МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Часть 4

Рекомендовано методической комиссией Института ИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки
09.03.03 «Прикладная информатика»

Нижний Новгород
2017

УДК 519.21
ББК В171

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. Часть 4 / Составители: В.И. Мухин, В.М.Сморкалова - Н.Новгород: ННГУ, 2017. - 54с.

Рецензент: к.т.н., доцент П.Д. Басалин

Сборник предназначен для студентов Института информационных технологий, математики и механики, обучающихся по направлению подготовки «Прикладная информатика». Приводятся задачи с ответами к практическим занятиям по темам: «Системы случайных величин», «Независимость случайных величин», «Законы распределения функций от нескольких случайных аргументов», «Числовые характеристики системы случайных величин», «Условные законы распределения».

УДК 519.21
ББК В171

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

П.р. – плотность распределения вероятностей
С.в. – случайная величина
Ф.р. – функция распределения

1. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1.1 В ящике 2 шара, на каждом из которых написана цифра 1, и 3 шара, на каждом из которых написана цифра 2. Один за другим наудачу вынимают два шара. Найти совместный закон распределения (ξ,η), где ξ - номер на первом извлеченном шаре, а η - номер на втором.

1.2 В кошельке лежат 8 пятирублевых монет и 6 двухрублевых. Наудачу вынимают одну за другой две монеты. Найти совместный закон распределения (ξ,η), где ξ - достоинство первой монеты, а η - второй.

1.3 Из 12 лотерейных билетов 4 выигрышных. Двое вытягивают по билету, сначала первый тянет, затем второй. Пусть ξ - число выигрышных билетов у первого, η - у второго. Найти совместный закон распределения (ξ,η).

1.4 Двое стрелков производят по 2 выстрела. Стреляют они независимо друг от друга и каждый выстрел не зависит от предыдущего. Вероятность попадания первого при одном выстреле равна p_1, второго - p_2. Пусть ξ - число попаданий 1 – го стрелка, η - второго. Найти совместный закон распределения для (ξ,η).

1.5 Бросают две игральные кости. Пусть

$$\xi=\begin{cases}1, & \textit{сумма очков четна}\\ 0, & \textit{сумма очков нечетна}\end{cases};$$

$$\eta=\begin{cases}1, & \textit{произведение очков четно}\\ 0, & \textit{произведение очков нечетно}\end{cases}.$$

Найти совместный закон распределения для (ξ,η).

1.6 Совместное распределение с.в. ξ и η задано таблицей, в которой на пересечении i – го столбца и j – ой строки приведены вероятности $p_{ij}=P(\xi=i,\eta=j),\ (i=-1,1;\ j=-1,0,1)$.

η \ ξ	-1	1
-1	$1/8$	$5/24$
0	$1/12$	$1/6$
1	$7/24$	$1/8$

Найти одномерные законы распределения с.в. ξ и η.

1.7 Есть две урны, содержащие пронумерованные шары. Состав первой урны: один шар с номером 1, два шара с номером 2, один шар с номером 3. Состав второй урны: два шара с номером 1, три шара с номером 2, один шар с номером 3. Из каждой урны извлекли по одному шару. Пусть ξ - номер шара, извлеченного из первой урны, η - номер шара, извлеченного из второй урны. Построить ряд распределения двумерной с.в. (ξ,η).

1.8 Ряд распределения двумерной дискретной с.в. $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$ имеет вид

ξ_2 \ ξ_1	-1	0	1
0	0,1	0,15	0,2
1	0,15	0,25	0,15

Найти ф.р. $F(x,y)$ данной с.в. и частные ряды распределений с.в. $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$.

1.9 Двумерная с.в. $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$ имеет п.р. $f(x,y)=\begin{cases} a\sin(x+y), & 0\le x,y\le \dfrac{\pi}{2}. \\ 0 \quad , & x,y \ -другие \end{cases}$ Найти константу a, ф.р. $F(x,y)$ с.в. $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$ и частную п.р. $f_1(x)$ с.в. $\xi_1(\omega)$.

1.10 Двумерная с.в. $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$ имеет п.р. $f(x,y)=\begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x,y>0 \\ 0 \quad , & x,y \ -другие \end{cases}$, $\lambda>0$. Найти $f_1(x)$ - п.р. $\xi_1(\omega)$.

1.11 Двумерная с.в. $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$ имеет п.р. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{5}{16}x\,y^2, & 0<x<y<2 \\ 0 \quad , & x,y \ -другие \end{cases}$. Найти $f_1(x)$ и $f_2(y)$ - частные п.р. $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$.

1.12 Двумерная с.в. $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$ имеет п.р. $f(x,y)=\begin{cases} kx\,y^2, & 0<x<y<1 \\ 0 \quad , & x,y \ -другие \end{cases}$. Найти k.

1.13 Двумерная с.в. $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$ имеет плотность $f(x,y)=\dfrac{A}{\pi^2(3+x^2)(1+y^2)}$. Найти: *a*) константу *A*; *b*) совместную ф.р. $F(x,y)$; *c*) $P(0\le\xi_1\le1,\ 0\le\xi_2\le1)$.

1.14 Найти вероятность попадания случайной точки (ξ,η) в прямоугольник, ограниченный прямыми x=1, x=2, y=3, y=5, если

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0 \quad или \quad y\le 0\\ 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x,y>0\end{cases}.$$

1.15 Совместная п.р. с.в. ξ и η имеет вид $f_{\xi\eta}(x,y)=\dfrac{A}{\left(x^2+y^2+1\right)^3}$. Найти константу A.

1.16 Совместное распределение ξ и η является равномерным в единичном круге $x^2+y^2\le 1$. Найти $P\left(|\xi|\le\frac{3}{4},\ |\eta|\le\frac{3}{4}\right)$.

1.17 Совместная п.р. с.в. ξ и η определяется равенством $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases}$, где $G=\left\{(x,y):\ 0\le x\le 2;\ 0\le y\le 1-\frac{x}{2}\right\}$. Найти п.р. $f_\xi(x)$ с.в. ξ.

1.18 Пусть $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}A(x+y), & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases}$, где $G=\{(x,y):\ 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\}$. Найти: *a*) константу A; *b*) $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$; *c*) $F_{\xi\eta}(x,y)$.

1.19 Определить вероятность попадания случайной точки (ξ,η) в область $G=\{(x,y):\ 1\le x\le 2;\ 1\le y\le 2\}$, если совместная функция распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ имеет вид (a>1)

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0 \quad или \quad y\le 0\\ 1-a^{-x^2}-a^{-2y^2}+a^{-x^2-2y^2}, & x,y>0\end{cases}.$$

1.20 Совместная ф.р. с.в. ξ и η равна $F_{\xi\eta}(x,y)$. Найти вероятность попадания случайной точки (ξ,η) в область $G=\{(x,y):\ x<a;\ b\le y<c\}$.

1.21 Пусть $f(x,y)$ совместная п.р. с.в. ξ и η. Выразить через $f(x,y)$ вероятности следующих событий: *a*) $\{\xi>\eta\}$; *b*) $\{\xi>|\eta|\}$; *c*) $\{|\xi|>\eta\}$; d) $\{\eta-\xi>1\}$.

1.22 С.в. ξ имеет п.р. $f_\xi(x)$. С.в. $\eta=\xi^2$. Найти совместную ф.р. $F_{\xi\eta}(x,y)$ с.в. ξ и η.

1.23 Система трех с.в. (ξ_1,ξ_2,ξ_3) распределена с постоянной плотностью внутри шара радиуса R. Найти вероятность попадания случайной точки (ξ_1,ξ_2,ξ_3) внутрь шара с радиусом $R/2$.

1.24 Система трех с.в. (ξ_1,ξ_2,ξ_3) равномерно распределена внутри шара радиуса *R*. Найти: *a*) п.р. $f_3(x)$ с.в. ξ_3; *b*) совместную п.р. $f(x,y)$ с.в. ξ_1 и ξ_2.

1.25 Найти п.р. системы трех с.в. (ξ_1, ξ_2, ξ_3), если совместная ф.р. этих с.в. $F(x,y,z)$ имеет вид $F(x,y,z) = \begin{cases} (1-e^{-ax})(1-e^{-by})(1-e^{-cz}), & x, y.z > 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$, (*a*,*b*,*c*>0).

1.26 Пусть ξ и η - с.в., определенные на вероятностном пространстве (Ω, F, P), где Ω - квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), $F - \sigma$ -алгебра борелевских множеств Ω, *P* – мера Лебега. Найти ф.р. и п.р. $\xi + \eta$, если: *a*) $\xi(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$, $\eta(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 - \omega_2$; *b*) $\xi(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1, & \omega_1 = \omega_2 \\ 0, & \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases}$, $\eta(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \cdot \omega_2$; *c*) $\xi(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$, $\eta(\omega_1, \omega_2) = \omega_2$.

2. НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

2.1 С.в. ξ и η независимы. Найти $P(\xi = \eta)$, если: *a*) ξ и η имеют одно и то же дискретное распределение; *b*) ф.р. с.в. ξ непрерывна.

2.2 Игральная кость бросается до тех пор, пока впервые не выпадет меньше пяти очков. Обозначим через ξ число очков, выпавших при последнем бросании, а через η - число бросаний кости. Найти совместное распределение ξ и η. Являются ξ и η независимыми?

2.3 Положение случайной точки (ξ, η) равновозможно в любом месте круга радиуса *R*, центр которого совпадает с началом координат. Определить п.р. и ф.р. каждой из прямоугольных координат. Являются ли с.в. ξ и η независимыми?

2.4 Система с.в. (ξ, η) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата $G = \{(x,y):\ 0 \le x \le a;\ 0 \le y \le a\}$. Найти $f_{\xi\eta}(x,y)$, $F_{\xi\eta}(x,y)$, $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$. Являются ли с.в. ξ и η независимыми?

2.5 С.в. ξ и η имеют совместную п.р. $f_{\xi\eta}(x,y) = \dfrac{A}{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}$.

Найти: *a*) коэффициент *A*; *b*) $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$; *c*) вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в квадрат $G = \{(x,y):\ -1 \le x \le 1;\ -1 \le y \le 1\}$. Установить, являются ли с.в. ξ и η независимыми.

2.6 С.в. ξ и η независимы. ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a=0,\quad \sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}$, а $f_{\eta}(y)=\begin{cases}1, & y\in[0,1]\\ 0, & y\notin[0,1]\end{cases}$. Найти $f_{\xi\eta}(x,y)$ и $F_{\xi\eta}(x,y)$.

2.7 Пусть ξ, η и ν независимые с.в., каждая из которых равномерно распределена на [0,2]. Каково число *C*, для которого с вероятностью 0,75 по крайней мере одна из указанных с.в. будет превышать *C*?

2.8 Пусть ξ и η независимые с.в., каждая из которых равномерно распределена на интервале (0,1). Найти $P\left\{|\eta-\xi|>\frac{1}{2}\right\}$.

2.9 Двумерная с.в. $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$ имеет п.р. $f(x,y)=\begin{cases}4e^{-2(x+y)}, & x,y>0\\ 0\ , & x,y\ -\textit{другие}\end{cases}$. Определить, являются ли с.в. $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимыми.

2.10 Двумерная с.в. $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$ имеет п.р. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{9}, & 0\le x,y\le 3\\ 0\ , & x,y\ -\textit{другие}\end{cases}$. Определить, являются ли с.в. $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимыми.

2.11 В условиях задачи 1.9 Определить, являются ли с.в. $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимыми.

2.12 В условиях задачи 1.18 Определить, являются ли с.в. $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимыми.

2.13 Двумерная с.в. $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$ имеет п.р. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, & 0\le y\le 1\\ 0\ , & y\ -\textit{другое}\end{cases}$. Определить, являются ли с.в. $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимыми.

2.14 Двумерная с.в. $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$ имеет п.р. $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-4x}, & 2\le y\le 4,\ x>0\\ 0\ , & x,y\ -\textit{другие}\end{cases}$. Определить, являются ли с.в. $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимыми.

2.15 С.в. $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимы и имеют следующие п.р. $f_{\xi_1}(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0\ , & x\ -\textit{другое}\end{cases}$, $f_{\xi_2}(y)=\begin{cases}1, & y\in[0,1]\\ 0\ , & y\ -\textit{другое}\end{cases}$. Найти $f(x,y)$ - совместную п.р. данных с.в.

2.16 Двумерная с.в. $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$ имеет п.р. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\lambda}{a}e^{-\lambda x}, & 0\le y\le a,\ x>0\\ 0 & ,\ x,y\ -\textit{другие}\end{cases}$. Определить, являются ли с.в. $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимыми.

2.17 Двумерная с.в. $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$ имеет п.р. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{12}, & 2\le x\le 4,\ 1\le y\le 3\\ 0 & ,\ x,y\ -\textit{другие}\end{cases}$. Определить, являются ли с.в. $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимыми.

2.18 С.в. $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимы и имеют следующие п.р. $f_{\xi_1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{6} & x\in[2,4]\\ 0 & ,\ x\ -\textit{другое}\end{cases}$, $f_{\xi_2}(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & y\in[2,4]\\ 0 & ,\ y\ -\textit{другое}\end{cases}$. Найти $f(x,y)$ - совместную п.р. данных с.в.

2.19 С.в. $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимы, причем $\xi_1(\omega)$ имеет нормальное распределение с параметрами $a=0,\ \sigma=1$, а $\xi_2(\omega)$ - нормальное распределение с параметрами $a=0,\ \sigma=\sqrt{2}$. Найти значение совместной плотности распределения $f(x,y)$ данных с.в. в точке *x*=2, *y*=2.

2.20 С.в. $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимы, причем $\xi_1(\omega)$ имеет нормальное распределение с параметрами $a=0,\ \sigma=1$, а $\xi_2(\omega)$ - нормальное распределение с параметрами $a=1,\ \sigma=2$. Найти вероятность попадания случайной точки $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$ в прямоугольник с вершинами (-1,1), (2,1), (2,3), (-1,3).

2.21 ξ и η независимые с.в., каждая из которых имеет стандартное нормальное распределение. Найти $P(\eta>\xi)$.

2.22 Пусть (ξ,η)- случайная точка такая, что ξ и η независимые с.в., каждая из которых имеет нормальное распределение с параметрами a,σ и b,σ соответственно. Найти *R*- радиус круга с центром в точке (a,b), вероятность попадания в который для данной случайной точки равна 0,997.

2.23 Даны две независимые с.в. Абсолютно непрерывная ξ с п.р. $f_\xi(x)$ и дискретная η со значениями $y_1,y_2,\dots,y_n$, имеющими вероятности $p_1,p_2,\dots,p_n$. Найти совместную ф.р. $F_{\xi\eta}(x,y)$.

2.24 Пусть ξ и η - с.в. Обязаны ли они быть независимыми, если независимы ξ^2 и η^2?

2.25 Пусть ξ, η и ν - с.в., причем ξ не зависит от $\eta + \nu$. Верно ли, что ξ не зависит от η и от ν?

2.26 Доказать, что с.в. не зависит от самой себя тогда и только тогда, когда она с вероятностью единица равна постоянной.

2.27 Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P), представляющем собой отрезок [0,1] с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, заданы с.в. ξ и η. Будут ли они независимы, если: *a*) $\xi = \omega^2$, $\eta = 1 - \omega^2$; *b*) $\xi = 1/2$, $\eta = \omega$; *c*) $\xi = \omega$,

$$\eta = \begin{cases} 1/2, & \omega \in [0, 1/4) \cup (1/4, 3/4) \cup (3/4, 1] \\ 1, & \omega = 1/4 \\ 1/4, & \omega = 3/4 \end{cases}.$$

2.28 Определим вероятностное пространство (Ω, F, P) следующим образом: $\Omega = \{1,2,3\}$, F - совокупность всех подмножеств Ω, $p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = 1/3$. Доказать, что на этом вероятностном пространстве нельзя определить две независимые с.в., каждая из которых принимает по крайней мере два значения.

2.29 Вероятностное пространство (Ω, F, P) определим следующим образом: $\Omega = \{1,2,3,4\}$, F - совокупность всех подмножеств Ω, $p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = 1/4$. Построить на этом вероятностном пространстве две независимые случайные величины, не равные с вероятностью единица постоянным.

2.30 Пусть (Ω, F, P) - вероятностное пространство, причем Ω состоит ровно из n точек, каждая из которых имеет положительную вероятность. Доказать, что на этом вероятностном пространстве не существует двух независимых с.в., каждая из которых принимает n различных значений.

2.31 Пусть (Ω, F, P) - вероятностное пространство такое, что F содержит ровно n событий, $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ - попарно независимые с.в., определенные на этом вероятностном пространстве. Доказать, что по крайней мере одна из них есть с вероятностью единица постоянная.

2.32 Существует ли на вероятностном пространстве (Ω, F, P), представляющем собой отрезок [0,1] с σ-алгеброй борелевских множеств и мерой Лебега, с.в., не равная с вероятностью единица постоянной и не зависящая от с.в. $\xi(\omega) = \omega$?

2.33 Пусть ξ и η - с.в., причем $P(\xi > 0) = P(\eta > 0) = 3/4$,

$P(\xi+\eta>0)=1/2$. Доказать, что ξ и η зависимы.

2.34 Пусть ξ и η - независимые одинаково распределенные с.в., $p=P(\xi>0),\quad q=1-p$. Доказать, что $p^2 \le P(\xi+\eta>0) \le 1-q^2$.

2.35 Существуют ли с.в. ξ и η такие, что ξ и η не равны с вероятностью единица постоянным и: *a*) ξ и $\xi+\eta$ независимы; *b*) ξ и $\xi\eta$ независимы; *c*) ξ, $\xi+\eta$ и $\xi\eta$ независимы в совокупности?

2.36 Пусть ξ,η и ν - с.в., причем ξ не зависит от η и от ν. Верно ли, что ξ не зависит от $\eta+\nu$?

2.37 Пусть ξ,η и ν - независимые в совокупности с.в. Будут ли независимыми с.в. ξ и $\eta+\nu$? Изменится ли ответ, если предположить лишь попарную независимость ξ,η и ν?

3. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОТ НЕСКОЛЬКИХ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ

3.1 Совместное распределение с.в. ξ_1 и ξ_2 задано таблицей:

ξ_2 \ ξ_1	-1	1
-1	$1/8$	$5/24$
0	$1/12$	$1/6$
1	$7/24$	$1/8$

Найти: *a*) закон распределения $\eta_1=\xi_1+\xi_2$; *b*) закон распределения $\eta_2=\xi_2^2$; *c*) $P(\eta_1=0,\eta_2=1)$.

3.2 Законы распределения числа очков, выбиваемых каждым из двух стрелков, таковы:

ξ	1	2	3
p	0,1	0,3	0,6

η	1	2	3
p	0,2	0,3	0,5

Найти закон распределения суммы очков, выбиваемых двумя стрелками.

3.3 Брошена игральная кость и правильный тетраэдр. Пусть на гранях тетраэдра написаны цифры 1,2,3,4. Обозначим через ξ и η число очков, выпавших на кости и тетраэдре соответственно. Найти закон распределения $\xi+\eta$.

3.4 Сумму двух независимых равномерно распределенных на $\{0,1,\ldots,9\}$ с.в. ξ_1 и ξ_2 можно записать в виде $\xi_1+\xi_2=10\eta_2+\eta_1$, $0\le\eta_i\le 9$, $i=1,2$. Найти законы распределения η_1 и η_2. Зависимы ли с.в. η_1 и η_2?

3.5 Произведение двух независимых равномерно распределенных на $\{0,1,\ldots,9\}$ с.в. ξ_1 и ξ_2 можно записать в виде $\xi_1\xi_2=10\eta_2+\eta_1$, $0\le\eta_i\le 9$, $i=1,2$. Зависимы ли с.в. η_1 и η_2?

3.6 С.в. ξ и η независимы и имеют одинаковое распределение: $P(\xi=k)=P(\eta=k)=\dfrac{1}{N}$, $k=1,2,\ldots,N$. Положим $\nu=\min\{\xi,\eta\}$, $\mu=\max\{\xi,\eta\}$, $\lambda=\mu-\nu$. Найти законы распределения с.в. ν, μ и λ.

3.7 Смешаны две группы деталей, содержащих n_1 и n_2 деталей каждая. Число бракованных деталей ξ и η в каждой группе имеет биномиальное распределение с параметрами (n_1,p) и (n_2,p) соответственно. Найти закон распределения $\xi+\eta$.

3.8 Пусть ξ и η - независимые с.в и $P(\xi=i)=(1-a)a^i$, $i\ge 0$, $P(\eta=j)=(1-b)b^j$, $j\ge 0$, $0<a<1$, $0<b<1$. Найти закон распределения $\xi+\eta$.

3.9 Пусть ξ и η - пуассоновские с.в. с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Доказать, что если $\lambda_1<\lambda_2$, то при любом целом неотрицательном n $P(\xi\le n)>P(\eta\le n)$.

3.10 Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ - независимые с.в., причем $P(\xi_k=1)=p$, $P(\xi_k=-1)=1-p=q$. Найти закон распределения с.в. $\eta=\xi_1\times\xi_2\times\ldots\times\xi_n$.

3.11 Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ - независимые бернуллиевские с.в. $P(\xi_i=0)=1-\lambda_i\Delta$, $P(\xi_i=1)=\lambda_i\Delta$, где Δ - малое число, $\Delta>0$, $\lambda_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$. Показать, что $P(\xi_1+\ldots+\xi_n=1)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\Delta+O(\Delta^2)$, $P(\xi_1+\ldots+\xi_n>1)=O(\Delta^2)$.

3.12 Из урны, содержащей *M* белых и *N*-*M* черных шаров, по схеме случайного выбора без возвращения вынимаются все шары. Пусть ξ_1 - число черных шаров, извлеченных до появления 1-го белого шара, ξ_i - число черных шаров, извлеченных между $(i-1)$-м и i-м $(i=2,\ldots,M)$ белыми шарами, ξ_{M+1} - число черных шаров, появившихся после последнего белого. Найти: *a*) $P(\xi_1=k)$; *b*) $P(\xi_1=k,\xi_2=l)$;

$c)\ P(\xi_1=k_1,\xi_2=k_2,\dots,\xi_{M+1}=k_{M+1})$.

3.13 С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют равномерное распределение на (0,1). Найти п.р. с.в. η, если: $a)\ \eta=\xi_1+\xi_2$; $b)\ \eta=\xi_1-\xi_2$; $c)\ \eta=\xi_1/\xi_2$; $d)\ \eta=\xi_1/(\xi_1+\xi_2)$.

3.14 С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют равномерное распределение на (0,a). Найти п.р. с.в. η, если: $a)\ \eta=\xi_1+\xi_2$; $b)\ \eta=\xi_1-\xi_2$; $c)\ \eta=\xi_1\xi_2$; $d)\ \eta=\xi_1/\xi_2$.

3.15 С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют равномерное распределение на (a,b) (b>a). Найти п.р. с.в. η, если: 1) $\eta=\xi_1+\xi_2$; 2) $\eta=\xi_1-\xi_2$; 3) $\eta=\xi_1\xi_2$ и a>0; 4) $\eta=\xi_1/\xi_2$ и a>0.

3.16 Пусть ξ и η - независимы и $f_\xi(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$, $f_\eta(y)=\begin{cases}1/2, & y\in[0,2]\\ 0, & y\notin[0,2]\end{cases}$. Найти $f_{\xi+\eta}(z)$.

3.17 Пусть ξ и η - независимы и $f_\xi(x)=\begin{cases}1/2, & x\in[0,2]\\ 0, & x\notin[0,2]\end{cases}$, $f_\eta(y)=\begin{cases}1/2, & y\in[-1,1]\\ 0, & y\notin[-1,1]\end{cases}$. Найти $f_{\xi+\eta}(z)$.

3.18 Точка (ξ_1,ξ_2) равномерно распределена в квадрате $\{(x_1,x_2): 0\le x_1\le a, 0\le x_2\le a\}$. Показать, что распределения с.в. $|\xi_1-\xi_2|$ и $\min\{\xi_1,\xi_2\}$ совпадают.

3.19 С.в. ξ и η независимы и имеют показательное распределение с параметром $\lambda=1$. Найти п.р. с.в. $\xi+\eta$, $\xi-\eta$, $|\xi-\eta|$, ξ/η.

3.20 С.в. ξ и η независимы и имеют показательное распределение с параметром $\lambda>0$. Найти $f_{\xi+\eta}(z)$.

3.21 С.в. ξ и η независимы и имеют показательное распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно $(\lambda_2\ne\lambda_1)$. Найти п.р. с.в. $\xi+\eta$, $\xi-\eta$, ξ/η.

3.22 С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и каждая имеет показательное распределение с параметром $\lambda>0$. С.в. $\eta_1=\xi_1+2\xi_2$, $\eta_2=2\xi_1+\xi_2$.

Найти совместную п.р. с.в. η_1 и η_2.

3.23 С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и каждая имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найти совместную плотность распределения с.в. $\eta_1 = \xi_1$ и $\eta_2 = 2\xi_1 + 3\xi_2$.

3.24 Предположим, что с.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и каждая имеет нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$. Показать, что ф.р. с.в. $\eta = \frac{1}{2}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)$ определяется формулой $F_\eta(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ 1 - e^{-z}, & z > 0 \end{cases}$.

3.25 Найти п.р. $f_\eta(z)$ с.в. $\eta = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, если ξ_1 и ξ_2 независимы и каждая имеет нормальное распределение с параметрами $a = 0$, σ^2.

3.26 Найти п.р. $f_\eta(z)$ с.в. $\eta = \xi_1 + \xi_2$, если ξ_1 и ξ_2 независимы и $f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$, $f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$.

3.27 Независимые с.в. ξ_1 и ξ_2 имеют п.р. $f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$, $f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in [2,4] \\ 0, & x \notin [2,4] \end{cases}$. Найти п.р. $f_\eta(z)$ с.в. $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

3.28 Пусть ξ и η - независимые с.в. и $f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$, $f_\eta(y) = \begin{cases} 1/a, & y \in [0,a] \\ 0, & y \notin [0,a] \end{cases}$. Найти п.р. $f_{\xi+\eta}(z)$ и $f_{\xi-\eta}(z)$.

3.29 Найти $f_{\xi+\eta}(z)$, если ξ и η - независимы и $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & x \in [2,4] \\ 0, & x \notin [2,4] \end{cases}$, $f_\eta(y) = \begin{cases} 1/2, & y \in [1,3] \\ 0, & y \notin [1,3] \end{cases}$.

3.30 Совместная п.р. с.в. ξ и η имеет вид $f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} A(x+y), & x, y \in [0,1] \\ 0, & x, y - \text{другие} \end{cases}$. Найти A, $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$ и $f_\nu(z)$, если $\nu = \max\{\xi, \eta\}$.

3.31 Пусть $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\left(x^2+y^2\right)^3}, & x^2+y^2\ge 1\\ 0, & x^2+y^2<1\end{cases}$. Найти $f_R(r)$, если $R=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$.

3.32 С.в. ξ_1,ξ_2,ξ_3 независимы и равномерно распределены на [0,1]. Найти п.р. $\eta=\xi_1+\xi_2+\xi_3$.

3.33 Найти $f_{\xi+\eta}(z)$, если ξ и η - независимы и $P(\xi=0)=P(\xi=1)=\dfrac{1}{2}$, а $f_\eta(y)=\begin{cases}1, & y\in[0,1]\\ 0, & y\notin[0,1]\end{cases}$.

3.34 Пусть ξ и η - независимые с.в. с ф.р. $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ соответственно. Найти ф.р. следующих с.в.: $a)\max\{\xi,\eta\}$; $b)\min\{\xi,\eta\}$; $c)\max\{2\xi,\eta\}$; $d)\min\{\xi^3,\eta\}$.

3.35 Случайная точка (ξ_1,ξ_2) равномерно распределена внутри единичного квадрата. Найти закон распределения площади η прямоугольника со сторонами ξ_1,ξ_2.

3.36 Имеется две с.в. ξ_1 и ξ_2 с совместной п.р. $f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)$. Найти ф.р. $F_\eta(y)$ и п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta=\max\{\xi_1,\xi_2\}$.

3.37 Система двух с.в. (ξ_1,ξ_2) имеет совместную п.р. $f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)$. Найти ф.р. $F_\eta(y)$ и п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta=\min\{\xi_1,\xi_2\}$.

3.38 С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют показательное распределение с параметром $\lambda=1$. Найти плотности распределения с.в. η и ν, если $\eta=\max\{\xi_1,\xi_2\}$, $\nu=\min\{\xi_1,\xi_2\}$.

3.39 С.в $\xi_1,\dots,\xi_6$ независимы и имеют одну и ту же плотность распределения $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}$. Найти плотность распределения $\eta=\max\{\xi_1,\dots,\xi_6\}$.

3.40 С.в $\xi_1,\dots,\xi_n$ независимы и имеют показательное распределение с параметром λ. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. η, если: $a)\ \eta=\xi_1+\dots+\xi_n$; $b)\ \eta=\max\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$; $c)\ \eta=\min\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$.

3.41 С.в $\xi_1,\ldots,\xi_n$ независимы и имеют показательное распределение с параметром λ. Доказать, что с.в. $\eta_1=\max\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ и $\eta_2=\xi_1+\frac{\xi_2}{2}+\frac{\xi_3}{3}+\ldots+\frac{\xi_n}{n}$ одинаково распределены.

3.42 С.в $\xi_1,\ldots,\xi_n$ независимы и ξ_i имеет гамма-распределение с параметрами (λ,a_i), $i=\overline{1,n}$, т.е. $f_{\xi_i}(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^{a_i}}{\Gamma(a_i)}x^{a_i-1}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, $\lambda>0$, $a_i>0$. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta=\xi_1+\ldots+\xi_n$.

3.43 С.в $\xi_1,\ldots,\xi_n$ независимы и имеют показательное распределение с параметром $\lambda=1$. Найти п.р. $f_\eta(y)$ с.в. $\eta=\xi_1\left(\xi_1+\ldots+\xi_n\right)^{-1}$ $(n\ge 2)$.

3.44 Пусть ξ и η - независимые с.в., $F_\xi(x)$ - ф.р. с.в. ξ, а с.в. η равномерно распределена на отрезке $[a,b]$. Показать, что $f_{\xi+\eta}(x)=\frac{F_\xi(x-a)-F_\xi(x-b)}{b-a}$.

3.45 Пусть ξ_1,ξ_2,ξ_3 - независимые и равномерно распределенные на $\{-n,-n+1,\ldots,-1,0,1,\ldots,n-1,n\}$ с.в. Подберем многочлен $A(x)=\eta_0x^2+\eta_1x+\eta_2$ так, что $A(-1)=\xi_1$, $A(0)=\xi_2$, $A(1)=\xi_3$. Найти вероятность P того, что с.в. η_0,η_1,η_2 принимают целые значения.

3.46 С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и одинаково распределены с ф.р. $F(x)$ и п.р. $f(x)$. Найти ф.р. $F_{\eta_1\eta_2}(y_1,y_2)$ и п.р. $f_{\eta_1\eta_2}(y_1,y_2)$ системы с.в. (η_1,η_2), где $\eta_1=\min\{\xi_1,\xi_2\}$, $\eta_2=\max\{\xi_1,\xi_2\}$.

3.47 Пусть ξ_1 и ξ_2 независимы и равномерно распределены на [0,1]. Найти вероятность того, что действительны корни уравнения: $a)\,x^2+\xi_1x+\xi_2$; $b)\ x^2+\eta_2x+\eta_1$, где $\eta_1=\min\{\xi_1,\xi_2\}$, $\eta_2=\max\{\xi_1,\xi_2\}$.

3.48 Предположим, что с.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и каждая имеет показательное распределение с параметром λ. Показать, что: a) с.в. $\xi_1/(\xi_1+\xi_2)$ равномерно распределена на [0,1]; b) с.в. $\xi_1/(\xi_1+\xi_2)$ и $\xi_1+\xi_2$ независимы.

3.49 С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одну и ту же п.р. $f(x)$. Найти совместную п.р. $f_{\rho\theta}(r,t)$ полярных координат (ρ,θ) точки (ξ_1,ξ_2).

3.50 С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одну и ту же п.р., равную $f(x)$ при $x\geq 0$ и 0 при $x<0$ (ξ_1,ξ_2 - неотрицательные с.в.). Найти п.р. $f_{\eta_1\eta_2}(u,v)$ с.в. $\eta_1=\xi_1-\xi_2$ и $\eta_2=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$.

3.51 Некто получил два кредита, каждый из которых он должен вернуть по первому требованию. Требование вернуть кредит k (k=1,2) приходит в случайный момент времени τ_k, причем τ_k имеет показательное распределение с параметром λ_k. Требования приходят независимо. Найти распределение длительности случайного промежутка времени, в течение которого в распоряжении заемщика будут находиться оба кредита.

3.52 К переговорному пункту с двумя кабинами подошли три клиента. Первый и второй клиенты заняли соответственно кабины №1 и №2, а третий клиент остался ждать. Предположим, что времена τ_1, τ_2 и τ_3 разговоров клиентов независимы и имеют одно и то же показательное распределение с параметром λ. Найти: *a*)вероятность того, что третий клиент попадет в кабину №1; *b*) п.р. времени ожидания третьего клиента; *c*) вероятность того, что третий клиент закончит разговор раньше первого или второго клиента.

3.53 Пусть ξ, η и θ - независимые с.в., причем θ принимает значения 1 и 0 с вероятностями *p* и *q* соответственно, *p*+*q*=*1*, а ξ и η имеют ф.р. $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$. Найти ф.р. следующих с.в.: *a*) $\theta\xi+(1-\theta)\eta$; *b*) $\theta\xi+(1-\theta)\max\{\xi,\eta\}$; *c*) $\theta\xi+(1-\theta)\min\{\xi,\eta\}$.

3.54 Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots$ - последовательность с.в. с ф.р. $F_1(x),F_2(x),\ldots$ соответственно, а ν- положительная целочисленная с.в., не зависящая от с.в. $\xi_1,\xi_2,\ldots$. Положим $p_k=P(\nu=k),\ k=1,2,\ldots$. Найти ф.р. с.в. ξ_ν.

3.55 Построить пример непрерывной в точке (x_0,y_0) двумерной ф.р. $F_{\xi\eta}(x,y)$, для которой одномерные ф.р. $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ разрывны в точках x_0 и y_0 соответственно.

3.56 С.в. ξ_1 и ξ_2 имеют п.р. $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и ф.р. $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно. Случайный вектор $\eta=(\eta_1,\eta_2)$ имеет п.р. $f_{\eta_1\eta_2}(x_1,x_2)=f_1(x_1)\,f_2(x_2)[1+r(F_1(x_1),F_2(x_2))]$, где функция $r(u,v)$ удовлетворяет условиям $\min\limits_{0\leq u,v\leq 1} r(u,v)\geq -1,\ \int_0^1 r(u,v)dv=\int_0^1 r(u,v)du=0$.

Найти п.р. $f_{\eta_1}(y_1)$, $f_{\eta_2}(y_2)$.

3.57 Пусть $F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}0, & \min\{x,y\}\le 0\\ \min\{x,y\}, & 0<\min\{x,y\}\le 1\\ 1, & \min\{x,y\}>1\end{cases}$. Найти $P\left((\xi-1/2)^2+(\eta-1/2)^2\le 1/4\right)$.

3.58 С.в. $\xi_1,\ldots,\xi_n$ $(n\ge 2)$ независимы и одинаково распределены с ф.р. $F(x)$. Пусть $\xi_{(1)},\xi_{(n)}$ - соответственно первый и последний элементы вариационного ряда. Найти: *a*) ф.р. с.в. $\xi_{(1)}$; *b*) ф.р. с.в. $\xi_{(n)}$; *c*) совместную ф.р. системы с.в. $\left(\xi_{(1)},\xi_{(n)}\right)$.

3.59 С.в. $\xi_1,\ldots,\xi_n$ $(n\ge 2)$ независимы и каждая равномерно распределена на (*a*,*b*) (*b*>*a*). Найти п.р. с.в. $\eta=\min\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$.

3.60 По независимым одинаково распределенным с.в. $\xi_1,\ldots,\xi_n$ $(n\ge 2)$, имеющим ф.р. $F(x)$ и п.р. $f(x)$, построен вариационный ряд $\xi_{(1)}\le\xi_{(2)}\le\ldots\le\xi_{(n)}$. Найти: *a*) п.р. с.в. $\xi_{(m)}$; *b*)совместную п.р. системы $\left(\xi_{(k)},\xi_{(m)}\right)$, *k*<*m*.

3.61 С.в. $\xi_1,\ldots,\xi_k,\xi_{k+1}$ независимы и имеют одну и ту же непрерывную ф.р. $F(x)$. Пусть $\xi_{(1)}\le\xi_{(2)}\le\ldots\le\xi_{(k)}$ - вариационный ряд величин $\xi_1,\ldots,\xi_k$. Найти: $P\left(\xi_{k+1}\in[\xi_{(l)},\xi_{(l+1)}]\right)$, $l=1\ldots,k-1$, $P\left(\xi_{k+1}<\xi_{(1)}\right)$ и $P\left(\xi_{k+1}>\xi_{(k)}\right)$.

3.62 С.в. $\xi_1,\ldots,\xi_n$ $(n\ge 2)$ независимы и имеют одинаковое распределение с плотностью $f(x)$. Найти *n*- мерную п.р. $f_n(x_1,\ldots,x_n)$ членов вариационного ряда $\xi_{(1)}\le\xi_{(2)}\le\ldots\le\xi_{(n)}$.

3.63 Пусть на вероятностном пространстве (Ω,F,P) задана последовательность независимых с.в. $\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\ldots$, равномерно распределенных на (0,1). С.в. $\eta(\omega)=0$, если $\xi_1(\omega)<e^{-\lambda}$, $(\lambda>0)$; $\eta(\omega)=1$, если $\xi_1(\omega)\ge e^{-\lambda}$, а $\xi_1(\omega)\cdot\xi_2(\omega)<e^{-\lambda}$; $\eta(\omega)=2$, если $\xi_1(\omega)\ge e^{-\lambda}$, $\xi_1(\omega)\cdot\xi_2(\omega)\ge e^{-\lambda}$, а $\xi_1(\omega)\cdot\xi_2(\omega)\cdot\xi_3(\omega)<e^{-\lambda}$ и т.д. Найти закон распределения $\eta(\omega)$.

4. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

4.1 Пусть с.в. ξ и η независимы и $M\xi=1$, $M\eta=2$, $D\xi=1$, $D\eta=4$. Найти математические ожидания с.в.: $a)\ \xi^2+2\eta^2-\xi\eta-4\xi+\eta+4$; $b)\ (\xi+\eta+1)^2$.

4.2 Случайная точка (ξ_1,ξ_2) распределена равномерно внутри единичного квадрата. Найти $M\eta$ и $D\eta$ с.в. $\eta=\xi_1\xi_2$.

4.3 Случайная точка (ξ_1,ξ_2) распределена равномерно внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат. Найти $M\eta$ и $D\eta$ с.в. $\eta=\xi_1\xi_2$.

4.4 С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и равномерно распределены на отрезке [0,1]. Найти $M\,\eta_1$ и $M\,\eta_2$, где $\eta_1=|\xi_1-\xi_2|$, $\eta_2=(\xi_1-\xi_2)^2$.

4.5 С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение, причем $M\,\xi_1=M\,\xi_2=0$, $D\,\xi_1=\sigma_1^2$, $D\,\xi_2=\sigma_2^2$. Найти $M\eta$ и $D\eta$ с.в. $\eta=\xi_1-\xi_2$.

4.6 С.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и каждая имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2. Найти $M\eta$ с.в. $\eta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}|\xi_1+\xi_2|$.

4.7 С.в. $\xi_1,\ldots,\xi_n$ $(n\geq 2)$ независимы и каждая равномерно распределена на (a,b) $(b>a)$. Найти $M\eta$ с.в. $\eta=\min\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$.

4.8 С.в. ξ и η независимы. П.р. $f_\xi(x)$ с.в. ξ имеет вид
$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{a^2}x+\frac{1}{a}, & -a\leq x\leq 0\\ -\frac{1}{a^2}x+\frac{1}{a}, & 0<x\leq a \quad (a>0),\\ 0, & x\notin[-a,a]\end{cases}$$
а с.в. η имеет показательное распределение с параметром λ. Найти: $a)\ M(\eta-\xi^2)$; $b)\ M(\eta^2-\xi^2)$; $c)\ M\,(\eta+\xi)^2$.

4.9 На смежные стороны единичного квадрата случайным образом и независимо друг от друга падают точки ξ_1 и ξ_2. Каждая из них имеет в пределах соответствующей стороны равномерное распределение. Найти

$M\eta$, где η - квадрат расстояния между данными точками.

4.10 Условия предыдущей задачи изменены так, что точки ξ_1, ξ_2 падают не на смежные, а на противоположные стороны квадрата. Найти $M\eta$, где η - квадрат расстояния между ними.

4.11 Стороны прямоугольника *ABCD* параллельны осям координат. Найти математическое ожидание площади η прямоугольника *ABCD* в следующих случаях: *a*) координаты $(a_{1,} a_2)$ точки *A* фиксированы, $0 \le a_{1,} a_2 \le 1$, а точка *C* имеет равномерное распределение на диагонали единичного квадрата, соединяющей его вершины (0,0) и (1,1); *b*) точки *A* и *C* независимы, точка *A* равномерно распределена в единичном квадрате $[0,1] \times [0,1]$, а точка *C* имеет то же распределение, что и в случае *a*).

4.12 На отрезке длиной *l* наудачу выбраны две точки. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния между ними.

4.13 Из 100 карточек с числами 00, 01, …,98,99 наудачу вынимается одна. Пусть η_1, η_2 - соответственно сумма и произведение цифр на этой карточке. Найти $M\,\eta_1$, $M\,\eta_2$, $D\eta_1$ и $D\eta_2$.

4.14 Пусть вероятностное распределение *P* на плоскости R^2 таково, что если точки $\xi, \eta, \theta \in R^2$ независимы и имеют распределение *P*, то P{ξ, η, θ *лежат на одной прямой*}=0. Найти математическое ожидание угла $\xi\eta\theta$.

4.15 Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$- независимые с.в. с нулевыми математическими ожиданиями и конечными третьими моментами. Доказать, что $M\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n\right)^3 = M\,\xi_1^3 + \ldots + M\,\xi_n^3$.

4.16 Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - независимые с.в., каждая из которых равномерно распределена на [0,1]. Найти $M\,\eta_n$, где $\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \left|\xi_{i+1} - \xi_i\right|$.

4.17 Из 30 чисел {1,2,…,29,30} по схеме выбора с возвращением отбирается 10 чисел. Найти $M\xi$, где ξ - сумма выбранных чисел.

4.18 С.в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$- независимы и имеют одно и то же математическое ожидание *a* и одну и ту же дисперсию σ^2. Положим $\eta_{ij} = \xi_i - \xi_j$. Найти математическое ожидание и дисперсию с.в.:

$\theta_1 = \eta_{12} + \eta_{34} + \ldots + \eta_{2n-1,2n}$, $\qquad$ $\theta_2 = \eta_{12} + \eta_{23} + \ldots + \eta_{n,n+1}$,

$\theta_3 = \eta_{12} + \eta_{13} + \ldots + \eta_{1,n+1}$, $\qquad$ $\theta_4 = \eta_{12} + \eta_{23} + \ldots + \eta_{n-1,n} + \eta_{n,1}$.

4.19 Вычислить математическое ожидание и дисперсию определителя $\Delta = \left|\xi_{ij}\right|_{1 \le i,\, j \le n}$, элементы которого ξ_{ij} - независимые с.в. с

$M\,\xi_{ij}=0$ и $D\xi_{ij}=\sigma^2$.

4.20 С.в. $\xi_1,\ldots,\xi_n$- независимы и равномерно распределены на [0,1]. Найти $P\left(\xi_1+\ldots+\xi_n\le x\right)$ при $0\le x\le 1$.

4.21 С.в. $\xi_1,\xi_2,\ldots$- независимы и равномерно распределены на [0,1]. Положим $\nu=\min\{k:\xi_1+\ldots+\xi_k>1\}$. Найти $M\nu$.

4.22 Совместная п.р. с.в. ξ_1,ξ_2 имеет вид $f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)=\begin{cases}x_1+x_2, & 0\le x_1,x_2\le 1\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}$. Найти $M\,\xi_1$, $M\,\xi_2$, $D\,\xi_1$, $D\,\xi_2$, $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)$.

4.23 Пусть (ξ,η) - координаты случайной точки, имеющей равномерное распределение в области $D\subset R^2$. Найти коэффициент корреляции $\rho(\xi,\eta)$, если: $a)\,D-$ часть единичного круга, лежащего в первом квадранте: $x^2+y^2\le 1,\quad x,y\ge 0$; $b)\,D-$ треугольник: $x+y\le 1,\quad x,y\ge 0$.

4.24 Двумерная с.в. (ξ,η) подчинена закону распределения с плотностью $f(x,y)=\begin{cases}Axy, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$, где $D=\{(x,y):x+y\le 1,\,x\ge 0,\,y\ge 0\}$. Найти $A, M\xi, M\eta,\quad D\xi, D\eta,\ \operatorname{cov}(\xi,\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$.

4.25 С.в. ξ и η независимы и имеют одинаковое распределение с $M\xi=M\eta=a$ и $D\xi=D\eta=\sigma^2$. Найти $\rho(\xi_1,\eta_1)$, где $\xi_1=\alpha\xi+\beta\eta$, $\eta_1=\alpha\xi-\beta\eta$.

4.26 С.в. $\xi_1,\ldots,\xi_5$ независимы. $D\xi_i=\sigma^2$, $i=\overline{1,5}$. Найти коэффициент корреляции величин: $a)\,\xi_1+\xi_2$ и $\xi_3+\xi_4+\xi_5$; $b)\,\xi_1+\xi_2+\xi_3$ и $\xi_3+\xi_4+\xi_5$.

4.27 Какие из приведенных ниже матриц могут, а какие не могут быть ковариационными для случайного вектора $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$?

$$a)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\quad b)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix};\quad c)\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix};\quad d)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix};$$

$$e)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix};\quad f)\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix};\quad g)\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

4.28 С.в. ξ и η независимы. П.р. $f_{\xi}(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$, $f_{\eta}(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & y\in[0,2]\\ 0, & y\notin[0,2]\end{cases}$. Найти: $a)\, M(\xi+\eta)$; $b)\, M(\xi\eta)$; $c)\, \operatorname{cov}(\xi,\eta)$; $d)\, M(\xi^2-\eta^2)$; $e)\, D(\xi+\eta)$; $f)\, D(\xi-\eta)$.

4.29 С.в. ξ и η независимы. П.р. $f_{\xi}(x)=\begin{cases}\frac{2}{a^2}x, & x\in[0,a]\\ 0, & x\notin[0,a]\end{cases}$, $f_{\eta}(y)=\begin{cases}-\frac{2}{b^2}y+\frac{2}{b}, & y\in[0,b]\\ 0, & x\notin[0,b]\end{cases}$. Найти: $a)\, M(\xi+\eta)$; $b)\, M(\xi\eta)$; $c)\, \operatorname{cov}(\xi,\eta)$; $d)\, M(2\xi\eta-3\xi^2+\eta^2-1)$; $e)\, D(3\xi-6\eta+1)$.

4.30 П.р. двумерной с.в. (ξ,η) имеет вид $f_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}$. Указать $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$, $\rho(\xi,\eta)$, $f_{\xi}(x)$.

4.31 Двумерная с.в. (ξ,η) имеет нормальное распределение, причем $M\xi=-2$, $M\eta=3$, а матрица ковариации имеет вид $\begin{pmatrix}16 & 12\\ 12 & 25\end{pmatrix}$. Привести выражение для плотности распределения с.в. (ξ,η).

4.32 Производится стрельба по точечной (малоразмерной) цели, зона поражения которой представляет собой круг радиуса r с центром в начале координат. Случайная точка попадания (ξ,η) имеет нормальное распределение с параметрами $M\xi=M\eta=0$, $D\xi=D\eta=4r^2$, $\rho(\xi,\eta)=0$. Сколько независимых выстрелов нужно сделать, чтобы поразить цель с вероятностью $\geq 0{,}95$?

4.33 С.в. ξ_1,ξ_2,ξ_3 независимы и каждая имеет нормальное распределение, причем $M\xi_1=1$, $M\xi_2=2$, $M\xi_3=3$, $D\xi_1=1$, $D\xi_2=4$, $D\xi_3=9$. Найти закон распределения с.в. $\eta=2\xi_1+\xi_2+3\xi_3$.

4.34 Пусть ξ и η - с.в. с дисперсиями, равными соответственно 2 и 3. $\rho(\xi,\eta)=1$. Найти: $a)\, D(2\xi+\eta)$; $b)\, D(2\xi-\eta)$.

4.35 Пусть ξ - с.в. с конечной дисперсией, $\eta=15-\xi$, $\nu=(\xi+\eta)\xi$. Найти $\rho(\xi,\eta)$ и $\rho(\xi,\nu)$.

4.36 С.в. ξ_0,ξ_1,ξ_2,ξ_3 независимы и каждая имеет стандартное нормальное распределение. Пусть $\eta_j = 10 + \xi_j + \xi_{j-1}, \quad j = 1,2,3$. Построить ковариационную матрицу с.в. η_1, η_2, η_3.

4.37 Система случайных величин $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ имеет нормальное распределение, причем $M\xi_i = 0$, $D\xi_i = 10, \quad i = \overline{1,4}$. $M(\xi_1\xi_2) = M(\xi_3\xi_4) = 2, \quad M(\xi_1\xi_3) = M(\xi_1\xi_4) = M(\xi_2\xi_3) = M(\xi_2\xi_4) = 0$. Записать выражение для совместной плотности распределения с.в. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$.

4.38 При каких значениях x существует случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ с ковариационной матрицей: $a)\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$; $b)\begin{pmatrix} 1 & x & -x \\ x & 1 & x \\ -x & x & 1 \end{pmatrix}$?

4.39 Найти ковариационную матрицу случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, если: $a)\ \xi_1, \xi_2, \xi_3 -$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение; b) вектор ξ имеет равномерное распределение в кубе $\left\{(x_1, x_2, x_3) : \max\limits_{1 \le i \le 3} |x_i| \le \sqrt{3}\right\}$; c) вектор ξ с вероятностью $1/6$ принимает каждое из 6 значений $(0,0,\pm\sqrt{3})$, $(0,\pm\sqrt{3},0)$, $\xi = (\pm\sqrt{3},0,0)$.

4.40 Найти коэффициент корреляции между числом выпадений «единиц» и числом выпадений «шестерок» при n независимых бросаниях правильной игральной кости.

4.41 Пусть неотрицательные целочисленные с.в. $\xi_1, \ldots, \xi_s$ таковы, что $\xi_1 + \ldots + \xi_s = n$ и для любых $m_1, \ldots, m_s$, $m_i \ge 0$, $m_1 + \ldots + m_s = n$

$$P(\xi_1 = m_1, \ldots, \xi_s = m_s) = \frac{n!}{m_1! \cdots m_s!} p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s},$$

где $p_i \ge 0, \quad p_1 + \ldots + p_s = 1$. Найти $\rho(\xi_i, \xi_j), \quad i, j = 1,2,\ldots,s, \quad i \ne j$.

4.42 Пусть ξ - число комбинаций НН (00) в *n+1* испытании Бернулли с вероятностью успеха *p*. Найти $M\xi$ и $D\xi$. Сравнить их с математическим ожиданием *M* и дисперсией *D* числа появлений нуля в *n* испытаниях Бернулли, если вероятность появления исхода “0” равна q^2.

4.43 Пусть ξ - число комбинаций НУ (01) в *n+1* испытании Бернулли с вероятностью успеха *p*. Найти $M\xi$ и $D\xi$.

4.44 С.в. $\xi_1,\dots,\xi_n$, $\eta_1,\dots,\eta_n$ независимы. Положим $\xi=\xi_1+\ldots+\xi_n$, $\eta=\xi_1\eta_1+\ldots+\xi_n\eta_n$. Найти $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$, $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$, если $M\xi_k=a$, $D\xi_k=\sigma^2$, $P(\eta_k=1)=p$, $P(\eta_k=0)=q=1-p,\quad k=1,2,\dots,n$.

4.45 С.в. $\xi_1,\dots,\xi_{n+m}$, $(n\geq m)$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию. Найти коэффициент корреляции между с.в. $\eta_1=\xi_1+\ldots+\xi_n$ и $\eta_2=\xi_{m+1}+\ldots+\xi_{m+n}$.

4.46 Независимые с.в. $\xi_1,\dots,\xi_n$ положительны и имеют одинаковое невырожденное распределение. Обозначим $\eta_k=\xi_k/(\xi_1+\ldots+\xi_n)$, $k=1,2,\dots,n$. Найти $M\eta_k$, $\rho(\eta_k,\eta_l)$, $\rho(\eta_1+\ldots+\eta_k,\eta_1+\ldots+\eta_l)$.

4.47 Пусть $F_{\xi\eta}(x,y)$ – непрерывная ф.р. случайного вектора (ξ,η). Найти точку $(a,b)\in R^2$, для которой $M\left(|\xi-a|+|\eta-b|\right)=\min$.

4.48 Пусть ξ и η- с.в. с конечными моментами второго порядка. Доказать, что $M(\eta-a\xi-b)^2\geq M(\eta-a_0\xi-b_0)^2=(1-\rho^2)D\eta$, для любых вещественных a и b, где $a_0=\dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D\xi}$, $b_0=M\eta-a_0M\xi$, $\rho=\rho(\xi,\eta)$ и $a_0=0$, если $D\xi=0$.

4.49 С.в. ξ и η (возможно зависимые) обладают конечными дисперсиями: $D\xi=\sigma_1^2$, $D\eta=\sigma_2^2$. Указать пределы, в которых может изменяться $D(\xi+\eta)$.

4.50 С.в. $\xi_1,\dots,\xi_n$- независимы и $D\xi_i=\sigma_i^2>0,\ i=\overline{1,n}$. При каких $c_1,\dots,c_n$, удовлетворяющих условиям $c_i\geq 0,\quad c_1+\ldots+c_n=1$, с.в. $\eta_n=c_1\xi_1+\ldots+c_n\xi_n$ имеет минимальную дисперсию, и чему эта дисперсия равна?

4.51 Пусть ξ и η- две с.в. с $M\xi=M\eta=0$, $D\xi=D\eta=1$ и коэффициентом корреляции $\rho=\rho(\xi,\eta)$. Показать, что $M(\max(\xi^2,\eta^2))\leq 1+\sqrt{1-\rho^2}$.

4.52 Пусть ξ и η- одинаково распределенные с.в. Верно ли, что $M\dfrac{\xi}{\xi+\eta}=M\dfrac{\eta}{\xi+\eta}$?

4.53 С.в. ξ и η имеют равномерное распределение на [0,1]. Доказать, что при любом характере зависимости между ξ и η $M|\xi-\eta|\leq 1/2$.

4.54 Пусть ξ и η - независимые с.в., принимающие положительные значения. Доказать, что для любого $\alpha \ge 0$ $M\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\alpha} \ge \frac{M\,\xi^{\alpha}}{M\,\eta^{\alpha}}$.

4.55 Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - независимые одинаково распределенные положительные с.в. Доказать, что $M\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_k}{\xi_1 + \ldots + \xi_n}\right) = \frac{k}{n}$.

4.56 Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - с.в. с $M\,\xi_i = 0$ и $D\,\xi_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Доказать, что если $\rho(\xi_i, \xi_j) = c$ при любых $i \ne j$, $i, j = 1, \ldots, n$, то $c \ge -\frac{1}{n-1}$.

4.57 Пусть ξ и η - независимые с.в., принимающие неотрицательные целые значения и $M\xi < \infty$. Доказать, что $M\,\min(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \ge k) \cdot P(\eta \ge k)$·

5. УСЛОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

5.1 Случайный вектор (ξ, η) задан таблицей

η \ ξ	1	2
-1	0,15	0,05
0	0,3	0,05
1	0,35	0,1

Найти $P(\eta = y | \xi = 1)$, где $y \in \{-1, 0, 1\}$ и $M(\eta | \xi = 1)$.

5.2 Случайный вектор (ξ, η) задан таблицей

η \ ξ	2	5	8
0,4	0,15	0,3	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти частные законы распределений случайных величин ξ и η, $P(\eta = y | \xi = 5)$, где $y \in \{0{,}4; 0{,}8\}$ и $P(\xi = x | \eta = 0{,}8)$, где $x \in \{2, 5, 8\}$.

5.3 Случайный вектор (ξ, η) задан таблицей

η \ ξ	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Найти $P(\eta = y | \xi = 6)$, $y \in \{10, 14, 18\}$ и $P(\xi = x | \eta = 10)$, $x \in \{3, 6\}$.

5.4 Число ξ выбирается случайным образом из множества {1,2,3}. Затем из того же множества выбирается наудачу число η, большее или равное первому. Требуется: *a*) описать закон распределения случайного вектора (ξ, η) и определить зависимы или независимы ξ и η; *b*) найти коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta)$; *c*) найти $P(\xi = x | \eta = 3)$, $x = 1,2,3$; $M(\xi | \eta = 3)$.

5.5 Совместное распределение с.в. ξ и η задано таблицей

η \ ξ	1	2
-1	$1/6$	$1/8$
0	$1/4$	$1/6$
1	$1/6$	$1/8$

Найти $P(\eta = 1 | \xi = 1)$, $M(\eta | \xi = 1)$, $P(\xi = 1 | \eta \le 0)$, $M(\xi | \eta \le 0)$.

5.6 Совместное распределение с.в. ξ и η задано таблицей

η \ ξ	1	2
-1	0,10	0,10
0	0,25	0,05
1	0,30	0,00
2	0,15	0,05

Найти: *a*) ряды распределений ξ и η; *b*) условные законы распределений с.в. ξ при условии, что $\eta = 2$ и с.в. η при условии, что $\xi = 1$; *c*) $P\{\eta < \xi\}$; *d*) $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$ и $\rho(\xi, \eta)$.

5.7 Пусть ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 1$. Найти $P\{\xi \ge 2 | \xi \le 4\}$.

5.8 Дважды подбрасывается правильная игральная кость. Пусть ξ - число появлений шести очков, а η - число появлений четного числа очков. Найти $M(\xi | \eta = 2)$.

5.9 С.в. ξ и η независимы, причем $P(\xi = 1) = P(\eta = 1) = p$, $P(\xi = 0) = P(\eta = 0) = 1 - p$. Найти $M(\xi\eta | \xi = 1)$, $M(\xi + \eta | \xi = 0)$, $M(\xi | \xi + \eta = 1)$.

5.10 С.в. ξ и η независимы и одинаково распределены. Найти $M(\xi | \xi + \eta = z)$, если $P(\xi + \eta = z) > 0$.

5.11 Пусть с.в. ξ и η независимы, одинаково распределены, причем $P(\xi=k)=P(\eta=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda>0$, $k=0,1,\ldots$ Найти $P(\xi=j|\xi+\eta=n)$, $M(\xi|\xi+\eta=n)$.

5.12 Пусть с.в. ξ и η независимы, причем $P(\xi=k)=\dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}$, $\lambda_1>0$, $P(\eta=k)=\dfrac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}$, $\lambda_2>0$, $k=0,1,\ldots$ Найти $P(\xi=j|\xi+\eta=n)$, $M(\xi|\xi+\eta=n)$.

5.13 Пусть с.в. ξ и η независимы, причем $P(\xi=k)=P(\eta=k)=p\,q^{k-1}$, $0<p<1$, $q=1-p$, $k=1,2,\ldots$ Найти $P(\xi=j|\xi+\eta=n)$, $P(\xi=j|\xi=\eta)$.

5.14 Найти распределение целочисленной неотрицательной с.в. ξ, если: $a)\,P(0<\xi<\infty)=1$, $P(\xi=k+1|\xi>k)=p$, $k=0,1,\ldots$;

$b)\,P(\xi\ge 0)=1$, $P(\xi=k+1\,|\,\xi\in\{k,k+1\})=c<\dfrac{1}{2}$, $k=0,1,\ldots$;

$c)\,P(\xi\ge 0)=1$, $P(\xi=k+1\,|\,\xi\in\{k,k+1\})=\dfrac{r}{k+r+1}$, $r>0$, $k=0,1,\ldots$

5.15 С.в. ξ и η независимы, причем $P(\xi=k)=P(\eta=k)=p\,q^{k-1}$, $0<p<1$, $q=1-p$, $k=1,2,\ldots$ Найти: $a)\,P(\xi=\eta)$; $b)$ $P(\xi>\eta)$; $c)$ $P(\xi<\eta)$; $d)$ $P(\xi=k|\xi>\eta)$; e) $P(\xi=k|\xi<\eta)$; $f)\,P(\xi=k|\xi=\eta)$; $g)$ $P(\xi=k|\xi+\eta=l)$; $h)$ $M(\xi|\xi+\eta=l)$.

5.16 Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ - независимые с.в. с $P(\xi_i=1)=p$, $P(\xi_i=0)=1-p$, $i=1,\ldots,n$. Доказать, что для любого k $(0\le k\le n)$ и любого двоичного набора $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ такого, что $\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n=k$

$$P\left(\xi_1=\varepsilon_1,\ldots,\xi_n=\varepsilon_n\,\middle|\,\xi_1+\ldots+\xi_n=k\right)=\frac{1}{C_n^k}.$$

5.17 С.в. $\xi_1,\ldots,\xi_N$ независимы и распределены по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ соответственно. Найти: $a)$ $P(\xi_1+\ldots+\xi_k=m|\xi_1+\ldots+\xi_N=n)$; $b)$ $M(\xi_1+\ldots+\xi_k|\xi_1+\ldots+\xi_N=n)$.

5.18 Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_k$ - с.в. и $P(\xi_1=s)=C_n^s\,p^s\,q^{n-s}$, $q=1-p$, $0\le s\le n$, $P(\xi_2=m|\xi_1=s)=C_s^m\,p^m\,q^{s-m}$, $0\le m\le s,\ldots$, $P(\xi_k=l|\xi_{k-1}=r)=C_r^l\,p^l\,q^{r-l}$, $0\le l\le r$. Доказать, что

$P(\xi_k = u) = C_n^u (p^k)^u (1-p^k)^{n-u}$, $0 \le u \le n$.

5.19 Из урны, содержащей 2 черных, 4 красных и 2 белых шара, последовательно с возвращением извлекается (по одному) *n* шаров. Пусть ξ - число черных, а η - число красных шаров, появившихся в этих опытах. Найти $P(\xi = k | \xi + \eta = z)$.

5.20 Из урны, содержащей *M* белых и *N-M* черных шаров, сначала извлекается без возвращения выборка объема *n*, а затем из этой выборки извлекается без возвращения выборка объема $n_0 < n$. Найти закон распределения ξ - числа белых шаров во второй выборке.

5.21 В урне *N* шаров, среди которых *M* белых и *N-M* черных. Наудачу выбирается ν шаров, где ν - с.в., принимающая значения от 1 до N с равными вероятностями. Найти $M\xi$, где ξ - число белых шаров среди отобранных.

5.22 Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - независимые с.в., $M\xi_i = 0$, $D\xi_i = \sigma^2 < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$. Найти математическое ожидание и дисперсию с.в. $T_n = \xi_{\nu_1} + \xi_{\nu_2} + \ldots + \xi_{\nu_n}$, где $\nu_1, \nu_2, \ldots$ - независимые и не зависящие от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с.в., имеющие равномерное распределение на множестве {1,2,…,k}.

5.23 Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - независимые и одинаково распределенные с.в. с $M\xi_i = a > 0$, $D\xi_i = \sigma^2 < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$. С.в. ν не зависит от $\xi_1, \xi_2, \ldots$, принимает целые положительные значения, $M\nu = b, D\nu = \delta^2 < \infty$. Найти $M\tau$ и $D\tau$, где $\tau = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\nu$.

5.24 С.в. ξ с вероятностью p_1 имеет плотность $f_1(x)$, с вероятностью p_2 - плотность $f_2(x)$ ($p_1 + p_2 = 1$). Найти $f_\xi(x)$, $F_\xi(x)$, $M\xi$, $D\xi$.

5.25 С.в. ξ_1 и ξ_2 случайным образом и независимо друг от друга занимают с постоянной плотностью любое положение на периметре единичного квадрата. Найти $M\eta$, где η - квадрат расстояния между с.в. ξ_1 и ξ_2.

5.26 Совместная п.р. с.в. ξ и η имеет вид $f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1 - \dfrac{x}{2} \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}$. Найти $f_{\eta/\xi}(y/x)$.

5.27 Положение случайной точки (ξ, η) равновозможно в любом месте эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Требуется: *a*) найти $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$, $f_{\xi/\eta}(x/y)$, $f_{\eta/\xi}(y/x)$; *b*) исследовать зависимость и коррелированность с.в. ξ и η.

5.28 Положение случайной точки (ξ,η) равновозможно внутри круга $x^2+y^2=R^2$. Определить: *a*) $f_\xi(x)$, $F_\xi(x)$, $f_\eta(y)$, $F_\eta(y)$. Зависимы ли ξ и η? *b*) $f_{\xi/\eta}(x/y)$; *c*) являются ли с.в. ξ и η коррелированными?

5.29 Случайная точка (ξ,η) подчинена равномерному закону внутри квадрата со стороной *a*, диагонали которого совпадают с осями координат. Определить: *a*) $f_{\xi\eta}(x,y)$; *b*) $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$; *c*) $f_{\xi/\eta}(x/y)$, $f_{\eta/\xi}(y/x)$; *d*) $R=\|\mathrm{cov}(\cdot,\cdot)\|$; *e*) зависимость и коррелированность.

5.30 Случайный вектор (ξ,η,θ) равномерно распределен внутри сферы радиуса *R* с центром в начале координат. Найти $f_\theta(z)$ и $f_{\xi\eta/\theta}(x,y/z)$.

5.31 Совместная п.р. с.в. ξ и η имеет вид $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}Axy\,e^{-\left(x^2+y^2\right)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & x\le 0\ \text{или}\ y\le 0\end{cases}$. Определить *A*, $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$, $f_{\xi/\eta}(x/y)$, $f_{\eta/\xi}(y/x)$, моменты первого и второго порядка.

5.32 Совместная п.р. с.в. ξ и η имеет вид $f_{\xi\eta}(x,y)=Ae^{-4x^2-6xy-9y^2}$. Определить *A*, $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, $f_{\xi/\eta}(x/y)$, $f_{\eta/\xi}(y/x)$.

5.33 Случайный вектор (ξ,η) равномерно распределен внутри треугольника с вершинами (0,0), (0,8), (8,0). Найти $f_{\xi\eta}(x,y)$, $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$, $f_{\xi/\eta}(x/y)$, $f_{\eta/\xi}(y/x)$.

5.34 Совместная п.р. с.в. ξ и η имеет вид $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}A(x+y), & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0, & x,y-\text{другие}\end{cases}$. *a*) Определить константу *A* и $P(\xi+\eta<1)$. *b*) Найти $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$. Установить, зависимы или нет с.в. ξ и η. *c*) Найти $M\xi$, $M\eta$, $F_\xi(x)$, $f_{\xi/\eta}(x/y)$ и $P(2\xi<1|\xi+\eta=1)$.

5.35 Совместная п.р. с.в. ξ и η имеет вид

$f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}A(xy+y^2), & 0<x<2,\ 0<y<2\\ 0, & x,y-\textit{другие}\end{cases}$. Найти: *a*) константу A и $P(\xi+\eta<2)$; *b*) $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$, $\rho(\xi,\eta)$, $f_{\xi/\eta}(x/y)$, $f_{\eta/\xi}(y/x)$.

5.36 С.в. ξ и η независимы и одинаково распределены. Найти условную п.р. $f_{\xi/\xi+\eta}(x/z)$ и условную дисперсию $D(\xi|\xi+\eta=z)$ в следующих случаях: *a*) $f_{\xi}(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$; *b*) $f_{\xi}(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$; *c*) $f_{\xi}(x)=\begin{cases}\lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$.

5.37 С.в. ξ_1,ξ_2,ξ_3 независимы и каждая имеет стандартное нормальное распределение. Найти $f_{\eta}(y)$, где $\eta=\dfrac{\xi_1+\xi_2\xi_3}{\sqrt{1+\xi_3^2}}$.

5.38 Совместная п.р. с.в. ξ и η имеет вид $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}12x, & 0<y<2x\le 1\\ 0, & x,y-\textit{другие}\end{cases}$. Найти $P(\eta\le 1/3|\xi=1/2)$.

5.39 Измеряется некоторая физическая величина ξ, равномерно распределенная на отрезке [-3,3]. Процесс измерения производится в условиях воздействия аддитивной, независимой от ξ помехи η, распределенной по нормальному закону с $M\xi=0$, $\sigma_{\eta}=2$. Таким образом, результат измерения может рассматриваться как значение с.в. $\nu=\xi+\eta$. Найти $P(0\le\xi<2|\nu=2)$.

5.40 Имеется с.в. η, распределенная по показательному закону с параметром λ. С.в. ξ при заданном значении с.в. $\eta=y$ распределена по закону Пуассона с параметром *y*. Найти безусловный закон распределения с.в. ξ.

5.41 На космическом корабле установлен счетчик Гейгера для определения числа космических частиц, попадающих в него за некоторый интервал времени *T*. Поток космических частиц – пуассоновский с интенсивностью λ, каждая частица регистрируется счетчиком с вероятностью *p*. Счетчик включается на случайное время *T*, распределенное по показательному закону с параметром μ. С.в. ξ - число зарегистрированных частиц. Найти закон распределения и числовые характеристики $M\xi$ и $D\xi$ с.в. ξ.

ОТВЕТЫ

1.1

(ξ,η)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
p	0,1	0,3	0,3	0,3

1.2

(ξ,η)	(5,5)	(5,2)	(2,5)	(2,2)
p	$28/91$	$24/91$	$24/91$	$15/91$

1.3

(ξ,η)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
p	$14/33$	$8/33$	$8/33$	$3/33$

1.4 $P(\xi=k,\eta=n)=C_2^k\,p_1^k(1-p_1)^{2-k}\cdot C_2^n\,p_2^n(1-p_2)^{2-n},\quad k,n=0,1,2.$

1.5

(ξ,η)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
p	0	$1/2$	$1/4$	$1/4$

1.6

ξ	-1	1
p	$1/2$	$1/2$

η	-1	0	1
p	$1/3$	$1/4$	$5/12$

1.7

η \ ξ	1	2	3
1	$2/36$	$4/36$	$6/36$
2	$3/36$	$6/36$	$9/36$
3	$1/36$	$2/36$	$3/36$

1.8 $$F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x\le -1 \quad \text{или} \quad y\le 0\\ 0{,}1, & -1<x\le 0,\ 0<y\le 1\\ 0{,}25, & -1<x\le 0,\ y>1 \quad \text{или} \quad 0<x\le 1,\ 0<y\le 1\\ 0{,}45, & x>1,\ 0<y\le 1\\ 0{,}65, & 0<x\le 1,\ y>1\\ 1, & x>1,\ y>1\end{cases};$$

ξ_1	-1	0	1
p	0,25	0,4	0,35

ξ_2	0	1
p	0,45	0,55

1.9 *a=1/2;* $f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\sin x+\cos x), & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & x<0 \text{ или } x>\frac{\pi}{2}\end{cases};$

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0 \quad \text{или} \quad y\le 0,\\ \frac{1}{2}(\sin x+\sin y-\sin(x+y)), & 0\le x,y\le\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}(\sin x+1-\cos x), & 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ y>\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}(\sin y+1-\cos y), & x>\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2},\\ 1\quad, & x>\frac{\pi}{2},\ y>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

1.10 $f_1(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0\quad, & x\le 0\end{cases}, \quad \lambda>0.$

1.11 $f_1(x)=\begin{cases}\frac{5x}{48}(8-x^3), & 0<x<2\\ 0, & x\notin(0,2)\end{cases};\quad f_2(y)=\begin{cases}\frac{5}{32}y^4, & 0<y<2\\ 0, & y\notin(0,2)\end{cases}.$

1.12 k=10. **1.13** *a*) $A=\sqrt{3}$; *b*) $F(x,y)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\, y\right);$

c) $P(0\le\xi_1\le 1,\ 0\le\xi_2\le 1)=\frac{1}{24}.$ **1.14** $\frac{3}{128}.$ **1.15** $A=\frac{2}{\pi}.$

1.16 $P\left(|\xi|\le\frac{3}{4},\ |\eta|\le\frac{3}{4}\right)=1-\frac{1}{\pi}\left(4arctg\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{\sqrt{63}}{4}\right)\approx 0{,}7114.$

1.17 $f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0,2]\\ 1-\frac{x}{2}, & x\in[0,2]\end{cases}.$ **1.18** *a*) *A*=1; *b*) $f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0,1]\\ x+\frac{1}{2}, & x\in[0,1]\end{cases},$

$$f_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\notin[0,1]\\ y+\dfrac{1}{2}, & y\in[0,1]\end{cases};\qquad c)\ F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}0, & x,y\le 0\\ \dfrac{xy}{2}(x+y), & 0<x,y\le 1\\ \dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y}{2}, & x>1,\ 0<y\le 1\\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}, & 0<x\le 1,\ y>1\\ 1, & x,y>1\end{cases}.$$

1.19 $a^{-3}-a^{-6}-a^{-9}+a^{-12}$. **1.20** $F_{\xi\eta}(a,c)$-$F_{\xi\eta}(a,b)$.

1.21 $a)$ $P\{\xi>\eta\}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{x} f(u,v)dvdu$; $b)$ $P\{\xi>|\eta|\}=\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{-x}^{x} f(u,v)dvdu$;

$c)$ $P\{|\xi|>\eta\}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{|x|} f(u,v)dvdu$; $d)$ $P\{\eta-\xi>1\}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{x+1}^{+\infty} f(u,v)dvdu$.

1.22 $F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}0, & y\le 0 \quad или \quad y>0,\ x\le-\sqrt{y}\\ \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_\xi(x)dx, & y>0,\ x>\sqrt{y}\\ \int\limits_{-\sqrt{y}}^{x} f_\xi(t)dt, & y>0,\ -\sqrt{y}<x\le\sqrt{y}\end{cases}$. **1.23** *1/8*.

1.24 $a)$ $f_3(x)=\begin{cases}3(R^2-x^2)/(4R^3), & |x|\le R\\ 0, & |x|>R\end{cases}$;

$b)$ $f(x,y)=\begin{cases}3\sqrt{R^2-x^2-y^2}/(2\pi R^3), & x^2+y^2\le R^2\\ 0, & x^2+y^2>R^2\end{cases}$.

1.25 $f(x,y,z)=\begin{cases}abc\,e^{-(ax+by+cz)}, & x,y.z>0\\ 0, & в\ противном\ случае\end{cases}$.

1.26 $a)$ $F_{\xi+\eta}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$, $f_{\xi+\eta}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\le x\le 2\\ 0, & x\notin[0,2]\end{cases}$;

$b)$ $F_{\xi+\eta}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x\left(1+\ln\dfrac{1}{x}\right), & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$ $\qquad f_{\xi+\eta}(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{x}, & 0<x\le 1\\ 0, & x\notin(0,1]\end{cases};$

$c)$ $F_{\xi+\eta}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0<x\le 1\\ 1-\dfrac{1}{2}(2-x)^2, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases};$ $\qquad f_{\xi+\eta}(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\\ 0, & x\notin[0,2]\end{cases}.$

2.1 $a)$ $\sum p_k^2$, где $p_k=P(\xi=x_k)$; $\qquad b)$ 0.

2.2 $P(\xi=k,\eta=n)=\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$, $\quad k=\overline{1,4};\quad n=1,2,\dots$. ξ и η независимы.

2.3 $f_\xi(x)=f_\eta(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}, & |x|\le R\\ 0, & |x|>R\end{cases};$

$$F_\xi(x)=F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\le -R\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{x}{R}+\dfrac{x}{R}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{R^2}}\right), & -R<x\le R\\ 1, & x>R\end{cases}$$; с.в. ξ и η зависимы.

2.4 $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}, & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases},$

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0 \ \text{ или } \ y\le 0\\ \dfrac{xy}{a^2}, & 0<x\le a,\ 0<y\le a\\ \dfrac{y}{a}, & x>a,\ 0<y\le a\\ \dfrac{x}{a}, & 0<x\le a,\ y>a\\ 1, & x>a,\ y>a\end{cases},\qquad f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & 0\le x\le a\\ 0, & x\notin[0,a]\end{cases},$$

$f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & 0\le y\le a\\ 0, & y\notin[0,a]\end{cases}$. С.в. ξ и η независимы. **2.5** *a*) $A=\frac{1}{\pi^2}$; *b*) $f_\xi(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $f_\eta(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$; *c*) 1/4. С.в. ξ и η независимы.

2.6 $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}, & y\in[0,1]\\ 0, & y\notin[0,1]\end{cases}$; $F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \frac{y}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-t^2}dt, & 0<y\le 1\\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-t^2}dt, & y>1\end{cases}$.

2.7 $C=\sqrt[3]{2}$. **2.8** 1/4 . **2.9** $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимы. **2.10** $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимы. **2.11** $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ зависимы. **2.12** $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ зависимы. **2.13** $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимы. **2.14** $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимы. **2.15** $f(x,y)=\begin{cases}e^{-x}, & 0\le y\le 1,\ x>0\\ 0 & ,\ x,y\ -\text{другие}\end{cases}$. **2.16** $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимы.

2.17 $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимы. **2.18** $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{12}, & 2\le x\le 4,\ 2\le y\le 4\\ 0 & ,\ x,y\ -\text{другие}\end{cases}$.

2.19 $f(2{,}2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}e^{-3}$. **2.20** $\approx 0{,}27$. **2.21** 0,5. **2.22** $R=\sigma\sqrt{-2\ln(0{,}003)}\approx 3{,}4\sigma$. **2.23** $F_{\xi\eta}(x,y)=F_\xi(x)\cdot F_\eta(y)$, где $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f_\xi(t)dt$, $F_\eta(y)=\sum\limits_{\{k:\, y_k<y\}}p_k$. **2.24** Нет. (Пусть ξ принимает значения ±1 с вероятностью 1/2 и $\eta=\xi$). **2.25** Нет. (Пусть ξ не равна с вероятностью единица постоянной, $\eta=\xi,\quad \nu=-\xi$). **2.27** *a*) нет; *b*) да; *c*) да. **2.29** Указ. $\xi(1)=\xi(2)=0,\quad \xi(3)=\xi(4)=1,$ $\eta(1)=\eta(3)=0,\quad \eta(2)=\xi(4)=1.$ **2.30** Указ. $p(\xi(\omega_1)=a)=p(\{\omega_1\})=p(\eta(\omega_1)=b)$ и $p(\xi(\omega_1)=a,\eta(\omega_1)=b)=p(\{\omega_1\})$. **2.31** Указ. Пусть k – число различных событий из F, вероятности которых отличны от 0 и 1. Очевидно, $k\le n-2$. Предположим, что ни одна из с.в. $\xi_1,\dots,\xi_{n-1}$ не равна с вероятностью единица постоянной. Тогда найдутся числа $a_1,\dots,a_{n-1}$ такие, что $0<P(\xi_i=a_i)<1,\quad i=\overline{1,n-1}$. Обозначим $A_i=\{\xi_i=a_i\}$. Имеем n-1 событие, вероятности которых отличны от 0 и 1. Следовательно, по крайней мере два из них совпадают: $A_i = A_j$, $i \neq j$. Но тогда $P(A_i) = P(A_i A_j) = P(\xi_i = a_i, \xi_j = a_j) = P(\xi_i = a_i) \cdot P(\xi_j = a_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) = (P(A_i))^2$. Противоречие. **2.32** Нет (σ-алгебра, порожденная с.в. $\xi(\omega)$, совпадает с F и, следовательно, содержит σ-алгебру, порожденную любой другой с.в.). **2.35** *a*) да ($\eta = -\xi$); *b*) да ($\eta = \frac{1}{\xi}$); *c*) да (ξ принимает значения ± 1, $\eta = -\xi$. Тогда $\xi + \eta = 0$, $\xi\eta$=-1). **2.36** Нет. Указ. $\Omega = \{1,2,3,4\}$, F-совокупность всех подмножеств Ω, $p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = 1/4$. Положим $\xi(1) = \xi(3) = 0,\ \xi(2) = \xi(4) = 1,\ \ \eta(1) = \eta(2) = 1,\ \eta(3) = \xi(4) = 0$, $\nu(1) = \nu(4) = 0,\ \ \nu(2) = \nu(3) = 1$. Очевидно ξ, η и ν попарно независимы, но $P(\xi = 1, \eta + \nu = 2) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(\xi = 1) \cdot P(\eta + \nu = 2)$. **2.37** Да; вообще говоря, изменится.

3.1 *a*)

η_1	-2	-1	0	1	2
p	$1/8$	$1/12$	$1/2$	$1/6$	$1/8$

b)

η_2	0	1
p	$1/4$	$3/4$

c) $P(\eta_1 = 0, \eta_2 = 1) = 1/2$.

3.2

$\xi + \eta$	2	3	4	5	6
p	0,02	0,09	0,26	0,33	0,30

3.3

$\xi + \eta$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	$1/24$	$1/12$	$1/8$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/8$	$1/12$	$1/24$

3.4 $P(\eta_1 = k) = 0{,}1\ \ (0 \leq k \leq 9)$; $P(\eta_2 = 0) = 0{,}55$, $P(\eta_2 = 1) = 0{,}45$. С.в. η_1 и η_2 зависимы. **3.5** Зависимы. **3.6** $P(\nu \leq k) = \frac{2k}{N} - \frac{k^2}{N^2}$, $k = 1,2,\ldots,N$; $P(\mu \leq k) = \frac{k^2}{N^2}$, $k = 1,2,\ldots,N$; $P(\lambda = 0) = \frac{1}{N}$, $P(\lambda = m) = \frac{2(N-m)}{N^2}$, $m = 1,2,\ldots,N-1$. **3.7** $P(\xi + \eta = m) = C_{n_1+n_2}^{m} p^m (1-p)^{n_1+n_2-m}$,

$m=0,1,\ldots,n_1+n_2$. **3.8** $P(\xi+\eta=n)=\begin{cases}(1-a)(1-b)\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, & a\neq b\\ (n+1)(1-a)^2a^n, & a=b\end{cases}$,

$n=0,1,\ldots$.

3.9 Указ. Неравенство $P(\xi\le n)>P(\eta\le n)$ равносильно неравенству $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{\lambda_2}>\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\lambda_2^k}{k!}e^{\lambda_1}$. Используя разложение $e^x=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{x^i}{i!}$, последнее неравенство можно записать в виде $\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}\dfrac{\lambda_1^k}{k!}\dfrac{\lambda_2^i}{i!}>\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}\dfrac{\lambda_2^k}{k!}\dfrac{\lambda_1^i}{i!}$. Но при $i>k$ $\lambda_1^k\lambda_2^i-\lambda_2^k\lambda_1^i=(\lambda_1\lambda_2)^k\left(\lambda_2^{i-k}-\lambda_1^{i-k}\right)>0$. **3.10** $P(\eta=1)=\dfrac{1}{2}\left[1+(p-q)^n\right]$, $P(\eta=-1)=\dfrac{1}{2}\left[1-(p-q)^n\right]$. **3.12** *a*) $M(N-M)^{[k]}/N^{[k+1]}$ $\left([n]^k=n(n-1)\ldots(n-k+1)\right)$; *b*) $M^{[2]}(N-M)^{[k+l]}/N^{[k+l+2]}$; *c*) $M!(N-M)!/N!$, если $k_1+k_2+\ldots+k_{M+1}=N-M$ и нулю в противном случае.

3.13 *a*) $f_\eta(y)=\begin{cases}1-|y-1|, & y\in(0,2)\\ 0, & y\notin(0,2)\end{cases}$; *b*) $f_\eta(y)=\begin{cases}1-|y|, & y\in(-1,1)\\ 0, & y\notin(-1,1)\end{cases}$;

c) $f_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{1}{2}, & 0<y\le 1\\ \dfrac{1}{2y^2}, & y>1\end{cases}$; *d*) $f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\left(1+|1-2y|\right)^2}, & y\in(0,1)\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}$.

3.14 $a)\ f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\left(1-\left|\dfrac{y}{a}-1\right|\right), & y\in(0,2a)\\ 0, & y\notin(0,2a)\end{cases}$; $\quad b)\ f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\left(1-\left|\dfrac{y}{a}\right|\right), & |y|<a\\ 0, & |y|\ge a\end{cases}$;

$c)\ f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}\ln\dfrac{a^2}{y}, & y\in(0,a^2)\\ 0, & y\notin(0,a^2)\end{cases}$; $\quad d)\ f_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{1}{2}, & 0<y\le 1\\ \dfrac{1}{2y^2}, & y>1\end{cases}$.

3.15 $\quad 1)\ f_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le 2a \quad \textit{или} \quad y\ge 2b\\ \dfrac{1}{(b-a)^2}(y-2a), & 2a<y\le a+b\\ \dfrac{2b-y}{(b-a)^2}, & a+b<y<2b\end{cases}$;

$2)\ f_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le a-b \quad \textit{или} \quad y\ge b-a\\ \dfrac{1}{(b-a)^2}(y+b-a), & a-b<y\le 0\\ \dfrac{b-a-y}{(b-a)^2}, & 0<y<b-a\end{cases}$;

3) $$f_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le a^2 \quad \text{или} \quad y\ge b^2\\ \dfrac{\ln y-2\ln a}{(b-a)^2}, & a^2<y\le ab\\ \dfrac{2\ln b-\ln y}{(b-a)^2}, & ab<y<b^2\end{cases};$$

4) $$f_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le \dfrac{a}{b} \quad \text{или} \quad y\ge \dfrac{b}{a}\\ \dfrac{1}{2(b-a)^2}\left(b^2-\dfrac{a^2}{y^2}\right), & \dfrac{a}{b}<y\le 1\\ \dfrac{1}{2(b-a)^2}\left(\dfrac{b^2}{y^2}-a^2\right), & 1<y<\dfrac{b}{a}\end{cases}.$$

3.16 $$f_{\xi+\eta}(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\min\left\{1;\ \dfrac{3}{2}-\left|z-\dfrac{3}{2}\right|\right\}, & z\in[0,3]\\ 0, & z\notin[0,3]\end{cases}.$$

3.17 $$f_{\xi+\eta}(z)=\begin{cases}0, & z\le -1 \quad \text{или} \quad z>3\\ \dfrac{1+z}{4}, & -1<z\le 1\\ \dfrac{3-z}{4}, & 1<z\le 3\end{cases}.$$

3.18 $$P\left(|\xi_1-\xi_2|<y\right)=P\left(\min\{\xi_1,\xi_2\}<y\right)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ 1-\left(1-\dfrac{y}{a}\right)^2, & 0<y\le a\\ 1, & y>a\end{cases}.$$

3.19 $f_{\xi+\eta}(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ z\,e^{-z}, & z>0\end{cases}$; $\quad f_{\xi-\eta}(z)=\frac{1}{2}e^{-|z|},\quad z\in R$;

$f_{|\xi-\eta|}(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ e^{-z}, & z>0\end{cases}$; $\quad f_{\xi/\eta}(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{1}{(z+1)^2}, & z>0\end{cases}$.

3.20 $f_{\xi+\eta}(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \lambda^2 z\,e^{-\lambda z}, & z>0\end{cases}$.

3.21 $f_{\xi+\eta}(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_1 z}\left(e^{(\lambda_1-\lambda_2)z}-1\right), & z>0\end{cases}$;

$f_{\xi-\eta}(z)=\begin{cases}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}e^{\lambda_2 z}, & z\le 0\\ \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\lambda_1 z}, & z>0\end{cases}$; $\quad f_{\xi/\eta}(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 z+\lambda_2)^2}, & z>0\end{cases}$.

3.22 $f_{\eta_1\eta_2}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3}\lambda^2 e^{-\frac{1}{3}\lambda(x+y)}, & \frac{1}{2}x<y<2x\\ 0, & \textit{в противном случае}\end{cases}$.

3.23 $f_{\eta_1\eta_2}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}(x+y)}, & 0<2x<y\\ 0, & \textit{в противном случае}\end{cases}$.

3.25 $f_{\eta}(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0\end{cases}$ (Распределение Рэлея).

3.26 $f_{\eta}(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 1-e^{-z}, & 0<z\le 1\\ e^{-(z-1)}-e^{-z}, & z>1\end{cases}$.

3.27 $$f_\eta(z)=\frac{1}{2}\left(1-e^{8-4z}\right)I_{[2,4]}(z)+\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)e^{8-4z}I_{[4,\infty]}(z),$$ где

$$I_A(z)=\begin{cases}1, & z\in A\\ 0, & z\notin A\end{cases}.$$

3.28 $$f_{\xi+\eta}(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{1}{a}(1-e^{-\lambda z}), & 0<z\le a\\ \frac{1}{a}(e^{a\lambda}-1)e^{-\lambda z}, & z>a\end{cases},$$

$$f_{\xi-\eta}(z)=\begin{cases}0, & z\le -a\\ \frac{1}{a}(1-e^{-\lambda(z+a)}), & -a<z\le 0\\ \frac{1}{a}(1-e^{-a\lambda})e^{-\lambda z}, & z>0\end{cases}.$$

3.29 $$f_{\xi+\eta}(z)=\begin{cases}0, & z\notin[3,7]\\ \frac{1}{24}(z-3)(z+1), & 3\le z<5\\ \frac{1}{24}(7-z)(z+1), & 5\le z\le 7\end{cases}.$$

3.30 $A=1$,

$$f_\xi(x)=f_\eta(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{2}, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases},\qquad f_\nu(z)=\begin{cases}3z^2, & z\in[0,1]\\ 0, & z\notin[0,1]\end{cases}.$$

3.31 $$f_R(r)=\begin{cases}4r^{-5}, & r\ge 1\\ 0, & r<1\end{cases}.$$

3.32 $$f_\eta(z)=\begin{cases}0, & z\notin[0,3]\\ \frac{1}{2}z^2, & 0\le z<1\\ \frac{3}{4}-\left(z-\frac{3}{2}\right)^2, & 1\le z<2\\ \frac{1}{2}\left(z-3\right)^2, & 2\le z\le 3\end{cases}.$$

3.33 $$f_{\xi+\eta}(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & z\in[0,2]\\ 0, & z\notin[0,2]\end{cases}.$$

Указ. $P(\xi+\eta<z)=P(\xi=0,\eta<z)+P(\xi=1,\eta<z-1)$. **3.34** *a*) $F_{\xi}(x)\cdot F_{\eta}(x)$; *b*) $1-(1-F_{\xi}(x))(1-F_{\eta}(x))$; *c*) $F_{\xi}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot F_{\eta}(x)$; *d*) $1-\left(1-F_{\xi}\left(\sqrt[3]{x}\right)\right)(1-F_{\eta}(x))$.

3.35 $f_{\eta}(y)=\begin{cases}-\ln y, & y\in(0,1)\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}$.

3.36 $F_{\eta}(y)=F_{\xi_1\xi_2}(y,y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_1\xi_2}(u,v)\,du\,dv$,

$f_{\eta}(y)=\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_1\xi_2}(y,x)dx+\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_1\xi_2}(x,y)dx$.

3.37 $F_{\eta}(y)=F_{\xi_1}(y)+F_{\xi_2}(y)-F_{\xi_1\xi_2}(y,y)$,

$f_{\eta}(y)=f_{\xi_1}(y)+f_{\xi_2}(y)-\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_1\xi_2}(y,x)dx-\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_1\xi_2}(x,y)dx$.

3.38 $f_{\eta}(y)=\begin{cases}2e^{-y}\left(1-e^{-y}\right), & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$, $\quad f_{\nu}(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$.

3.39 $f_{\eta}(y)=\begin{cases}12y^{11}, & 0<y<1\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}$. **3.40** *a*) $f_{\eta}(y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-\lambda y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$;

b) $f_{\eta}(y)=\begin{cases}\lambda n e^{-\lambda y}\left(1-e^{-\lambda y}\right)^{n-1}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$; *c*) $f_{\eta}(y)=\begin{cases}\lambda n e^{-\lambda n y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$.

3.41 Указ. $f_{\eta_1}(y)=\begin{cases}\lambda n e^{-\lambda y}\left(1-e^{-\lambda y}\right)^{n-1}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$ (см. задачу 3.40). Для η_2 воспользоваться индукцией, заметив, что для $\nu=\dfrac{\xi_k}{k}$

$f_{\nu}(x)=k\,f_{\xi_k}(kx)=k\lambda e^{-k\lambda x},\quad x>0,\quad k=\overline{1,n}$.

3.42 $f_{\eta}(y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^b}{\Gamma(b)}y^{b-1}e^{-\lambda y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$, где $b=a_1+\ldots+a_n$.

3.43 $f_{\eta}(y)=\begin{cases}(n-1)(1-y)^{n-2}, & y\in[0,1]\\ 0, & y\notin[0,1]\end{cases}$. Указ. Воспользоваться формулой

$$P(\eta < x) = P\left(\xi_1 < \frac{x}{1-x}\left(\xi_2 + \ldots + \xi_n\right)\right) = \int_0^\infty P\left(\xi_1 < \frac{xu}{1-x}\right) f_{\xi_2+\ldots+\xi_n}(u)du =$$

$$= \int_0^\infty \left[1 - e^{-\frac{xu}{1-x}}\right] \frac{1}{(n-2)!} u^{n-2} e^{-u} du = 1 - (1-x)^{n-1}, \quad 0 \le x \le 1.$$

3.44 Указ. $P(\xi + \eta < x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi < u) f_\eta(x-u)du = \frac{1}{b-a} \int_{x-b}^{x-a} F_\xi(u)du$.

3.45 $P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2n+1)^2}$. Указ. Из системы $\begin{cases} \xi_1 = \eta_0 - \eta_1 + \eta_2 \\ \xi_2 = \eta_2 \\ \xi_3 = \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \eta_0 = \dfrac{\xi_3 + \xi_1}{2} - \xi_2 \\ \eta_1 = \dfrac{\xi_3 - \xi_1}{2} \\ \eta_2 = \xi_2 \end{cases}$. Следовательно, $P = P(\xi_1 + \xi_3 - \textit{четное число})$.

3.46 $F_{\eta_1\eta_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} F^2(y_2) - \left(F(y_2) - F(y_1)\right)^2, & y_1 \le y_2 \\ F^2(y_2), & y_1 > y_2 \end{cases}$;

$f_{\eta_1\eta_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} 2f(y_1)f(y_2), & y_1 \le y_2 \\ 0, & y_1 > y_2 \end{cases}$. **3.47** *a*) $\frac{1}{12}$; *b*) $\frac{1}{6}$. Указ. к *b*): Из предыдущей задачи имеем $f_{\eta_1\eta_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} 2, & 0 \le y_1 \le y_2 \le 1 \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}$ и

$P(\eta_2^2 - 4\eta_1 \ge 0) = \int_0^1 \int_0^{v^2/4} 2dudv = \int_0^1 \frac{1}{2} v^2 dv = \frac{1}{6}$. **3.48** Указ. Положим $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1 / (\xi_1 + \xi_2)$. Якобиан преобразования $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 / (x_1 + x_2) \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = y_1 y_2 \\ x_2 = y_1 - y_1 y_2 \end{cases}$ равен $J = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1 - y_2 & -y_1 \end{vmatrix} = -y_1$. Поэтому

$$f_{\eta_1\eta_2}(y_1, y_2) = \lambda e^{-\lambda y_1 y_2} \cdot \lambda e^{-\lambda(y_1 - y_1 y_2)} \cdot y_1 = a^2 y_1 e^{-a y_1}, \; y_1 > 0, \; 0 < y_2 < 1.$$

3.49 $f_{\rho\theta}(r,t)=\begin{cases} rf(r\cos t)f(r\sin t), & r\ge 0,\ 0\le t\le 2\pi \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}.$

3.50 $f_{\eta_1\eta_2}(u,v)=\begin{cases} \dfrac{v}{\sqrt{2v^2-u^2}}\, f\left(\dfrac{\sqrt{2v^2-u^2}+u}{2}\right) f\left(\dfrac{\sqrt{2v^2-u^2}-u}{2}\right), & 0\le\left|u^2\right|\le v \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}$

.

3.51 $P(\min(\tau_1,\tau_2)<x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}, & x>0 \end{cases}.$ **3.52** *a*) $\frac{1}{2}$;

b) $f_\nu(y)=\begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$, $\nu=\min\{\tau_1,\tau_2\}$; *c*) $\frac{1}{2}$. Указ. В случае *c*) нужно найти $P(\tau_1+\tau_3<\tau_2)+P(\tau_2+\tau_3<\tau_1)$. **3.53** *a*) $pF_\xi(x)+qF_\eta(x)$; *b*) $F_\xi(x)(p+qF_\eta(x))$; *c*) $F_\xi(x)+qF_\eta(x)(1-F_\xi(x))$.

3.54 $F_\nu(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k F_k(x)$.

3.55 Указ. Рассмотреть распределение двумерной с.в. (ξ,η): $P(\xi=0,\eta=1)=P(\xi=1,\eta=0)=\frac{1}{2}$. Положить $x_0=y_0=0$.

3.56 $f_{\eta_1}(y_1)=f_1(y_1)$, $f_{\eta_2}(y_2)=f_2(y_2)$. **3.57** $\sqrt{2}/2$. Указ. 1) Показать, что ξ и η равномерно распределены на [0,1]. 2) Показать, что $P(\xi=\eta)=1$. Для этого разбить квадрат [0,1]x[0,1] на n^2 квадратиков $D_{i,j}$ и найти, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}P\left((\xi,\eta)\in D_{i,i}\right)=1$. 3) Вычислить $P\left(2\left(\xi-1/2\right)^2\le 1/4\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.58 *a*) $F_{\xi_{(1)}}(x)=1-\left(1-F(x)\right)^n$; *b*) $F_{\xi_{(n)}}(x)=F^n(x)$;

c) $F_{\xi_{(1)}\xi_{(n)}}(x,y)=\begin{cases} F^n(y)-\left(F(y)-F(x)\right)^n, & x\le y \\ F^n(y), & x>y \end{cases}.$

3.59 $f_\eta(y)=\begin{cases} \dfrac{n}{(b-a)^n}(b-y)^{n-1}, & y\in(a,b) \\ 0, & y\notin(a,b) \end{cases}.$

3.60 *a*) $f_{\xi_{(m)}}(x)=\dfrac{n!}{(m-1)!(n-m)!}F^{m-1}(x)\left(1-F(x)\right)^{n-m}f(x)$;

$b)\ f_{\xi_{(k)}\xi_{(m)}}(x,y)=\dfrac{n!}{(k-1)!(m-k-1)!(n-m)!}F^{k-1}(x)\big(F(y)-F(x)\big)^{m-k-1}\times$ $\times\big(1-F(y)\big)^{n-m}f(x)f(y),\quad x\le y$ и равна нулю в противном случае. Указ. к b). Для $x\le y$ рассмотреть событие $B_{k,m}(x,y)=\{k-1$ *с.в. попали в* $(-\infty,x)$, $m-k-1$ *с.в. попали в* $[x+dx,y)$, $n-m$ *с.в. попали в* $[y+dy,\infty)$ *и по одной с.в. попали в* $[x,x+dx)$ *и* $[y,y+dy)\}$. **3.61** $\dfrac{1}{k+1}$ во всех случаях.

3.62 $f_n(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases} n!\prod\limits_{k=1}^{n} f(x_k), & \text{если } x_1\le x_2\le\ldots\le x_n \\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}.$

3.63 $P\big(\eta(\omega)=k\big)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,\dots$. **4.1** a) 18; b) 21. **4.2** $M\eta=1/4$, $D\eta=7/144$. **4.3** $M\eta=0$; $D\eta=1/24$. **4.4** $M\eta_1=1/3$, $M\eta_2=1/6$. **4.5** $M\eta=0$, $D\eta=\sigma_1^2+\sigma_2^2$. **4.6** $M\eta=\sigma$. **4.7** $M\eta=\dfrac{n}{n+1}a+\dfrac{b}{n+1}$. **4.8** $a)\ \dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{a^2}{6}$; $b)\ \dfrac{2}{\lambda^2}-\dfrac{a^2}{6}$; $c)\ \dfrac{2}{\lambda^2}+\dfrac{a^2}{6}$. **4.9** $M\eta=2/3$. Указ. $\eta=\xi_1^2+\xi_2^2$. **4.10** $M\eta=7/6$. Указ. $\eta=1+(\xi_2-\xi_1)^2$. **4.11** $a)\ \dfrac{1}{12}+\left(\dfrac{1}{2}-a_1\right)\left(\dfrac{1}{2}-a_2\right)+\dfrac{1}{3}|a_1-a_2|^3$; $b)\ \dfrac{7}{60}$. Указ. для a). $M\eta=\int\limits_0^1(y-a_1)(y-a_2)dy-2\int\limits_{\min\{a_1,a_2\}}^{\max\{a_1,a_2\}}(y-a_1)(y-a_2)dy$. **4.12** $l/3$; $l^2/18$. **4.13** $M\eta_1=9$, $M\eta_2=20{,}25$, $D\eta_1=16{,}5$, $D\eta_2=402{,}1875$. **4.14** $\pi/3$. Указ. В треугольнике $\xi\eta\theta$ все углы одинаково распределены и в сумме дают π. **4.16** $n/3$. **4.17** $M\xi=155$. **4.18** $M\theta_k=0$ $(k=1,2,3,4)$, $D\theta_1=2n\sigma^2$, $D\theta_2=2\sigma^2$, $D\theta_3=n(n+1)\sigma^2$, $D\theta_4=0$. **4.19** $M\Delta=0$, $D\Delta=n!\sigma^{2n}$.

4.20 $x^n/n!$. Указ. Применить индукцию по n и формулу свертки: $f_{\xi_1+\ldots+\xi_n+\xi_{n+1}}(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(u)\,f_{\xi_{n+1}}(x-u)du$. **4.21** $M\nu=e=2{,}71828\ldots$.

Указ. $P(\nu\ge k)=P(\xi_1+\ldots+\xi_{k-1}\le 1)=\dfrac{1}{(k-1)!}$ (см. предыдущую задачу) и

$M\nu=\sum_{k=1}^{\infty}P(\nu\ge k)=e$. **4.22** $M\,\xi_i={}^{7}\!/_{12}$, $D\,\xi_i={}^{11}\!/_{144}$, ($i$=1,2), $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=-\dfrac{1}{144}$. **4.23** $a)\ 2\dfrac{9\pi-32}{a\,\pi^2-1{,}4}\approx-0{,}300137$; $b)\ -\dfrac{1}{2}$.

4.24 $A=24,\ M\xi=M\eta=\dfrac{2}{5},\ D\xi=D\eta=\dfrac{1}{25},\ \operatorname{cov}(\xi,\eta)=-\dfrac{2}{75},\ \rho(\xi,\eta)=-\dfrac{2}{3}$.

4.25 $(\alpha^2-\beta^2)\Big/(\alpha^2+\beta^2)$. **4.26** $a)\,0$; $b)\ {}^{1}\!/_{3}$. **4.27** В случаях a), d), g) - да; в остальных случаях – нет. **4.28** $a)\,2$; $b)\,1$; $c)\,0$; $d)\,{}^{11}\!/_{3}$; $e)\,{}^{13}\!/_{3}$; $f)\,{}^{13}\!/_{3}$.

4.29 $a)\ \dfrac{2a+b}{3}$; $b)\ \dfrac{2ab}{9}$; $c)\ 0$; $d)\ \dfrac{4}{9}ab-\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{1}{6}b^2-1$; $e)\ \dfrac{1}{2}a^2+2b^2$.

4.30 $M\xi=M\eta=0$, $D\xi=\dfrac{5}{4}$, $D\eta=\dfrac{1}{4}$, $\rho(\xi,\eta)=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $f_\xi(x)=\sqrt{\dfrac{2}{5\pi}}\,e^{-\frac{2x^2}{5}}$.

4.31 $$f_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{32\pi}\exp\left(-\frac{25}{32}\left(\frac{(x+2)^2}{16}-\frac{3(x+2)(y-3)}{50}+\frac{(y-3)^2}{25}\right)\right)$$

4.32 ≥ 24.

4.33 η имеет нормальное распределение с параметрами $M\eta=13$, $D\eta=89$.

4.34 $a)\,15$; $b)\,9$. **4.35** $\rho(\xi,\eta)=-1$; $\rho(\xi,\nu)=15$. **4.36** $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

4.37
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{384\,\pi^2}\exp\left(-\frac{1}{96}\left(5\left(x_1^2+x_3^2\right)-2\left(x_1x_2+x_3x_4\right)+5\left(x_2^2+x_4^2\right)\right)\right).$$

4.38 $a)\ x\in\left[-{}^{1}\!/_{2},1\right]$; $b)\ x\in\left[-1,{}^{1}\!/_{2}\right]$. **4.39** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ во всех случаях. **4.40** $-{}^{1}\!/_{5}$.

4.41 $-\sqrt{\dfrac{p_i\,p_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}$, $i,j=1,2,\dots,s$, $i\ne j$. Указ. Положим $\xi_k=\theta_{k1}+\theta_{k2}+\dots+\theta_{kn}$, где θ_{ki} – индикатор события: при i-м испытании был исход k. Тогда $M\xi_k=n\,p_k$, $D\xi_k=n\,p_k(1-p_k)$, $k=1,2,\dots,s$ и

$M(\xi_k\,\xi_l)=M\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_{ki}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_{lj}\right)\right)=(n^2-n)\,p_k\,p_l$, $k\ne l$. **4.42** $M\xi=n\,q^2$;

$D\xi = pq^2[n+q(3n-2)]$; $M = nq^2$; $D = npq^2(1+q)$; $M\xi = M$; $D\xi - D = 2(n-1)pq^3 > 0$, при $n>1$. Указ. $\xi = \eta_1 + \ldots + \eta_n$, $\eta_k = \begin{cases} 1, & \xi_k = \xi_{k+1} = 0 \\ 0, & \text{\textit{в противном случае}} \end{cases}$ ($\xi_k -$ исход k-го испытания), $M\eta_k = q^2$, $D\eta_k = pq^2(1+q)$ и $\operatorname{cov}(\eta_i, \eta_j) = \begin{cases} 0, & |i-j| > 1 \\ pq^3, & |i-j| = 1 \end{cases}$. **4.43** $M\xi = npq$; $D\xi = npq(p^3 + q^3) + 2p^2q^2$. Указ. $\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{\textit{успех при } } k-\text{\textit{м испытании}} \\ 0, & \text{\textit{неудача при } } k-\text{\textit{м испытании}} \end{cases}$, $k = 1, \ldots, n+1$, $\eta_k = \begin{cases} 1, & \xi_k = 0, \quad \xi_{k+1} = 1 \\ 0, & \text{\textit{в противном случае}} \end{cases}$, $k=1,\ldots,n$. Тогда $M\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} M\eta_k = npq$, $D\xi = D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} D\eta_k + 2\sum\limits_{i<j}\operatorname{cov}(\eta_i, \eta_j)$. Далее $D\eta_k = pq(1-pq)$, $\operatorname{cov}(\eta_i, \eta_j) = \begin{cases} 0, & |i-j| > 1 \\ -p^2q^2, & |i-j| = 1 \end{cases}$ и $D\xi = npq - 2(n-1)p^2q^2 - np^2q^2 = npq(1-3pq) + 2p^2q^2$. **4.44** $M\xi = na$, $M\eta = npa$, $D\xi = n\sigma^2$, $D\eta = np(\sigma^2 + a^2q)$, $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = np\sigma^2$. **4.45** $\frac{n-m}{n}$. **4.46** $M\eta_k = \frac{1}{n}$, $\rho(\eta_k, \eta_l) = -\frac{1}{n-1}$, $k \neq l$, $\rho(\eta_1 + \ldots + \eta_k, \eta_1 + \ldots + \eta_l) = \sqrt{\frac{k(n-l)}{l(n-k)}}$, $1 \le k < l \le n$. Указ. 1) $\eta_1 + \ldots + \eta_n = 1 \Rightarrow M\eta_k = \frac{1}{n}$. 2) $\eta_1 + \ldots + \eta_n = 1 \Rightarrow nD\eta_1 + n(n-1)\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = 0$. Откуда $\operatorname{cov}(\eta_k, \eta_l) = -\frac{D\eta_1}{n-1}$ и $\rho(\eta_k, \eta_l) = -\frac{1}{n-1}$. 3) $\operatorname{cov}(\eta_1 + \ldots + \eta_k, \eta_1 + \ldots + \eta_l) =$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\operatorname{cov}(\eta_i, \eta_j) = kD\eta_1 + k(l-1)\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = kD\eta_1 - k(l-1)\frac{D\eta_1}{n-1} = \frac{k(n-l)}{n-1}D\eta_1.$$

Далее $D(\eta_1 + \ldots + \eta_s) = sD\eta_1 + s(s-1)\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = \frac{s(n-s)}{n-1}D\eta_1$. Откуда

$$\rho(\eta_1 + \ldots + \eta_k, \eta_1 + \ldots + \eta_l) = \frac{\operatorname{cov}(\eta_1 + \ldots + \eta_k, \eta_1 + \ldots + \eta_l)}{\sqrt{D(\eta_1 + \ldots + \eta_k)D(\eta_1 + \ldots + \eta_l)}} = \frac{k(n-l)}{\sqrt{k(n-l)l(n-k)}}.$$

4.47 a- медиана ξ, b- медиана η. **4.49** $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \le D(\xi + \eta) \le (\sigma_1 + \sigma_2)^2$.

4.50 $c_i = \dfrac{1}{\lambda \sigma_i^2}$, где $\lambda = \left(\dfrac{1}{\sigma_1^2} + \cdots + \dfrac{1}{\sigma_n^2}\right)$, $D\eta_n = \dfrac{1}{\lambda}$. **4.51** Указ. Воспользоваться соотношением $\max\{a,b\} = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ и неравенством Коши-Буняковского. **4.52** Нет. Указ. Пусть $\Omega = \{1,2,3\}$, F – совокупность всех подмножеств Ω, $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = 1/3$. Положим $\xi(1)=2, \xi(2)=1, \xi(3)=0$, $\eta(1)=0, \eta(2)=2, \eta(3)=1$. Тогда $M\,\dfrac{\xi-\eta}{\xi+\eta} = -\dfrac{1}{9}$, т.е. $M\,\dfrac{\xi}{\xi+\eta} \neq M\,\dfrac{\eta}{\xi+\eta}$.

5.1

η	-1	0	1
$P(\eta = y \mid \xi = 1)$	$3/16$	$3/8$	$7/16$

$M(\eta \mid \xi = 1) = 1/4$.

5.2

ξ	2	5	8
p	0,2	0,42	0,38

η	0,4	0,8
p	0,8	0,2

ξ	2	5	8
$P(\xi = x \mid \eta = 0{,}8)$	0,25	0,6	0,15

η	0,4	0,8
$P(\eta = y \mid \xi = 5)$	$5/7$	$2/7$

5.3

η	10	14	18
$P(\eta = y \mid \xi = 6)$	$5/14$	$5/28$	$13/28$

ξ	3	6
$P(\xi = x \mid \eta = 10)$	$5/7$	$2/7$

5.4

а)

η \ ξ	1	2	3
1	$1/9$	0	0

η \ ξ	1	2	3
2	$1/9$	$1/6$	0
3	$1/9$	$1/6$	$1/3$

b) $\rho(\xi,\eta)=\sqrt{6/17}$;
c)

ξ	1	2	3
$P(\xi=x\mid\eta=3)$	$2/11$	$3/11$	$6/11$

$M(\xi\mid\eta=3)$=26/11. **5.5** 2/7, 0, 10/17, 24/17.
5.6 *a*)

ξ	1	2
p	0,8	0,2

η	-1	0	1	2
p	0,2	0,3	0,3	0,2

b)

ξ	1	2
$P(\xi=x_i\mid\eta=2)$	0,75	0,25

η	-1	0	1	2
$P(\eta=y_i\mid\xi=1)$	0,125	0,3125	0,375	0,1875

c) $P\{\eta<\xi\}$=0,5; *d*) $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=-0{,}1$, $\rho(\xi,\eta)=-0{,}244$. **5.7** 17/65. **5.8** 2/3. **5.9** *p*, *p*, 1/2. **5.10** z/2. **5.11** $C_n^j\frac{1}{2^n}$, *j=0,1,...,n; n/2.*

5.12 $C_n^j\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^j\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-j}$, $j=0,1,\ldots,n;$ $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot n$. **5.13** $\frac{1}{n-1}$, $(1-q^2)q^{2(j-1)}$, $j=1,2,\ldots$. **5.14** *a*) $P(\xi=k)=p\,(1-p)^{k-1}$, $k=1,2,\ldots;$ *b*) $P(\xi=k)=\left(1-\frac{c}{1-c}\right)\left(\frac{c}{1-c}\right)^k$, $k=0,1,\ldots;$ *c*) $P(\xi=k)=\frac{r^k}{k!}e^{-r}$, $k=0,1,\ldots$

5.15 *a*) $\frac{p}{1+q}$; *b*) $\frac{q}{1+q}$; *c*) $\frac{q}{1+q}$; *d*) $(1+q)pq^{k-2}(1-q^{k-1}), k=2,3,\ldots;$ e) $(1+q)pq^{2(k-1)}, k=1,2,\ldots;$ *f*) $(1+q)pq^{2(k-1)}, k=1,2,\ldots;$ *g*) $\frac{1}{l-1}, k=1,2,\ldots,l-1;$ *h*) $\frac{l}{2}$. **5.17** *a*) $C_n^m\left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_N}\right)^m\left(1-\frac{\Lambda_k}{\Lambda_N}\right)^{n-m}$; *b*) $n\frac{\Lambda_k}{\Lambda_N}$, где $\qquad \Lambda_k=\lambda_1+\ldots+\lambda_k, \qquad \Lambda_N=\lambda_1+\ldots+\lambda_N.$

5.19 $C_z^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{z-k}, \quad 0\le k\le z.$

5.20 $P(\xi=m)=C_M^m C_{N-M}^{n_0-m}\ /C_N^{n_0}, \quad m=0,1,\ldots,\min\{M,n_0\}.$ **5.21** $\frac{(N+1)M}{2N}.$

5.22 $MT_n=0,\ DT_n=n\sigma^2\left(1+\frac{n-1}{k}\right).$ **5.23** $M\tau=ab, \quad D\tau=b\sigma^2+a^2\delta^2.$

5.24 $\qquad f_\xi(x)=p_1f_1(x)+p_2f_2(x), \qquad F_\xi(x)=p_1F_1(x)+p_2F_2(x),$

$M\xi=p_1\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f_1(x)dx+p_2\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f_2(x)dx,$

$D\xi=p_1\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_1(x)dx+p_2\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_2(x)dx-(M\xi)^2.$ **5.25** 2/3. Указ. Ввести три гипотезы: H_1 - обе точки легли на одну и ту же сторону квадрата; H_2 - точки легли на смежные стороны квадрата; H_3 - точки легли на противоположные стороны квадрата. Тогда $M\eta=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)M(\eta|H_i).$

5.26 $f_{\eta/\xi}(y/x)=\begin{cases}\frac{2}{2-x}, & y\in\left[0,1-\frac{x}{2}\right], \quad 0\le x<2\\ 0, & \textit{в противном случае}\end{cases}.$

5.27 *a*) $f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{a^2-x^2}}{\pi a^2}, & |x|<a\\ 0, & |x|\ge a\end{cases}, \quad f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{b^2-y^2}}{\pi b^2}, & |y|<b\\ 0, & |y|\ge b\end{cases},$

$f_{\xi/\eta}(x/y)=\begin{cases}\frac{b}{2a\sqrt{b^2-y^2}}, & |x|<\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}, \quad |y|<b\\ 0, & x,y-\textit{другие}\end{cases},$

$f_{\eta/\xi}(y/x)=\begin{cases}\frac{a}{2b\sqrt{a^2-x^2}}, & |y|<\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \quad |x|<a\\ 0, & x,y-\textit{другие}\end{cases}.$

b) $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=0$, следовательно, ξ и η некоррелированные, но зависимые с.в. (т.к. $f_{\xi\eta}(x,y)\ne f_\xi(x)f_\eta(y)$).

5.28 *a*) $f_\xi(x)=f_\eta(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & |x|<R\\ 0, & |x|\ge R\end{cases},$

$$F_\xi(x)=F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\le -R\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{x}{R}+\dfrac{x}{R}\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{R}\right)^2}\right), & -R<x\le R\\ 1, & x>R\end{cases};$$ с.в. ξ и η зависимы; *b*) $f_{\xi/\eta}(x/y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}, & |x|<R\\ 0, & |x|\ge R\end{cases}$; *c*) $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$.

5.29 *a*) $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}, & |x|+|y|\le\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\\ 0, & |x|+|y|>\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\end{cases}$;

b) $f_\xi(x)=f_\eta(x)=\begin{cases}\dfrac{a\sqrt{2}-2|x|}{a^2}, & |x|\le\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\\ 0, & |x|>\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\end{cases}$;

c) $f_{\xi/\eta}(x/y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a\sqrt{2}-2|y|}, & |x|<\dfrac{a}{2}\sqrt{2}-|y|,\quad |y|<\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\\ 0, & x,y-\textit{другие}\end{cases}$,

$f_{\eta/\xi}(y/x)=f_{\xi/\eta}(y/x)$; *d*) $D\xi=D\eta=\dfrac{a^2}{12}$, $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$; e) не коррелированны, но зависимы. **5.30** $f_\theta(z)=\begin{cases}\dfrac{3(R^2-Z^2)}{4R^3}, & |Z|<R\\ 0, & |Z|\ge R\end{cases}$,

$f_{\xi\eta/\theta}(x,y/z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(R^2-z^2)}, & x^2+y^2<R^2-z^2\\ 0, & x^2+y^2\ge R^2-z^2,\end{cases}$, $|z|<R$. **5.31** A=4,

$f_\xi(x)=f_\eta(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, $f_{\xi/\eta}(x/y)=f_\xi(x)$,

$f_{\eta/\xi}(y/x)=f_\eta(y)$, $M\xi=M\eta=\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $D\xi=D\eta=1-\dfrac{\pi}{4}$, $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$.

5.32 $A=\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$, $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=-\dfrac{1}{18}$, $f_{\xi/\eta}(x/y)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(2x+\frac{3}{2}y\right)^2}$,

$f_{\eta/\xi}(y/x)=\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}e^{-(3y+x)^2}$. **5.33** $f_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{32}, & x>0,\ y>0,\ x+y<8\\ 0, & x,y-\textit{другие}\end{cases}$,

$f_{\xi}(x)=f_{\eta}(x)=\begin{cases}\dfrac{8-x}{32}, & x\in(0,8)\\ 0, & x\notin(0,8)\end{cases}$,

$f_{\xi/\eta}(x/y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8-y}, & 0<x<8-y,\ 0<y<8\\ 0, & x,y-\textit{другие}\end{cases}$, $f_{\eta/\xi}(y/x)=f_{\xi/\eta}(y/x)$.

5.34 *a*) A=1, $P(\xi+\eta<1)=1/3$. *b*) $f_{\xi}(x)=f_{\eta}(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}, & x\in(0,1)\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}$.

Зависимы. *c*) $M\xi=M\eta=\dfrac{7}{12}$; $F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{2}x(x+1), & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$;

$f_{\xi/\eta}(x/y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{y+1/2}, & x\in(0,1)\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}$, 0<y<1; $P(2\xi<1|\xi+\eta=1)=0{,}5$.

5.35 *a*) A=3/28, $P(\xi+\eta<2)=\dfrac{3}{14}$. *b*) $M\xi=\dfrac{8}{7}$, $M\eta=\dfrac{10}{7}$, $D\xi=\dfrac{46}{147}$,

$D\eta=\dfrac{46}{245}$, $\rho(\xi,\eta)=-\dfrac{\sqrt{15}}{69}$, $f_{\xi/\eta}(x/y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{2+2y}, & 0<x<2\\ 0, & x\notin(0,2)\end{cases}$, 0<y<2,

$f_{\eta/\xi}(y/x)=\begin{cases}\dfrac{xy+y^2}{2x+8/3}, & 0<y<2\\ 0, & y\notin(0,2)\end{cases}$, 0<x<2.

5.36 *a*) $f_{\xi/\xi+\eta}(x/z)=\begin{cases}1/z, & 0\le x\le z\\ 0, & x\notin[0,z]\end{cases}$, $D(\xi|\xi+\eta=z)=\dfrac{z^2}{12}$, $z>0$;

b) $f_{\xi/\xi+\eta}(x/z)=\begin{cases}1/z, & 0\le x\le z\\ 0, & x\notin[0,z]\end{cases}$, $\qquad D(\xi|\xi+\eta=z)=\dfrac{z^2}{12},\quad 0<z\le 1$,

$f_{\xi/\xi+\eta}(x/z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-z}, & z-1\le x\le 1\\ 0, & x\notin[z-1,1]\end{cases}$, $\qquad D(\xi|\xi+\eta=z)=\dfrac{(2-z)^2}{12},\quad 1\le z<2$;

c) $f_{\xi/\xi+\eta}(x/z)=\begin{cases}\dfrac{6x(z-x)}{z^3}, & 0\le x\le z\\ 0, & x\notin[0,z]\end{cases}$, $\quad D(\xi|\xi+\eta=z)=\dfrac{z^2}{20},\quad z>0$.

5.37 $\qquad f_\eta(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$. $\qquad$ Указ. $\qquad f_\eta(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{\eta\xi_3}(y,x)dx=$

$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_3}(x)\,f_{\eta|\xi_3}(y|x)dx$. $\qquad$ Но $\qquad f_{\eta|\xi_3}(y|x)=f_{\frac{\xi_1+x\xi_2}{\sqrt{1+x^2}}}(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Следовательно, $\quad f_\eta(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_3}(x)dx=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$. $\qquad$ **5.38** 1/3.

5.39 $\quad P(0\le\xi<2|\nu=2)\approx 0{,}5$. $\qquad$ **5.40** $\quad P(\xi=k)=\dfrac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}},\quad k=0,1,\dots$.

Замечание. Если ввести обозначения $\dfrac{\lambda}{\lambda+1}=p$, $\dfrac{1}{\lambda+1}=q$, то получим $P(\xi=k)=p\,q^k,\quad k=0,1,\dots$. **5.41** $P(\xi=m)=\dfrac{\mu}{\lambda p+\mu}\left(\dfrac{\lambda p}{\lambda p+\mu}\right)^m,\quad m=0,1,\dots$. $M\xi=\dfrac{\lambda p}{\mu}$, $D\xi=\dfrac{\lambda p}{\mu}\left(\dfrac{\lambda p}{\mu}+1\right)=M\xi(M\xi+1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.. Теория вероятностей. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1973. – 367с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища школа, 1979. – 408с.
3. Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1967. – 340с.
4. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей: Учеб. пособие для втузов. – М.: Наука, 1989. – 320с.
5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2000. – 543с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для втузов/ Под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука, 1990. – 428с.
7. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/ Под ред. А.А.Свешникова. – М.: Наука, 1965. – 632с.
8. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах: Учеб. пособие для вузов / В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев и др. – М.: Дрофа, 2003.-328с