda}\le\xi\le\frac{3}{2\lambda}\right\}$, $B=\left\{\xi>\frac{2}{\lambda}\right\}$.

3.32 Шкала секундомера имеет цену деления 0,2 сек. Какова вероятность сделать по этому секундомеру отсчет времени с ошибкой более 0,05 сек., если отсчет ведется с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону.

3.33 Линия трамвая имеет протяженность L. Вероятность того, что пассажир сядет в трамвай в окрестности точки x, пропорциональна $x(L-x)^2$, а вероятность того, что пассажир, вошедший в точке x, выйдет в точке y, пропорциональна $(y-x)^h$, $h\ge 0$. Найти вероятность того, что: a)

пассажир сядет в трамвай ранее пункта z; b) пассажир, севший в трамвай в точке x, выйдет после пункта z.

3.34 Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$, то его размер считается приемлемым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика ξ - нормальная случайная величина с параметрами $a = \frac{d_1 + d_2}{2}$, $\sigma = \frac{d_2 - d_1}{4}$. Определить вероятность P того, что шарик будет забракован.

3.35 Задача та же, но параметр σ не известен. Зато известно, что в большой партии шариков для подшипников, изготовленных на данном предприятии, брак составил 10%. Найти σ.

3.36 Доказать, что для любой непрерывной ф.р. *F(x)* выполняется равенство $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, dF(x) = \frac{1}{2}$.

3.37 Доказать, что для любой непрерывной ф.р. *F(x)* и любых натуральных n и k $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^k(x)\, dF^n(x) = \frac{n}{n+k}$.

3.38 Доказать, что множество точек разрыва любой ф.р. *F(x)* не более чем счетно.

3.39 Может ли множество точек разрыва ф.р. быть всюду плотным на прямой?

3.40 Доказать, что если ф.р. непрерывна в каждой точке прямой, то она равномерно непрерывна на всей прямой.

3.41 Ф.р. $F_\xi(x)$ неотрицательной с. в. ξ называется полуаддитивной, если $F_\xi(x+y) \le F_\xi(x) + F_\xi(y), \quad \forall\, x, y \ge 0$. Привести пример полуаддитивной ф.р.

3.42 Пусть $f(x)$ - п.р., не возрастающая при $x \ge 0$ и равная *0* при $x < 0$. Доказать, что соответствующая ф.р. *F(x)* полуаддитивна.

4. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОГО СЛУЧАЙНОГО АРГУМЕНТА

4.1 Дискретная с. в. ξ имеет ряд распределения

ξ	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Построить ряды распределения с.в. $\eta_1 = \xi^2 + 1, \quad \eta_2 = |\xi|$.

4.2 Дискретная с. в. ξ имеет ряд распределения

ξ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
p	0,1	0,3	0,1	0,2	0,3

Найти ряд распределения с.в. $\eta = \sin\xi$.

4.3 С. в. ξ имеет ряд распределения

ξ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
p	0,2	0,7	0,1

Найти ряд распределения с.в. $\eta = \cos\xi$.

4.4 Дискретная с. в. ξ имеет ряд распределения

ξ	-2	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

Построить ряды распределения с.в. $\eta_1 = 2\xi$, $\eta_2 = \xi^2$, $\eta_3 = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\xi\right)$.

4.5 Закон распределения дискретной с. в. ξ имеет вид $P(\xi = k) = \frac{1}{2n+1}$, $k = 0, \pm1, \ldots, \pm n$ (n – натуральное число). Найти закон распределения с.в. η, если: $a)\ \eta = \xi^2$; $b)\ \eta = |\xi| - \xi$; $c)\ \eta = |\xi| + \xi$; $d)\ \eta = \prod_{k=-n}^{n}(\xi - k)$.

4.6 Закон распределения дискретной с. в. ξ имеет вид $P(\xi = n) = \frac{1}{3}2^{-|n|}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Найти закон распределения с.в. η, если:

$a)\ \eta = \sin\frac{\pi}{2}\xi$; $b)\ \eta = \cos\frac{\pi}{2}\xi$; $c)\ \eta = \sin\frac{\pi}{2}\xi + \cos\frac{\pi}{2}\xi$; $d)\ \eta = \begin{cases} 0, & n - \text{четное} \\ 1, & n - \text{нечетное} \end{cases}$;

$$e)\ \eta = \begin{cases} 0, & \xi - \text{делится на } 3 \text{ без остатка} \\ 1, & \xi - \text{делится на } 3 \text{ с остатком } 1 \\ 2, & \xi - \text{делится на } 3 \text{ с остатком } 2 \end{cases}.$$

4.7 Закон распределения с.в. ξ имеет вид $P(\xi = n) = A\,p^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *(0<p<1)*. Найти постоянную A и закон распределения с.в. $\eta = k$, если остаток от деления ξ на m (m- натуральное число) равен k, $k=0,1,\ldots,m-1$.

4.8 Пусть $F_\xi(x)$ и $f_\xi(x)$ соответственно ф.р. и п.р. с.в. ξ. Найти ф.р. и п.р. с.в. η, если: $a)\ \eta = \xi + 1$, $b)\ \eta = \xi - 2$, $c)\ \eta = 2\xi$, $d)\ \eta = -\xi$.

4.9 С.в. ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найти ф.р. $F_\eta(y)$ и п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta = e^{-\xi}$.

4.10 С.в. ξ распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta = \sin\xi$.

4.11 С.в. ξ равномерно распределена на отрезке [1;2]. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta=\xi^2$.

4.12 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ c\,x^{-4}, & x\ge 1\end{cases}$. Найти: 1) постоянную c; 2)п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta=\ln\xi$ и $P(0{,}5<\eta<0{,}75)$; 3) п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta=\xi^{-1}$ и $P(0{,}1<\eta<0{,}3)$.

4.13 С.в. ξ равномерно распределена на интервале (0,1). Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. η, если : $a)\,\eta=2\xi+1;\ b)\,\eta=-\ln(1-\xi)$.

4.14 С.в. ξ имеет нормальное распределение с параметрами a=0 и σ^2. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta=\xi^{-1}$.

4.15 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. η, если : $a)\,\eta=\sqrt{\xi};\ \ b)\,\eta=\xi^2;\ \ c)\,\eta=\frac{1}{\lambda}\ln\xi$.

4.16 С.в. ξ имеет показательное распределение с параметром λ. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. η, если : $a)\,\eta=\{\xi\}$ (дробная часть); $b)\,\eta=1-e^{-\lambda\xi}$.

4.17 С.в. ξ имеет распределение Коши с плотностью $f_\xi(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. η, если : $a)\,\eta=\frac{\xi^2}{1+\xi^2};\ b)\,\eta=\frac{1}{1+\xi^2};\ c)\,\eta=\frac{2\xi}{1-\xi^2};\ d)\,\eta=\frac{1}{\xi}$.

4.18 С.в. ξ равномерно распределена в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta=|\sin\xi|$.

4.19 С.в. ξ имеет п.р. $f_\xi(x)$. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. η, если : $a)\,\eta=|\xi|$; $b)\,\eta=|1-\xi|$.

4.20 С.в. ξ распределена по закону Рэлея с п.р. $f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sigma^2}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta=e^{-\xi^2}$.

4.21 С.в. ξ имеет п.р. $f_\xi(x)$. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta=\min\left\{\xi,\xi^2\right\}$.

4.22 Случайная точка B имеет равномерное распределение на окружности $x^2+(y-a)^2=r^2$ $(a>0)$ с центром в точке $A=(0,a)$, а случайная точка $C=(\xi,0)$ является пересечением оси абсцисс с прямой, проходящей через A и B. Найти ф.р. $F_\xi(x)$ и п.р. $f_\xi(x)$.

4.23 Через точку A с координатами (0,1) проведена прямая AB под случайным углом θ к оси ординат. П.р. с.в. θ имеет вид

$$f_{\theta}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos t, & -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\\ 0, & t\notin\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$. Найти п.р. расстояния ξ от прямой *AB* до начала координат.

4.24 Через точку *A*, лежащую на оси *Oy* на расстоянии 1 от начала координат, проводится прямая *AB* под углом α к оси *Oy*. Все значения угла α от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ равновозможны. Найти п.р. $f_{\xi}(x)$ абсциссы ξ точки *B* пересечения прямой с осью абсцисс.

4.25 Круглое колесо радиуса *R,* закрепленное в центре, приводится во вращение, которое затухает вследствие трения. В результате фиксированная точка *A* на ободе колеса останавливается на некоторой высоте η (положительной или отрицательной) относительно горизонтальной линии, проходящей через центр колеса. Высота η зависит от случайного угла θ, при котором остановилось вращение. Найти п.р. $f_{\eta}(x)$ с.в. η.

4.26 Из точки с координатами (-1,0), лежащей на окружности единичного радиуса с центром в начале координат, случайным образом направлен луч, причем его угол с осью абсцисс распределен равномерно на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Найти ф.р. длины хорды внутри окружности.

4.27 Ф.р. $F_{\xi}(x)$ с.в. ξ непрерывна в нуле. Найти закон распределения с.в. $\eta=\begin{cases}\frac{\xi}{|\xi|}, & \xi\neq 0\\ 1, & \xi=0\end{cases}$.

4.28 С.в. ξ имеет ф.р. $F_{\xi}(x)$. Найти ф.р. $F_{\eta}(y)$ с.в. $\eta=\frac{1}{2}(\xi+|\xi|)$.

4.29 Пусть ξ- с.в. с симметричным распределением $F_{\xi}(-x)=1-F_{\xi}(x)$, A – симметричное относительно нуля борелевское множество на прямой. Положим $\eta=\begin{cases}\xi, & \xi\in A\\ -\xi, & \xi\notin A\end{cases}$. Доказать, что с.в. ξ и η одинаково распределены.

4.30 Ф.р. $F_{\xi}(x)$ с.в. ξ строго монотонна и непрерывна. Найти ф.р. $F_{\eta}(y)$ с.в. $\eta=F_{\xi}(\xi)$.

4.31 Пусть $F(x)$ - непрерывная строго возрастающая ф.р. и $F^{-1}(x)$ - обратная к ней функция. Показать, что с.в. $\eta=F^{-1}(\xi)$, где ξ равномерно распределена на отрезке [0,1], имеет своей ф.р. $F(x)$.

4.32 Привести пример такого абсолютно непрерывного распределения с.в. ξ с п.р. $f_\xi(x)$ и такой непрерывной функции *g(x)*, что распределение с.в. $\eta = g(\xi)$ не вырождено и дискретно.

4.33 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x) = \begin{cases} 2x^{-2}, & x \in (1,2) \\ 0, & x \notin (1,2) \end{cases}$. Найти п.р. с.в. $\eta = \sqrt{\xi}$.

4.34 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$. Найти п.р. с.в. $\eta = e^{-\xi}$.

4.35 С.в. ξ распределена равномерно в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta = \sin\xi$.

4.36 С.в. ξ распределена равномерно в интервале $(0, \pi)$. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta = \cos\xi$.

4.37 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}, & x \in (1,2) \\ 0, & x \notin (1,2) \end{cases}$. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta = \ln\xi - 3$.

4.38 С.в. ξ равномерно распределена в интервале (0,1). Найти закон распределения с.в. $\eta = \left[\frac{\ln\xi}{\ln(1-p)}\right]$, где $0 < p < 1$, $[\cdot]$ - целая часть.

4.39 С.в. ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = 1$, $\sigma^2 = 4$, а с.в. $\eta = e^\xi$. Найти плотность распределения с.в. $\nu = \Phi\left(\frac{\ln\eta - 1}{2}\right)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$.

5. ЧИСЛОЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

5.1 Ряд распределения с.в. имеет вид

ξ	-1	0	2	x
p	0,2	0,3	0,1	0,4

Известно, что $M\xi = 1$. Найти x и $D\xi$.

5.2 Дан ряд распределения с.в. ξ:

ξ	2	3	4	5
p	p	0,2	q	0,1

Известно, что $M\xi = 3{,}5$. Найти p, q, $D\xi$.

5.3 Дан ряд распределения с.в. ξ:

ξ	-2	-1	0	1
p	$4p$	$3p$	$2p$	p

Найти *p*, $M\xi$, $D\xi$.

5.4 Дан ряд распределения с.в. ξ:

ξ	-1	x	3	5
p	$4p$	$3p$	$2p$	p

Известно, что $D\xi = 4$. Найти *p*, *x*, $M\xi$.

5.5 Есть правильный кубик, у которого на противоположных гранях написаны цифры 1, 2 и 3. Пусть ξ - число единиц, выпавших при трех бросаниях кубика. Найти ряд распределения с.в. ξ, $M\xi$ и $D\xi$.

5.6 Есть два правильных жетона, у одного из них на одной стороне стоит цифра 3, на другой – 5, а у другого на одной стороне стоит цифра 1, а на другой – 5. Жетоны бросаются на стол. Пусть ξ - сумма очков, выпавших на жетонах. Найти $M\xi$ и $D\xi$.

5.7 Есть правильный жетон, у которого на одной стороне стоит цифра 2, а на другой – 0, и есть правильный кубик, у которого на противоположных гранях написаны цифры 1, 2 и 3 соответственно. Жетон и кубик бросаются на стол. Пусть ξ - сумма очков, выпавших на жетоне и кубике. Найти ряд распределения с.в. ξ, $M\xi$ и $D\xi$.

5.8 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x) = \begin{cases} A(x-1), & 1 \le x \le 3 \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}$. Найти *A*, $M\xi$ и $D\xi$.

5.9 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x) = \begin{cases} A(x^2+2x), & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}$. Найти *A*, $M\xi$ и $D\xi$.

5.10 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x) = \begin{cases} A\cos x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}$. Найти *A*, $M\xi$ и $D\xi$.

5.11 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x) = \begin{cases} A\sin 2x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}$. Найти *A*, $M\xi$ и $D\xi$.

5.12 Пусть $M\xi = 2$ и $D\xi = 10$. Найти $M\eta$ и $D\eta$, если $\eta = 2\xi + 5$.

5.13 В урне 5 белых и 7 черных шаров. Из урны вынимается сразу 6 шаров. С.в. ξ - число черных шаров среди вынутых. Найти $M\xi$ и $D\xi$.

5.14 С.в. эксцентриситета детали имеет распределение Рэлея: $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x^2/2\sigma^2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$. Найти п.р., моду и медиану.

5.15 П.р. с.в. ξ имеет вид: $f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2, & x\in[0,1]\\ \frac{3}{2}(2-x)^2, & x\in(1,2]\\ 0, & x\notin[0,2]\end{cases}$.

Найти: *a*)начальные и центральные моменты первых четырех порядков; *b*)асимметрию и эксцесс.

5.16 Найти математическое ожидание и дисперсию: *a*) числа очков, выпадающих при бросании одной игральной кости; *b*) суммы очков, выпадающих при бросании *n* игральных костей.

5.17 Распределение с.в. ξ определяется формулами $P(\xi=k)=\frac{4}{k(k+1)(k+2)},\quad k=1,2,...$. Найти $M\xi$.

5.18 Распределение с.в. ξ определяется формулами $P(\xi=k)=2^{-k},\quad k=1,2,...$. Найти $M\xi$ и $D\xi$.

5.19 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{2}, & x\in[0,2]\\ 0, & x\notin[0,2]\end{cases}$. Найти математическое ожидание и дисперсию с.в. ξ.

5.20 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x)=\begin{cases}\cos(2x), & x\in[-\pi/4,\pi/4]\\ 0, & x\notin[-\pi/4,\pi/4]\end{cases}$. Найти математическое ожидание и дисперсию с.в. ξ.

5.21 С.в ξ распределена по «закону прямоугольного треугольника» на интервале $(0,a)$, т.е. $f_\xi(x)=\begin{cases}-\frac{2}{a^2}x+\frac{2}{a}, & x\in(0,a)\\ 0, & x\notin(0,a)\end{cases}$. Найти математическое ожидание и дисперсию с.в. ξ.

5.22 С.в. ξ распределена по закону Симпсона на интервале (-*a*,*a*), т.е. $f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{a^2}x+\frac{1}{a}, & x\in(-a,0)\\ -\frac{1}{a^2}x+\frac{1}{a}, & x\in[0,a)\\ 0, & x\notin(-a,a)\end{cases}$. Найти математическое ожидание и дисперсию с.в. ξ.

5.23 С.в. ξ распределена по закону Рэлея, т.е. $f_\xi(x)=\begin{cases}2\sigma^2 xe^{-\sigma^2x^2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$. Найти математическое ожидание и дисперсию с.в. ξ.

5.24 С.в. ξ подчинена закону Лапласа: $f_\xi(x)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|},\quad \lambda>0$. Найти математическое ожидание и дисперсию с.в. ξ.

5.25 Ф.р. с.в. ξ имеет вид $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le -a\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}, & -a<x\le a\\ 1, & x>a\end{cases}$. Найти: *a*)квантиль $x_{0,75}$; *b*) медиану.

5.26 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x)=\begin{cases}ax^2e^{-bx}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, где *a>0*, *b>0*. Найти моду.

5.27 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x)=\begin{cases}kx, & x\in\left[0,\sqrt{\frac{2}{k}}\right]\\ 0, & x-другое\end{cases}$ (*k>0*). Найти медиану, если известно, что мода равна $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

5.28 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{32}x, & x\in[0,a]\\ 0, & x-другое\end{cases}$ (*a>0*). Найти *a* и квантиль $x_{0,25}$.

5.29 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_\xi(x)=\begin{cases}3x^2, & x\in[0,1]\\ 0, & x-другое\end{cases}$. Найти: *a*)математическое ожидание ξ; *b*) моду, медиану и квантиль $x_{0,3}$.

5.30 Ряд распределения с.в. ξ имеет вид

ξ	2	4	6	8
p	0,4	0,3	0,2	0,1

Найти: a) начальные и центральные моменты первых четырех порядков; b)асимметрию и эксцесс.

5.31 С.в. ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda,\ (\lambda > 0)$. Найти асимметрию.

5.32 С.в. ξ имеет равномерное распределение на интервале (a,b). Найти эксцесс.

5.33 С.в. ξ подчинена закону Лапласа с параметром $\lambda = 1$: $f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Найти асимметрию и эксцесс.

5.34 Ящик сделан так, что его высота равна 10 дюймов, а основание имеет форму квадрата со стороной ξ дюймов, где ξ равномерно распределена в интервале (2,8). Каков ожидаемый объем ящика в кубических дюймах?

5.35 С.в. ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найти $M\eta$, где $\eta = \xi\left(1 - e^{-\alpha\xi}\right),\ \alpha > -1$.

5.36 С.в. ξ имеет п.р. $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$. Найти $M\eta$ и $D\eta$ с.в. η, если: a) $\eta = \sin\xi$; b) $\eta = |\sin\xi|$.

5.37 С.в. ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = 0,\ \sigma^2$. Найти $M\eta$, если $\eta = 1 - 3\xi^2 + 4\xi^3$.

5.38 С.в. ξ имеет п.р. $f_\xi(x)$. Положим $\eta = \min\{\xi, a\}$, где a – константа. Найти $M\eta$ и $D\eta$.

5.39 Тот же вопрос, что в предыдущей задаче, но с.в. ξ - дискретная с рядом распределения

ξ	1	2	…	k	…	n
p	p_1	p_2	…	p_k	…	p_n

$\eta = \min\{\xi, a\}$, a – фиксированное целое положительное число (1< a<n).

5.40 Производится ряд независимых опытов, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p. Опыты прекращаются, как только произошло событие A; общее число опытов не должно превосходить N. Найти $M\eta$, где η - число опытов, которые будут проведены.

5.41 Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, по схеме случайного выбора с возвращением извлекаются шары до тех пор, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых черных шаров.

5.42 С.в. ξ принимает значения *0,1,…,n,…* с вероятностями, убывающими в геометрической прогрессии. Найти: *a*) зависимость между $M\xi$ и $D\xi$; *b*) $P(\xi = n),\quad n = 0,1,...$, если $M\xi = a$.

5.43 П.р. с.в. ξ имеет вид $f_{\xi}(x) = \begin{cases} 3x^{-4}, & x \ge 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$. Найти математическое ожидание и дисперсию с.в. ξ и $\dfrac{1}{\xi}$.

5.44 Написаны *n* писем, но адреса на конвертах написаны в случайном порядке. Пусть ξ - число писем, которые будут получены теми адресатами, которым они предназначены. Показать, что $M\xi = 1$.

5.45 Считая, что вес тела с одинаковой вероятностью может быть равен любому целому числу от 1 до 10г, определить при какой из трех систем разновесов: *a*) 1,2,2,5,10; *b*) 1,2,3,4,10; *c*) 1,1,2,5,10 – среднее число необходимых для взвешивания гирь будет наименьшим, если при взвешивании гири разрешается ставить только на одну чашку, а подбор гирь при взвешивании осуществляется так, чтобы использовать наименьшее возможное число гирь.

5.46 Первый игрок бросает 3, а второй – 2 одинаковые монеты. Выигрывает и получает все 5 монет тот, у которого выпадает большее число гербов. В случае ничьей игра повторяется до определенного результата. Каково математическое ожидание выигрыша для каждого из игроков?

5.47 Игра заключается в том, что монету бросают до появления герба. Если герб выпал при *k* – м бросании монеты, то игрок *A* получает *k* рублей от игрока *B*. Сколько рублей должен уплатить игрок А игроку *B* перед началом игры для того, чтобы математическое ожидание проигрыша для каждого игрока равнялось нулю?

5.48 Пусть $M\xi = 0$ и $M|\xi| = 1$. Найти $M\max\{0,\xi\}$ и $M\min\{0,\xi\}$.

5.49 По маршруту ходит *N* автобусов без кондуктора. В каждом автобусе имеется касса, в которой перед выездом в рейс было *r* билетов. Всего эти автобусы перевезли *n* пассажиров. Найти $M\xi$, где ξ - число пассажиров, которым не досталось билетов, предполагая, что каждый пассажир независимо от остальных может сесть в любой из автобусов с одной и той же вероятностью *1/N*.

5.50 Ребро куба *x* измерено приближенно, причем $a \le x \le b$. Рассматривая длину ребра куба как с.в. ξ, распределенную равномерно в интервале *(a,b),* найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.

5.51 На окружности радиуса *a* с центром в начале координат выбрана точка. Найти математическое ожидание площади квадрата со стороной, равной модулю абсциссы этой точки.

5.52 Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса *R*. Найти ф.р. и дисперсию расстояния от точки до центра круга.

5.53 Диаметр круга *d* измерен приближенно, и известно лишь, что $0 < a \le d \le b$. Рассматривая диаметр как с.в. ξ, равномерно распределенную на [*a*,*b*], найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

5.54 Неподвижная точка *O* находится на высоте *h* над концом *A* горизонтального отрезка *AK* длины *l*. На отрезке *AK* наудачу выбрана точка *B*. Найти математическое ожидание угла θ между линиями *OA* и *OB*.

5.55 По сторонам прямого угла *xOy* концами скользит линейка *AB* длины *l*, занимая случайное положение, причем все значения абсциссы ξ ее конца *A* на оси *Ox* в пределах от 0 до *l* одинаково вероятны. Найти $M\eta$, где η - расстояние от начала координат до линейки.

5.56 На бесконечный лист клетчатой бумаги (сторона клетки равна 1) случайно бросается круг единичного радиуса. Считая, что центр круга равномерно распределен на том единичном квадрате, на который он попал, найти $M\xi$, где ξ - число точек с целочисленными координатами (x, y), покрытых этим квадратом.

5.57 Пусть ξ - с.в. такая, что $P(0 < \xi < 1) = 1$. Доказать, что $D\xi < M\xi$.

5.58 Пусть ξ - ограниченная с вероятностью единица с.в.: $P(|\xi| < c) = 1$. Доказать, что $D\xi \le cM\xi$.

5.59 Пусть ξ - положительная с.в. с конечным математическим ожиданием. Доказать, что $(M\xi)^{-1} \le M\left(\xi^{-1}\right)$.

5.60 Пусть с.в. ξ принимает конечное число неотрицательных значений $x_1, \ldots, x_k$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M\,\xi^{n+1}}{M\,\xi^{n}} = \max\{x_1, \ldots, x_k\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{M\,\xi^{n}} = \max\{x_1, \ldots, x_k\}$.

5.61 С.в. ξ принимает только целые неотрицательные значения и $M\xi < \infty$. Доказать, что $M\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(\xi \ge k)$.

5.6 2 Пусть ξ - неотрицательная с.в. и $M\xi < \infty$. Доказать, что $M\xi = \int\limits_0^{\infty} [1 - F_\xi(x)]dx$, где $F_\xi(x)$ - ф.р. с.в. ξ.

5.63 Пусть ξ - с.в. и $M|\xi| < \infty$. Доказать, что $M\xi = \int\limits_0^{\infty} [1 - F_\xi(x)]dx - \int\limits_{-\infty}^{0} F_\xi(x)dx$, где $F_\xi(x)$ - ф.р. с.в. ξ.

5.64 Пусть $F_i(x)$ - ф.р. с.в. ξ_i и $M|\xi_i| < \infty$, $i = 1,2$. Доказать, что если $\forall x \in R \quad F_1(x) \le F_2(x)$, то $M\,\xi_1 \ge M\,\xi_2$.

5.65 С.в. ξ имеет непрерывную ф.р. $F_\xi(x)$. Найти точку a, для которой $\inf_{b \in R} M|\xi - b| = M|\xi - a|$. $(M|\xi| < \infty)$

5.66 С.в. ξ имеет конечный второй момент $M\xi^2$. Найти $\inf_{a \in R} M(\xi - a)^2$ и то значение a, при котором точная нижняя грань достигается.

5.67 Доказать, что $M\xi$ существует тогда и только тогда, когда существует $M[\xi]$ ($[\cdot]$ - целая часть), причем $M\xi = M[\xi]$ тогда и только тогда, когда ξ - целочисленная с.в.

5.68 Будем говорить, что с.в. ξ сосредоточена на отрезке $[a,b]$, если $P(a \le \xi \le b) = 1$ и для любого $\varepsilon > 0$ $P(a \le \xi < a + \varepsilon) > 0$ и $P(b - \varepsilon < \xi \le b) > 0$. Доказать, что $D\xi \le \frac{l^2}{4}$ для любой с.в. ξ, сосредоточенной на отрезке длины l.

ОТВЕТЫ

1.2 Указ. $A=\bigcup_r(\{\omega:\xi(\omega)<r\}\cap\{\omega:\eta(\omega)>r\})$ (объединение берется по всем рациональным r), $B=\Omega\setminus(\{\omega:\xi(\omega)<\eta(\omega)\}\cup\{\omega:\eta(\omega)<\xi(\omega)\})$ и $C=A\cup B$.
1.3 *a*)Да; *b*) нет. **1.4** $F=\{\Omega,\varnothing,\{\omega_0,\omega_1\},\{\omega_2,\omega_3\},\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_0,\omega_1,\omega_3\},\{\omega_2\}\}$.
1.5 $F=\{\ \Omega,\varnothing,\{\omega_2\},\{\omega_1,\omega_3,\dots,\omega_{12}\},\{\omega_2,\omega_4,\omega_6,\omega_9,\omega_{11}\},\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_8,\omega_{10},\omega_{12}\},$ $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_8,\omega_{10},\omega_{12}\},\{\omega_4,\omega_6,\omega_9,\omega_{11}\}\ \}$
1.6 Да. **1.7** Нет. Указ. Ω=[0,1], F - σ- алгебра не более чем счетных подмножеств и их дополнений, $\xi(\omega)=\omega$. **1.8** Да в *d*), нет в остальных случаях. **1.9** 1)да; 2) нет; 3) да. Указ. 1) Т.к. множество $\left\{\omega:\ 0<\sum_{n=1}^{\infty}x_n<\infty\right\}$ счетное, то при любом $c\in R^1$ множество $A_c=\{\omega:\xi(\omega)<c\}$ или его дополнение не более чем счетно. Следовательно, при любом $c\in R^1$ $A_c\in F$.
2) Множества $A_0=\left\{\omega:\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=0\right\}$ и $A_1=\left\{\omega:\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=1\right\}$ несчетны. Поэтому множество $A=\left\{\omega:\xi(\omega)<\frac{1}{2}\right\}$ и его дополнение также несчетны и, следовательно, $A\notin F$. 3) Т. к. множество $\{\omega:\ y-\textit{число рациональное}\}$ счетно, то для любого $c\in R^1$ множество $A_c=\{\omega:\xi(\omega)<c\}=\bigcup_{r<c}\{\omega:\xi(\omega)=r\}$ или его дополнение не более чем счетно. Следовательно, при любом $c\in R^1$ множество $A_c\in F$. **1.12** Ω – множество всех пятибуквенных слов, содержащих 3 буквы «Б» и 2 буквы «Ч». F – совокупность всех подмножеств множества Ω. Все исходы равновозможны. *a)* $F_\xi=\sigma(A_0,A_1,A_2,A_3)$, где A_i- множество всех слов, начинающихся *i* буквами «Б» *(i=0,1,2,3)* перед первой буквой «Ч». *b)* $F_\xi=\{\varnothing,\Omega\}$; *c)* $F_\xi=\sigma(B_1,B_2,B_3)$, где $B_i=\{\omega:\xi_1(\omega)+\xi_2(\omega)=i\}$, $i=1,2,3$. **1.13** Ω – множество всех слов, состоящих из *n* букв «Б» и *n* букв «Ч». F – совокупность всех подмножеств множества Ω. Все исходы равновозможны. $F_\xi=\sigma(B_1,B_2,\dots,B_n)$, где $B_i=\{\omega:\xi_1(\omega)+\xi_2(\omega)=i\}$, $i=1,2,\dots,n.$
1.14 *a)* $\sigma([0;1/4),[1/4;3/4),[3/4;1])$; *b)* *F;* *c)* $\{\varnothing,\Omega\}$. **1.15** Всевозможные множества вида $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}(A+2\pi k)$, где A – борелевские симметричные относительно начала координат подмножества отрезка $[-\pi;\pi]$, а $A+a$ – сдвиг множества A на a. **1.16** $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=[0;1)$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\left[0;\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

1.17 Указ. $\{S_\nu < c\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{S_k < c\} \bigcap \{\nu = k\}$. **1.18** Указ. $\{\xi_\nu < c\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{\xi_k < c\} \bigcap \{\nu = k\}$.

1.19 Указ. $\{\omega : \eta(\omega) < c\} = \bigcup_{k=1}^{n} D_k \bigcap \{\omega : \xi_k(\omega) < c\}$. **2.1** *c*) 0,8. **2.2** *a*) *p*=1/7. **2.3** *a*) *p*=0,4. **2.4** *a*)

ξ	2	3	4
p	0,3	0,2	0,5

b) 0,5 и 0,3.

2.5 *a*) *c*=1; *b*) 3/4; *c*) $\dfrac{n_2 - n_1 + 1}{n_1(n_2+1)}$. **2.6** *a*) *c*=4; *b*) 1/6; *c*) $2 \cdot \left(\dfrac{1}{n_1(n_1+1)} - \dfrac{1}{(n_2+1)(n_2+2)} \right)$.

2.7

ξ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2.8

ξ	-3	3	8	9	14	15	19	20	25	30
p	0,008	0,036	0,06	0,054	0,18	0,027	0,15	0,135	0,225	0,125

2.9

ξ	0	1	2
p	0,12	0,56	0,32

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}12, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}68, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

2.10

ξ	0	1	2
p	0,12	0,56	0,32

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}12, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}68, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}, \quad P(0 \le \xi < 2) = 0{,}68.$$

2.11

ξ	0	1	2	3
p	0,024	0,188	0,452	0,336

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0{,}24, & 0<x\le 1\\ 0{,}212, & 1<x\le 2\\ 0{,}664, & 2<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}, \qquad P(0\le\xi<2)=0{,}212.$$

2.12

ξ	0	1
P	5/6	1/6

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 5/6, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

2.13

ξ	0	1	2
p	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{3}{36}$

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{15}{36}, & 0<x\le 1\\ \frac{33}{36}, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}, \qquad P(1\le\xi<3)=\frac{21}{36}.$$

2.14

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{969}{2300}$	$\frac{1026}{2300}$	$\frac{285}{2300}$	$\frac{20}{2300}$

2.15

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1/6, & 0<x\le 1\\ 2/3, & 1<x\le 2\\ 29/30, & 2<x\le 3\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

2.16

ξ	0	1	2
p	0,36	0,48	0,16

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0{,}36, & 0<x\le 1\\ 0{,}84, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

2.17

ξ	0	1	2	3
p	1/8	3/8	3/8	1/8

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1/8, & 0<x\le 1\\ 1/2, & 1<x\le 2\\ 7/8, & 2<x\le 3\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

2.18 $P(\xi=k)=C_8^k\dfrac{1}{2^8},\quad k=0,\dots,8;\quad P(\xi=4)=\dfrac{70}{256};\quad P(\xi>4)=\dfrac{93}{256}.$

2.19

ξ	0	1	2	3
p	0,512	0,384	0,096	0,008

$P(\xi\ge 1)=0{,}488.$

2.20 $P(\xi=k)=C_4^k 0{,}4^k 0{,}6^{4-k}$, $k=0,\dots,4$. $P(\xi\ge 2)=0{,}5248.$

2.21 $P(\xi=5k)=C_3^k 0{,}4^k 0{,}6^{3-k},\quad k=0,1,2,3.$

2.22

ξ	0	1	2	3
p	0,001	0,027	0,243	0,729

$P(\xi\ge 2)=0{,}972.$

2.23 $P(\xi=k)=\dfrac{11}{36}\cdot\left(\dfrac{25}{36}\right)^{k-1},\quad k=1,2,\dots\ .$

2.24 $P(\xi=k)=0{,}2\cdot 0{,}8^{k-1},\quad k=1,2,\dots\ .$

2.25 $P(\xi=k)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{6},\quad k=1,2,\dots;\quad P(\xi\ge 6)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{5}.$

2.26

ξ	1	2	3	4	5
p	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

2.27

ξ	0	1	2	3	4
p	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0{,}5, & 0<x\le 1\\ 0{,}75, & 1<x\le 2\\ 0{,}875, & 2<x\le 3\\ 0{,}9375, & 3<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}.$$

2.28

ξ	1	2	3	4
p	0,2	0,16	0,128	0,512

2.29

ξ	1	2	3	4
p	0,6	0,24	0,096	0,064

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 0{,}6, & 1<x\le 2\\ 0{,}84, & 2<x\le 3\\ 0{,}936, & 3<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases},\quad P(1\le\xi<3)=0{,}84.$$

2.30

ξ	1	2	3	4
p	0,5	0,3	0,15	0,05

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 0{,}5, & 1<x\le 2\\ 0{,}8, & 2<x\le 3\\ 0{,}95, & 3<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases},\quad P(2\le\xi<4)=0{,}45.$$

2.31

ξ	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

$P(1\le\xi<3)=\frac{3}{5}$.

2.32

ξ	1	2	3	4
p	0,4	0,3	0,2	0,1

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 0{,}4, & 1<x\le 2\\ 0{,}7, & 2<x\le 3\\ 0{,}9, & 3<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases},\quad P(1\le\xi<3)=0{,}7.$$

2.33

ξ	0	1	2	3	4
p	0,1	0,18	0,288	0,216	0,216

$P(\xi\ge 2)=0{,}72$.

2.34

ξ	-1	0	1
p	$\frac{64}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{91}{216}$

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ 64/216, & -1<x\le 0\\ 125/216, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

2.35

ξ	0	1	2
p	q_1q_2	$p_1q_2+q_1p_2$	p_1p_2

$q_i=1-p_i,\quad i=1{,}2.$

2.36

ξ	-1	0	1
p	q_1p_2	$p_1p_2+q_1q_2$	p_1q_2

$q_i=1-p_i,\quad i=1{,}2.$

2.37

ξ	-2	0	2
p	q^2	$2pq$	p^2

$q=1-p.$

2.38 *a*)

ξ	0	1	…	*m*	…	*n-1*
p	q^{n-1}	$q^{n-2}p$	…	$q^{n-m-1}p$	…	p

***b*)**

ξ	1	2	…	*m*	…	*n*
p	p	pq	…	pq^{m-1}	…	q^{n-1}

$q=1-p.$

2.39 $P(\xi=k)=C_n^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad k=0,1,\ldots,n.$

2.40 $P(\xi=k)=C_n^k\cdot q^k p^{n-k}, \quad k=0,1,\ldots,n; \quad q=1-p.$

2.41 $P(\xi=\frac{k}{n})=C_n^k\cdot p^k q^{n-k}, \quad k=0,1,\ldots,n; \quad q=1-p.$

2.42

ξ	1	2	…	M	…	n
р	q	pq	…	$p^{m-1}q$	…	p^{n-1}

$q=1-p.$

2.43 $P(\xi=n)=C_{k+n-1}^n\cdot q^n p^k, \quad n=0,1,\ldots\ ; \quad q=1-p.$

2.44 $P(T=nt)=pq^{n-1}, \quad n=1,2,\ldots\ ; \quad q=1-p.$

2.45 $P(T=nt)=p_n\prod\limits_{k=1}^{n-1}q_k, \quad n=1,2,\ldots\ ; \quad q_n=1-p_n.$

2.46 Указ. Занумеруем все рациональные числа в последовательности $r_1, r_2, \ldots$ и положим $P(\xi=r_n)=2^{-n}, \quad n=1,2,\ldots$. Тогда для любых $x\in R^1$ и $\varepsilon>0$ найдется $r_n\in(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ и, следовательно, $F_\xi(x+\varepsilon)-F_\xi(x-\varepsilon)=P(x-\varepsilon\le\xi<x+\varepsilon)\ge P(\xi=r_n)=2^{-n}>0$.

3.1 1) и 4) $F_\xi(x)=P(\xi<x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$; 2) $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sqrt{x}, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$;

3) $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{2}{\pi}\arcsin x, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$; 5) $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 1/4\\ 1/2, & 1/4<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$.

3.2 1) $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2/4, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$, $f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0,2]\\ x/2, & 0\le x\le 2\end{cases}$;

2) $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-(1-x)^2, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$, $f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0,1]\\ 2(1-x), & 0\le x\le 1\end{cases}$.

3.3 *a*) $f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\notin[2,3]\\ 2(x-2), & x\in[2,3]\end{cases}$ **;** *b*) 0,25; *c*) 0,75.

3.4 $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{1}{2}x(x-1), & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$. **3.5** $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\\ 1-\frac{(7-x)^2}{16}, & 3<x\le 7\\ 1, & x>7\end{cases}$ **;**

$P(2 \le \xi \le 4) = \frac{7}{16}$. **3.6** $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{3}, & -3 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$; $P(1{,}5 \le \xi \le 4) = \frac{1}{3}$.

3.7 $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right), & x \in (0,a) \\ 0, & x \notin (0,a) \end{cases}$; $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{a}\left(2 - \frac{x}{a}\right), & 0 < x \le a \\ 1, & x > a \end{cases}$; $P(\frac{a}{2} \le \xi < a) = 1/4$.

3.8 $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & x \in (-a,a) \\ 0, & x \notin (-a,a) \end{cases}$; $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{a}\left(x + \frac{x^2}{2a}\right), & -a < x \le 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{a}\left(x - \frac{x^2}{2a}\right), & 0 < x \le a \\ 1, & x > a \end{cases}$;

$P(-\frac{a}{2} \le \xi < a) = 7/8$. **3.9** $a = \frac{3}{64}$, $P(3 \le \xi < 4) = \frac{19}{64}$. **3.10** 1) $a = \frac{1}{\pi}$; 2) $F_\xi(x) = \frac{1}{\pi} arctg\, x + \frac{1}{2}$; 3) $P(|\xi| \le 1) = \frac{1}{2}$. **3.11** 1) $a = \frac{2}{\pi}$; 2) $\frac{1}{2}$. **3.12** $A = \frac{1}{2}$; $B = \frac{1}{\pi}$; $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$; $P(|\xi| > \sqrt{3}) = \frac{1}{3}$. **3.13** $A = \frac{4}{\pi}$; $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{2}{\pi} arctg\, x^2, & x > 0 \end{cases}$;

$P(0 \le \xi \le 1) = \frac{1}{2}$. **3.14** $A = \frac{1}{2}$; $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & x \in (0,\pi] \\ 1, & x > \pi \end{cases}$;

$P(0 \le \xi \le \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **3.15** $A = \frac{1}{2}$; $P(|\xi| < \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.16 $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$, $P(\xi < \lambda^{-1}) \approx 0{,}632$. **3.17** A=1; $P(\xi > \sqrt{\ln 2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.18 1) $A = 2\sigma^2$; 2) м = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$; 3) $P(\xi <$м$) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}393$.

3.19 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ na\, x^{n-1} e^{-a x^n}, & x > 0 \end{cases}$. **3.20** 1) $A = \frac{\lambda}{2}$; 2) $F_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda x}, & x \le 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$;

3) $B = \frac{1}{\lambda} \ln 2$. **3.21** $A = \frac{1}{2}$; $B = \frac{1}{\pi}$; $a>0$. **3.22** $a = 0{,}1$; $b = 0{,}5$;

$$f_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & x\notin[-1,1]\\ \frac{1}{5}x+\frac{1}{2}, & x\in[-1,1]\end{cases}$$. **3.23** $c=\frac{1}{\ln 2}$, $F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{\ln x}{\ln 2}, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$,

$P(0<\xi<1{,}5)=\frac{\ln 3}{\ln 2}-1$. **3.24** $a=e$, $F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \ln x, & 1<x\le e\\ 1, & x>e\end{cases}$,

$P(1<\xi<\frac{e}{2})=1-\ln 2$. **3.25** $a=\frac{\pi}{6}$, $P(0<\xi<\frac{\pi}{12})\approx 0{,}5177$. **3.26** $P(|\xi|<150)\approx 0{,}8186$, $P(\xi\le 0)\approx 0{,}69146$. **3.27** $P(30<\xi<80)=0{,}6687$. **3.28** $a=2{,}1$, $\sigma^2=1$.

3.29 *a*) можно (c=2); *b*) нельзя (интеграл расходится); *c*) можно ($c=-\frac{8}{3}$).

3.30 ξ имеет равномерное распределение на отрезке [1/2,1]: $F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & x\le 1/2\\ 2x-1, & 1/2<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$. **3.31** $P(A)=e^{-\frac{1}{2}}-e^{-\frac{3}{2}}\approx 0{,}3834$; $P(B)=e^{-2}\approx 0{,}135$. **3.32** 1/2. **3.33** $a)\ \frac{z^2}{L^4}\left(6L^2-8Lz+3z^2\right)$; $b)\ 1-\left(\frac{z-x}{L-x}\right)^{h+1}$.

3.34 $P\approx 0{,}0455$. **3.35** $\sigma=\frac{d_2-d_1}{3{,}28}$. **3.39** Может. **3.41** Например, ф.р. с.в. ξ равномерно распределенной на [0,1]. **3.42** Указ.

$$F(x+y)=\int_0^{x+y}f(u)\,du=\int_0^{x}f(u)\,du+\int_x^{x+y}f(u)\,du=\int_0^{x}f(u)\,du+\int_0^{y}f(x+v)\,dv\le$$

$$\int_0^{x}f(u)\,du+\int_0^{y}f(v)\,dv=F(x)+F(y).$$

4.1

η_1	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

η_2	0	1	2
p	0,3	0,5	0,2

4.3

η	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
p	0,7	0,3

4.2

η	0	1/2	1
p	0,4	0,5	0,1

4.4

η_1	-4	-2	0	2	4
p	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

η_2	0	1	4
p	0,3	0,4	0,3

η_3	-1	0	1
p	0,3	0,6	0,1

4.5 $a)\ P(\eta = k^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n+1}, & k=0 \\ \dfrac{2}{2n+1}, & k=\overline{1,n} \end{cases}$; $b)\ P(\eta = -2k) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2n+1}, & k=0 \\ \dfrac{1}{2n+1}, & k=\overline{1,n} \end{cases}$;

$c)\ P(\eta = 2k) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2n+1}, & k=0 \\ \dfrac{1}{2n+1}, & k=\overline{1,n} \end{cases}$; $d)\ P(\eta = 0) = 1$.

4.6

a)

η	-1	0	1
p	2/9	5/9	2/9

b)

η	-1	0	1
p	8/45	4/9	17/45

c)

η	-1	1
p	2/5	3/5

d)

η	0	1
p	5/9	4/9

e)

η	0	1	2
p	3/7	2/7	2/7

4.7 *A=1-p*; $P(\eta = k) = \dfrac{(1-p)\,p^k}{1-p^m}$, $k = \overline{0, m-1}$. **4.8** $a)\ F_\eta(y) = F_\xi(y-1)$, $f_\eta(y) = f_\xi(y-1)$; $b)\ F_\eta(y) = F_\xi(y+2)$, $f_\eta(y) = f_\xi(y+2)$; $c)\ F_\eta(y) = F_\xi\left(\dfrac{y}{2}\right)$, $f_\eta(y) = \dfrac{1}{2} f_\xi\left(\dfrac{y}{2}\right)$; $d)\ F_\eta(y) = 1 - F_\xi(-y)$, $f_\eta(y) = f_\xi(-y)$.

4.9 $F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ y, & 0 < y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$; $f_\eta(y) = \begin{cases} 1, & y \in (0,1) \\ 0, & y \notin (0,1) \end{cases}$.

4.10 $f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y\in(-1,1)\\ 0, & y\notin(-1,1)\end{cases}$. **4.11** $f_\eta(y)=\begin{cases}1/3\sqrt{y}, & 0<y\le 1\\ 1/6\sqrt{y}, & 1<y\le 4\\ 0, & y\le 0 \quad или \quad y>4\end{cases}$.

4.12 1) c=3; 2) $f_\eta(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$, $P(0{,}5<\eta<0{,}75)=e^{-1{,}5}-e^{-2{,}25}$;

3) $f_\eta(y)=\begin{cases}3y^2, & y\in(0,1)\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}$, $P(0{,}1<\eta<0{,}3)=0{,}026$.

4.13 *a*) $f_\eta(y)=\begin{cases}1/2, & y\in(1,3)\\ 0, & y\notin(1,3)\end{cases}$; *b*) $f_\eta(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$.

4.14 $f_\eta(y)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\,y^2}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2y^2}}, \quad y\ne 0$. **4.15** *a*) $f_\eta(y)=\begin{cases}2\lambda y\,e^{-\lambda y^2}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$;

b) $f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2\sqrt{y}}e^{-\lambda\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$; *c*) $f_\eta(y)=\lambda^2\cdot e^{-\lambda\left(e^{\lambda y}-y\right)}$.

4.16 *a*) $f_\eta(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}\Big/\left(1-e^{-\lambda}\right), & y\in[0,1]\\ 0, & y\notin[0,1]\end{cases}$; *b*) $f_\eta(y)=\begin{cases}1, & y\in[0,1]\\ 0, & y\notin[0,1]\end{cases}$.

4.17 В случаях *a*) и *b*) $f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}}, & y\in(0,1)\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}$, в случаях *c*) и *d*)

$f_\eta(y)=f_\xi(y)=\dfrac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}$. **4.18** $f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y\in(0,1)\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}$.

4.19 *a*) $f_\eta(y)=\begin{cases}f_\xi(-y)+f_\xi(y), & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$; *b*) $f_\eta(y)=\begin{cases}f_\xi(1-y)+f_\xi(1+y), & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$.

4.20 $f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sigma^2}y^{\frac{1-2\sigma^2}{2\sigma^2}}, & y\in(0,1)\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}$. **4.21** $f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{f_\xi\left(\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}}, & y\in(0,1)\\ f_\xi(y), & y\notin(0,1)\end{cases}$.

4.22 $F_\xi(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}arctg\dfrac{x}{a}$, $f_\xi(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{a}{a^2+x^2}$. **4.23** $f_\xi(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1)\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}$.

Указ. $\xi=|\sin\theta|$. **4.24** $f_\xi(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$. Указ. $\xi=tg\,\alpha$.

4.25 $f_\eta(x)=\begin{cases}\left(\pi R\sqrt{1-(x/R)^2}\right)^{-1}, & x\in(-R,R)\\ 0, & x\notin(-R,R)\end{cases}$. Указ. $\eta=R\sin\theta$, где $f_\theta(t)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\\ 0, & t\notin\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$. **4.26** $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-\frac{2}{\pi}\arccos\frac{x}{2}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$. Указ. $\xi=2\cos\alpha$, где $f_\alpha(t)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ 0, & t\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$. **4.27** С.в. η принимает два значения 1 и -1 с вероятностями $1-F_\xi(0)$ и $F_\xi(0)$ соответственно.

4.28 $F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ F_\xi(y), & y>0\end{cases}$. **4.29** Указ. Воспользоваться тем, что с.в. ξ и $-\xi$ одинаково распределены. **4.30** $F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y, & 0<y\le 1\\ 1, & y>2\end{cases}$.

4.32 $f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in[-1,0]\cup[1,2]\\ 0, & \textit{в противном случае}\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$. Тогда $P(\eta=0)=P(-1\le\xi\le 0)=\frac{1}{2}$ и $P(\eta=1)=P(1\le\xi\le 2)=\frac{1}{2}$.

4.33 $f_\eta(y)=\begin{cases}4y^{-3}, & y\in(1,\sqrt{2})\\ 0, & y\notin(1,\sqrt{2})\end{cases}$. **4.34** $f_\eta(y)=\begin{cases}2y, & y\in(0,1)\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}$.

4.35 $f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y\in(0,1)\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}$. **4.36** $f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y\in(-1,1)\\ 0, & y\notin(-1,1)\end{cases}$.

4.37 $f_\eta(y)=\begin{cases}e^{y+3}\left(e^{y+3}-\frac{1}{2}\right), & y\in(-3,\ln 2-3)\\ 0, & y\notin(-3,\ln 2-3)\end{cases}$.

4.38 $P(\xi=k)=(1-p)^k p,\quad k=0,1,\ldots$. **4.39** $f_\nu(y)=\begin{cases}1, & y\in(0,1)\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}$. **5.1** x=2,5; $D\xi=2{,}1$. **5.2** p=0,2; q=0,5; $D\xi=0{,}85$. **5.3** p=0,1; $M\xi=-1$; $D\xi=1$.
5.4 p=0,1, x=1, $M\xi=1$.
5.5

ξ	0	1	2	3
p	8/27	12/27	6/27	1/27

$M\xi=1,\quad D\xi=2/3$.

5.6 $M\xi=7$, $D\xi=5$.

5.7

ξ	1	2	3	4	5
p	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

$M\xi=3$, $D\xi=5/3$.

5.8 A=1/2, $M\xi=7/3$, $D\xi=2/9$. **5.9** A=3/20, $M\xi=7/5$, $D\xi=1/5$.

5.10 A=1, $M\xi=\frac{\pi}{2}-1$, $D\xi=\pi-3$. **5.11** A=1, $M\xi=\frac{\pi}{4}$, $D\xi=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$.

5.12 $M\eta=9$, $D\eta=40$. **5.13** $M\xi=\frac{7}{2}$, $D\xi=\frac{35}{44}$.

5.14 $f\ (x)=\begin{cases}\frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/2\sigma^2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$; σ; $\sigma\sqrt{2\ln 2}$. **5.15** *a*) $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1{,}1$, $\alpha_3=1{,}3$, $\alpha_4=\frac{57}{35}$, $\mu_1=0$, $\mu_2=0{,}1$, $\mu_3=0$, $\mu_4=\frac{1}{35}$; *b*) 0; $-\frac{1}{7}$. **5.16** *a*) $\frac{7}{2}$, $\frac{35}{12}$; *b*) $\frac{7n}{2}$, $\frac{35n}{12}$. **5.17** $M\xi=2$. **5.18** $M\xi=2$, $D\xi=2$. **5.19** $M\xi=2/3$, $D\xi=2/9$.

5.20 $M\xi=0$, $D\xi=\pi^2/16-1/2$.

5.21 $M\xi=a/3$, $D\xi=a^2/18$. **5.22** $M\xi=0$, $D\xi=a^2/6$.

5.23 $M\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma}$, $D\xi=\frac{1}{\sigma^2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$. **5.24** $M\xi=0$, $D\xi=\frac{2}{\lambda^2}$. **5.25** *a*) $x_{0,75}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, *b*) $x_{0,5}=0$. **5.26** $\frac{2}{b}$. **5.27** 0,25. **5.28** a=8, $x_{0,25}=4$. **5.29** *a*) $M\xi=0{,}75$; *b*) 1; $\sqrt[3]{0{,}5}\approx 0{,}79$; $x_{0,3}=\sqrt[3]{0{,}3}\approx 0{,}67$. **5.30** *a*) $\alpha_1=4$, $\alpha_2=20$, $\alpha_3=116{,}8$, $\alpha_4=752$, $\mu_1=0$, $\mu_2=4$, $\mu_3=4{,}8$, $\mu_4=35{,}2$; *b*) 0,6; -0,8. **5.31** 2. **5.32** -1,2. **5.33** 0; 3. **5.34** 280. **5.35** $M\eta=1-(1+\alpha)^{-2}$. **5.36** *a*) $M\eta=0$, $D\eta=\frac{1}{3}$; *b*) $M\eta=\frac{1}{2}$, $D\eta=\frac{1}{12}$.

5.37 $M\eta=1-3\sigma^2$. **5.38** $M\eta=\int\limits_{-\infty}^{a}x\,f_{\xi}(x)dx+aP(\xi\ge a)$, $D\eta=\int\limits_{-\infty}^{a}x^2 f_{\xi}(x)dx+a^2P(\xi\ge a)-(M\eta)^2$. **5.39** $M\eta=\sum\limits_{k=1}^{a-1}k\,p_k+a\sum\limits_{k=a}^{n}p_k$, $D\eta=\sum\limits_{k=1}^{a-1}k^2p_k+a^2\sum\limits_{k=a}^{n}p_k-(M\eta)^2$. **5.40** $M\eta=\frac{1-q^N}{p}$, $q=1-p$. Указ. $\eta=\min\{\xi,N\}$; $P(\xi=k)=p(1-p)^{k-1}$, $k=1,2,...$. **5.41** $\frac{n}{m}$, $\frac{n(m+n)}{m^2}$. **5.42** *a*) $D\xi=M\xi(M\xi+1)$; *b*) $P(\xi=n)=\frac{a^n}{(a+1)^{n+1}}$, $n=0,1,...$. **5.43** $M\xi=3/2$, $D\xi=3/4$, $M\left(\xi^{-1}\right)=3/4$, $D\left(\xi^{-1}\right)=3/80$. **5.44** Указ. Пусть θ_k - индикатор события $A_k=\{$k – й адресат получит написанное ему письмо$\}$. Тогда $\xi=\theta_1+\theta_2+...+\theta_n$ и

$M\xi=\sum_{k=1}^{n}M\,\theta_k=\sum_{k=1}^{n}P(\theta_k=1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{n!}=1$. **5.45** *a*) 1,8; *b*) 1,7; *c*) 2. При второй системе. **5.46** 7/11, -7/11. **5.47** 2 рубля. **5.48** 1/2 и -1/2. Указ. Положим $\xi^{+}=\max\{0,\xi\}$, $\xi^{-}=-\min\{0,\xi\}$. Тогда $\xi=\xi^{+}-\xi^{-}$ и $|\xi|=\xi^{+}+\xi^{-}$. Откуда $M\,\xi^{+}-M\,\xi^{-}=0$ и $M\,\xi^{+}+M\,\xi^{-}=1$. **5.49** $M\xi=N\cdot\sum_{k=r+1}^{n}(k-r)C_n^k\frac{1}{N^k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}$. Указ. Пусть $\xi=\xi_1+\xi_2+...+\xi_N$, где ξ_i - число пассажиров, которым не досталось билетов в *i*- м автобусе. $\xi_i\in\{0,1,...,n-r\}$, $P(\xi_i=k-r)=C_n^k\frac{1}{N^k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}$, $k=r+1,...,n,$ $P(\xi_i=0)=\sum_{j=0}^{r}C_n^j\frac{1}{N^j}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-j}$. $M\xi=\sum_{i=1}^{N}M\,\xi_i$.

5.50 $M\,\xi^3=\frac{1}{4}(a+b)(a^2+b^2)$, $D\,\xi^3=\frac{b^7-a^7}{7(b-a)}-\left[\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{4}\right]^2$. **5.51** $\frac{a^2}{2}$. Указ. Пусть θ - угол между радиусом и осью *Ox*. $f_\theta(t)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}, & t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\\ 0, & t\notin\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$. Тогда площадь квадрата $\xi=a^2\cos^2\theta$. **5.52** $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^2}{R^2}, & 0<x\le R\\ 1, & x>R\end{cases}$; $\frac{R^2}{18}$.

5.53 $\frac{\pi}{12}(a^2+ab+b^2)$, $\frac{\pi^2}{16}\left(\frac{b^5-a^5}{5(b-a)}-\frac{(b^3-a^3)^2}{9(b-a)^2}\right)$. **5.54** $M\theta=arctg\frac{l}{h}-\frac{h}{2l}\ln\left(1+\frac{l^2}{h^2}\right)$.

5.55 $M\eta=\frac{1}{3}$. **5.56** $M\xi=\pi$. Указ. $\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4$, где $\xi_i=1$, если *i*– я вершина квадрата, в который попал центр круга, лежит в круге, и $\xi_i=0$ в противном случае. $M\xi_i=\frac{\pi}{4}$. **5.57** Указ. Воспользоваться неравенством $\xi^2<\xi$. **5.58** Указ. $D\xi\le M|\xi|^2\le cM\xi$. **5.59** Указ. Воспользоваться неравенством Коши-Буняковского в соответствии с которым $1=M\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\cdot\sqrt{\xi}\right)\le M\left(\frac{1}{\xi}\right)\cdot M\xi$ **5.64** Указ. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **5.65** *a* –

медиана распределения. Указ. $M|\xi - b| = \int\limits_{-\infty}^{b}(b-x)dF_\xi(x) + \int\limits_{b}^{+\infty}(x-b)dF_\xi(x)$.

$\frac{d}{db}M|\xi - b| = \int\limits_{-\infty}^{b}dF_\xi(x) - \int\limits_{b}^{+\infty}dF_\xi(x) = 2F_\xi(b) - 1 = 0$. **5.66** $a = M\xi$ и $\inf\limits_{a\in R} M(\xi - a)^2 = D\xi$.

5.67 Указ. Воспользоваться неравенством $[x] \le x \le [x]+1$ и тем, что если ξ не является с вероятностью единица целочисленной с.в., то $P(\xi > [\xi]) > 0$.

5.68 Указ. Воспользоваться неравенством $D\xi \le M\left(\xi - \frac{a+b}{2}\right)^2$ (см. задачу 5.66) и неравенствами $a \le \xi \le b \Rightarrow \left|\xi - \frac{a+b}{2}\right| \le \frac{l}{2}$, $l=b-a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.. Теория вероятностей. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1973. – 367с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища школа, 1979. – 408с.
3. Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1967. – 340с.
4. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей: Учеб. пособие для втузов. – М.: Наука, 1989. – 320с.
5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2000. – 543с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для втузов/ Под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука, 1990. – 428с.
7. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/ Под ред. А.А.Свешникова. – М.: Наука, 1965. – 632с.
8. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах: Учеб. пособие для вузов / В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев и др. – М.: Дрофа, 2003.-328с