МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Л.Г. Афраймович

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ И ФОРМАЛЬНЫЕ ГРАММАТИКИ»

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки
230700 «Прикладная информатика»

Нижний Новгород
2012

УДК 510.5

Афраймович Л.Г. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ И ФОРМАЛЬНЫЕ ГРАММАТИКИ»: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2011. – 32 с.

Рецензенты: д.т.н., профессор **Д.И. Коган**

В методических указаниях рассматриваются практические задачи, необходимые для самостоятельной подготовки студентов по курсу «Теория автоматов и формальные грамматики». Приводятся основные понятия и результаты. Даются примеры практических заданий с решениями. Материалы могут быть использованы при самостоятельной подготовке к компьютерному тестированию студентов факультета ВМК, ННГУ.

Пособие предназначено для студентов факультета ВМК направления подготовки «Прикладная информатика», изучающих курс «Теория автоматов и формальные грамматики».

Ответственный за выпуск:
зам. председателя методической комиссии факультета ВМК ННГУ,
к.ф.-м.н., доцент **В.М. Сморкалова**

УДК 510.5

Содержание

Раздел 1. Конечные автоматы и регулярные языки

1.1. Понятие языка

Алфавитом $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ называется непустое конечное множество символов. Словом $\alpha = \alpha_1\alpha_2...\alpha_R$ в алфавите A называется конечная последовательность символов алфавита, $\alpha_i \in A$, $i = \overline{1, R}$. Длина слова α обозначается $l(\alpha)$. Вводится специальное выделенное слово нулевой длины, называемое пустым словом и обозначаемое λ, $l(\lambda) = 0$. Множество всех слов алфавита A обозначается A^*. Языком L в алфавите A называется произвольное подмножество множества A^*, $L \subseteq A^*$.

Среди множества языков выделяются

- $L = \varnothing$ – пустой язык;
- $L = A^*$ – универсальный язык;

Различают конечные и бесконечные языки. Язык L называется конечный язык, если множество L является конечным; иначе язык L называется бесконечным.

На множестве языков алфавита A вводятся следующие операции теоретико-множественные операции. Пусть $L_1, L_2, L \subseteq A^*$, тогда

- $L_1 \cup L_2 = \{\alpha \mid \alpha \in L_1$ или $\alpha \in L_2\}$ – объединение языков;
- $L_1 \cap L_2 = \{\alpha \mid \alpha \in L_1$ и $\alpha \in L_2\}$ – пересечение языков;
- $L_1 \setminus L_2 = \{\alpha \mid \alpha \in L_1$ и $\alpha \notin L_2\}$ – разность языков;
- $L_1 \oplus L_2 = L_1 \setminus L_2 \cup L_2 \setminus L_1$ – симметрическая разность языков;
- $\overline{L} = A^* \setminus L$ – дополнение языка.

Также вводятся специальные операции над языками:

- $L_1 \circ L_2 = \{\alpha_1\alpha_2 \mid \alpha_1 \in L_1$ и $\alpha_2 \in L_2\}$ – объединение конкатенация языков;
- $L^{(i)}$ – возведение языка в степень i, $i = 0,1,...$; где $L^{(0)} = \{\lambda\}$, $L^{(1)} = L$, $L^{(i)} = L^{(i-1)} \circ L$, $i = 2,3,...$;
- $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^{(i)}$ – итерация языка.

1.2. Концепция конечного автомата и регулярного языка

Конечным (детерминированным) автоматом K называется совокупность из пяти элементов $K = < Q, A, q_0, g, F >$, где

- $Q = \{q_0, q_1, ..., q_m\}$ – конечное множество состояний;
- $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – входной алфавит;
- $q_0 \in Q$ – специально выделенное состояние, именуемое начальным;
- $g : Q \times A \to Q$ – функция переходов;
- $F \subseteq Q$ – множество хороших состояний.

Через $S_K(\alpha,t)$ обозначается состояние, в котором окажется конечный автомат K через t тактов времени, получив на вход слово α. Пусть $\alpha = \alpha_1\alpha_2...\alpha_l$, тогда

$$S_K(\alpha,0) = q_0;$$

$$S_K(\alpha, p) = g(S_K(\alpha, p-1), \alpha_p),\ p = \overline{1,l}.$$

Через $L(K)$ обозначается язык, распознаваемый конечным автоматом K. Язык $L(K)$ определяется следующим образом

$$\alpha \in L(K) \Leftrightarrow S_K(\alpha, l(\alpha)) \in F,\ \alpha \in A^*.$$

Язык L называется регулярным, если существует конечным автомат K, что $L(K) = L$.

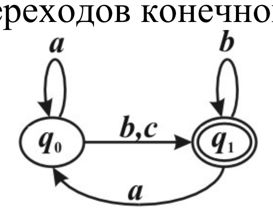
Иногда для удобства вводится расширенная функция переходов конечного автомата $\hat{g}: Q \times A^* \to Q$. Пусть $q \in Q$, $\alpha \in A^*$, тогда $\hat{g}(q,\alpha)$ – состояние, в котором окажется конечный автомат, начав свою работу в состояние q и обработав слово α. Несложно увидеть, что расширенную функцию переходов $\hat{g}$ можно определить через функцию переходов g конечного автомата.

При задании конечных автоматов иногда используется их графическое представление в виде диаграммы переходов. Конечным автомат представляется в виде графа с множеством вершин Q и множеством дуг $\{(q, g(q,a)) \mid q \in Q, a \in A\}$. Над каждой из дуг $(q, g(q,a))$ ставится буква a, определяющая соответствующий переход функции g. Каждая из вершин множества F обводится двойной линией. Для удобства при отображении графа не приводятся отрицательно поглощающие состояния и соответствующие им дуги. Здесь состояние $q \in Q$ называется отрицательно поглощающим, если $q \in F$ и $g(q,a) = q$, $a \in A$.

Приведем пример. Пусть $K = < Q, A, q_0, g, F >$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $A = \{a,b,c\}$, $F = \{q_1\}$ и функция g определяется следующим образом:

$g(q_0,a) = q_0$;	$g(q_1,a) = q_0$;	$g(q_2,a) = q_2$;
$g(q_0,b) = q_1$;	$g(q_1,b) = q_1$;	$g(q_2,b) = q_2$;
$g(q_0,c) = q_1$;	$g(q_1,c) = q_2$;	$g(q_2,c) = q_2$.

Ниже приведена диаграмма переходов конечного автомата K.



Здесь не отображено состояние q_2 и соответствующие переходы $g(q_1,c) = q_2$, $g(q_2,a) = q_2$, $g(q_2,b) = q_2$, $g(q_2,c) = q_2$ в силу того, что состояние q_2 является отрицательно поглощающим.

Конечным недетерминированным автоматом $\widetilde{K}$ называется совокупность из пяти элементов $\widetilde{K} = < Q, A, q_0, \widetilde{g}, F >$, где Q, A, q_0 и F имеют тот же смысл, что и в случае детерминированного конечного автомата, а функция переходов $\widetilde{g}$ является отображением вида $\widetilde{g} : Q \times A \to 2^Q \setminus \{\varnothing\}$. Через $L(\widetilde{K})$ обозначается язык, распознаваемый недетерминированным конечным автоматом $\widetilde{K}$. Язык $L(\widetilde{K})$ определяется следующим образом:

$\alpha = \alpha_1\alpha_2...\alpha_l \in L(\widetilde{K}) \Leftrightarrow$ существует последовательность состояний $S_i \in Q,\ i = \overline{0,l}$, что $S_0 = q_0$, $S_i \in \widetilde{g}(S_{i-1}, \alpha_i)$, $i = \overline{1,l}$, $S_l \in F$, $\alpha \in A^*$.

1.3. Основные результаты теории конечных автоматов

Известны результаты, связанные с замкнутостью класса регулярных языков относительно ряда операций.

Теорема 1.1. Класс регулярных языков замкнут относительно операций объединения, пересечения и дополнения.

Следствие 1.1. Класс регулярных языков замкнут относительно операций разности и симметрической разности.

Теорема 1.2. Класс регулярных языков замкнут относительно операции конкатенация.

Следствие 1.2. Класс регулярных языков замкнут относительно операции возведения в степень.

Теорема 1.3. Класс регулярных языков замкнут относительно операции итерация.

Доказывается регулярность языков, распознаваемых недетерминированными конечными автоматами. Этот результат используется, например, в доказательствах замкнутости регулярных языков относительно операций конкатенации и итерации.

Теорема 1.4. Пусть $\widetilde{K}$ – недетерминированный конечный автомат, тогда язык $L(\widetilde{K})$ регулярный.

В лемме о разрастании показывается, что любой регулярный язык обладает определенной «разрастающейся» структурой. В частности данный факт может быть использован при доказательстве нерегулярности ряда языков методом «от противного».

Лемма 1.1. (лемма о разрастании). Для любого регулярного языка L существует натуральная константа k такая, что произвольное слово $\alpha \in L$, $l(\alpha) \ge k$ можно представить в виде $\alpha = \beta_1\gamma\beta_2$, $\beta_1, \gamma, \beta_2 \in A^*$, что выполняются следующие условия

– $\alpha(i) = \beta_1\gamma^i\beta_2 \in L$, $i \in Z^+$,

– $\gamma \neq \lambda$,
– $l(\beta_1\gamma) \leq k$.

Замечание: $\gamma^i = \underbrace{\gamma\gamma...\gamma}_{i\text{ раз}}$, $i \in N$; $\gamma^0 = \lambda$.

Пусть L – произвольный язык в алфавите A. На множестве A^* вводится бинарное отношение E_L: для пары произвольных слов $\alpha, \beta \in A^*$ имеет место $\alpha\ E_L\ \beta$ тогда и только тогда, когда для любого слова $\gamma \in A^*$ слова $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$ одновременно принадлежат или одновременно не принадлежат языку L. С бинарным отношением E_L связан критерий регулярности языка.

Лемма 1.2. Бинарное отношение E_L является бинарным отношением эквивалентности.

Теорема 1.5. Язык L регулярен тогда и только тогда, когда бинарное отношение E_L разбивает множество A^* на конечное число классов эквивалентности.

Пара конечных автоматов K' и K'' называются эквивалентными, если $L(K') = L(K'')$. Детерминированный конечный автомат K называется минимальным, если не существует эквивалентного ему детерминированного конечного автомата с меньшим, чем у K, числом состояний. При решении задачи минимизации конечных автоматов вводятся следующие понятия.

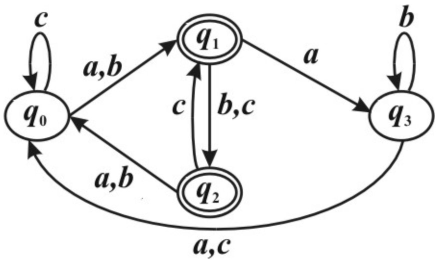
Состояние $q \in Q$ называется недостижимым, если $\hat{g}(q_0, \alpha) \neq q$ для любых $\alpha \in A^*$. Определим на множестве состояний Q бинарное отношение неразличимости, обозначаемое через $(\equiv)$: для пары произвольных состояний $q', q'' \in Q$ имеет место $q'(\equiv)q''$ тогда и только тогда, когда для любого слова $\gamma \in A^*$ состояния $\hat{g}(q', \gamma)$ и $\hat{g}(q'', \gamma)$ одновременно принадлежат или одновременно не принадлежат множеству F. Согласно определению, если $q'\overline{(\equiv)}q''$, то существует $\gamma \in A^*$, что $\hat{g}(q', \gamma) \in F$, $\hat{g}(q'', \gamma) \notin F$ или $\hat{g}(q', \gamma) \notin F$, $\hat{g}(q'', \gamma) \in F$. Такое слово γ будем называть различающим состояния q', q''. Далее для $k \in Z^+$ определим на множестве состояний Q бинарное отношение k-неразличимости, обозначаемое через $(\equiv)_k$: для пары произвольных состояний $q', q'' \in Q$ имеет место $q'(\equiv)_k q''$ тогда и только тогда, когда не существует различающего состояния q', q'' слова длины не более k.

Теорема 1.6. Детерминированный конечный автомат является минимальным тогда и только тогда, когда он не содержит недостижимых и попарно неразличимых состояний.

1.4. Примеры задач

Задание 1.1. (вариант 1)

Задан детерминированный конечный автомат K с входным алфавитом $A = \{a, b\}$:



Вычислить $S_K(\alpha, t)$, где $\alpha = abcc$, $t = 3$ (Указать правильный вариант ответа).

a. q_1

b. q_2

c. F

d. $Q \setminus F$

Правильный ответ: a.

Решение:

$S_K(abcc,0) = q_0$,

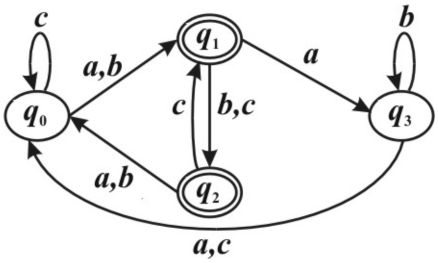
$S_K(abcc,1) = g(q_0, a) = q_1$,

$S_K(abcc,2) = g(q_1, b) = q_2$,

$S_K(abcc,3) = g(q_2, c) = q_1$.

Задание 1.1. (вариант 2)

Задан детерминированный конечный автомат K с входным алфавитом $A = \{a, b\}$:



Вычислить $S_K(\alpha, t)$, где $\alpha = aaba$, $t = 3$ (Указать правильный вариант ответа).

a. $Q \setminus F$

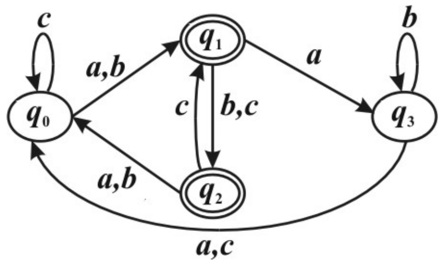
b. q_2

c. F

d. q_3

Задание 1.1. (вариант 3)

Задан детерминированный конечный автомат K с входным алфавитом $A = \{a, b\}$:

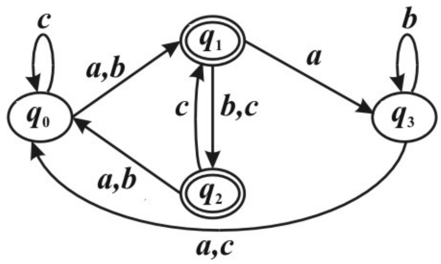


Вычислить $S_K(\alpha,t)$, где $\alpha = cacca$, $t=3$ (Указать правильный вариант ответа).

a. $Q \setminus F$
b. q_2
c. F
d. q_3

Задание 1.1. (вариант 4)

Задан детерминированный конечный автомат K с входным алфавитом $A=\{a,b\}$:

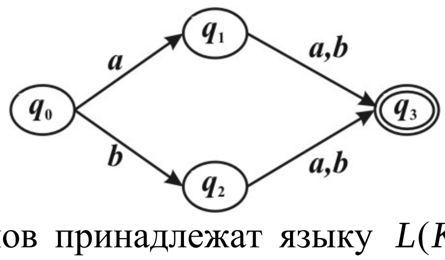


Вычислить $S_K(\alpha,t)$, где $\alpha = aaaca$, $t=3$ (Указать правильный вариант ответа).

a. $Q \setminus F$
b. q_1
c. q_0
d. F

Задание 1.2. (вариант 1)

Задан детерминированный конечный автомат K с входным алфавитом $A=\{a,b\}$:



Какие из следующих слов принадлежат языку $L(K)$. (Указать правильные варианты ответов).

a. aab
b. aa
c. ba
d. bab

e. *aaab*

Правильный ответ: b, c.

Решение:

$S_K(aab,3) = q_4 \notin F$, здесь q_4 - отрицательно-поглощающее состояние автомата K, отсюда $aab \notin L$,

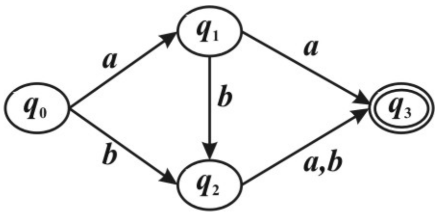
$S_K(aa,2) = q_3 \in F$, отсюда $aa \in L$,

$S_K(ba,2) = q_3 \in F$, отсюда $ba \in L$,

$S_K(aaab,4) = q_4 \notin F$, отсюда $aaab \notin L$.

Задание 1.2. (вариант 2)

Задан детерминированный конечный автомат K с входным алфавитом $A = \{a,b\}$:

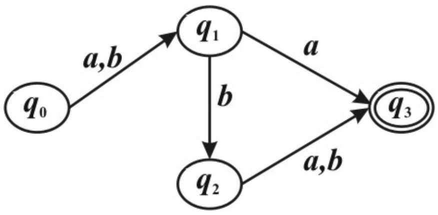


Какие из следующих слов принадлежат языку $L(K)$. (Указать правильные варианты ответов).

a. *bab*
b. *aa*
c. *bba*
d. *aba*
e. *abab*

Задание 1.2. (вариант 3)

Задан детерминированный конечный автомат K с входным алфавитом $A = \{a,b\}$:

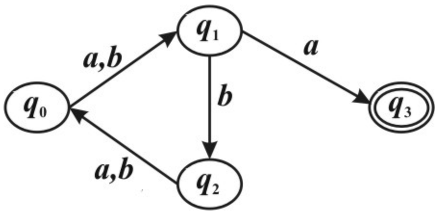


Какие из следующих слов принадлежат языку $L(K)$. (Указать правильные варианты ответов).

a. *bbab*
b. *aab*
c. *aba*
d. *aa*
e. *abbab*

Задание 1.2. (вариант 4)

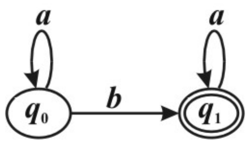
Задан детерминированный конечный автомат K с входным алфавитом $A = \{a, b\}$:



Какие из следующих слов принадлежат языку $L(K)$. (Указать правильные варианты ответов).

a. ba
b. $bbbba$
c. $abab$
d. aba
e. $aabab$

Задание 1.3. (вариант 1)
Задан детерминированный конечный автомат K с входным алфавитом $A = \{a, b\}$:

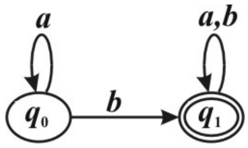


Найти $L(K)$ (Указать правильный вариант ответа).

a. $L(K) = \{\alpha \mid \alpha \text{ содержит ровно одну букву } b, \alpha \in A^*\}$
b. $L(K) = \{\alpha \mid \alpha \text{ содержит нечетное количество букв } b, \alpha \in A^*\}$
c. $L(K) = \{\alpha \mid \alpha \text{ содержит не менее одной буквы } b, \alpha \in A^*\}$
d. $L(K) = \{\alpha \mid \alpha \text{ заканчивается на букву } b, \alpha \in A^*\}$

Правильный ответ: а.

Задание 1.3. (вариант 2)
Задан детерминированный конечный автомат K с входным алфавитом $A = \{a, b\}$:

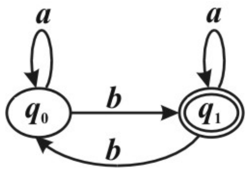


Найти $L(K)$ (Указать правильный вариант ответа).

a. $L(K) = \{\alpha \mid \alpha \text{ содержит ровно одну букву } b, \alpha \in A^*\}$
b. $L(K) = \{\alpha \mid \alpha \text{ содержит нечетное количество букв } b, \alpha \in A^*\}$
c. $L(K) = \{\alpha \mid \alpha \text{ содержит не менее одной буквы } b, \alpha \in A^*\}$
d. $L(K) = \{\alpha \mid \alpha \text{ заканчивается на букву } b, \alpha \in A^*\}$

Задание 1.3. (вариант 3)

Задан детерминированный конечный автомат K с входным алфавитом $A=\{a,b\}$:



Найти $L(K)$ (Указать правильный вариант ответа).

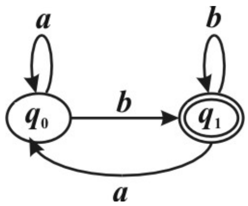
a. $L(K)=\{\alpha \mid \alpha \text{ содержит ровно одну букву } b, \alpha \in A^*\}$

b. $L(K)=\{\alpha \mid \alpha \text{ содержит нечетное количество букв } b, \alpha \in A^*\}$

c. $L(K)=\{\alpha \mid \alpha \text{ содержит не менее одной буквы } b, \alpha \in A^*\}$

a. $L(K)=\{\alpha \mid \alpha \text{ заканчивается на букву } b, \alpha \in A^*\}$

Задание 1.3. (вариант 4)
Задан детерминированный конечный автомат K с входным алфавитом $A=\{a,b\}$:



Найти $L(K)$ (Указать правильный вариант ответа).

a. $L(K)=\{\alpha \mid \alpha \text{ содержит ровно одну букву } b, \alpha \in A^*\}$

b. $L(K)=\{\alpha \mid \alpha \text{ содержит нечетное количество букв } b, \alpha \in A^*\}$

c. $L(K)=\{\alpha \mid \alpha \text{ содержит не менее одной буквы } b, \alpha \in A^*\}$

d. $L(K)=\{\alpha \mid \alpha \text{ заканчивается на букву } b, \alpha \in A^*\}$

Задание 1.4. (вариант 1)
Какие из следующих утверждений верны (Указать правильные варианты ответов).

a. Если L_1, L_2 – регулярные языки, то язык $L_1 \circ (L_2 \cup L_1)$ является регулярным.

b. Если L – регулярный язык и $L = L_1 \cup L_2$, то языки L_1 и L_2 являются регулярными.

c. Если L_1 – регулярный язык, L_2 – конечный язык, то язык $L_1 \cup L_2$ является регулярным.

d. Если L_1, L_2 – регулярные языки, то язык $\{\alpha \mid \alpha \in L_1 \text{ и } \alpha \notin L_2\} \setminus \{\beta \mid \beta \in L_1 \text{ и } l(\beta) \geq 2\}$ является регулярным.

e. Если L_1, L_2 – регулярные языки, то язык $\{\alpha_1\alpha_2 \mid l(\alpha_1) = l(\alpha_2), \alpha_1 \in L_1, \alpha_2 \in L_2\}$ является регулярным.

Правильный ответ: a, c, d.

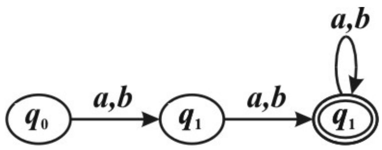
Решение:

a. Если L_1, L_2 – регулярные языки, то язык $L_1 \circ (L_2 \cup L_1)$ является регулярным в силу замкнутости регулярных языков относительно операций конкатенации и объединений.

b. Если L – регулярный язык и $L = L_1 \cup L_2$, то языки L_1 и L_2 не всегдя яляются регулярными Здесь можно привести пример, пусть $L = A^*$, $L_1 = L^{a-b} = \{a^n b^n \mid n \in N\}$, $L_2 = A^*$. Можно увидеть, что $L = L_1 \cup L_2$; L, L_2 – регулярные языки; $L_1 = L^{a-b}$ – известный нерегулярный язык. Замечание: в качестве L_1 можно было взять произвольный нерегулярный язык.

c. Если L_1 – регулярный язык, L_2 – конечный язык, то язык $L_1 \cup L_2$ является регулярным. Дествительно, L_2 является регулярным языком в силу регулярности произвольного конечного языка, и класс регулярных языков замкнут относительно операции объединения.

d. Если L_1, L_2 – регулярные языки, то язык $\{\alpha \mid \alpha \in L_1 \text{ и } \alpha \notin L_2\} \setminus \{\beta \mid \beta \in L_1 \text{ и } l(\beta) \geq 2\}$ является регулярным. Действительно, пусть $L_3 = \{\alpha \mid l(\alpha) \geq 2, \alpha \in A^*\}$. Несложно увидеть, что язык L_3 регулярный, т.к. можно построить следующий конечный автомат, распознающий L_3:



Далее $\{\alpha \mid \alpha \in L_1 \text{ и } \alpha \notin L_2\} \setminus \{\beta \mid \beta \in L_1 \text{ и } l(\beta) \geq 2\} = (L_1 \setminus L_2) \setminus (L_1 \cap L_3)$, данный язык является регулярным в силу регулярности языков L_1, L_2, L_3 и замкнутости класса регулярных языков относительно операции разности и пересечения.

e. Если L_1, L_2 – регулярные языки, то язык $\{\alpha_1 \alpha_2 \mid l(\alpha_1) = l(\alpha_2), \alpha_1 \in L_1, \alpha_2 \in L_2\}$ не всегда является регулярным. Здесь привести следующий пример. Пусть $L_1 = \{a^n \mid n \in N\}$, $L_2 = \{b^n \mid n \in N\}$. Несложно увидеть, что языки L_1, L_2 являются регулярные языки, т.к. можно построить соответсвующие конечные автоматы:

С другой стороны язык $\{\alpha_1 \alpha_2 \mid l(\alpha_1) = l(\alpha_2), \alpha_1 \in L_1, \alpha_2 \in L_2\} = L^{a-b}$ не является регулярным.

Задание 1.4. (вариант 2)

Какие из следующих утверждений верны (Указать правильные варианты ответов).

a. Если L_1, L_2 – регулярные языки, то язык $L_1^* \circ (L_2 \setminus L_1)$ является регулярным. Если L – регулярный язык и $L = L_1 \cap L_2$, то языки L_1 и L_2 являются регулярными.
b. Если L_1, L_2 – регулярные языки, то язык $\{\alpha \mid \alpha \in L_1 \text{ или } \alpha \notin L_2\} \setminus \{\beta \mid \beta \in L_1 \text{ и } l(\beta) \le 5\}$ является регулярным.
c. Если L_1, L_2 – регулярные языки, то язык $\{\alpha_1\alpha_2\alpha_1 \mid l(\alpha_1) = l(\alpha_2), \alpha_1 \in L_1, \alpha_2 \in L_2\}$ является регулярным.
d. Если L_1 – регулярный язык, L_2 – конечный язык, то язык $L_1 \circ L_2$ является регулярным.

Задание 1.4. (вариант 3)
Какие из следующих утверждений верны (Указать правильные варианты ответов).
a. Если L_1, L_2 – регулярные языки, то язык $\{\alpha_2\alpha_2\alpha_1 \mid l(\alpha_1) = l(\alpha_2), \alpha_1 \in L_1, \alpha_2 \in L_2\}$ является регулярным.
b. Если L_1, L_2 – регулярные языки, то язык $(L_1 \setminus L_2) \circ (L_2 \setminus L_1)$ является регулярным.
c. Если L_1, L_2 – регулярные языки, то язык $\{\alpha \mid \alpha \in L_1 \text{ или } \alpha \in L_2\} \setminus \{\beta \mid \beta \in L_1 \text{ и } 2 \le l(\beta) \le 5\}$ является регулярным.
d. Если L_1 – регулярный язык, L_2 – конечный язык, то язык $L_1 \setminus L_2$ является регулярным.
e. Если L – регулярный язык и $L = L_1 \setminus L_2$, то языки L_1 и L_2 являются регулярными.

Задание 1.4. (вариант 4)
Какие из следующих утверждений верны (Указать правильные варианты ответов).
a. Если L_1, L_2 – регулярные языки, то язык $(L_1 \cap L_2) \circ (L_2^* \setminus L_1)$ является регулярным.
b. Если L_1 – регулярный язык, L_2 – конечный язык, то язык $L_1 \setminus L_2 \cup L_2 \circ L_1$ является регулярным.
c. Если L_1, L_2 – регулярные языки, то язык $\{\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2 \mid l(\alpha_1) = l(\alpha_2), \alpha_1 \in L_1, \alpha_2 \in L_2\}$ является регулярным.
d. Если L – регулярный язык и $L = L_1 \oplus L_2$, то языки L_1 и L_2 являются регулярными.
e. Если L_1, L_2 – регулярные языки, то язык $\{\alpha \mid \alpha \in L_1 \text{ и } \alpha \in L_2\} \setminus \{\beta \mid \beta \in L_1 \text{ и } 2 \le l(\beta)\}$ является регулярным.

Задание 1.5. (вариант 1)

Пусть $A=\{a,b\}$, $L=\{abbb,abb,aa,aab,a\}$. Какие из следующих выражений верны (Указать правильные варианты ответов).

a. $aaE_L abb$
b. $aE_L b$
c. $abE_L aa$
d. $bababE_L babab$
e. $baE_L babab$
f. $aaE_L a$

Правильный ответ: a, d, e.

Решение:

a. Пусть $\alpha = aa$, $\beta = abb$. Далее будем рассматривать пары слов $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$. Если $\gamma = \lambda$, то $\alpha\gamma = aa \in L$, $\beta\gamma = abb \in L$. Если $\gamma = a$, то $\alpha\gamma = aaa \notin L$, $\beta\gamma = abba \notin L$. Если $\gamma = b$, то $\alpha\gamma = aab \in L$, $\beta\gamma = abbb \in L$. Если $l(\gamma) \geq 2$, то $\alpha\gamma, \beta\gamma \notin L$. Отсюда по определению $\alpha\ E_L\ \beta$.

b. Пусть $\alpha = a$, $\beta = b$. Далее будем рассматривать пары слов $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$. Если $\gamma = \lambda$, то $\alpha\gamma = a \in L$, $\beta\gamma = b \notin L$. Отсюда по определению $\alpha\ \overline{E_L}\ \beta$.

c. Пусть $\alpha = ab$, $\beta = aa$. Далее будем рассматривать пары слов $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$. Если $\gamma = \lambda$, то $\alpha\gamma = ab \notin L$, $\beta\gamma = aa \in L$. Отсюда по определению $\alpha\ \overline{E_L}\ \beta$.

d. Пусть $\alpha = babab$, $\beta = babab$. Тогда $\alpha = \beta$, но т.к. бинарное отношение E_L рефлексивно, то $\alpha\ E_L\ \beta$.

e. Пусть $\alpha = ba$, $\beta = babab$. Далее будем рассматривать пары слов $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$. Несложно увидеть, что для произвольного $\gamma \in A^*$ справедливо $\alpha\gamma, \beta\gamma \notin L$. Отсюда по определению $\alpha\ E_L\ \beta$.

f. Пусть $\alpha = aa$, $\beta = a$. Далее будем рассматривать пары слов $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$. Если $\gamma = a$, то $\alpha\gamma = aaa \notin L$, $\beta\gamma = aa \in L$. Отсюда по определению $\alpha\ \overline{E_L}\ \beta$.

Задание 1.5. (вариант 2)

Пусть $A=\{a,b\}$, $L=\{baaa,baa,bb,bba,b\}$. Какие из следующих выражений верны (Указать правильные варианты ответов).

a. $baE_L bb$
b. $bE_L a$
c. $bbE_L baa$
d. $ababaE_L ababa$
e. $bbE_L b$
f. $abE_L ababa$

Задание 1.5. (вариант 3)

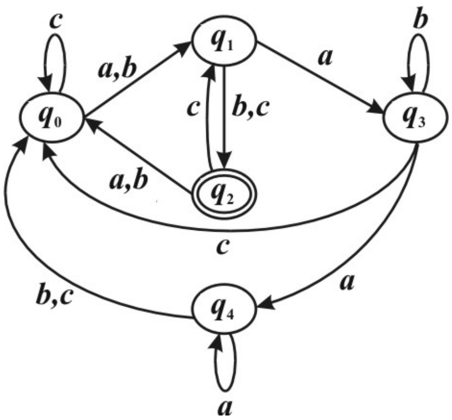
Пусть $A=\{a,b\}$, $L=\{aba,bba,bb,ab,a\}$. Какие из следующих выражений верны (Указать правильные варианты ответов).

a. $abE_L bb$
b. $aE_L b$
c. $abE_L aa$
d. $bbbaE_L bbba$
e. $bbbE_L babab$
f. $aaE_L a$

Задание 1.5. (вариант 4)
Пусть $A=\{a,b\}$, $L=\{bab,aab,aa,ba,b\}$. Какие из следующих выражений верны (Указать правильные варианты ответов).

a. $abbaE_L abba$
b. $baE_L aa$
c. $aE_L b$
d. $aaaE_L abba$
e. $aaE_L a$
f. $baE_L bb$

Задание 1.6. (вариант 1)
Задан следующий конечный автомат с входным алфавитом $A=\{a,b,c\}$:



Какие из следующих выражений верны (Указать правильные варианты ответов).

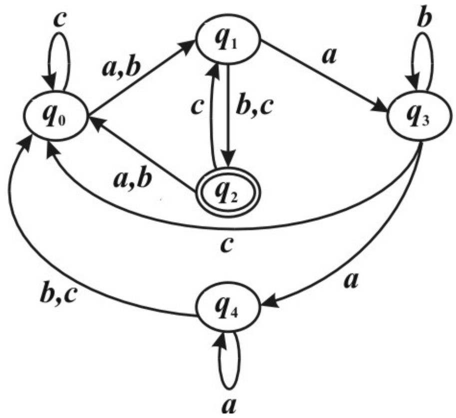
a. $q_0(\equiv)_0 q_3$
b. $q_4(\equiv)_1 q_0$
c. $q_3(\equiv)q_4$
d. $q_1(\equiv)_1 q_3$

Правильный ответ: a, d.
Решение:

a. Будем рассматривать пары состояний $\hat{g}(q_0, \gamma)$ и $\hat{g}(q_3, \gamma)$ при $\gamma \in A^*$, $l(\gamma) \le k$, где $k = 0$. Пусть $\gamma = \lambda$, тогда $\hat{g}(q_0, \gamma) = q_0 \notin F$, $\hat{g}(q_3, \gamma) = q_3 \notin F$. Отсюда по определению $q_0 (\equiv)_0 q_3$.
b. Будем рассматривать пары состояний $\hat{g}(q_4, \gamma)$ и $\hat{g}(q_0, \gamma)$ при $\gamma \in A^*$, $l(\gamma) \le k$, где $k = 1$. Пусть $\gamma = \lambda$, тогда $\hat{g}(q_4, \gamma) = q_4 \notin F$, $\hat{g}(q_0, \gamma) = q_0 \notin F$. Пусть $\gamma = a$, тогда $\hat{g}(q_4, \gamma) = q_4 \notin F$, $\hat{g}(q_0, \gamma) = q_1 \notin F$. Пусть $\gamma = b$, тогда $\hat{g}(q_4, \gamma) = q_0 \notin F$, $\hat{g}(q_0, \gamma) = q_1 \notin F$. Отсюда по определению $q_0 (\equiv)_1 q_3$.
c. Будем рассматривать пары состояний $\hat{g}(q_3, \gamma)$ и $\hat{g}(q_4, \gamma)$ при $\gamma \in A^*$. Пусть $\gamma = bab$, тогда $\hat{g}(q_3, \gamma) = q_0 \notin F$, $\hat{g}(q_4, \gamma) = q_2 \in F$ и γ является словом, различающим состояния q_3, q_4. Отсюда по определению $q_3 \overline{(\equiv)} q_4$.
d. Будем рассматривать пары состояний $\hat{g}(q_1, \gamma)$ и $\hat{g}(q_3, \gamma)$ при $\gamma \in A^*$, $l(\gamma) \le k$, где $k = 1$. Пусть $\gamma = b$, тогда $\hat{g}(q_1, \gamma) = q_2 \in F$, $\hat{g}(q_3, \gamma) = q_3 \notin F$ и γ является словом, различающим состояния q_1, q_3. Отсюда по определению $q_1 \overline{(\equiv)_1} q_3$.

Задание 1.6. (вариант 2)

Задан следующий конечный автомат с входным алфавитом $A = \{a, b, c\}$:

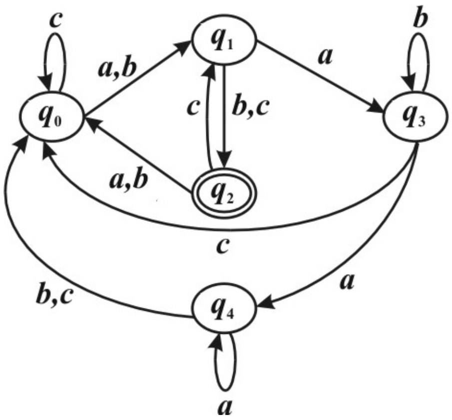


Какие из следующих выражений верны (Указать правильные варианты ответов).

a. $q_3 (\equiv) q_0$
b. $q_0 (\equiv)_0 q_1$
c. $q_4 (\equiv)_1 q_3$
d. $q_0 (\equiv)_2 q_4$

Задание 1.6. (вариант 3)

Задан следующий конечный автомат с входным алфавитом $A = \{a, b, c\}$:

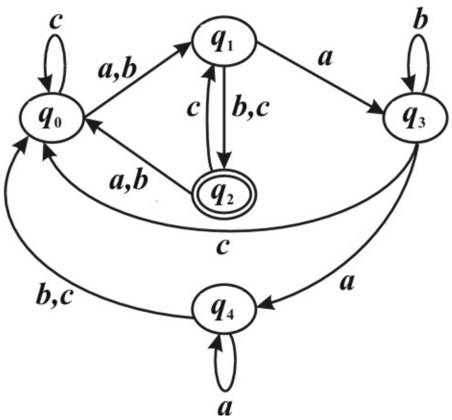


Какие из следующих выражений верны (Указать правильные варианты ответов).

a. $q_1(\equiv)q_4$
b. $q_3(\equiv)_0 q_4$
c. $q_2(\equiv)_1 q_3$
d. $q_3(\equiv)_1 q_4$

Задание 1.6. (вариант 4)

Задан следующий конечный автомат с входным алфавитом $A = \{a, b, c\}$:



Какие из следующих выражений верны (Указать правильные варианты ответов).

a. $q_3(\equiv)_1 q_2$
b. $q_3(\equiv)_0 q_1$
c. $q_0(\equiv)q_4$
d. $q_3(\equiv)_1 q_0$

Раздел 2. Формальные грамматики

2.1. Понятие формальной грамматики

Формальной грамматикой называется совокупность из четырех элементов $G = <T, N, S, P>$, где

- T – конечное множество терминальных символов (обозначаются прописными буквами);
- N – конечное множество нетерминальных символов (обозначаются заглавными буквами);
- $S \in N$ – специально выделенный нетерминальный символ, именуемый стартовым;
- P – конечное множество продукций, каждая отдельная продукция имеет вид $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta \in (T \cup N)^*$ и в слове α обязательно присутствует нетерминальный символ.

Выводом в грамматике G называется последовательность слов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$, удовлетворяющая условиям

- $\varphi_1 = S$;
- слово φ_i может быть представлено в виде $\varphi_i = \xi_1 \alpha \xi_2$, $\xi_1, \alpha, \xi_2 \in (T \cup N)^*$ и существует продукция $\alpha \to \beta \in P$, что $\varphi_{i+1} = \xi_1 \beta \xi_2$, $i = \overline{1, k-1}$.

Если $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ – вывод в грамматике G, то говорят, что слово φ_k выводимо в G.

Через $L(G)$ обозначается язык, порождаемый грамматикой G. Язык $L(G)$ определяется как множество всех слов терминального алфавита, выводимых в грамматике G.

Иногда при решении практических задач грамматика задается через перечисление ее продукций, предполагая, что все терминальные и нетерминальные символы грамматики присутствуют среди продукций. Продукции с общей левой частью записываются в одну строку, перечисляя различные правые части через символ прямой черты. Т.е. продукции $\alpha \to \beta_1$, $\alpha \to \beta_2, \ldots, \alpha \to \beta_k$ записываются в виде $\alpha \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid ... \mid \beta_k$.

Приведем пример. Пусть $G = <T, N, S, P>$, где $T = \{a, b\}$, $N = \{A, B, S\}$, $P = \{S \to aB, S \to AbAA, bA \to bAB, B \to BB, B \to bBb, B \to \lambda\}$. Грамматика G может быть записана следующим образом:

$S \to aB \mid AbAA$

$bA \to bAB$

$B \to BB \mid bBb \mid \lambda$

Классификация грамматик по Хомскому:

- грамматика G называется грамматикой типа 1, если каждая ее продукция имеет один из следующих видов

  $X \to \alpha Y$, $X, Y \in N$, $\alpha \in T^*$, $\alpha \neq \lambda$,

  $X \to \alpha$, $X \in N$, $\alpha \in T^*$;

– грамматика G называется грамматикой типа 2, если каждая ее продукция имеет следующий вид
$X \to \alpha$, $X \in N$, $\alpha \in (N \cup T)^*$;
– грамматика G называется грамматикой типа 3, если каждая ее продукция имеет следующий вид
$\alpha \to \beta$, $\alpha, \beta \in (N \cup T)^*$, $l(\alpha) \le l(\beta)$;
– грамматикой G типа 4 называется грамматика общего вида.

Язык L называется языком типа i, если существует грамматика G типа i, что $L(G) = L$.

Теорема 2.1. Класс языков типа 1 совпадает с классом регулярных языков.

2.2. Основные результаты теории контекстно-свободных грамматик

Грамматики типа 2 называются контекстно-сводными грамматиками, языки типа 2 называются контекстно-свободными языками.

Известна лемма о разрастании для контекстно-свободных языков. По аналогии с леммой о разрастании для регулярных языков данный результат может быть использован при доказательстве нерегулярности ряда языков методом «от противного».

Лемма 2.1. (лемма о разрастании). Для любого контекстно-свободного языка L существует натуральная константа k такая, что произвольное слово $\alpha \in L$, $l(\alpha) \ge k$ можно представить в виде $\alpha = \beta_1 \xi_1 \gamma \xi_2 \beta_2$, $\beta_1, \xi_1, \gamma, \xi_2, \beta_2 \in A^*$, что выполняются следующие условия
– $\alpha(i) = \beta_1 \xi_1^i \gamma \xi_2^i \beta_2 \in L$, $i \in Z^+$,
– $\xi_1 \xi_2 \ne \lambda$,
– $l(\xi_1 \gamma \xi_2) \le k$.

Результатов связанные с вопросами замкнутости класс контекстно-свободных языков относительно основных операций:

Теорема 2.2. Класс контекстно-свободных языков замкнут относительно операции объединения.

Теорема 2.3. Класс контекстно-свободных языков не замкнут относительно операции пересечения.

Следствие 2.1. Класс контекстно-свободных языков не замкнут относительно операции дополнения.

Теорема 2.4. Класс контекстно-свободных языков замкнут относительно операции конкатенация.

Следствие 2.2. Класс контекстно-свободных языков замкнут относительно операции возведения в степень.

Теорема 2.5. Класс контекстно-свободных языков замкнут относительно операции итерация.

2.3. Примеры задач

Задание 2.1. (вариант 1)

Задана формальная грамматика $G =< T, N, S, P >$, где $T = \{a,b\}$, $N = \{A, B, S\}$, множество продукций P определенно следующим образом.

$S \to AbA \mid AAbB$

$bA \to AAab \mid BAAB$

$AA \to bb \mid A$

$A \to bb \mid a$

$B \to AA \mid b$

Какие из следующих записей являются выводами в грамматике G (Указать правильные варианты ответов).

a. $S, AbA, AAbB$

b. $S, AbA, AAAab$

c. $S, AAbB, AbB, AbAA, abAA, abbb$

d. AAB, AB, aB, ab

Правильный ответ: b, c.

Решение:

a. Рассмотрим последовательность слов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, где $\varphi_1 = S, \varphi_2 = AbA, \varphi_3 = AAbB$. При любом разбиение слова φ_2 на три подслова $\varphi_2 = \xi_1 \alpha \xi_2$ таких, что существует продукция $\alpha \to \beta \in P$ выполняется следующее $\xi_1 \beta \xi_2 \neq \varphi_3$. Отсюда по определению последовательность не является выводом.

b. Рассмотрим последовательность слов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, где $\varphi_1 = S, \varphi_2 = AbA, \varphi_3 = AAAab$. Возьмем слово $\varphi_1 = S$ и представим его в виде $\varphi_1 = \xi_1 \alpha \xi_2$, где $\xi_1, \xi_2 = \lambda$, $\alpha = S$; пусть $\beta = AbA$, тогда $\alpha \to \beta \in P$ и $\xi_1 \beta \xi_2 = \varphi_2$. Далее возьмем слово $\varphi_2 = AbA$ и представим его в виде $\varphi_2 = \xi_1 \alpha \xi_2$, где $\xi_1 = A$, $\alpha = bA$, $\xi_2 = \lambda$; пусть $\beta = AAab$, тогда $\alpha \to \beta \in P$ и $\xi_1 \beta \xi_2 = \varphi_3$. Отсюда по определению последовательность является выводом.

c. Рассмотрим последовательность слов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$, где $\varphi_1 = S$, $\varphi_2 = AAbB$, $\varphi_3 = AbB$, $\varphi_4 = AbAA$, $\varphi_5 = abAA$, $\varphi_6 = abbb$. Возьмем слово $\varphi_1 = S$ и представим его в виде $\varphi_1 = \xi_1 \alpha \xi_2$, где $\xi_1, \xi_2 = \lambda$, $\alpha = S$; пусть $\beta = AAbB$, тогда $\alpha \to \beta \in P$ и $\xi_1 \beta \xi_2 = \varphi_2$. Возьмем слово $\varphi_2 = AAbB$ и представим его в виде $\varphi_2 = \xi_1 \alpha \xi_2$, где $\xi_1 = \lambda$, $\alpha = AA$, $\xi_2 = bB$; пусть $\beta = A$, тогда $\alpha \to \beta \in P$ и $\xi_1 \beta \xi_2 = \varphi_3$. Возьмем слово $\varphi_3 = AbB$ и представим его в виде $\varphi_3 = \xi_1 \alpha \xi_2$, где $\xi_1 = Ab$, $\alpha = B$, $\xi_2 = \lambda$; пусть $\beta = AA$, тогда $\alpha \to \beta \in P$ и $\xi_1 \beta \xi_2 = \varphi_4$. Далее возьмем слово $\varphi_4 = AbAA$ и представим его в виде $\varphi_4 = \xi_1 \alpha \xi_2$, где $\xi_1 = \lambda,\ \alpha = A,\ \xi_2 = bAA$; пусть $\beta = a$, тогда $\alpha \to \beta \in P$ и $\xi_1 \beta \xi_2 = \varphi_5$. Наконец возьмем слово $\varphi_5 = abAA$ и представим его в виде $\varphi_5 = \xi_1 \alpha \xi_2$, где $\xi_1 = ab,\ \alpha = AA,\ \xi_2 = \lambda$; пусть $\beta = bb$, тогда $\alpha \to \beta \in P$ и $\xi_1 \beta \xi_2 = \varphi_6$. Отсюда по определению последовательность является выводом.

d. Рассмотрим последовательность слов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, где $\varphi_1 = AAB,$ $\varphi_2 = AB,$ $\varphi_3 = aB,$ $\varphi_4 = ab$. Т.к. $\varphi_1 \neq S$, то по определению последовательность не является выводом.

Задание 2.1. (вариант 2)

Задана формальная грамматика $G =< T, N, S, P >$, где $T = \{a, b\}$, $N = \{A, B, S\}$, множество продукций P определенно следующим образом.

$S \to AbA \mid AAbB$
$bA \to AAab \mid BAAB$
$AA \to bb \mid A$
$A \to bb \mid a$
$B \to AA \mid b$

Какие из следующих записей являются выводами в грамматике G (Указать правильные варианты ответов).

a. $S, AbA, AAAab, Abbab, abbab$
b. $S, AAbB, AbB$
c. AAA, AA, A, a
d. S, AbA, aba

Задание 2.1. (вариант 3)

Задана формальная грамматика $G =< T, N, S, P >$, где $T = \{a, b\}$, $N = \{A, B, S\}$, множество продукций P определенно следующим образом.

$S \to AbA \mid AAbB$
$bA \to AAab \mid BAAB$
$AA \to bb \mid A$
$A \to bb \mid a$
$B \to AA \mid b$

Какие из следующих записей являются выводами в грамматике G (Указать правильные варианты ответов).

a. $S, AbA, AAAab, bbAab, bbaab$
b. $bAA, bA, BAAB$
c. $S, bA, AAab, BAAB$
d. $S, AAbB, bbbB, bbbAA$

Задание 2.1. (вариант 4)

Задана формальная грамматика $G =< T, N, S, P >$, где $T = \{a, b\}$, $N = \{A, B, S\}$, множество продукций P определенно следующим образом.

$S \to AbA \mid AAbB$
$bA \to AAab \mid BAAB$
$AA \to bb \mid A$
$A \to bb \mid a$
$B \to AA \mid b$

Какие из следующих записей являются выводами в грамматике G (Указать правильные варианты ответов).

a. S, bA, AA, A, B
b. $bA, AAab, bbab$
c. S, AbA
d. $S, AAbB, bbbB, bbbAA, bbBAABA$

Задание 2.2. (вариант 1)
Задана КСГ $G =< T, N, S, P >$, где $T = \{a, b\}$, $N = \{A, B, S\}$, множество продукций P определенно следующим образом.

$S \to AbA \mid AB$
$A \to aA \mid \lambda$
$B \to b$

Определить язык, порождаемый грамматикой G (Указать правильный вариант ответа).

a. $L(G) = \{a^n ba^m \mid n, m \in \mathrm{Z}^+\} \cup \{a^n b \mid n \in \mathrm{Z}^+\}$
b. $L(G) = \{a^n ba^n \mid n \in \mathrm{Z}^+\} \cup \{a^n b^n \mid n \in \mathrm{Z}^+\}$
c. $L(G) = \{a^n ba^n \mid n \in \mathrm{Z}^+\} \circ \{a^n b \mid n \in Z^+\}$
d. $L(G) = \{a^n \beta \mid n \in \mathrm{Z}^+, \beta \in \{a, b\}^*\}$

Правильный ответ: a.
Решение:

Несложно увидеть, что существует два «типа» выводов в данной грамматике. Первый начинается с последовательности S, AbA, второй с последовательности S, AB.

Рассмотрим вывод, начинающийся с S, AbA. Здесь можно произвольное (целое неотрицательное) число раз применять продукцию $A \to aA$ к «левому» либо «правому» нетерминальному символу A, после чего дважды применить продукцию $A \to \lambda$ и тем самым построить вывод $S, AbA, ..., aa...aAbaa..aA, aa...abaa..a$. Это позволяет вывести в грамматике G все слова множества $\{a^n ba^m \mid n, m \in \mathrm{Z}^+\}$.

Рассмотрим вывод, начинающийся с S, AB. Здесь можно произвольное (целое неотрицательное) число раз применять продукцию $A \to aA$, после чего один раз применить продукцию $A \to \lambda$, дополнительно можно один раз применить продукцию $B \to b$. Таким образом будет построен вывод $S, AB, ..., aa...ab$. Это позволяет вывести в грамматике G все слова множества $\{a^n b \mid n \in \mathrm{Z}^+\}$.

Объединив два множества слов терминального алфавита, получаемых в результате выводов двух возможных «типов», находим $L(G)=\{a^n ba^m \mid n,m \in Z^+\} \cup \{a^n b \mid n \in Z^+\}$.

Задание 2.2. (вариант 2)
Задана КСГ $G=<T,N,S,P>$, где $T=\{a,b\}$, $N=\{A,B,S\}$, множество продукций P определенно следующим образом.
$S \to AaA \mid AaB$
$A \to aA \mid \lambda$
$B \to b$
Определить язык, порождаемый грамматикой G (Указать правильный вариант ответа).

a. $L(G)=\{a^n \beta \mid n \in N, \beta \in \{a,b\}^*\}$
b. $L(G)=\{a^{2n+1} \mid n \in N\} \cup \{a^n b^n \mid n \in N\}$
c. $L(G)=\{a^n \mid n \in N\} \cup \{a^n b \mid n \in N\}$
d. $L(G)=\{a^{2n+1} \mid n \in N\} \circ \{a^n b \mid n \in N\}$

Задание 2.2. (вариант 3)
Задана КСГ $G=<T,N,S,P>$, где $T=\{a,b\}$, $N=\{A,B,S\}$, множество продукций P определенно следующим образом.
$S \to AbAA \mid BBA$
$A \to aA \mid \lambda$
$B \to b$
Определить язык, порождаемый грамматикой G (Указать правильный вариант ответа).

a. $L(G)=\{a^n ba^{2m} \mid n,m \in Z^+\} \circ \{bba^m \mid n,m \in Z^+\}$
b. $L(G)=\{a\beta \mid \beta \in \{a,b\}^*\} \cup \{\beta a \mid \beta \in \{a,b\}^*\}$
c. $L(G)=\{a^n ba^{2m} \mid n,m \in Z^+\} \cup \{b^{2n} a^m \mid n,m \in Z^+\}$
d. $L(G)=\{a^n ba^m \mid n,m \in Z^+\} \cup \{bba^n \mid n \in Z^+\}$

Задание 2.2. (вариант 4)
Задана КСГ $G=<T,N,S,P>$, где $T=\{a,b\}$, $N=\{A,B,S\}$, множество продукций P определенно следующим образом.
$S \to bABAb \mid BAB$
$A \to aA \mid a$
$B \to b$
Определить язык, порождаемый грамматикой G (Указать правильный вариант ответа).

a. $L(G)=\{ba^n b^m a^n b \mid n,m \in N\} \cup \{b^n a^m b^n \mid n,m \in N\}$
b. $L(G)=\{ba^n ba^m b \mid n,m \in N\} \cup \{ba^n b \mid n \in N\}$

c. $L(G)=\{b\beta b \mid \beta\in\{a,b\}^*\}$

d. $L(G)=\{ba^nba^nb \mid n,m\in N\}\circ\{ba^nb \mid n,m\in N\}$

Задание 2.3. (вариант 1)

Какие из следующих языков являются контекстно-свободными (Указать правильные варианты ответов).

a. $L=\{a^nb^{2n}a^n \mid n\in N\}$

b. $L=\{\alpha \mid \alpha\in\{a,b\}^*$ и количество букв a в слове α равно количеству букв $b\}$

c. $L=\{\alpha \mid \alpha\in\{a,b\}^*$, $l(\alpha)$ нечетное и в середине слова α содержится $a\}$

d. $L=\{a^nb^m \mid n,m\in N, n>m\}$

e. $L=\{\alpha\#\beta \mid \alpha,\beta\in\{a,b\}^*$ и слово α является подсловом слова $\beta\}$

f. $L=\{\alpha \mid \alpha\in\{a,b\}^*$, слово α начинается и заканчивается одни и тем же символом$\}$

Правильный ответ: b, c, d, f.

Решение:

a. Пусть $L=\{a^nb^{2n}a^n \mid n\in N\}$. Докажем от противного, используя лемму о разрастании, что L не является контекстно-свободным. Предположим, что L – контекстно-свободный. Согласно лемме существует константа k и слово $\alpha=a^kb^{2k}a^k$ ($\alpha\in L$ и $l(\alpha)=4k\geq k$) может быть представлено в виде $\alpha=\beta_1\xi_1\gamma\xi_2\beta_2$, что выполняются условия леммы о разрастании. Если ξ_1 или ξ_2 содержат одновременно и букву a и букву b, то $\alpha(2)\notin L$ в силу нарушения порядка следования букв a и b (в словах языка L идут буквы a, затем буквы b и затем снова буквы a). Далее будем считать, что каждое из слов ξ_1, ξ_2 состоит только из букв a или только из букв b. Тогда рассмотрим возможные способы разбиение слова α.

– Если $\xi_1,\xi_2\in\{a\}^*$, то в силу того, что $l(\xi_1\gamma\xi_2)\leq k$ возможен лишь один из следующих двух вариантов:

$$\alpha(2)=a^{k+l(\xi_1+\xi_2)}b^{2k}a^k \text{ и т.к. } l(\xi_1\xi_2)\neq 0, \text{ то } \alpha(2)\notin L;$$

$$\alpha(2)=a^kb^{2k}a^{k+l(\xi_1+\xi_2)} \text{ и т.к. } l(\xi_1\xi_2)\neq 0, \text{ то } \alpha(2)\notin L.$$

a. Если $\xi_1,\xi_2\in\{b\}^*$, то $\alpha(2)=a^kb^{2k+l(\xi_1+\xi_2)}a^k$ и т.к. $l(\xi_1\xi_2)\neq 0$, то $\alpha(2)\notin L$.

b. Если $\xi_1\in\{a\}^*$ $\xi_2\in\{b\}^*$, то $\alpha(2)=a^{k+l(\xi_1)}b^{2k+l(\xi_2)}a^k$ и т.к. $l(\xi_1\xi_2)\neq 0$, то $\alpha(2)\notin L$.

c. Если $\xi_1\in\{b\}^*$ $\xi_2\in\{a\}^*$, то $\alpha(2)=a^kb^{2k+l(\xi_1)}a^{k+l(\xi_2)}$ и т.к. $l(\xi_1\xi_2)\neq 0$, то $\alpha(2)\notin L$.

Получаем противоречие. Таким образом предположение неверно и L не является контекстно-свободным.

b. Пусть $L = \{\alpha \mid \alpha \in \{a,b\}^*$ и количество букв a в слове α равно количеству букв $b\}$. Язык L является контекстно-свободным, т.к. можно построить следующую контекстно-свободную грамматику, порождающую L:
$S \to aSbS \mid bSaS \mid \lambda$

c. Пусть $L = \{\alpha \mid \alpha \in \{a,b\}^*$, $l(\alpha)$ нечетное и в середине слова α содержится $a\}$. Язык L является контекстно-свободным, т.к. можно построить следующую контекстно-свободную грамматику, порождающую L:
$S \to aSa \mid aSb \mid bSa \mid bSb \mid a$

d. Пусть $L = \{a^n b^m \mid n, m \in N, n > m\}$. Язык L является контекстно-свободным, т.к. можно построить следующую контекстно-свободную грамматику, порождающую L:
$S \to AB$

$A \to aA \mid a$

$B \to aBb \mid ab$

e. Пусть $L = \{\alpha \# \beta \mid \alpha, \beta \in \{a,b\}^*$ и слово α является подсловом слова $\beta\}$. Докажем от противного, используя лемму о разрастании, что L не является контекстно-свободным. Предположим, что L – контекстно-свободный. Согласно лемме существует константа k и слово $\alpha = a^k b^k \# a^k b^k$ ($\alpha \in L$ и $l(\alpha) = 4k + 1 \ge k$) может быть представлено в виде $\alpha = \beta_1 \xi_1 \gamma \xi_2 \beta_2$, что выполняются условия леммы о разрастании. Если ξ_1 или ξ_2 содержат букву #, то $\alpha(2) \notin L$ в силу того, что будет содержать две буквы #. Далее будем считать, что $\xi_1, \xi_2 \in \{a,b\}^*$. Тогда рассмотрим возможные способы разбиение слова α.

– Если γ не содержит букву $\#$, то возможен лишь один из следующих двух вариантов:
  - $\alpha = a^{k_1} \xi_1 \gamma \xi_2 b^{k_2} \# a^k b^k$, где $k_1, k_2 \ge 0$ и зависят от слов ξ_1, γ, ξ_2, тогда и т.к. $\xi_1 \xi_2 \ne \lambda$, то $\alpha(2) \notin L$;
  - $\alpha = a^k b^k \# a^{k_1} \xi_1 \gamma \xi_2 b^{k_2}$, где $k_1, k_2 \ge 0$ и зависят от слов ξ_1, γ, ξ_2, тогда и т.к. $\xi_1 \xi_2 \ne \lambda$, то $\alpha(0) \notin L$;

– Если γ содержит букву $\#$, то в силу условия $l(\xi_1 \gamma \xi_2) \le k$ справедливо $\alpha(2) = a^k b^{k + l(\xi_1)} \# a^{k + l(\xi_2)} b^k$, но т.к. $l(\xi_1 \xi_2) \ne 0$, то $\alpha(2) \notin L$.

Получаем противоречие. Таким образом, предположение неверно и L не является контекстно-свободным.

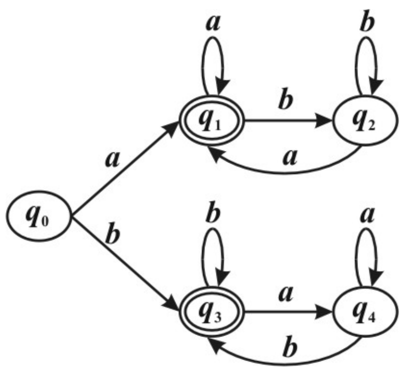
f. Пусть $L = \{\alpha \mid \alpha \in \{a,b\}^*$, слово α начинается и заканчивается одни и тем же символом$\}$. Язык L является контекстно-свободным, т.к. можно построить следующую контекстно-свободную грамматику, порождающую L.
Способ 1.

$S \to aAa \mid bAb$

$A \to aA \mid bA \mid \lambda$

Способ 2.

Языка L является регулярным, тогда построим конечный автомат K, распознающий язык L. Используя конечный автомат K, построим соответствующую ему грамматику G типа 1, порождающую язык L. Класс грамматик типа 1 включен в класс грамматик типа 2 (класс контекстно-свободных грамматик). Таким образом, построенная грамматика G будет являться контекстно-свободной. Конечный автомат K:



Соответствующая грамматика $G = <T, N, S, P>$, где $T = \{a, b\}$, $N = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $S = q_0$ и множество продукций P определяется следующим образом:

$q_0 \to aq_1 \mid bq_3$

$q_1 \to aq_1 \mid bq_2 \mid \lambda$

$q_2 \to aq_1 \mid bq_2$

$q_3 \to aq_4 \mid bq_3 \mid \lambda$

$q_4 \to aq_4 \mid bq_3$

Задание 2.3. (вариант 2)

Какие из следующих языков являются контекстно-свободными (Указать правильные варианты ответов).

a. $L = \{\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^*$ и количество букв a в слове α не равно количеству букв $b\}$

b. $L = \{a^{2n} b^n a^{2n} \mid n \in N\}$

c. $L = \{a^n b^m \mid n, m \in N, n < m\}$

d. $L = \{\alpha \# \beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^*$ и слово β является подсловом слова $\alpha\}$

e. $L = \{\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^*$, $l(\alpha)$ нечетное и в середине слова α содержится $aba\}$

f. $L = \{\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^*$, слово α содержит не менее двух букв $a\}$

Задание 2.3. (вариант 3)

Какие из следующих языков являются контекстно-свободными (Указать правильные варианты ответов).

a. $L=\{\alpha \mid \alpha\in\{a,b\}^*$, слово α содержит подслово $aba\}$
b. $L=\{a^nba^nba^n \mid n\in N\}$
c. $L=\{\alpha \mid \alpha\in\{a,b\}^*$ и количество букв a в слове α меньше количества букв $b\}$
d. $L=\{a^nb^m \mid n,m\in N, n\geq m\}$
e. $L=\{\alpha\#\beta \mid \alpha,\beta\in\{a,b\}^*, l(\alpha)=2l(\beta)$ и слово β является подсловом слова $\alpha\}$
f. $L=\{\alpha \mid \alpha\in\{a,b\}^*$, $l(\alpha)$ нечетное и в середине слова α не содержится $aba\}$

Задание 2.3. (вариант 4)
Какие из следующих языков являются контекстно-свободными (Указать правильные варианты ответов).

a. $L=\{\alpha \mid \alpha\in\{a,b\}^*$, слово α не содержит подслово $bb\}$
b. $L=\{\alpha\#\beta \mid \alpha,\beta\in\{a,b\}^*, 2l(\alpha)=l(\beta)$ и слово α является подсловом слова $\beta\}$
c. $L=\{\alpha \mid \alpha\in\{a,b\}^*$ и количество букв a в слове α не меньше количества букв $b\}$
d. $L=\{\alpha \mid \alpha\in\{a,b\}^*$, $l(\alpha)$ нечетное и в середине слова α не содержится aba и $bab\}$
e. $L=\{a^nb^m \mid n,m\in N, n\leq m\}$
f. $L=\{a^na^{2n}c^{3n} \mid n\in N\}$

Задание 2.4. (вариант 1)
Какие из следующих языков являются контекстно-свободными, но не являются регулярными (Указать правильные варианты ответов).

a. $L=\{a^nb^ma^n \mid n,m\in N\}$
b. $L=\{a^{2n}ba^{3m} \mid n,m\in N\}$
c. $L=\{\alpha \mid \alpha\in\{a,b\}^*$, подслово ab в слове α встречается нечетное число раз$\}$
d. $L=\{a^nb^na^m \mid n,m\in N\}$
e. $L=\{ab^na \mid n\in N\}$
f. $L=\{\alpha \mid \alpha\in\{a,b\}^*$, количество букв a в слове α четно$\}$

Правильный ответ: a, d.
Решение:

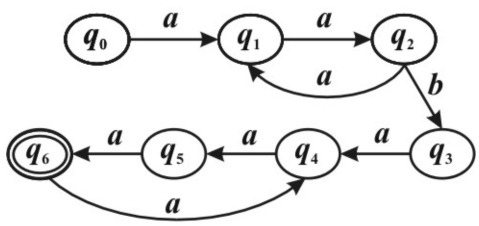
a. Пусть $L = \{a^n b^m a^n \mid n, m \in N\}$. Язык L является контекстно-свободным, т.к. можно построить следующую контекстно-свободную грамматику, порождающую L:

$S \to aSa \mid abBa$

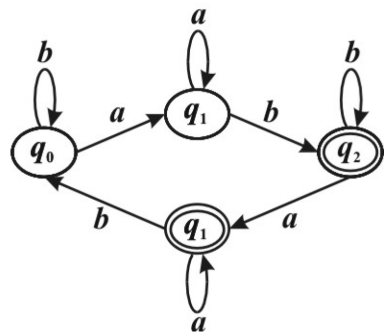
$B \to BB \mid \lambda$

С другой стороны язык L не является регулярным. Докажем от противного, используя лемму о разрастании. Предположим, что L – регулярный. Согласно лемме существует константа k и слово $\alpha = a^k b a^k$ ($\alpha \in L$ и $l(\alpha) = 2k + 1 \geq k$) может быть представлено в виде $\alpha = \beta_1 \gamma \beta_2$, что выполняются условия леммы о разрастании. Т.к. $\gamma \neq \lambda$, то $l(\gamma) \neq 0$; и т.к. $l(\beta_1 \gamma) \leq k$, то $\gamma \in \{a\}^*$. Тогда $\alpha(2) = a^{k+l(\gamma)} b a^k \notin L$. Получаем противоречие. Таким образом предположение неверно и L не является регулярным.

b. Пусть $L = \{a^{2n} b a^{3m} \mid n, m \in N\}$. Язык L является регулярным, т.к. можно построить конечный автомат, распознающий L:



c. Пусть $L = \{\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^*$, подслово ab в слове α встречается нечетное число раз$\}$. Язык L является регулярным, т.к. можно построить конечный автомат, распознающий L:



d. Пусть $L = \{a^n b^n a^m \mid n, m \in N\}$. Язык L является контекстно-свободным, т.к. можно построить следующую контекстно-свободную грамматику, порождающую L:

$S \to AB$

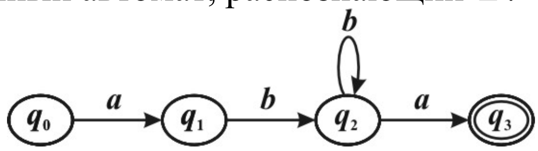
$A \to aAb \mid ab$

$B \to aB \mid a$

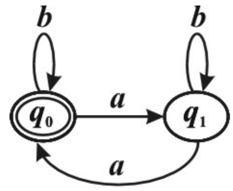
С другой стороны язык L не является регулярным. Докажем от противного, используя лемму о разрастании. Предположим, что L – регулярный. Согласно лемме существует константа k и слово $\alpha = a^k b^k a^k$ ($\alpha \in L$ и $l(\alpha) = 3k \geq k$) может быть представлено в виде

$\alpha = \beta_1\gamma\beta_2$, что выполняются условия леммы о разрастании. Т.к. $\gamma \neq \lambda$, то $l(\gamma) \neq 0$; и т.к. $l(\beta_1\gamma) \leq k$, то $\gamma \in \{a\}^*$. Тогда $\alpha(2) = a^{k+l(\gamma)}b^k a^k \notin L$. Получаем противоречие. Таким образом предположение неверно и L не является регулярным.

e. Пусть $L = \{ab^n a \mid n \in N\}$. Язык L является регулярным, т.к. можно построить конечный автомат, распознающий L:



f. Пусть $L = \{\alpha \mid \alpha \in \{a,b\}^*$, количество букв a в слове α четно$\}$. Язык L является регулярным, т.к. можно построить конечный автомат, распознающий L:



Задание 2.4. (вариант 2)
Какие из следующих языков являются контекстно-свободными, но не являются регулярными (Указать правильные варианты ответов).

a. $L = \{a^{2n}b^{3m} \mid n,m \in N\}$
b. $L = \{\alpha \mid \alpha \in \{a,b\}^*$, подслово aba в слове α встречается четное число раз$\}$
c. $L = \{a^n b a^n \mid n \in N\}$
d. $L = \{\alpha \mid \alpha \in \{a,b\}^*$, количество букв a в слове α кратно трем$\}$
e. $L = \{ab^{2n}a \mid n \in N\}$
f. $L = \{a^n b a^m \mid n,m \in N, n \geq m\}$

Задание 2.4. (вариант 3)
Какие из следующих языков являются контекстно-свободными, но не являются регулярными (Указать правильные варианты ответов).

a. $L = \{a^{2n}b^{3m}a^{4k} \mid n,m,k \in N\}$
b. $L = \{a^n b^m \mid n,m \in N, n > m\}$
c. $L = \{\alpha \mid \alpha \in \{a,b\}^*$, подслово aa в слове α встречается нечетное число раз$\}$
d. $L = \{ab^{2n}a \mid n \in N\}$
e. $L = \{\alpha \mid \alpha \in \{a,b\}^*$, количество букв a, стоящих на нечетных позициях слова α, четно$\}$
f. $L = \{ba^n ba^n b \mid n \in N\}$

Задание 2.4. (вариант 4)

Какие из следующих языков являются контекстно-свободными, но не являются регулярными (Указать правильные варианты ответов).

a. $L = \{\alpha \mid \alpha \in \{a,b\}^*$, подслово bb в слове α встречается четное число раз$\}$
b. $L = \{a^n b a^{2k} b a^{3m} \mid n,m,k \in N\}$
c. $L = \{a^n b^m \mid n,m \in N, n \neq m\}$
d. $L = \{\alpha \mid \alpha \in \{a,b\}^*$, количество букв b, стоящих на нечетных позициях слова α, кратно трем$\}$
e. $L = \{ba^n ba^{2n} b \mid n \in N\}$
f. $L = \{bab^{2n} ab \mid n \in N\}$

Список рекомендуемой литературы

Основная литература.

1. Коган Д.И., Бабкина Т.С. Основы теории конечных автоматов и регулярных языков. Учебное пособие. Издательство ННГУ. 2002.
2. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции в 2 тт. Т. 1. М.: Мир. 1978.

Дополнительная литература.

3. Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков - М.: Мир. 1973.
4. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. - М.: Физматгиз. 1980.
5. Карпов Ю.Г. Теория автоматов. - С.Пб.: Изд.дом "Питер". 2002.
6. Sipser M. Introduction to the Theory of Computation (2nd edition). PWS Publishing company. 2005.