

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский  
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

А.Л. Пригоровский  
В.М. Сандалов  
Н.В. Мудрак

**Задачи по теории колебаний,  
устойчивости движения  
и качественной теории  
дифференциальных уравнений**

**Часть 5. Метод гармонической линеаризации**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 01.03.03 «Механика и математическое моделирование».

Нижегород  
2017

УДК 517.938: 517.925(075.8)

ББК В 161.6я73

П 75

П 75 Пригоровский А.Л., Сандалов В.М., Мудрак Н.В. Задачи по теории колебаний, устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений. Часть 5. Метод гармонической линеаризации: Учебное-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 21 с.

Рецензент: к.ф.-м.н. **Мальханов А.О.**

В данной части пособия рассмотрена методика приближенного исследования динамических систем методом гармонической линеаризации, приведены примеры задач с разбором их решения, а также контрольные вопросы и задачи для самостоятельной работы. Ко многим задачам даны ответы, указания и пояснения к решениям.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов и аспирантов, специализирующихся по фундаментальным проблемам механики и прикладной математики, а также для преподавателей и специалистов, занимающихся изучением динамических систем различной природы.

УДК 517.938: 517.925(075.8)

ББК В 161.6я73

© **Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2017**

## Содержание

Введение.....	4
1. Алгоритм исследования динамических систем методом гармонической линеаризации.....	5
2. Примеры исследований систем методом гармонической линеаризации.....	7
3. Контрольные вопросы.....	15
4. Задачи для самостоятельной работы.....	15
5. Ответы и указания к решению.....	17
Список литературы.....	20

*На свете есть вещи поважнее самых прекрасных открытий – это знание метода, которым они были сделаны.*  
Г.В. Лейбниц

## Введение

В данной части учебно-методического пособия “Задачи по теории колебаний, устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений” приводится изложение одного из приближенных методов количественного исследования нелинейных динамических систем – метода гармонической линеаризации.

Идея метода принадлежит Н.М. Крылову и Н.Н. Боголюбову [1]. Существенный вклад в его развитие внес Л.С. Гольдфарб [2], давший геометрическую интерпретацию метода. Необходимо отметить также работы Е.П. Попова и И.П. Пальтова [3,4], в которых метод гармонической линеаризации обобщен, развит и применен к разнообразным конкретным задачам теории автоматического регулирования и управления.

Метод гармонической линеаризации является приближенным способом отыскания периодических режимов в нелинейных динамических системах. Он основан на том, что при выполнении ряда условий, даже при наличии нелинейностей, установившиеся в системе колебания оказываются близкими к гармоническим. Приближенное решение ищется в виде гармонической функции  $x^* = A_0 + A \sin(\omega t)$ , и задача сводится к отысканию параметров гармоника  $A_0, A, \omega$ .

Качественным отличием от методов Пуанкаре и Ван-дер-Поля является отсутствие малого параметра.

В предлагаемой части учебно-методического пособия приведены примеры задач исследования динамических систем методом гармонической линеаризации с разбором их решения, а также 15 контрольных вопросов и 15 заданий для самостоятельной работы студентов с ответами и указаниями к решению.

В течение ряда лет курс теории устойчивости и теории нелинейных колебаний читал профессор В.Д. Горяченко, который относил этот курс к *прикладной математике*. Одному из авторов настоящего пособия В.Д. Горяченко высказал пожелание об издании сборника задач по теории колебаний ввиду их недостаточного количества. Задачи по теории колебаний и устойчивости, приведенные в пособии, посвящаются светлой памяти В.Д. Горяченко.

# 1. Алгоритм исследования динамических систем методом гармонической линеаризации

Рассмотрим дифференциальное уравнение [5]:

$$Q(\lambda)x + R(\lambda)F(x, \lambda x) = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda = \frac{d}{dt}$  – дифференциальный оператор;  $Q(\lambda)$  и  $R(\lambda)$  – полиномы и  $F(x, \lambda x)$  – нелинейная функция переменных  $x$  и  $\dot{x}$  ( $\lambda x = \dot{x}$ ).

Поясним обозначения на конкретном примере:

$$\ddot{x} + x = (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)\dot{x}.$$

Перенесем все в левую часть и приведем к виду (1):

$$\ddot{x} - \dot{x} + x - (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)\dot{x} = 0.$$

Здесь

$$Q(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1, R(\lambda) = -1, F(x, \lambda x) = (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)(\lambda x).$$

Приближенное решение системы (1) будем искать в виде гармонической функции

$$x^* = A_0 + A \sin \omega t, \dot{x}^* = A\omega \cos \omega t.$$

Задача заключается в отыскании амплитуды колебаний  $A$ , частоты  $\omega$  и постоянной составляющей  $A_0$ .

Рассмотрим алгоритм исследования динамических систем методом гармонической линеаризации.

1. Посредством замены  $F(x, \lambda x) \rightarrow \left(q + \frac{q'}{\omega} \lambda\right) x^*$  получаем гармонически линеаризованную систему  $Q(\lambda)x^* + R(\lambda) \left(q + \frac{q'}{\omega} \lambda\right) x^* = 0$ , где  $q, q'$  – коэффициенты гармонической линеаризации:

$$\begin{cases} q = q(A_0, A, \omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A_0 + A \sin u, A\omega \cos u) \sin u \, du, \\ q' = q'(A_0, A, \omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A_0 + A \sin u, A\omega \cos u) \cos u \, du. \end{cases} \quad (2)$$

В формуле (2) принято  $u = \omega t$ .

2. Составляем характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы:

$$M(\lambda) = Q(\lambda) + R(\lambda) \left(q + \frac{q'}{\omega} \lambda\right) = 0. \quad (3)$$

Полагая в (3)  $\lambda = i\omega$ , выделим действительную и мнимую части:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} M(i\omega) = f_1(\omega, q(A_0, A, \omega), q'(A_0, A, \omega)) = 0, \\ \operatorname{Im} M(i\omega) = f_2(\omega, q(A_0, A, \omega), q'(A_0, A, \omega)) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

$$\quad (5)$$

3. Дополняем уравнения (4), (5) уравнением:

$$Q(0)A_0 + R(0)F_0 = 0, \quad (6)$$

где

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A_0 + A \sin u, A\omega \cos u) du.$$

4. Решаем систему алгебраических уравнений (4), (5), (6), из которой находим неизвестные величины  $A_0$ ,  $A$ , и  $\omega$ .

5. Проводим расчет устойчивости найденного периодического решения:

$$x(t) = A \sin \omega t. \quad (7)$$

Константа  $A_0$  при исследовании решения не влияет на устойчивость.

Пусть в некоторый начальный момент времени произошли малые изменения амплитуды  $A$  автоколебаний на величину  $\Delta A$  и частоты  $\omega$  на величину  $\Delta\omega$ . Такие начальные возмущения решения (7) приводят к выражению:

$$x(t) = (A + \Delta A)e^{\xi t} \sin(\omega + \Delta\omega)t. \quad (8)$$

Переход от (7) к (8) означает преобразование чисто мнимого корня  $\lambda = i\omega$  в комплексный  $\lambda = \xi + i(\omega + \Delta\omega)$ .

Для устойчивости необходимо, чтобы  $\Delta A$  и  $\xi$  были разных знаков. В таком случае при  $\Delta A > 0$  размахи колебаний уменьшаются, а при  $\Delta A < 0$  увеличиваются, стремясь к  $A$ .

В уравнении (3) положим  $\lambda = \xi + i(\omega + \Delta\omega)$ , заменим  $A$  на  $A + \Delta A$  и разделим реальную и мнимую части [5]:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} M(\lambda = \xi + i(\omega + \Delta\omega), A + \Delta A, \omega + \Delta\omega) = \psi_1(A + \Delta A, \omega + \Delta\omega, \xi) = 0, \\ \operatorname{Im} M(\lambda = \xi + i(\omega + \Delta\omega), A + \Delta A, \omega + \Delta\omega) = \psi_2(A + \Delta A, \omega + \Delta\omega, \xi) = 0. \end{cases}$$

Полагая, что  $\Delta A$ ,  $\Delta\omega$  и  $\xi$  малые, разложим функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  полученной системы в ряд Тейлора и ограничимся линейными членами:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial A}\right)_0 \Delta A + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\omega}\right)_0 \Delta\omega + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}\right)_0 \xi = 0, \\ \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial A}\right)_0 \Delta A + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\omega}\right)_0 \Delta\omega + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\xi}\right)_0 \xi = 0. \end{cases}$$

Индекс нуль указывает на значение производной в точке  $(A, \omega, \xi = 0)$ .

Исключим  $\Delta\omega$  и получим [5]:

$$\left(\frac{\psi'_{1A}}{\psi'_{1\omega}} - \frac{\psi'_{2A}}{\psi'_{2\omega}}\right) \Delta A = \left(\frac{\psi'_{2\xi}}{\psi'_{2\omega}} - \frac{\psi'_{1\xi}}{\psi'_{1\omega}}\right) \xi.$$

Поскольку  $\xi$  и  $\Delta A$  должны иметь разные знаки для устойчивости решения, то критерий устойчивости имеет вид:

$$\psi = \left(\frac{\psi'_{1A}}{\psi'_{1\omega}} - \frac{\psi'_{2A}}{\psi'_{2\omega}}\right) : \left(\frac{\psi'_{2\xi}}{\psi'_{2\omega}} - \frac{\psi'_{1\xi}}{\psi'_{1\omega}}\right) < 0,$$

где все производные берутся при  $\Delta A = \Delta\omega = \xi = 0$ .

## 2. Примеры исследований систем методом гармонической линеаризации

**Задача 1.** Методом гармонической линеаризации найти периодические решения, описывающие поведение маятника Фруда [5]

$$\ddot{x} + x = \mu(-a\dot{x} - b\dot{x}^3).$$

Исследовать их на устойчивость, построить бифуркационную диаграмму при  $\mu = 1$ .

**Решение.**

Перепишем исходное уравнение в следующем виде:

$$\ddot{x} + \mu a \dot{x} + x + \mu b \dot{x}^3 = 0.$$

В данной задаче:

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + \mu a \lambda + 1, R(\lambda) = \mu b, F(x, \lambda x) = \dot{x}^3 = (\lambda x)^3.$$

Положим  $x = A_0 + A \sin \omega t$ ,  $\dot{x} = \lambda x = A \omega \cos \omega t$ . Тогда:

$$F(x, \lambda x) = A^3 \omega^3 \cos^3 \omega t.$$

Подсчитаем коэффициенты гармонической линеаризации  $q$  и  $q'$  по формуле (2):

$$q = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} A^3 \omega^3 \cos^3 u \sin u \, du = 0,$$

$$q' = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} A^3 \omega^3 \cos^4 u \, du = \frac{A^2 \omega^3}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (3 + 4 \cos 2u + \cos 4u) \, du = \frac{3}{4} A^2 \omega^3.$$

Гармонически линеаризованное уравнение имеет вид:

$$(\lambda^2 + \mu a \lambda + 1)(A_0 + A \sin \omega t) + \frac{3}{4} \mu b A^2 \omega^2 \lambda (A \sin \omega t) = 0,$$

а характеристическое уравнение таково:

$$M(\lambda) = \lambda^2 + \mu \left( a + \frac{3}{4} b A^2 \omega^2 \right) \lambda + 1 = 0.$$

Положим в последнем уравнении  $\lambda = i\omega$  и выделим действительную и мнимую части:

$$\left\{ \operatorname{Re} M(i\omega) = -\omega^2 + 1 = 0, \operatorname{Im} M(i\omega) = a + \frac{3}{4} b A^2 \omega^2 = 0. \right\} \quad (9)$$

Определим  $F_0$  по формуле:

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A_0 + A \sin u, A \omega \cos u) \, du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^3 \omega^3 \cos^3 u \, du = 0.$$

Дополним систему (9) уравнением  $Q(0)A_0 + R(0)F_0 = 0$ , из которого следует, что  $A_0 = 0$ , поскольку  $Q(0) = 1$  и  $F_0 = 0$ . Получаем:

$$\left\{ -\omega^2 + 1 = 0, a + \frac{3}{4} b A^2 \omega^2 = 0, A_0 = 0. \right\}$$

Следовательно,

$$\left\{ \omega = 1, A = \sqrt{-\frac{4a}{3b}}, A_0 = 0. \right\}$$

Итак, решение найдено:

$$x = \sqrt{-\frac{4a}{3b}} \sin t.$$

Колебания возможны только в том случае, если  $a$  и  $b$  – разных знаков (то есть  $ab < 0$ ).

Для анализа устойчивости решения подставим в характеристическое уравнение

$$\lambda = \xi + i(\omega + \Delta\omega), A = A + \Delta A, \omega = \omega + \Delta\omega$$

и выделим реальную и мнимую части:

$$\begin{cases} \xi^2 - (\omega + \Delta\omega)^2 + 1 + \xi\mu \left( a + \frac{3}{4}b(A + \Delta A)^2(\omega + \Delta\omega)^2 \right) = 0, \\ 2\xi + \mu \left( a + \frac{3}{4}b(A + \Delta A)^2(\omega + \Delta\omega)^2 \right) = 0. \end{cases}$$

Все члены порядка выше первого относительно  $\xi$ ,  $\Delta\omega$  и  $\Delta A$  отбросим, а члены нулевого порядка будут равны нулю согласно (9).

В результате получим

$$\left\{ \Delta\omega = 0, \xi + \frac{3}{4}Ab\mu\Delta A = 0. \right\}$$

Условие устойчивости:  $\Delta A$  и  $\xi$  разных знаков, то есть

$$\frac{\xi}{\Delta A} = -\frac{3}{4}Ab\mu < 0.$$

Учтём, что  $A > 0$ . Тогда найденное решение будет устойчивым при  $b\mu > 0$ .

Бифуркационные диаграммы по параметру  $a$  при  $\mu = 1$  имеют вид:

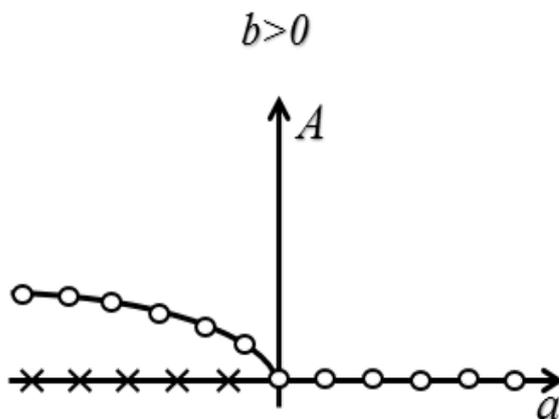


Рис. 1

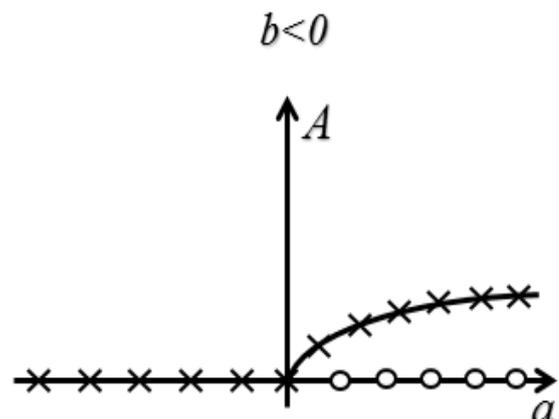


Рис. 2

- - устойчивое решение,
- × - неустойчивое решение.

**Задача 2.** Исследовать динамическую систему

$$\ddot{x} + x = -\mu(\dot{x} - a(\dot{x} - \dot{x}^3))$$

на устойчивость методом гармонической линеаризации и построить бифуркационную диаграмму.

**Решение.**

Система, приведенная к стандартному виду (1), имеет вид:

$$\ddot{x} + \mu(1 - a)\dot{x} + x + \mu a \dot{x}^3 = 0,$$

где

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + \mu(1 - a)\lambda + 1, R(\lambda) = \mu a, F(x, \lambda x) = \dot{x}^3 = (\lambda x)^3.$$

Пусть  $x = A_0 + A \sin \omega t$ ,  $\dot{x} = \lambda x = A\omega \cos \omega t$ . Тогда:

$$F(x, \lambda x) = A^3 \omega^3 \cos^3 \omega t.$$

Вычислим коэффициенты гармонической линеаризации  $q$  и  $q'$ :

$$q = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} A^3 \omega^3 \cos^3 u \sin u \, du = 0,$$

$$q' = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} A^3 \omega^3 \cos^4 u \, du = \frac{A^2 \omega^3}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (3 + 4 \cos 2u + \cos 4u) \, du = \frac{3}{4} A^2 \omega^3.$$

Гармонически линеаризованное уравнение таково:

$$(\lambda^2 + \mu(1 - a)\lambda + 1)(A_0 + A \sin \omega t) + \frac{3}{4} \mu a A^2 \omega^2 \lambda (A \sin \omega t) = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы:

$$M(\lambda) = \lambda^2 + \mu \left( \left( \frac{3}{4} A^2 \omega^2 - 1 \right) a + 1 \right) \lambda + 1 = 0.$$

Положим в нем  $\lambda = i\omega$  и выделим реальную и мнимую части:

$$\left\{ \operatorname{Re} M(i\omega) = -\omega^2 + 1 = 0, \operatorname{Im} M(i\omega) = \left( \frac{3}{4} A^2 \omega^2 - 1 \right) a + 1 = 0. \right\} \quad (10)$$

Дополним систему (10) уравнением  $Q(0)A_0 + R(0)F_0 = 0$ , где:

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A_0 + A \sin u, A\omega \cos u) \, du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^3 \omega^3 \cos^3 u \, du = 0.$$

Из уравнения  $Q(0)A_0 + R(0)F_0 = 0$  следует, что  $A_0 = 0$ , так как  $Q(0) = 1$  и  $F_0 = 0$ . Тогда система (10) имеет вид:

$$\left\{ -\omega^2 + 1 = 0, \left( \frac{3}{4} A^2 \omega^2 - 1 \right) a + 1 = 0, A_0 = 0, \right\}$$

откуда:

$$\left\{ \omega = 1, A = \sqrt{\frac{4(a-1)}{3a}}, A_0 = 0. \right\}$$

Следовательно,

$$x = \sqrt{\frac{4(a-1)}{3a}} \sin t.$$

Колебания возможны только в том случае, если  $a < 0$  или  $a > 1$ .

Проведем расчет устойчивости решения. Для этого положим в характеристическом уравнении

$$\lambda = \xi + i(\omega + \Delta\omega), A = A + \Delta A, \omega = \omega + \Delta\omega$$

и выделим действительную и мнимую части:

$$\begin{cases} \xi^2 - (\omega + \Delta\omega)^2 + 1 + \mu\xi \left( \left( \frac{3}{4}(A + \Delta A)^2(\omega + \Delta\omega)^2 - 1 \right) a + 1 \right) = 0, \\ 2\xi + \mu a \left( \frac{3}{4}(A + \Delta A)^2(\omega + \Delta\omega)^2 - 1 \right) + \mu = 0. \end{cases}$$

Оставим только линейные относительно  $\xi$ ,  $\Delta\omega$  и  $\Delta A$  члены:

$$\left\{ \Delta\omega = 0, \xi + \mu a \frac{3}{4} A \Delta A = 0. \right\}$$

Условие устойчивости:  $\Delta A$  и  $\xi$  разных знаков, то есть

$$\frac{\xi}{\Delta A} = -\frac{3}{4} \mu a A < 0.$$

При  $A > 0$  найденное решение будет устойчивым, если  $\mu a > 0$ .

Поскольку колебания существуют, когда  $a < 0$  или  $a > 1$ , то найденное решение будет устойчивым в двух случаях:

- 1)  $\mu > 0, a > 1$ ;
- 2)  $\mu < 0, a < 0$ .

Бифуркационные диаграммы по параметру  $a$  изображены на рис. 3,4.

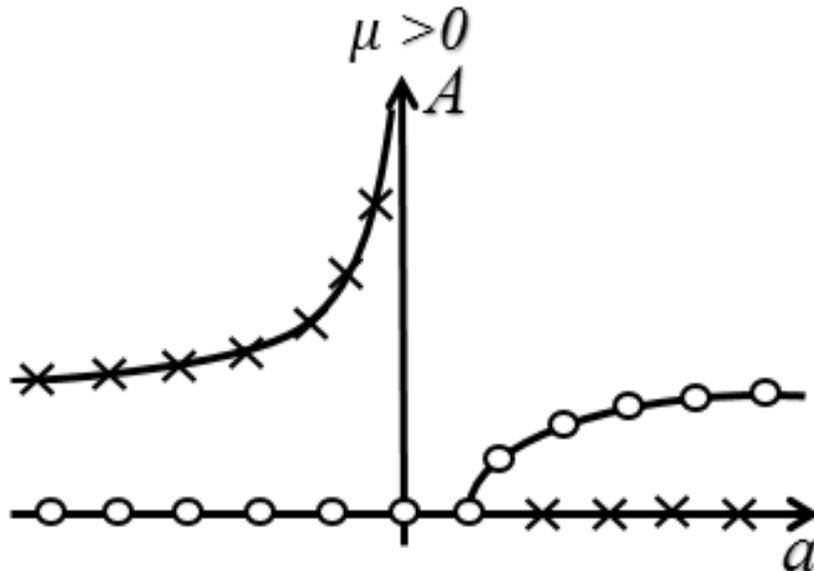


Рис. 3

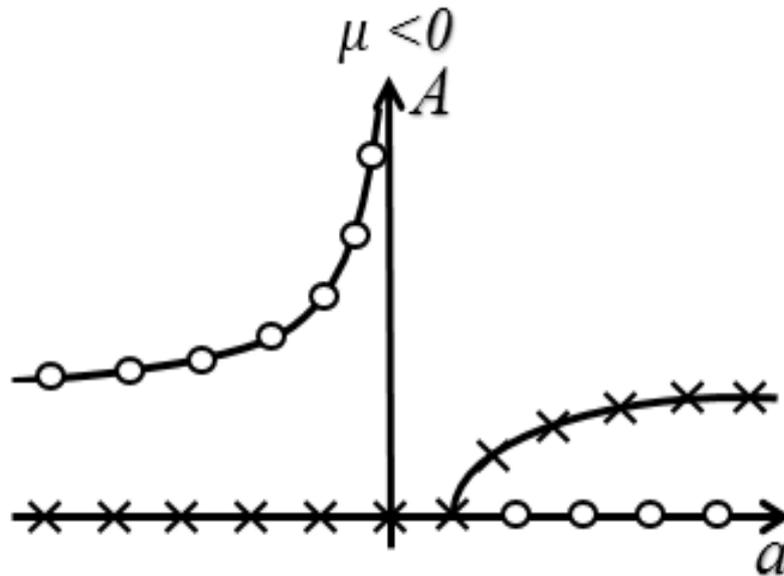


Рис. 4

**Задача 3.** Исследовать систему

$$\ddot{x} + x = (1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\dot{x}$$

на устойчивость методом гармонической линеаризации и построить бифуркационную диаграмму.

**Решение.**

Перепишем исходное уравнение в следующем виде:

$$\ddot{x} - \dot{x} + x - (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\dot{x} = 0.$$

Здесь:

$$Q(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1, R(\lambda) = -1,$$

$$F(x, \lambda x) = (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\dot{x} = (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)(\lambda x).$$

Положим  $x = A_0 + A \sin \omega t$ ,  $\dot{x} = A\omega \cos \omega t$ . Тогда:

$$F(x, \lambda x) = (a_1A \sin \omega t + a_2(A \sin \omega t)^2 + a_3(A \sin \omega t)^3)A\omega \cos \omega t.$$

Коэффициенты гармонической линеаризации:

$$q = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} (a_1A \sin^2 u + a_2A^2 \sin^3 u + a_3A^3 \sin^4 u)A\omega \cos u \, du = 0,$$

$$q' = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} (a_1A \sin u + a_2A^2 \sin^2 u + a_3A^3 \sin^3 u)A\omega \cos^2 u \, du = \frac{a_2A^2\omega}{4}.$$

Гармонически линеаризованное уравнение имеет вид:

$$(\lambda^2 - \lambda + 1)(A_0 + A \sin \omega t) - \frac{a_2A^2}{4} \lambda (A \sin \omega t) = 0,$$

а характеристическое уравнение:

$$M(\lambda) = \lambda^2 - \left(1 + \frac{a_2A^2}{4}\right) \lambda + 1 = 0.$$

Подставим в это уравнение  $\lambda = i\omega$  и отделим действительную и мнимую части:

$$\left\{ \operatorname{Re}M(i\omega) = -\omega^2 + 1 = 0, \operatorname{Im}M(i\omega) = 1 + \frac{a_2 A^2}{4} = 0. \right\} \quad (11)$$

Вычислим  $F_0$ :

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_1 A \sin u + a_2 A^2 \sin^2 u + a_3 A^3 \sin^3 u) A \omega \cos u \, du = 0.$$

Дополним систему (11) уравнением  $Q(0)A_0 + R(0)F_0 = 0$ , из которого следует, что  $A_0 = 0$ , поскольку  $Q(0) = 1$  и  $F_0 = 0$ . Получаем:

$$\left\{ \omega = 1, A = \frac{2}{\sqrt{-a_2}}, A_0 = 0. \right\}$$

Итак, решение найдено:

$$x = \frac{2}{\sqrt{-a_2}} \sin t.$$

Колебания возможны только в том случае, если  $a_2 < 0$ .

Расчет устойчивости проводим тем же способом, что и в предыдущей задаче.

$$\begin{cases} \xi^2 - (\omega + \Delta\omega)^2 + 1 - \xi \left( 1 + \frac{a_2}{4} (A + \Delta A)^2 \right) = 0, \\ 2\xi - \left( 1 + \frac{a_2}{4} (A + \Delta A)^2 \right) = 0. \end{cases}$$

В итоге получаем уравнения:

$$\left\{ \Delta\omega = 0, \xi - \frac{a_2}{4} A \Delta A = 0. \right\}$$

Условие устойчивости:  $\Delta A$  и  $\xi$  разных знаков, то есть

$$\frac{\xi}{\Delta A} = \frac{a_2}{4} A < 0.$$

При  $A > 0$  найденное решение будет устойчивым, если  $a_2 < 0$ .

Бифуркационная диаграмма по параметру  $a_2$  для  $A^2$  приведена на рис. 5.

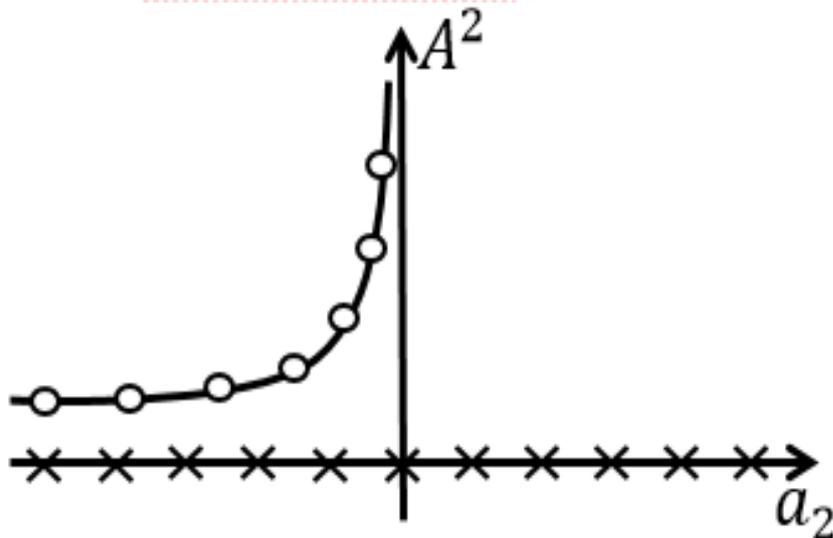


Рис. 5

Приведем пример применения метода гармонической линеаризации для случая разрывной функции.

**Задача 4.** Найти периодические режимы в системе

$$\ddot{x} + \dot{x} + x + bF(\dot{x}) = 0,$$

где

$$F(\dot{x}) = \begin{cases} -1, & \dot{x} > 0, \\ 0, & \dot{x} \leq 0, \end{cases}$$

методом гармонической линеаризации. Решить вопрос об устойчивости найденных колебаний и построить бифуркационную диаграмму.

**Решение.**

Система уже приведена к стандартному виду (1), поэтому полиномы от  $\lambda$  и нелинейность в этой системе:

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1, R(\lambda) = b, F(x, \lambda x) = F(\dot{x}) = F(\lambda x).$$

Положим  $x = A_0 + A \sin \omega t$ ,  $\dot{x} = \lambda x = A\omega \cos \omega t$ . Тогда:

$$F(x, \lambda x) = F(A\omega \cos \omega t).$$

Найдем коэффициенты гармонической линеаризации  $q$  и  $q'$ :

$$q = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A\omega \cos u) \sin u \, du = \frac{1}{\pi A} \left( - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \, du - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin u \, du \right) = 0,$$

$$q' = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A\omega \cos u) \cos u \, du = \frac{1}{\pi A} \left( - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos u \, du \right) = -\frac{2}{\pi A}.$$

Уравнение гармонически линеаризованной системы имеет вид:

$$(\lambda^2 + \lambda + 1)(A_0 + A \sin \omega t) - \frac{2b}{\pi A \omega} \lambda (A \sin \omega t) = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$M(\lambda) = \lambda^2 + \left(1 - \frac{2b}{\pi A \omega}\right) \lambda + 1 = 0.$$

Положим  $\lambda = i\omega$  и выделим действительную и мнимую части:

$$\left\{ \operatorname{Re} M(i\omega) = -\omega^2 + 1 = 0, \operatorname{Im} M(i\omega) = 1 - \frac{2b}{\pi A \omega} = 0. \right\}$$

Из последней системы найдем неизвестные величины  $\omega$  и  $A$ :

$$\left\{ \omega = 1, A = \frac{2b}{\pi}. \right\} \quad (12)$$

Дополним систему (12) уравнением  $Q(0)A_0 + R(0)F_0 = 0$ , где:

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A\omega \cos u) \, du = \frac{1}{2\pi} \left( - \int_0^{\frac{\pi}{2}} du - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} du \right) = -\frac{1}{2}.$$

Из уравнения  $Q(0)A_0 + R(0)F_0 = 0$  следует, что  $A_0 = \frac{b}{2}$ , так как

$Q(0) = 1$  и  $F_0 = -\frac{1}{2}$ . Получаем:

$$\left\{ \omega = 1, A = \frac{2b}{\pi}, A_0 = \frac{b}{2} \right\}$$

Итак, периодический режим найден:

$$x = \frac{b}{2} + \frac{2b}{\pi} \sin t.$$

Проведем расчет устойчивости решения. Для этого положим в характеристическом уравнении

$$\lambda = \xi + i(\omega + \Delta\omega), A = A + \Delta A, \omega = \omega + \Delta\omega$$

и выделим действительную и мнимую части:

$$\begin{cases} \xi^2 - (\omega + \Delta\omega)^2 + 1 + \xi \left( 1 - \frac{2b}{\pi(A + \Delta A)(\omega + \Delta\omega)} \right) = 0, \\ 2\xi + \left( 1 - \frac{2b}{\pi(A + \Delta A)(\omega + \Delta\omega)} \right) = 0. \end{cases}$$

Перепишем систему:

$$\begin{cases} \pi(\xi^2 - (\omega + \Delta\omega)^2 + 1 + \xi)(A + \Delta A)(\omega + \Delta\omega) - 2b\xi = 0, \\ 2\pi\xi(A + \Delta A)(\omega + \Delta\omega) + \pi(A + \Delta A)(\omega + \Delta\omega) - 2b = 0. \end{cases}$$

Оставим только линейные относительно  $\xi$ ,  $\Delta\omega$  и  $\Delta A$  члены. Получим:

$$\{\Delta\omega = 0, 4b\xi + 2b\Delta\omega + \pi\Delta A = 0.\}$$

Условие устойчивости:  $\Delta A$  и  $\xi$  разных знаков, то есть

$$\frac{\xi}{\Delta A} = -\frac{\pi}{4b} < 0$$

Колебания будут устойчивыми при  $b > 0$ .

Бифуркационная диаграмма по параметру  $b$  представлена на рис. 6.

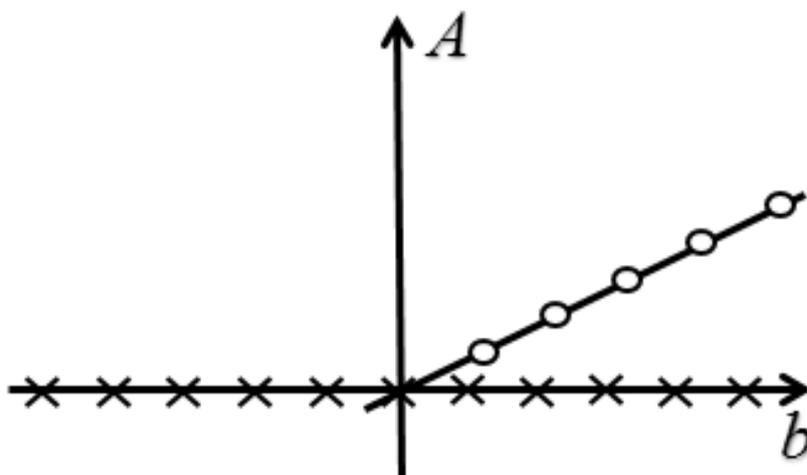


Рис. 6

### 3. Контрольные вопросы

1. Для чего служит метод гармонической линеаризации?
2. Почему метод гармонической линеаризации считается приближенным методом?
3. В чем состоит идея метода гармонической линеаризации?
4. Есть ли что-то общее у гармонической линеаризации и обычной линеаризации нелинейной системы? Если да, то что?
5. Запишите полиномы  $Q(\lambda), R(\lambda)$  и нелинейную функцию  $F$  переменных  $x$  и  $\dot{x}$  для уравнения  $\ddot{x} + x = -\mu(\dot{x} - a\dot{x}^3 + b\dot{x}^4 + \dot{x}^5)$ .
6. Запишите полиномы  $Q(\lambda), R(\lambda)$  и нелинейную функцию  $F$  переменных  $x$  и  $\dot{x}$  для уравнения  $\ddot{x} + x = -\mu(1 - a\dot{x}^2 + \dot{x}^4)\dot{x}$ .
7. Нелинейная функция  $F$  может быть разрывной или неоднозначной? Каким требованиям должна удовлетворять функция  $F$ ?
8. При разложении в ряд Фурье функции  $F(A_0 + A \sin \omega t, A \sin \omega t)$  члены, содержащие частоты  $2\omega, 3\omega, \dots$ , отбрасываются, почему?
9. Как рассчитать коэффициенты гармонической линеаризации?
10. Какой вид имеет гармонически линеаризованное уравнение нелинейной системы?
11. Какая замена называется гармонической линеаризацией нелинейности?
12. Какой вид имеет характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы?
13. Как провести расчет устойчивости найденного решения?
14. При каком условии найденное решение будет устойчиво?
15. В чем состоит качественное отличие метода гармонической линеаризации от методов Пуанкаре и Ван-дер-Поля?

### 4. Задачи для самостоятельной работы

1. Исследовать уравнение Ван-дер-Поля  $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$  на устойчивость методом гармонической линеаризации.
2. Исследовать уравнение Рэля  $\ddot{x} + x = \mu(1 - \dot{x}^2)\dot{x}$  на устойчивость методом гармонической линеаризации.
3. Исследовать систему  $\ddot{x} + x = \mu(\dot{x} - 6\dot{x}(x - a)^2)$  на устойчивость методом гармонической линеаризации и построить бифуркационную диаграмму по параметру  $a$  при  $\mu > 0$ .
4. Исследовать систему  $\ddot{x} + x = \mu(1 - a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\dot{x}$  на устойчивость методом гармонической линеаризации и построить бифуркационную диаграмму по параметру  $a_2$ .
5. Исследовать систему  $\ddot{x} + x = \mu(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\dot{x}$  на устойчивость методом гармонической линеаризации и построить бифуркационную диаграмму по параметру  $a_2$  при  $\mu > 0$ .

6. Исследовать уравнение  $\ddot{x} - b_1\dot{x} + b_2\dot{x}^3 + x = 0$  на устойчивость методом гармонической линеаризации и построить бифуркационную диаграмму по параметру  $\frac{b_1}{b_2}$ .

7. Исследовать систему  $\ddot{x} + x = \mu(a^2 - x^2)\dot{x}$ , где  $a \neq 0$ , на устойчивость методом гармонической линеаризации и построить бифуркационную диаграмму по параметру  $a$  при  $\mu > 0$ .

8. Исследовать систему  $\ddot{x} - \dot{x} + x = -x(k_1 + k_2x^2)\dot{x}$  на устойчивость методом гармонической линеаризации и построить бифуркационную диаграмму по параметру  $k_2$ .

9. Исследовать уравнение движения маятника Фруда в случае аппроксимации момента сил сухого трения членами пятого порядка:  $\ddot{x} + x = \mu(-a\dot{x} - b\dot{x}^3 - c\dot{x}^5)$ ,  $\mu > 0, b < 0, c > 0$ , на устойчивость методом гармонической линеаризации и построить бифуркационную диаграмму при  $\mu = 1$ .

10. Исследовать систему  $\ddot{x} + x = \mu(a - 3\gamma x^2)\dot{x}$ , где  $a > 0, b > 0$ , на устойчивость методом гармонической линеаризации и построить бифуркационную диаграмму по параметру  $\frac{\alpha}{\gamma}$ .

11. Исследовать уравнение  $\ddot{x} + x = \mu(1 - x^4)\dot{x}$  на устойчивость методом гармонической линеаризации.

12. Исследовать уравнение  $\ddot{x} + x = (\mu - \dot{x}^2)\dot{x}$  на устойчивость методом гармонической линеаризации и построить бифуркационную диаграмму по параметру  $\mu$ .

13. Исследовать уравнение  $\ddot{x} + x = \mu(p - qx^2)\dot{x}$  на устойчивость методом гармонической линеаризации и построить бифуркационную диаграмму по параметру  $p$  при  $\mu = 1$ .

14. Исследовать уравнение динамики следящей системы

$$(T_1\lambda + 1)(T_2\lambda + 1)\lambda x + F(x) = 0,$$

где  $T_1$  и  $T_2$  – положительные параметры,  $F(x)$  – нелинейная функция, представленная на рис. 7, на устойчивость методом гармонической линеаризации.

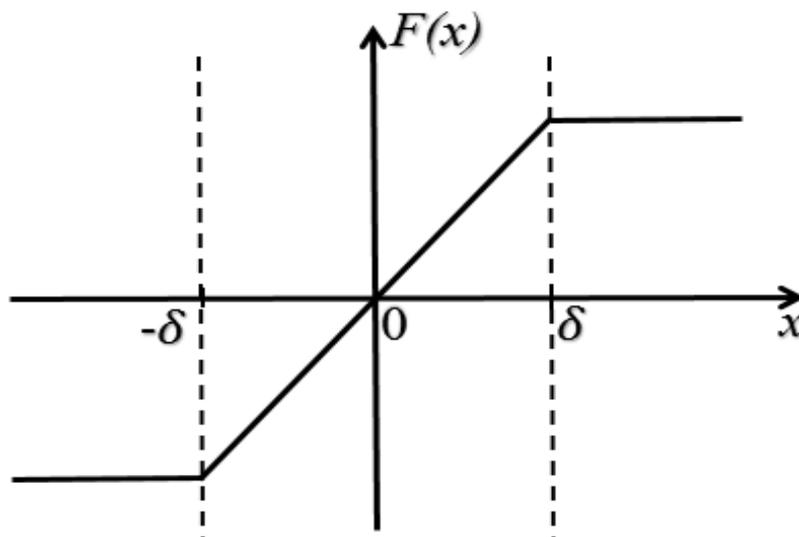


Рис. 7

15. Исследовать уравнение динамики следящей системы

$$(T_1\lambda + 1)(T_2\lambda + 1)\lambda x + F(x) = 0,$$

где  $T_1$  и  $T_2$  – положительные параметры,  $F(x)$  – нелинейная функция, представленная на рис. 8, на устойчивость методом гармонической линеаризации.

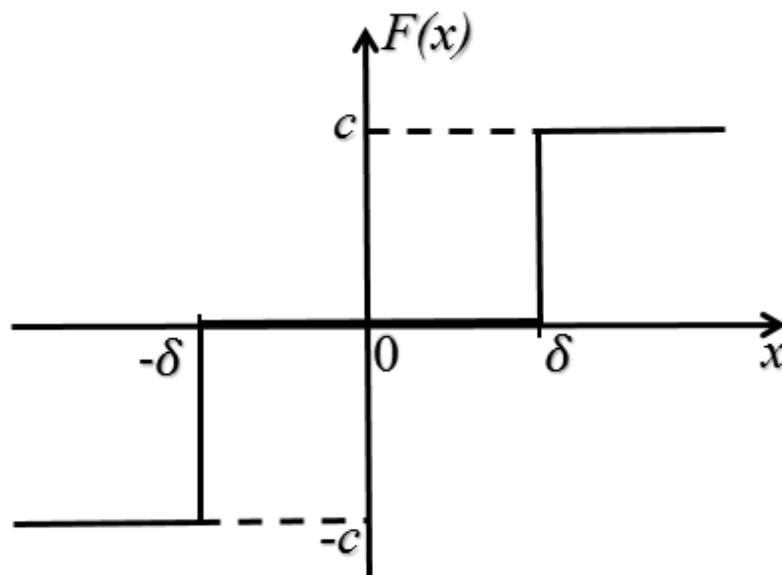


Рис. 8

## 5. Ответы и указания к решению

1. Решение:  $x = 2 \sin t$ . Условие устойчивости:  $\frac{\xi}{\Delta A} = -\frac{\mu}{2} < 0$ , найденное решение будет устойчивым, если  $\mu > 0$ , и неустойчивым, если  $\mu < 0$ .

2. Решение:  $x = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t$ . Условие устойчивости:  $\frac{\xi}{\Delta A} = \frac{\sqrt{3}\mu}{2} < 0$ , найденное решение будет устойчивым, если  $\mu < 0$ , и неустойчивым, если  $\mu > 0$ .

3. Колебания возможны в том случае, если  $|a| < \frac{1}{\sqrt{6}}$ ,  $x = \sqrt{\frac{2(1-6a^2)}{3}} \sin t$ .

Условие устойчивости:  $\frac{\xi}{\Delta A} = \frac{-3}{2} \mu \sqrt{\frac{2(1-6a^2)}{3}} < 0$ , найденное решение будет устойчивым, если  $\mu > 0$ , и неустойчивым, если  $\mu < 0$ . Бифуркационная диаграмма при  $\mu > 0$  изображена на рис. 9.

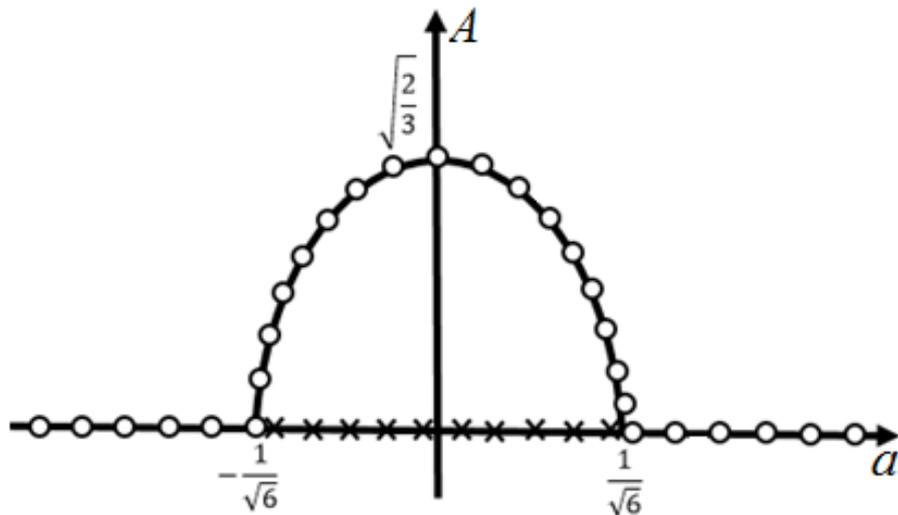


Рис. 9

4. Решение:  $x = \frac{2}{\sqrt{-a_2}} \sin t$ , колебания возможны только в том случае, если  $a_2 < 0$ . Условие устойчивости:  $\frac{\xi}{\Delta A} = \frac{\mu a_2 A}{4} < 0$ , найденное решение будет устойчивым, если  $\mu > 0$ , и неустойчивым, если  $\mu < 0$ .

5. Решение:  $x = \frac{2}{\sqrt{-a_2}} \sin t$ , колебания возможны только в том случае, если  $a_2 < 0$ . Условие устойчивости:  $\frac{\xi}{\Delta A} = \frac{\mu a_2 A}{4} < 0$ , найденное решение будет устойчивым, если  $\mu > 0$ , и неустойчивым, если  $\mu < 0$ . Бифуркационная диаграмма при  $\mu > 0$  представлена на рис. 10.

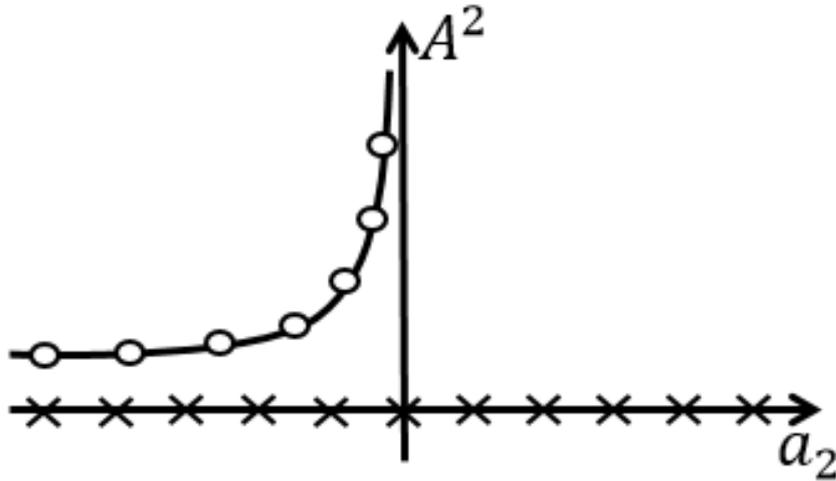


Рис. 10

6. Решение:  $x = \sqrt{\frac{4b_1}{3b_2}} \sin t$ , колебания возможны только в том случае, если  $b_1$  и  $b_2$  — одинаковых знаков. Условие устойчивости:  $\frac{\xi}{\Delta A} = -\frac{3}{4} b_2 A < 0$ , найденное решение устойчиво при  $b_2 > 0$ .

7. Решение:  $x = 2|a| \sin t$ . Условие устойчивости:  $\frac{\xi}{\Delta A} = -\frac{\mu|a|}{2} < 0$ , найденное решение будет устойчивым, если  $\mu > 0$ , и неустойчивым, если  $\mu < 0$ . Бифуркационная диаграмма при  $\mu > 0$  приведена на рис. 11.

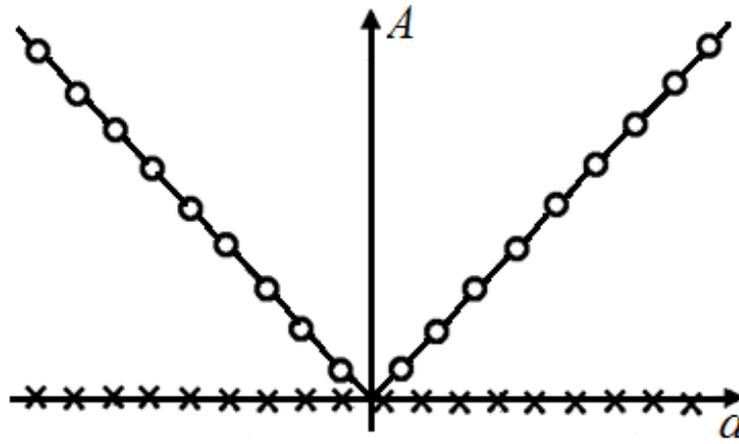


Рис. 11

8. Решение:  $x = \frac{2}{\sqrt{k_2}} \sin t$ , колебания возможны, если  $k_2 > 0$ . Условие устойчивости:  $\frac{\xi}{\Delta A} = \frac{-k_2 A}{4} < 0$ , найденное решение устойчиво ( $k_2 > 0$ ).

9.  $\left\{ \omega = 1, A^2 = \frac{-3b \pm \sqrt{9b^2 - 40ac}}{5c} \right\}$ . Колебания существуют при  $a < \frac{9b^2}{40c}$ . При  $0 < a < \frac{9b^2}{40c}$  в системе будут наблюдаться два предельных цикла. Предельный цикл устойчив, если  $A^2 > -\frac{3b}{5c}$ .

10. Решение:  $x = \sqrt{\frac{4\alpha}{3\gamma}} \sin t$ . Условие устойчивости:  $\frac{\xi}{\Delta A} = \frac{-\mu\sqrt{3\alpha\gamma}}{2} < 0$ , найденное решение будет устойчивым, если  $\mu > 0$ , и неустойчивым, если  $\mu < 0$ .

11. Решение:  $x = \sqrt[4]{8} \sin t$ . Условие устойчивости:  $\frac{\xi}{\Delta A} = \frac{-\mu A^3}{4} < 0$ , найденное решение будет устойчивым при  $\mu > 0$ .

12. Решение:  $x = \sqrt{\frac{4\mu}{3}} \sin t$ . Условие устойчивости:  $\frac{\xi}{\Delta A} = \frac{-3A}{4} < 0$ .

13. Решение:  $x = \sqrt{\frac{4p}{q}} \sin t$ , колебания возможны, если  $pq > 0$ . Условие устойчивости:  $\frac{\xi}{\Delta A} = \frac{-q\mu A}{4} < 0$ .

14. [См.[5], часть II, гл. 11 (11.3.2), стр. 260-263].

15. [См.[5], приложение 8, задача 11.1, стр. 405-408].

## Список литературы

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1958. – 408 с.
2. Гольдфарб Л.С. О некоторых нелинейностях в системах регулирования. Автоматика и телемеханика, 1947. – 243 с.
3. Попов Е.П., Пальтов И.П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 790 с.
4. Попов Е.П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. – М.: Наука, 1973. – 584 с.
5. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний: Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. – Издание второе, переработанное и дополненное. – М: Высшая школа, 2001. – 395 с.
6. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления: М.Наука, 1979. – 255 с.

Александр Леонидович Пригоровский  
Владимир Михайлович Сандалов  
Наталья Владимировна Мудрак

**Задачи по теории колебаний,  
устойчивости движения  
и качественной теории  
дифференциальных уравнений**

**Часть 5. Метод гармонической линеаризации.**

*Учебно-методическое пособие*

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский  
государственный университет им. Н.И. Лобачевского».  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.