

Федеральное агентство по образованию
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный проект «Образование»
Инновационная образовательная программа ННГУ. Образовательно-научный центр
«Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и
математическое обеспечение»

В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев

Оценки устойчивости и повышение эффективности
численных схем решения задач динамики сплошных сред и
конструкций

*Учебно-методические материалы по программе
повышения квалификации «Применение программных
средств в научных исследованиях и преподавании
математики и механики»*

Нижний Новгород 2007

Учебно-методические материалы подготовлены в рамках
инновационной образовательной программы ННГУ: *Образовательно-
научный центр «Информационно-телекоммуникационные
системы: физические основы и математическое обеспечение»*

Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Оценки устойчивости и повышение эффективности численных схем решения задач динамики сплошных сред и конструкций. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Применение программных средств в научных исследованиях и преподавании математики и механики». Нижний Новгород, 2007, 98 с.

Рассматривается устойчивость численных схем решения динамических задач теории упругости, пластин и оболочек, построенных конечно-разностным, вариационно-разностным и КЭ методом. Метод исследования устойчивости основан на приведении схем к конечно-разностному виду и дальнейшему применению метода гармоник. Приводится большое число точных и приближенных оценок временного шага. Обсуждается проблема граничной неустойчивости численных схем. Рассмотрен предложенный авторами метод повышения эффективности численных схем путем их регуляризации и демонстрируется его эффективность при решении ряда задач.

© Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т., 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1 Вариационно-разностные схемы теории упругости и теории пластин типа Тимошенко.....	5
2 Основные понятия теории разностных схем: аппроксимация, сходимость, устойчивость.....	21
3 Метод гармоник. Устойчивость конечно-разностной схемы “крест”.....	30
4 Оценки устойчивости вариационно-разностных схем решения двумерных и трехмерных задач теории упругости	35
5 Оценки устойчивости одномерных разностных схем теории пластин типа Тимошенко.....	54
6 Граничная неустойчивость численных схем.....	70
7 Повышение эффективности численных схем решения задач динамики тонкостенных конструкций. Явно- неявные численные схемы	76
Заключение.....	96
Список литературы.....	97

ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость является важной характеристикой численных методов. Эффективность численных методов связана с устойчивостью. Получение точных оценок временного шага условно устойчивых схем позволяет сокращать количество вычислений и повышать эффективность численных методов. В общем случае задача исследования устойчивости численных схем является сложной. Это связано с необходимостью при анализе устойчивости построения полных систем собственных функций сеточных операторов, что в общем случае является проблематичным. Поэтому при исследовании устойчивости численных схем, как правило, рассматриваются наиболее простые варианты систем уравнений, в которых используются линеаризованные операторы, равномерная сетка и уравнения с постоянными коэффициентами. Только в таком варианте в настоящее время можно получить окончательный вид точных оценок устойчивости. В дальнейшем полученные оценки экстраполируются на случаи, в которых рассматриваются неравномерные сетки, нелинейные уравнения и уравнения с переменными коэффициентами. Но даже в простейших случаях построение оценок устойчивости является сложной задачей. Устойчивость ряда явных численных схем типа “крест” решения задач теории упругости и теории оболочек исследована в работах авторов [1-3]. Но некоторые из этих оценок приведены без обоснования и для всех оценок временного шага, за некоторым исключением, отсутствует подробный вывод. Целью данной работы является подробный вывод, анализ и обоснование данных оценок устойчивости.

В работе также рассматривается метод повышения эффективности численных схем решения задач динамики тонкостенных конструкций на основе уравнений механики сплошной среды и теории оболочек за счет повышения их устойчивости путем регуляризации. Эффект от регуляризации может составлять сокращение объема вычислений от нескольких раз до нескольких десятков раз при сохранении точности.

ГЛАВА 1. ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕОРИИ ПЛАСТИН ТИПА ТИМОШЕНКО

Рассматривается геометрически и физически линейная постановка задач динамики упругой среды и пластин типа Тимошенко. Среда предполагается линейно-упругой, однородной и изотропной, система координат - декартовой. В этом случае системы уравнений имеют наиболее простой вид, коэффициенты уравнений постоянны, возможно преобразование систем к виду отдельных уравнений. Это, в свою очередь, позволяет провести исследование численных схем достаточно подробно и получить результаты в конечном виде.

Система дифференциальных уравнений выводится из вариационного принципа Даламбера -Лагранжа (принципа виртуальной работы) для упругой среды.

Введем обозначения:

x_1, x_2, x_3 -декартова система координат;

t -время;

$u(x_1, x_2, x_3) = (u_1, u_2, u_3)$ -вектор перемещения;

$h_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j}$ -тензор дисторсии;

$e_{ij} = (h_{ij} + h_{ji}) / 2$ -тензор малых деформаций (симметричная составляющая тензора дисторсии);

$w_{ij} = (h_{ij} - h_{ji}) / 2$ -тензор элементарного вращения (кососимметричная составляющая тензора дисторсии);

S_{ij} -тензор напряжений;

$n = (n_1, n_2, n_3)$ - единичный вектор внешней нормали.

Характеристики материала:

E -модуль Юнга;

ν - коэффициент Пуассона;

ρ - плотность;

$I = E / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$, $G = E / [2(1 + \nu)]$ - параметры Ламе.

Везде в дальнейшем используются соглашения и обозначения, принятые в тензорном анализе: повторение индекса означает суммирование по этому индексу, индекс после запятой - дифференцирование по соответствующей координате.

Пусть упругая среда занимает объем V , на границе которого $\mathbb{V} = S_u \cup S_p$ заданы граничные условия: на части границы S_u - в перемещениях, на S_p - в напряжениях. Предполагаются известными поля внешних массовых F и поверхностных P сил, распределение перемещений u и скоростей v при $t=0$ (начальные условия). При выводе уравнений будем исходить из общего уравнения динамики (вариационного принципа Даламбера-Лагранжа или принципа виртуальной работы).

Принцип виртуальной работы

Виртуальная работа, совершаемая внутренними силами, равна виртуальной работе, совершаемой внешними силами, включая силы инерции, на бесконечно малых виртуальных перемещениях, удовлетворяющих заданным граничным условиям в перемещениях.

Принцип виртуальной работы записывается в виде уравнения

$$dA_{\text{внутр}} = dA_{\text{внеш}},$$

где $dA_{\text{внеш}} = dA_{\text{внеш}}^{\text{масс}} + dA_{\text{внеш}}^{\text{пов}}$ (работа внешних сил равна сумме работ внешних массовых и поверхностных сил). Заменяя обозначения работы их выражениями, получим уравнение

$$\int_V s_{ij} de_{ij} dv = \int_V r(F_i - \rho \ddot{u}_i) du_i dv + \int_{S_p} P_i du_i dS. \quad (1.1)$$

Так как из симметричности тензора напряжений следует равенство $s_{ij} dw_{ij} = 0$, имеем

$$s_{ij} de_{ij} = s_{ij} dh_{ij} = s_{ij} du_{i,j}. \quad (1.2)$$

Проводя с учетом (1.2) в левой части формулы (1.1) интегрирование по частям по j -й координате, преобразуем ее к виду:

$$\int_{S_p} s_{ij} n_j du_i dS - \int_V s_{ij,j} du_i dV.$$

Собирая в (1.1) коэффициенты при независимых вариациях перемещений, получим

$$\int_{S_p} (s_{ij} n_j - P_i) du_i dS = \int_V (s_{ij,j} + rF_i - \rho \ddot{u}_i) du_i dV = 0. \quad (1.3)$$

Ввиду произвольности вариаций из (1.3) следуют уравнения движения

$$s_{ij,j} + rF_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (1.4)$$

Выражая в (1.4) с помощью закона Гука для изотропной среды

$$s_{ij} = I d_{ij} e_{kk} + 2G e_{ij}, \quad (1.5)$$

тензор напряжения через перемещения, получим уравнения Ламе

$$(I + G)u_{j,ij} + Gu_{i,jj} + rF_i = r\bar{F}_i. \quad (1.6)$$

Или в векторных обозначениях:

$$(I + G)grad\,div\,\bar{u} + GD\bar{u} + r\bar{F} = r\bar{F}. \quad (1.7)$$

Теперь выведем одномерный вариант системы уравнений теории пластин типа Тимошенко. Для этого определим, что такое пластинка. Пусть Ω - замкнутая область в \mathbb{R}^2 , $d(\Omega)$ – характерный размер этой области, η – постоянная, удовлетворяющая условию $0 < \eta < d(\Omega)$. Под пластинкой будем понимать упругое тело, занимающее объем $V = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in \Omega, x_3 \in [-\eta/2, \eta/2]\}$. Другими словами, пластинкой будем называть упругое тело, размер которого η по одному из направлений существенно меньше двух остальных. Постоянную η назовем *толщиной оболочки*. Поверхность $x_3 = 0$ назовем *срединной поверхностью пластинки*.

Наличие у пластинки вырожденной координаты x_3 , то есть координаты, размеры тела вдоль которой малы, позволяет строить приближенные математические модели, имеющие число независимых переменных на единицу меньше, чем у исходной задачи теории упругости. Рассмотрим один из вариантов такой модели – теорию пластин типа Тимошенко. Везде ниже будем предполагать выполнение следующих условий, обычных для большинства задач теории пластин.

1) Граничные условия в перемещениях могут быть заданы только на боковой поверхности пластинки $\Gamma \times [-h/2, h/2]$ (где контур Γ – граница области Ω) или ее части. На поверхностях пластинки $x_3 = \pm h/2$ могут быть заданы только усилия.

2) Касательные составляющие усилий на свободных поверхностях пластинки $x_3 = \pm h/2$ отсутствуют.

3) Массовые силы отсутствуют.

Нужно отметить, что в модели типа Тимошенко неизвестные функции имеют физический смысл перемещений и углов поворота.

Рассмотрим пластинку следующего вида:

$$V = \left\{ [a, b] \times [0, 1] \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \right\} \quad (1.8)$$

Для любой пластинки объема V уравнение внутренней энергии таково:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{s}_{ij} \mathbf{e}_{ij} dV.$$

Перепишем его для пластинки (1.8):

$$W = \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^1 \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx_3 dx_2 dx_1$$

В нашей задаче предполагаем, что вектор перемещений $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяет следующим требованиям:

$$u_2 = 0, \quad u_1 = u_1^0(x_1) + u_1^1(x_1)x_3, \quad u_3 = u_3^0(x_1) \quad (1.9)$$

Из курса теории упругости известно, что тензор деформаций определяется по формуле:

$$\mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.10)$$

Исходя из формул (1.9) и (1.10), имеем:

$$\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_{32} = \mathbf{e}_{33} = \mathbf{e}_{21} = \mathbf{e}_{23} = 0, \quad \mathbf{e}_{11} \neq 0, \quad \mathbf{e}_{13} \neq 0, \quad \mathbf{e}_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^1}{\partial x_1} x_3,$$

$$\mathbf{e}_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(u_1^1 + \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} \right).$$

Распишем закон Гука при плоском напряженном состоянии:

$$\mathbf{s}_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\mathbf{e}_{11} + \nu \mathbf{e}_{22}),$$

$$\mathbf{s}_{13} = \frac{E}{(1+\nu)} \mathbf{e}_{13},$$

$$\mathbf{s}_{13} = \mathbf{s}_{31},$$

$$\mathbf{e}_{22} = 0,$$

$$\mathbf{s}_{13} = \mathbf{s}_{13}^0 \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right],$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{13}^0.$$

С учетом выше написанного получаем:

$$W = \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\mathbf{s}_{11} \mathbf{e}_{11} + \mathbf{s}_{13} \mathbf{e}_{13} + \mathbf{s}_{31} \mathbf{e}_{31}) dx_3 \right] dx_1,$$

$$W = \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{E}{1-n^2} \left(\frac{du_1^0}{dx_1} + \frac{du_1^1}{dx_1} x_3 \right)^2 + 2 \frac{E}{1+n} \left(\frac{1}{2} \left(u_1^1 + \frac{du_3^0}{dx_1} \right) \right)^2 \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \right\} dx_3 \right] dx_1.$$

Упростим последнее выражение, вычислив внутренний интеграл:

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{E}{1-n^2} \left(\frac{du_1^0}{dx_1} + \frac{du_1^1}{dx_1} x_3 \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{E}{1+n} \left(u_1^1 + \frac{du_3^0}{dx_1} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \right\} dx_3,$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{E}{1-n^2} \left(\left(\frac{du_1^0}{dx_1} \right)^2 + 2 \frac{du_1^0}{dx_1} \frac{du_1^1}{dx_1} x_3 + \left(\frac{du_1^1}{dx_1} x_3 \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{E}{1+n} \left(\left(u_1^1 + \frac{du_3^0}{dx_1} \right)^2 - \left(u_1^1 + \frac{du_3^0}{dx_1} \right)^2 \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right) \right\} dx_3 \\ &= \frac{E}{1-n^2} \left\{ \left(\frac{du_1^0}{dx_1} \right)^2 x_3 + 2 \frac{du_1^0}{dx_1} \frac{du_1^1}{dx_1} \frac{x_3^2}{2} + \left(\frac{du_1^1}{dx_1} \right)^2 \frac{x_3^3}{3} \right\} \Big|_{-h/2}^{h/2} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{E}{1+n} \left\{ \left(u_1^1 + \frac{du_3^0}{dx_1} \right)^2 x_3 - \left(u_1^1 + \frac{du_3^0}{dx_1} \right)^2 \left(\frac{2}{h} \right)^2 \frac{x_3^3}{3} \right\} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \\ &= \frac{E}{1-n^2} \left\{ \left(\frac{du_1^0}{dx_1} \right)^2 h + \left(\frac{du_1^1}{dx_1} \right)^2 \frac{h^3}{12} \right\} + \frac{1}{2} \frac{E}{1+n} \left\{ \left(u_1^1 + \frac{du_3^0}{dx_1} \right)^2 h - \left(\frac{2}{h} \right)^2 \left(u_1^1 + \frac{du_3^0}{dx_1} \right)^2 \frac{h^3}{12} \right\}, \\ W &= \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ \frac{E}{1-n^2} \left[\left(\frac{du_1^0}{dx_1} \right)^2 h + \left(\frac{du_1^1}{dx_1} \right)^2 \frac{h^3}{12} \right] + \frac{1}{2} \frac{E}{1+n} \left[\left(u_1^1 + \frac{du_3^0}{dx_1} \right)^2 h - \left(\frac{2}{h} \right)^2 \left(u_1^1 + \frac{du_3^0}{dx_1} \right)^2 \frac{h^3}{12} \right] \right\} dx_1. \end{aligned}$$

Для того, чтобы вывести систему уравнений типа Тимошенко (уравнения Эйлера), нужно приравнять виртуальную внутреннюю энергию к виртуальной работе сил инерции:

$$dW = dA_{uu}. \quad (1.11)$$

Найдем сначала виртуальную внутреннюю энергию.

$$\begin{aligned} dW &= \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ \frac{E}{1-n^2} \left(2 \frac{du_1^0}{dx_1} h \frac{d du_1^0}{dx_1} + \frac{h^3}{6} \frac{du_1^1}{dx_1} \frac{d du_1^1}{dx_1} \right) + \frac{2E}{1+n} \left(u_1^1 + \frac{du_3^0}{dx_1} \right) \left(du_1^1 + \frac{d du_3^0}{dx_1} \right) \frac{1}{3} h \right\} dx_1, \\ dW &= \frac{Eh}{1-n^2} \left\{ \frac{du_1^0}{dx_1} du_1^0 \Big|_a^b - \int_a^b du_1^0 \frac{d^2 u_1^0}{dx_1^2} dx_1 \right\} + \frac{Eh^3}{12(1-n^2)} \left\{ \frac{du_1^1}{dx_1} du_1^1 \Big|_a^b - \int_a^b du_1^1 \frac{d^2 u_1^1}{dx_1^2} dx_1 \right\} + \\ &+ \frac{hE}{3(1+n)} \int_a^b \left\{ \left(u_1^1 + \frac{du_3^0}{dx_1} \right) du_1^1 + u_1^1 \frac{d du_3^0}{dx_1} + \frac{du_3^0}{dx_1} \frac{d du_3^0}{dx_1} \right\} dx_1. \end{aligned}$$

Посчитаем отдельно интеграл:

$$\int_a^b \left\{ u_1^1 \frac{d du_3^0}{dx_1} + \frac{du_3^0}{dx_1} \frac{d du_3^0}{dx_1} \right\} dx_1 = u_1^1 du_3^0 \Big|_a^b - \int_a^b du_3^0 \frac{du_1^1}{dx_1} dx_1 + du_3^0 \frac{du_3^0}{dx_1} \Big|_a^b - \int_a^b du_3^0 \frac{d^2 u_3^0}{dx_1^2} dx_1.$$

Положив все константы равными нулю, получим:

$$dW = -\frac{Eh}{1-n^2} \int_a^b du_1^0 \frac{d^2 u_1^0}{dx_1^2} dx_1 - \frac{Eh^3}{12(1-n^2)} \int_a^b du_1^1 \frac{d^2 u_1^1}{dx_1^2} dx_1 + \\ + \frac{Eh}{3(1+n)} \int_a^b du_1^1 \left(u_1^1 + \frac{du_3^0}{dx_1} \right) dx_1 - \int_a^b du_3^0 \left(\frac{du_1^1}{dx_1} + \frac{d^2 u_3^0}{dx_1^2} \right) dx_1.$$

Теперь обратимся к выражению для работы сил инерции:

$$dA_{\text{ин}} = -r \int_a^b \left[\frac{d^2 u_1^0}{dt^2} du_1^0 + x_3 \frac{d^2 u_1^1}{dt^2} (du_1^0 + x_3 du_1^1) + \frac{d^2 u_3^0}{dt^2} du_3^0 \right] dx_3.$$

И упростим его вид, посчитав внутренний интеграл:

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(\frac{d^2 u_1^0}{dt^2} + x_3 \frac{d^2 u_1^1}{dt^2} \right) (du_1^0 + x_3 du_1^1) + \frac{d^2 u_3^0}{dt^2} du_3^0 \right] dx_3 = \\ = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{d^2 u_1^0}{dt^2} du_1^0 + x_3 \frac{d^2 u_1^0}{dt^2} du_1^1 + \frac{d^2 u_1^1}{dt^2} du_1^0 x_3 + \frac{d^2 u_1^1}{dt^2} du_1^1 x_3^2 + \frac{d^2 u_3^0}{dt^2} du_3^0 \right] dx_3 = \\ = \left(\frac{d^2 u_1^0}{dt^2} du_1^0 + \frac{d^2 u_3^0}{dt^2} du_3^0 \right) x_3 \Big|_{-h/2}^{h/2} + \left(\frac{d^2 u_1^0}{dt^2} du_1^1 + \frac{d^2 u_1^1}{dt^2} du_1^0 \right) \frac{x_3^2}{2} \Big|_{-h/2}^{h/2} + \frac{d^2 u_1^1}{dt^2} du_1^1 \frac{x_3^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \\ = \left(\frac{d^2 u_1^0}{dt^2} du_1^0 + \frac{d^2 u_3^0}{dt^2} du_3^0 \right) h + \frac{h^3}{12} \frac{d^2 u_1^1}{dt^2} du_1^1.$$

Таким образом, получаем работу сил инерции в виде:

$$dA_{\text{ин}} = -r \int_a^b \left\{ \left(\frac{d^2 u_1^0}{dt^2} du_1^0 + \frac{d^2 u_3^0}{dt^2} du_3^0 \right) h + \frac{h^3}{12} \frac{d^2 u_1^1}{dt^2} du_1^1 \right\} dx_1. \quad (1.12)$$

Теперь вычтем из виртуальной внутренней энергии пластинки виртуальную работу сил инерции. Результат будет равен нулю в силу (1.11):

$$-\int_a^b \left(\frac{Eh}{1-n^2} \frac{d^2 u_1^0}{dx_1^2} - rh \frac{d^2 u_1^0}{dt^2} \right) du_1^0 dx_1 - \\ - \int_a^b \left(\frac{Eh^3}{12(1-n^2)} \frac{d^2 u_1^1}{dx_1^2} - \frac{Eh}{3(1+n)} \left(u_1^1 + \frac{du_3^0}{dx_1} \right) - \frac{h^3}{12} r \frac{d^2 u_1^1}{dt^2} \right) du_1^1 dx_1 - \\ - \int_a^b \left(\frac{Eh}{3(1+n)} \left(\frac{du_1^1}{dx_1} + \frac{d^2 u_3^0}{dx_1^2} \right) - rh \frac{d^2 u_3^0}{dt^2} \right) du_3^0 dx_1 = 0.$$

Равенство нулю выполняется лишь в том случае, если одновременно равны нулю все три подынтегральные функции.

Приравнявая нулю коэффициенты при вариациях, получаем систему уравнений теории пластин типа Тимошенко. При этом необходимо учесть следующее:

$$\frac{E}{r(1-n^2)} = c^2, \quad \frac{2}{3} = k^2, \quad \frac{k^2(1-n)}{2} = a.$$

Итак, на основе вышесказанного получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} c^2 \frac{d^2 u_1^0}{dx^2} &= \frac{d^2 u_1^0}{dt^2}, \\ \left\{ \begin{aligned} a \left(\frac{du_1^1}{dx_1} + \frac{d^2 u_3^0}{dx_1^2} \right) &= \frac{1}{c^2} \frac{d^2 u_3^0}{dt^2} \\ \frac{d^2 u_1^1}{dx_1^2} - \frac{12a}{h^2} \left(u_1^1 + \frac{du_3^0}{dx_1} \right) &= \frac{1}{c^2} \frac{d^2 u_1^1}{dt^2} \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Для удобства приведем (1.13) к безразмерному виду. Введем безразмерные переменные:

$$x = x_1 / L, \quad \tau = t c / L,$$

где τ – безразмерное время; L - некоторый линейный размер.

$$y = u_1^1 / L, \quad w = u_3^0 / L, \quad h = h / L.$$

В безразмерных величинах система (1.13) примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{12a}{h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + y \right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \end{aligned} \right. \quad (1.14)$$

Получили систему, в которой неизвестные функции w и y имеют конкретный физический смысл перемещений и углов поворота.

Система (1.14) описывает поперечные колебания пластины Тимошенко в одномерном случае. Данная система, а также ее двумерный аналог будут рассмотрены ниже при анализе устойчивости численных схем.

Теперь изложим основные понятия из теории многомерных разностных схем, которые будут использоваться ниже.

Пусть в $R^n = \{x\} = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ задана равномерная (в общем случае косоугольная) сетка с координатами узлов [6,7]

$$x_{j_1 \dots j_n} = \begin{bmatrix} x_{j_1 \dots j_n}^1 \\ \dots \\ x_{j_1 \dots j_n}^n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} j_1 \\ \dots \\ j_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0^1 \\ \dots \\ x_0^n \end{bmatrix} \quad j_1, \dots, j_n \in \mathbf{Z}, \quad (1.15)$$

где B - невырожденная матрица $n \times n$.

Здесь (j) – мультииндекс: $(j) = (j_1, \dots, j_n)$. Сетку (1.1) назовем *основной сеткой*.

Пусть в $R^2 = \{x\} = \{x^1, x^2\}$ задана равномерная параллелограммная основная сетка вида (1.1) с координатами узлов

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} x_{ij}^1 \\ x_{ij}^2 \end{bmatrix} = B_h \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{bmatrix} \quad i, j \in \mathbf{Z}, \quad (1.16)$$

где B_h - вещественная невырожденная матрица 2×2 , зависящая от параметра $h = (h_1, h_2)$. Для большей определенности уточним понятие регулярной и равномерной конечноэлементной сетки.

Определение 1. Конечноэлементную сетку в R^2 назовем *равномерной*, если элементы и их узлы расположены двоякопериодически с периодом, задаваемым некоторой сеткой вида (1.2).

Определение 2. Конечноэлементную сетку в R^2 назовем *регулярной*, если существует взаимнооднозначное непрерывное отображение, переводящее ее в равномерную.

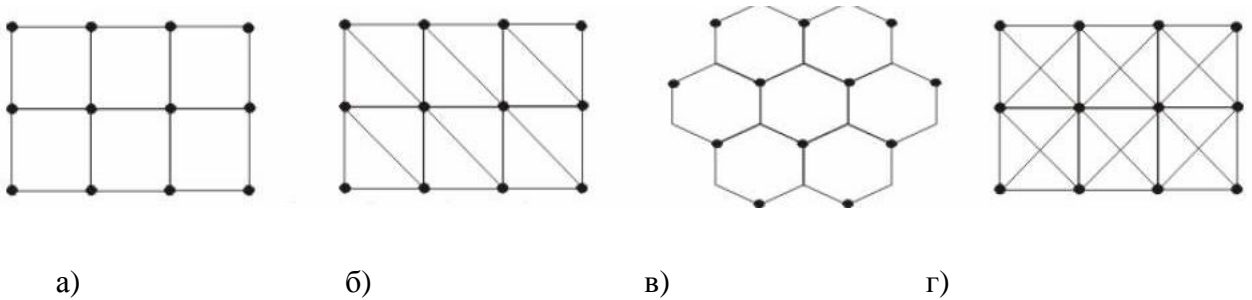


Рис. 1.1

Примеры равномерных сеток приведены на рис.1.1, где жирными точками выделены узлы основной сетки. Под (i, j) -й ячейкой основной сетки будем понимать параллелограмм с вершинами в узлах $x_{ij}, x_{i+1j}, x_{ij+1}, x_{i+1j+1}$. В некоторых случаях (например, рис. 1в) под ячейкой удобнее понимать фигуру, равную по площади указанному параллелограмму. Согласно определению и примерам, ячейка может

содержать один или несколько конечных элементов. Для узлов конечных элементов, совпадающих с узлами основной сетки, будем использовать целые индексы, для остальных - дробные.

Пусть в R^n определена вещественная функция $f(X) \in C^2(R^n)$, значения которой в узлах разностной сетки (1.15) обозначим через $f_{(j)} = f(X_{(j)})$. Таким образом, получили сеточную функцию $\{f_{(j)} | (j) \in Z^n\}$.

Назовем некоторое конечное множество Π целочисленных n -мерных векторов основным *шаблоном*. Будем считать шаблон Π невырожденным, то есть не лежащим в какой-либо гиперплоскости в R^n . Определим на шаблоне Π линейные операторы $d_0^+, d_1^+, \mathbf{K}, d_n^+$:

$$(d_m^+ f)_{(j)} = \sum_{(k) \in \Pi^+} b_{(k)}^m f_{(j)+(k)}, \quad (1.17)$$

отображающие множество сеточных функций $\{f\}$ в себя и аппроксимирующие функции и их первые производные:

$$d_0^+ f = f + O(\Delta x), \quad d_m^+ f = \frac{\partial f}{\partial X_m} + O(\Delta x), \quad m=1, \dots, n \quad (1.18)$$

Под Δx здесь будем понимать диаметр ячейки разностной сетки:

$$\Delta x = \max_{\{k, l, j=0, 1, \dots, n\}} |X_{(k)} - X_{(l)}|.$$

Возможность построения системы операторов со свойствами (1.18) очевидным образом следует из невырожденности шаблона. Определим операторы $d_0^-, d_1^-, \mathbf{K}, d_n^-$ посредством равенств

$$(d_m^- f)_{(j)} = c_m \sum_{(k) \in \Pi^-} b_{(k)}^m f_{(j)-(k)}, \quad m=0, \dots, n, \quad (1.19)$$

где $b_{(k)}^m$ ($m=0, \dots, n$) - коэффициенты из формул (1.17),

$$c_0 = 1, c_m = -1, (m=1, \dots, n).$$

Операторы $d_0^-, d_1^-, \mathbf{K}, d_n^-$ назовем *двойственными* по отношению к $d_0^+, d_1^+, \mathbf{K}, d_n^+$.

Примем для попарных суперпозиций сеточных операторов d_m^+ , d_m^- обозначения:

$$D_{jk} = d_j^+ d_k^- \quad (j, k = 0, \dots, n). \quad (1.20)$$

Операторы (1.20) аппроксимируют тождественный оператор I и дифференциальные операторы $\mathbb{I}/\mathbb{I}x^j$, $\mathbb{I}^2/\mathbb{I}x^j\mathbb{I}x^k$:

$$D_{00} \approx I; \quad \left\{ D_{j0}, D_{0j} \approx \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}x^j} \right\}; \quad \left\{ D_{jk}, D_{kj} \approx \frac{\mathbb{I}^2}{\mathbb{I}x^j\mathbb{I}x^k} \right\}.$$

Пусть $f(x^1, \mathbf{K}, x^n) \in C^4(\mathbf{R}^n)$, тогда справедливы тождества

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}X^i} \left(\frac{\mathbb{I}f}{\mathbb{I}X^j} \right) &= \frac{\mathbb{I}^2 f}{\mathbb{I}x^i \mathbb{I}x^j}, \quad \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}x^i} \left(\frac{\mathbb{I}^2 f}{\mathbb{I}x^j \mathbb{I}x^k} \right) = \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}x^j} \left(\frac{\mathbb{I}^2 f}{\mathbb{I}x^i \mathbb{I}x^k} \right) \\ \frac{\mathbb{I}^2}{\mathbb{I}x^i \mathbb{I}x^j} \left(\frac{\mathbb{I}^2 f}{\mathbb{I}x^k \mathbb{I}x^l} \right) &= \frac{\mathbb{I}^2}{\mathbb{I}x^i \mathbb{I}x^l} \left(\frac{\mathbb{I}^2 f}{\mathbb{I}x^j \mathbb{I}x^k} \right) \end{aligned}$$

Разностные операторы (3.10) обладают аналогичными свойствами:

$$D_{ij} D_{kl} = D_{kj} D_{il} = D_{il} D_{kj} \quad (i, j, k, l = 0, \mathbf{K}, n) \quad (1.21)$$

Назовем свойства (1.21) *индексной коммутативностью численного дифференцирования*.

Пусть в \mathbf{R}^2 определена вещественная функция $f(x^1, x^2) \in C^4(\mathbf{R}^2)$. *Шаблон* \mathcal{H} назовем некоторое подмножество множества целочисленных векторов $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Значение функции f в узлах сетки $f(x_{ij})$ обозначим f_{ij} . Определим разностные операторы, аппроксимирующие функцию и ее производные на сетке (1.16). Количество разностных операторов возьмем равным числу узлов шаблона. В зависимости от числа узлов возможны следующие ситуации:

а) 4 узла, 4 оператора d_0^+ , d_1^+ , d_2^+ , d_3^+ , где

$$\begin{aligned} d_0^+ f &= f + O(h), \quad d_1^+ f = \frac{\mathbb{I}f}{\mathbb{I}x^1} + O(h), \quad d_2^+ f = \frac{\mathbb{I}f}{\mathbb{I}x^2} + O(h), \\ d_3^+ f &= a \frac{\mathbb{I}^2 f}{\mathbb{I}(x^1)^2} + b \frac{\mathbb{I}^2 f}{\mathbb{I}x^1 \mathbb{I}x^2} + c \frac{\mathbb{I}^2 f}{\mathbb{I}(x^2)^2} + O(h) \end{aligned}$$

(в последнем операторе коэффициенты a, b, c зависят от формы ячейки (или матрицы B_h), см. пример ниже).

б) 3 узла, 3 оператора d_0^+ , d_1^+ , d_2^+ - так же, как для 4 узлов, но без оператора d_3^+ .

с) 2 узла, 2 оператора d_0^+, d_1^+

$$d_0^+ f = f + O(h), \quad d_1^+ f = a \frac{\partial f}{\partial x^1} + b \frac{\partial f}{\partial x^2} + O(h)$$

(коэффициенты a, b зависят от матрицы B_h , по сути - это производная по направлению, проходящему через два узла ячейки).

д) 1 узел, 1 оператор $d_0^+ f = f + O(h)$.

Оператор d_m^+ определяется общей формулой (1.17), а двойственный ему оператор d_m^- - формулой (1.19), где $m = 0, 1, 2, 3$ и

$$c_0 = 1, c_1 = -1, c_2 = -1, c_3 = 1.$$

Двойственные операторы аппроксимируют те же величины, что и исходные. Знак в формулах (1.19) определяется по правилу: плюс для операторов, аппроксимирующих функцию и производные четного порядка, и минус - для производных нечетного порядка.

Рассмотрим шаблон из четырех узлов вида:

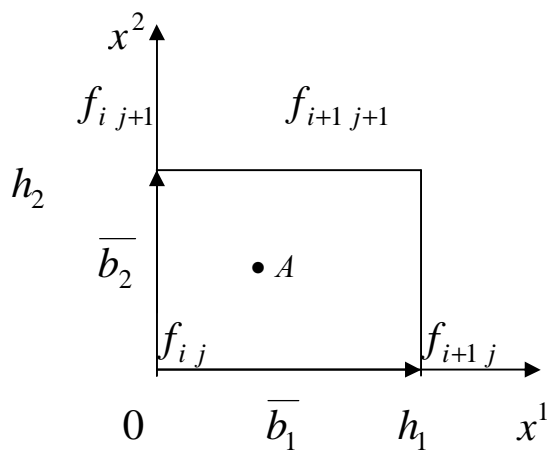


рис.1.2

Здесь $\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \end{pmatrix}$ и $B_h = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}$. Построим разностные операторы для такого

шаблона. Операторы d_0^+ и d_3^+ по определению имеют вид

$$d_0^+ = \frac{1}{4}(f_{ij} + f_{i+1j} + f_{ij+1} + f_{i+1j+1}),$$

$$d_3^+ = \frac{1}{h_1 h_2}(f_{ij} + f_{i+1j+1} - f_{i+1j} - f_{ij+1}).$$

d_1^+ и d_2^+ считаем по формуле естественной аппроксимации производных, которая пригодна для любых выпуклых и невыпуклых многоугольников, не имеющих самопересечений:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} f_k (x_{k+1}^{3-i} - x_{k-1}^{3-i})}{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^i (x_{k+1}^{3-i} - x_{k-1}^{3-i})}, \quad (1.22)$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^i (x_{k+1}^{3-i} - x_{k-1}^{3-i})$ есть удвоенная площадь ячейки S , причем,

$$S = \int_C x^1 dx^2 = - \int_C x^2 dx^1,$$

то есть площадь в d_1^+ будет со знаком плюс, а в d_2^+ - со знаком минус.

$$d_1^+ = \frac{\partial f}{\partial x^1} + O(h_1^2 + h_2^2) = \frac{f_{ij}(0 - h_2) + f_{i+1j}(h_2 - 0) + f_{i+1j+1}(h_2 - 0) + f_{ij+1}(0 - h_2)}{2h_1 h_2} =$$

$$= \frac{1}{2h_1}(f_{i+1j} + f_{i+1j+1} - f_{ij} - f_{ij+1}).$$

$$d_2^+ = \frac{\partial f}{\partial x^2} + O(h_1^2 + h_2^2) = \frac{f_{ij}(h_1 - 0) + f_{i+1j}(h_1 - 0) + f_{i+1j+1}(0 - h_1) + f_{ij+1}(0 - h_1)}{-2h_1 h_2} =$$

$$= \frac{1}{2h_2}(f_{ij+1} + f_{i+1j+1} - f_{ij} - f_{i+1j}).$$

Двойственные операторы считаем по формуле (1.19), учитывая при этом знак. В результате получаем следующие разностные операторы

$$d_0^+ f = \frac{1}{4}(f_{ij} + f_{i+1j} + f_{ij+1} + f_{i+1j+1}) = f + O(h_1^2 + h_2^2),$$

$$\begin{aligned}
d_1^+ f &= \frac{1}{2h_1} (f_{i+1j} + f_{i+1j+1} - f_{ij} - f_{ij+1}) = \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}x^1} + O(h_1^2 + h_2^2), \\
d_2^+ f &= \frac{1}{2h_2} (f_{ij+1} + f_{i+1j+1} - f_{ij} - f_{i+1j}) = \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}x^2} + O(h_1^2 + h_2^2), \\
d_3^+ f &= \frac{1}{h_1 h_2} (f_{ij} + f_{i+1j+1} - f_{i+1j} - f_{ij+1}) = \frac{\mathcal{I}^2 f}{\mathcal{I}x^1 \mathcal{I}x^2} + O(h_1^2 + h_2^2), \\
d_0^- f &= \frac{1}{4} (f_{ij} + f_{i-1j} + f_{ij-1} + f_{i-1j-1}) = f + O(h_1^2 + h_2^2), \\
d_1^- f &= \frac{1}{2h_1} (f_{ij} + f_{ij-1} - f_{i-1j} - f_{i-1j-1}) = \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}x^1} + O(h_1^2 + h_2^2), \\
d_2^- f &= \frac{1}{2h_2} (f_{ij} + f_{i-1j} - f_{ij-1} - f_{i-1j-1}) = \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}x^2} + O(h_1^2 + h_2^2), \\
d_3^- f &= \frac{1}{h_1 h_2} (f_{ij} + f_{i-1j-1} - f_{i-1j} - f_{ij-1}) = \frac{\mathcal{I}^2 f}{\mathcal{I}x^1 \mathcal{I}x^2} + O(h_1^2 + h_2^2).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Нужно отметить, что приведенные разностные операторы (1.23) имеют второй порядок точности только в точке A , являющейся точкой пересечения диагоналей рассматриваемой нами ячейки (см. рис.1.2). Во всех остальных точках прямоугольной ячейки эти операторы имеют первый порядок точности.

На рассматриваемом нами шаблоне с помощью операторов (1.23) получим систему операторов D_{ij} , $i, j = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned}
(D_{00}f)_{ij} &= d_0^+(d_0^-f)_{ij} = d_0^+\left(\frac{1}{4}(f_{ij} + f_{i-1j} + f_{ij-1} + f_{i-1j-1})\right) = \\
&= \frac{1}{16}(f_{ij} + f_{i-1j} + f_{ij-1} + f_{i-1j-1} + f_{i+1j} + f_{ij} + f_{i+1j-1} + f_{ij-1} + \\
&\quad + f_{ij+1} + f_{i-1j+1} + f_{ij} + f_{i-1j} + f_{i+1j+1} + f_{ij+1} + f_{i+1j} + f_{ij}) = \\
&= \frac{1}{16}(f_{i-1j+1} + f_{i+1j-1} + f_{i-1j-1} + f_{i+1j+1} + 2(f_{i-1j} + f_{i+1j} + f_{ij-1} + f_{ij+1}) + 4f_{ij}), \\
(D_{10}f)_{ij} &= (D_{01}f)_{ij} = d_0^+(d_1^-f)_{ij} = d_0^+\left(\frac{1}{2h_1}(f_{ij} + f_{ij-1} - f_{i-1j} - f_{i-1j-1})\right) = \\
&= \frac{1}{8h_1}(f_{ij} + f_{ij-1} - f_{i-1j} - f_{i-1j-1} + f_{i+1j} + f_{i+1j-1} - f_{ij} - f_{ij-1} + \\
&\quad + f_{ij+1} + f_{ij} - f_{i-1j+1} - f_{i-1j} + f_{i+1j+1} + f_{i+1j} - f_{ij+1} - f_{ij}) = \\
&= \frac{1}{8h_1}(f_{i+1j-1} + 2f_{i+1j} + f_{i+1j+1} - f_{i-1j-1} - 2f_{i-1j} - f_{i-1j+1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D_{20}f)_{ij} &= (D_{02}f)_{ij} = d_0^+(d_2^-f)_{ij} = d_0^+\left(\frac{1}{2h_2}(f_{ij} + f_{i-1j} - f_{ij-1} - f_{i-1j-1})\right) = \\
&= \frac{1}{8h_2}(f_{ij} + f_{i-1j} - f_{ij-1} - f_{i-1j-1} + f_{i+1j} + f_{ij} - f_{i+1j-1} - f_{ij-1} + \\
&+ f_{ij+1} + f_{i-1j+1} - f_{ij} - f_{i-1j} + f_{i+1j+1} + f_{ij+1} - f_{i+1j} - f_{ij}) = \\
&= \frac{1}{8h_2}(f_{i-1j+1} + 2f_{ij+1} + f_{i+1j+1} - f_{i-1j-1} - 2f_{ij-1} - f_{i+1j-1}), \\
(D_{21}f)_{ij} &= (D_{12}f)_{ij} = d_1^+(d_2^-f)_{ij} = d_1^+\left(\frac{1}{2h_2}(f_{ij} + f_{i-1j} - f_{ij-1} - f_{i-1j-1})\right) = \\
&= \frac{1}{4h_1h_2}(f_{i+1j} + f_{ij} - f_{i+1j-1} - f_{ij-1} + f_{i+1j+1} + f_{ij+1} - f_{i+1j} - f_{ij} - \\
&\quad - f_{ij} - f_{i-1j} + f_{ij-1} + f_{i-1j-1} - f_{ij+1} - f_{i-1j+1} + f_{ij} + f_{i-1j}) = \\
&= \frac{1}{4h_1h_2}(f_{i-1j-1} + f_{i+1j+1} - f_{i-1j+1} - f_{i+1j-1}), \\
(D_{11}f)_{ij} &= d_1^+(d_1^-f)_{ij} = d_1^+\left(\frac{1}{2h_1}(f_{ij} + f_{ij-1} - f_{i-1j} - f_{i-1j-1})\right) = \\
&= \frac{1}{4h_1^2}(f_{i+1j} + f_{i+1j-1} - f_{ij} - f_{ij-1} + f_{i+1j+1} + f_{i+1j} - f_{ij+1} - f_{ij} - \\
&- f_{ij} - f_{ij-1} + f_{i-1j} + f_{i-1j-1} - f_{ij+1} - f_{ij} + f_{i-1j+1} + f_{i-1j}) = \\
&= \frac{1}{4h_1^2}(f_{i+1j-1} + 2f_{i+1j} + f_{i+1j+1} - 2(f_{ij-1} + 2f_{ij} + f_{ij+1}) + f_{i-1j-1} + 2f_{i-1j} + f_{i-1j+1}), \\
(D_{22}f)_{ij} &= d_2^+(d_2^-f)_{ij} = d_2^+\left(\frac{1}{2h_2}(f_{ij} + f_{i-1j} - f_{ij-1} - f_{i-1j-1})\right) = \\
&= \frac{1}{4h_2^2}(f_{ij+1} + f_{i-1j+1} - f_{ij} - f_{i-1j} + f_{i+1j+1} + f_{ij+1} - f_{i+1j} - f_{ij} - \\
&\quad - f_{ij} - f_{i-1j} + f_{ij-1} + f_{i-1j-1} - f_{i+1j} - f_{ij} + f_{i+1j-1} + f_{ij-1}) = \\
&= \frac{1}{4h_2^2}(f_{i-1j+1} + 2f_{ij+1} + f_{i+1j+1} - 2(f_{i-1j} + 2f_{ij} + f_{i+1j}) + f_{i-1j-1} + 2f_{ij-1} + f_{i+1j-1}).
\end{aligned}$$

Таким образом, получили следующие формулы

$$(D_{00}f)_{ij} = \frac{1}{16}(f_{i-1j+1} + f_{i+1j-1} + f_{i-1j-1} + f_{i+1j+1} + 2(f_{i-1j} + f_{i+1j} + f_{ij-1} + f_{ij+1}) + 4f_{ij}),$$

$$(D_{10}f)_{ij} = \frac{1}{8h_1}(f_{i+1j-1} + 2f_{i+1j} + f_{i+1j+1} - f_{i-1j-1} - 2f_{i-1j} - f_{i-1j+1}),$$

$$(D_{20}f)_{ij} = \frac{1}{8h_2}(f_{i-1j+1} + 2f_{ij+1} + f_{i+1j+1} - f_{i-1j-1} - 2f_{ij-1} - f_{i+1j-1}),$$

(1.24)

$$(D_{21}f)_{ij} = \frac{1}{4h_1h_2}(f_{i-1j-1} + f_{i+1j+1} - f_{i-1j+1} - f_{i+1j-1}),$$

$$(D_{11}f)_{ij} = \frac{1}{4h_1^2}(f_{i+1j-1} + 2f_{i+1j} + f_{i+1j+1} - 2(f_{ij-1} + 2f_{ij} + f_{ij+1}) + f_{i-1j-1} + 2f_{i-1j} + f_{i-1j+1}),$$

$$(D_{22}f)_{ij} = \frac{1}{4h_2^2}(f_{i-1j+1} + 2f_{ij+1} + f_{i+1j+1} - 2(f_{i-1j} + 2f_{ij} + f_{i+1j}) + f_{i-1j-1} + 2f_{ij-1} + f_{i+1j-1}).$$

Рассмотрим треугольный шаблон с координатами узлов $(0,0), (h_1,0), (0,h_2)$. Приведем для него операторы, аналогичные рассмотренным выше. Это базисные операторы:

$$d_0^+ f = \frac{1}{3}(f_{ij} + f_{i+1j} + f_{ij+1}) = f + O(h_1 + h_2),$$

$$d_1^+ f = \frac{1}{h_1}(f_{i+1j} - f_{ij}) = \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}x^1} + O(h_1 + h_2),$$

$$d_2^+ f = \frac{1}{h_2}(f_{ij+1} - f_{ij}) = \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}x^2} + O(h_1 + h_2),$$

$$d_0^- f = \frac{1}{3}(f_{ij} + f_{i-1j} + f_{ij-1}) = f + O(h_1 + h_2),$$

$$d_1^- f = \frac{1}{h_1}(f_{ij} - f_{i-1j}) = \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}x^1} + O(h_1 + h_2),$$

$$d_2^- f = \frac{1}{h_2}(f_{ij} - f_{ij-1}) = \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}x^2} + O(h_1 + h_2),$$

и операторы второго порядка, полученные как суперпозиции левых и правых базисных операторов:

$$(D_{00}f)_{ij} = \frac{1}{9}(f_{i-1j+1} + f_{i+1j-1} + f_{i-1j} + f_{i+1j} + f_{ij-1} + f_{ij+1} + 3f_{ij}),$$

$$(D_{11}f)_{ij} = \frac{1}{h_1^2}(f_{i+1j} - f_{ij} - f_{i-1j}),$$

$$(D_{22}f)_{ij} = \frac{1}{h_2^2}(f_{ij+1} - f_{ij} - f_{ij-1}),$$

$$(D_{10}f)_{ij} = \frac{1}{3h_1}(f_{i+1j} + f_{i+1j-1} - f_{i-1j} - f_{ij+1}), \tag{1.25}$$

$$(D_{01}f)_{ij} = \frac{1}{3h_1}(f_{i+1j} + f_{ij+1} - f_{i-1j} - f_{i-1j+1}),$$

$$(D_{20}f)_{ij} = \frac{1}{3h_2} (f_{i-1j+1} + f_{ij+1} - f_{i-1j} - f_{ij-1}),$$

$$(D_{02}f)_{ij} = \frac{1}{3h_2^2} (f_{i+1j} + f_{ij+1} - f_{i+1j-1} - f_{ij-1}).$$

$$(D_{12}f)_{ij} = \frac{1}{h_1h_2} (f_{i+1j} + f_{ij-1} - f_{i+1j-1} - f_{ij}),$$

$$(D_{21}f)_{ij} = \frac{1}{h_1h_2} (f_{ij+1} + f_{i-1j} - f_{i-1j+1} - f_{ij}).$$

Система операторов (1.25) удовлетворяет равенствам (1.21), в чем легко можно убедиться непосредственной проверкой

ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ: АППРОКСИМАЦИЯ, СХОДИМОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ

Пусть дана исходная дифференциальная задача, которую мы запишем в виде [9]

$$Lu(x) = f(x), \quad (2.1)$$

где $x \in G$, G – область m – мерного пространства, $f(x)$ – заданная функция, L – дифференциальный оператор. Предполагается, что дополнительные условия (типа начальных и граничных условий) учтены оператором L и правой частью f .

Для построения разностной схемы прежде всего вводится сетка G_h – конечное множество точек, принадлежащих G , плотность распределения которых характеризуется параметром h – *шагом сетки*. В общем случае, параметр h – вектор, причем определена $\|h\|$ – длина вектора h . Обычно сетка G_h выбирается так, что при $\|h\| \rightarrow 0$ множество G_h стремится заполнить всю область \bar{G} . Функция, определенная в точках сетки G , называется *сеточной функцией*.

После введения сетки G_h следует заменить в уравнении (2.1) дифференциальный оператор L разностным оператором L_h , правую часть $f(x)$ – сеточной функцией $j_h(x)$. В результате получим систему разностных уравнений

$$L_h y_h(x) = j_h(x), \quad x \in G_h, \quad (2.2)$$

которая называется *разностной схемой* или *разностной задачей*. В отличие от дифференциального уравнения решение разностной задачи будем обозначать буквой y .

Перейдем к изложению основных понятий разностных схем: аппроксимации, корректности (устойчивости) и сходимости. Прежде, чем давать формальные определения, заметим, что свойство аппроксимации означает близость разностного оператора к дифференциальному. Отсюда еще не следует, вообще говоря, близость решений дифференциального и разностного уравнений. Свойство устойчивости разностной схемы является ее внутренним свойством, не зависящим от того, аппроксимирует ли эта схема какое – либо дифференциальное уравнение. Оказывается, однако, что если разностная схема аппроксимирует корректно поставленную задачу и

устойчива, то ее решение сходится при $\|h\| \rightarrow 0$ к решению исходной дифференциальной задачи.

Будем считать, что решение задачи (1) принадлежит линейному нормированному пространству \mathfrak{K}_0 , $\|\cdot\|_0$ — норма в \mathfrak{K}_0 . Аналогично считаем, что сеточные функции $y_h(x), j_h(x)$ являются элементами линейного нормированного пространства \mathfrak{K}_h (пространства сеточных функций) с нормой $\|\cdot\|_h$. По существу, имеем семейство линейных нормированных пространств, зависящее от параметра h .

Чтобы иметь возможность сравнивать функции из различных пространств, вводится оператор проектирования $p_h : \mathfrak{K}_0 \rightarrow \mathfrak{K}_h$. Это, по определению, линейный оператор, сопоставляющий каждой функции из \mathfrak{K}_0 некоторую функцию из \mathfrak{K}_h , т. е. $u_h(x) = p_h u(x)$.

В дальнейшем будем требовать, чтобы нормы в \mathfrak{K}_h были согласованы с нормой в исходном пространстве \mathfrak{K}_0 . Это означает, что для любой $u \in \mathfrak{K}_0$ выполняется условие

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|p_h u\|_h = \|u\|_0. \quad (2.3)$$

Требование согласования норм обеспечивает единственность предела сеточных функций при $\|h\| \rightarrow 0$. Действительно, если для $u, \mathbf{u} \in \mathfrak{K}_0$ имеем

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|y_h - p_h u\|_h = 0, \quad \lim_{|h| \rightarrow 0} \|y_h - p_h \mathbf{u}\|_h = 0,$$

то согласно (2.3)

$$\begin{aligned} \|p_h u - p_h \mathbf{u}\|_h &= \|(p_h u - y_h) + (y_h - p_h \mathbf{u})\|_h \leq \|p_h u - y_h\|_h + \|y_h - p_h \mathbf{u}\|_h \text{ и} \\ \|u - \mathbf{u}\|_0 &= \lim_{|h| \rightarrow 0} \|p_h(u - \mathbf{u})\|_h = 0, \end{aligned}$$

т. е. $u = \mathbf{u}$.

Пусть $u(x)$ — решение исходной задачи (1) и $y_h(x)$ — решение разностной задачи (2.2).

Определение 1. Сеточная функция $z_h(x) = y_h(x) - p_h u(x)$, $x \in G_h$, называется погрешностью разностной схемы (2.2).

Если в уравнении (2.2) допустим некоторое отклонение правой части $\mathbf{e}(x)$, то получим *возмущенную задачу*:

$$L_h s_h(x) = \mathbf{j}_h(x) + \mathbf{e}_h(x), \quad (2.4)$$

решение которой обозначим буквой s .

Определение 2. Сеточная задача (2.2) называется *устойчивой*, если

1) решение (2.2) существует и единственно и

2) $\forall h_0 > 0$ и $\mathbf{d} > 0$: $\forall h < h_0, \forall \mathbf{e}_h : \|\mathbf{e}_h\|_h < \mathbf{d}$ решение возмущенной задачи

(2.3) существует, единственно и удовлетворяет неравенству:

$$\|s_h - y_h\|_h \leq M_1 \|\mathbf{e}_h\|_h, \quad M_1 = \text{const} > 0.$$

Везде выше оператор L считали нелинейным. Пусть теперь он будет линейным. Это обстоятельство не повлияет на определения аппроксимации и сходимости разностных схем, а определение корректности (устойчивости) изменится.

Итак, сформулируем новое определение устойчивости. Если задачи (2.2) и (2.4) линейные, то $s_h - y_h$ - решение задачи. Пусть $w_h = s_h - y_h$. Тогда

$$L_h(s_h - y_h) = \mathbf{j}_h + \mathbf{e}_h - \mathbf{j}_h \Rightarrow$$

$$L_h w_h = \mathbf{e}_h \Rightarrow$$

$$\|w_h\|_h \leq M_2 \|\mathbf{e}_h\|_h, \quad M_2 > 0.$$

Для (2.2) последнее условие выглядит так:

$$\|y_h\|_h \leq M_3 \|\mathbf{j}_h\|_h, \quad M_3 > 0.$$

Определение 2'. Пусть L_h линейный оператор. Тогда разностная задача (2.2)

называется *корректной*, если 1) ее решение существует и единственно при любых правых частях $\mathbf{j}_h \in \mathfrak{R}_h$ и 2) существует постоянная $M_3 > 0$, не зависящая от h и такая, что при любых $\mathbf{j}_h \in \mathfrak{R}_h$ справедлива оценка

$$\|y_h\|_h \leq M_3 \|\mathbf{j}_h\|_h. \quad (2.5)$$

Свойство 2), означающее непрерывную зависимость, равномерную относительно h , решения разностной задачи от правой части, называется *устойчивостью* разностной схемы.

Теперь перейдем к определениям аппроксимации и сходимости. Подставим $y_h(x) = p_h u(x) + z_h(x)$ в уравнение (2.2). Тогда получим, что погрешность $z_h(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L_h z_h(x) = y_h(x), \quad x \in G_h, \quad (2.6)$$

где

$$y_h(x) = j_h(x) - L_h(p_h u(x)) \equiv j_h(x) - L_h u_h(x). \quad (2.7)$$

Определение 3. Сеточная функция $y_h(x)$, определенная формулой (2.7), называется *погрешностью аппроксимации разностной задачи (2.2) на решении исходной дифференциальной задачи (2.1)*.

Преобразуем выражение для $y_h(x)$. Проектируя уравнение (2.1) на сетку G_h , получим

$$p_h L u(x) = p_h f(x)$$

или, учитывая принятые обозначения,

$$(Lu)_h(x) = f_h(x). \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) получаем

$$y_h(x) = [(Lu)_h(x) - L_h u_h(x)] + (j_h(x) - f_h(x)),$$

т. е.

$$y_h(x) = y_{h,1}(x) + y_{h,2}(x),$$

где

$$y_{h,1}(x) = (Lu)_h(x) - L_h u_h(x), \quad y_{h,2}(x) = j_h(x) - f_h(x).$$

Определение 4. Функции $y_{h,1}(x)$ и $y_{h,2}(x)$ называются, соответственно, *погрешностью аппроксимации дифференциального оператора L разностным оператором L_h и погрешностью аппроксимации правой части*.

Определение 5. Говорят, что разностная задача (2.2) *аппроксимирует* исходную задачу (2.1), если $\|y_h\|_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$. Разностная схема имеет k -тый порядок *аппроксимации*, если существуют постоянные $k > 0$, $M_4 > 0$, не зависящие от h и такие, что

$$\|y_h\|_h \leq M_4 |h|^k.$$

Аналогично определяются погрешность аппроксимации и порядок погрешности аппроксимации правых частей и дифференциального оператора.

Основным вопросом теории разностных схем, как впрочем, и других приближенных методов, является вопрос о сходимости. Сформулируем строго понятие сходимости.

Определение 6. Решение разностной задачи (2.2) *сходится* к решению дифференциальной задачи (2.1), если при $|h| \rightarrow 0$

$$\|y_h - u_h\|_h \rightarrow 0.$$

Разностная схема имеет k - *тый порядок точности*, если существуют постоянные $k > 0$, $M > 0$, не зависящие от h и такие, что

$$\|y_h - u_h\|_h \leq M |h|^k.$$

Часто для краткости говорят “разностная схема сходится”, подразумевая сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи.

Справедлива следующая теорема о связи устойчивости и сходимости.

Теорема 1. Пусть дифференциальная задача (2.1) поставлена корректно, разностная схема (2.2) является корректной и аппроксимирует исходную задачу (2.1). Тогда решение разностной задачи (2.2) сходится к исходной задачи (2.1), причем, порядок точности совпадает с порядком аппроксимации.

Значение приведенной выше теоремы состоит в том, что она позволяет разделить изучение сходимости на два отдельных этапа: доказательство аппроксимации и доказательство устойчивости. Обычно более сложным этапом является исследование устойчивости, которое состоит в получении оценок вида (2.5), называемых *априорными оценками*.

Пример 1. Примером задачи вида (2.1) является задача Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y) & \text{на } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = j(x, y). \end{cases}$$

Действительно, оператор L и функция f представляются в виде

$$L = \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \text{на } \Omega, \\ I & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad f = \begin{cases} g(x, y) & \text{на } \Omega, \\ j(x, y) & \text{на } \partial\Omega. \end{cases}$$

В данном случае нужно рассматривать устойчивость по правой части и устойчивость по граничным условиям.

Пример 2. Примером задачи вида (2.1) является также начально-краевая задача для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t),$$

$$u|_{t=0} = u_0(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_0(x),$$

$$u|_{x=a} = j(t),$$

$$u|_{x=b} = y(t).$$

$$L = \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} & \text{на } \Omega, \\ I & \text{при } t = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} & \text{при } t = 0, \\ I & \text{при } x = a, \\ I & \text{при } x = b, \end{cases} \quad f = \begin{cases} f(x, t), & \text{на } \Omega, \\ u_0(x), & \text{при } t = 0, \\ u_0(x), & \text{при } t = 0, \\ j(x), & \text{при } x = a, \\ y(x), & \text{при } x = b. \end{cases}$$

Но здесь уже, кроме устойчивости по правой части и устойчивости по граничным условиям, необходимо исследовать устойчивость по начальным условиям.

Рассмотрим теперь канонический вид и условия устойчивости двухслойных разностных схем.

Канонический вид двухслойных разностных схем

Общая запись разностных схем в виде операторных уравнений $A_h y_h = j_h$, удобная для стационарных задач, оказывается недостаточно детальной при переходе к нестационарным разностным схемам. Поэтому при исследовании двухслойных и

трехслойных разностных схем используются другие канонические формы записи.

Пусть, как и прежде, задано семейство конечномерных линейных пространств H_h , размерность которых зависит от параметра h . Параметр h считаем вектором с нормой $|h|$. В приложениях к конкретным разностным схемам пространство H_h состоит из функций, заданных на пространственной сетке Ω_h , характеризующейся шагом h .

На отрезке $[0, T]$ введем сетку по времени

$$W_t = \{t_n = nt, n = 0, 1, \dots, K, Kt = T\}$$

с шагом $t > 0$ и будем рассматривать функции $y(t_n) \in H_h$ дискретного аргумента $t_n \in W_t$ со значениями из пространства H_h . Функции $y(t_n) \in H_h$ могут зависеть параметрически от h и t , $y(t_n) = y_{h,t}(t_n)$.

В дальнейшем будем обозначать $y = y_{h,t}(t_n)$.

Пусть заданы линейные операторы B_1, B_2 , действующие в H_h , и функция $j_n \in H_h$. Двухслойной разностной схемой называется семейство операторно-разностных уравнений первого порядка

$$B_1 y_{n+1} + B_2 y_n = j_n, \quad n = 0, 1, \dots, K-1, \quad (2.9)$$

$$y_0 \in H_h \text{ задан.}$$

Учитывая тождество

$$y_{n+1} = y_n + t \frac{y_{n+1} - y_n}{t}, \quad (2.10)$$

получаем, что любую двухслойную разностную схему можно записать на сетке W_t в виде

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{t} + A y_n = j_n, \quad n = 0, 1, \dots, K-1, \quad y_0 \in H_h \text{ задан,} \quad (2.11)$$

где A и B — линейные операторы, $A = B_1 + B_2$, $B = t B_1$.

Каноническим видом (или канонической формой) двухслойной разностной схемы называется ее запись в виде (2.11).

Поскольку одну и ту же разностную схему можно записать многими способами,

введение единообразной канонической формы записи облегчает анализ и сравнение различных схем.

Устойчивость разностных схем

Как и в случае стационарных задач, разностная схема (2.11) называется *корректной*, если ее решение $y = y_{h,t}(t_n)$:

а) существует, б) единственно, в) непрерывно (причем равномерно относительно t и h) зависит от входных данных $\mathbf{j}(t_n)$ и y_0 . В дальнейшем всегда будет предполагаться, что оператор B^{-1} существует (если $B = B_{h,t}(t_n)$), то предполагается существование B^{-1} при всех допустимых значениях h, t, t_n). Тем самым гарантируется существование и единственность решения задачи (2.11).

Дадим строгие определения устойчивости. Будем считать, что в H_h заданы две нормы: $\|\cdot\|_{1h}$, в которой измеряется решение $y(t_n) \in H_h$ и $\|\cdot\|_{2h}$, в которой измеряется правая часть $\mathbf{j}(t_n)$.

Определение 7. Разностная схема (2.11) называется *устойчивой*, если существуют постоянные $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, не зависящие от h, t, n и такие, что при любых правых частях $\mathbf{j}_{h,t}(t_n) \in H_h$ и любых начальных $y_0 \in H_h$, для решения уравнения (2.11) выполняется оценка

$$\|y_n\|_{1h} \leq M_1 \|y_0\|_{1h} + M_2 \max_{0 \leq j \leq n-1} \|\mathbf{j}_j\|_{2h}. \quad (2.13)$$

Устойчивость, выраженную оценкой (2.13), называют *устойчивостью по начальным данным и по правой части*. Используются также понятия устойчивости по начальным данным и устойчивости по правой части. Рассмотрим однородное уравнение

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{t} + Ay_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, K-1, \quad y_0 \in H_h \text{ задан}, \quad (2.14)$$

Определение 8. Разностная схема (2.11) называется *устойчивой по начальным данным*, если существует постоянная $M_1 > 0$, не зависящая от h, t, n и такая, что при любых $y_0 \in H_h$ для решения однородного уравнения (2.14) справедлива оценка

$$\|y_n\|_{1h} \leq M_1 \|y_0\|_{1h}, \quad n = 0, 1, \dots, K. \quad (2.15)$$

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (2.11) с нулевыми начальными данными

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{t} + Ay_n = j_n, \quad n = 0, 1, \dots, K-1, \quad y_0 = 0. \quad (2.16)$$

Определение 9. Разностная схема (2.11) называется *устойчивой по правой части*, если существует постоянная $M_2 > 0$, не зависящая от h, t, n и такая, что при любых $j_{h,t}(t_n) \in H_h$ для решения уравнения (2.16) справедлива оценка

$$\|y_n\|_{1h} \leq M_2 \max_{0 \leq j \leq n-1} \|j_j\|_{2h} \quad (2.17)$$

Заметим, что в силу линейности разностной схемы из одновременной устойчивости по начальным данным и по правой части следует устойчивость в смысле определения 1. Более того, покажем, что устойчивость по правой части является в определенном смысле следствием устойчивости по начальным данным.

Определение 10. Разностная схема (2.11) называется *равномерно устойчивой по начальным данным*, если существуют постоянная $r > 0$ и постоянная M_1 , не зависящая от h, t, n , такие, что при любых $n = 0, 1, \dots, K-1, K > 1$, и при всех $y_n \in H_h$ для решения y_{n+1} однородного уравнения (2.14) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_{1h} \leq r \|y_n\|_{1h}, \quad (2.18)$$

причем $r^n \leq M_1$.

Теорема 2. Пусть схема (2.11) равномерно устойчива по начальным данным в норме $\|\cdot\|_{1h}$. Тогда схема (2.11) устойчива и по правой части, причем для ее решения

выполнена оценка (2.13), где $\|j_j\|_{2h} = \|B_j^{-1} j_j\|_{1h}$ и $M_2 = M_1 T$.

ГЛАВА 3. МЕТОД ГАРМОНИК. УСТОЙЧИВОСТЬ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ “КРЕСТ”

Иследуем на устойчивость схему “крест” для одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t)$$

Схема “крест” имеет шаблон вида:

$$\begin{array}{c} (i, j+1) \\ | \\ (i-1, j) \quad (i, j) \quad (i+1, j) \\ | \\ (i, j-1) \end{array}$$

Для исследования на устойчивость, в соответствии с методом гармоник, нужно сделать следующее:

- перейти к однородному уравнению, т. е. положить $f(x, t) = 0$;
- подставить в полученное уравнение $u_j^k = I^k e^{iaj}$, чтобы получить зависимость $I = I(a)$;
- применить условие устойчивости $|I| \leq 1$.

Итак, схема “крест” для одномерного однородного волнового уравнения имеет вид:

$$\frac{1}{t^2} (u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}) - \frac{c^2}{h^2} (u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) = 0.$$

Переходим к пункту 2) плана исследования устойчивости. Получаем

$$\frac{1}{t^2} (I^{k+1} e^{iaj} - 2I^k e^{iaj} + I^{k-1} e^{iaj}) - \frac{c^2}{h^2} (I^k e^{ia(j+1)} - 2I^k e^{iaj} + I^k e^{ia(j-1)}) = 0.$$

Умножим последнее уравнение на $\frac{t^2}{l^{k-1}e^{iaj}} \Rightarrow$

$$l^2 - 2l + 1 = \frac{t^2 c^2}{h^2} (e^{ia} - 2 + e^{-ia})l.$$

Имея в виду то, что

$$\begin{aligned} e^{ia} + e^{-ia} &= 2 \cos a, \\ 1 - \cos a &= 2 \sin^2 \frac{a}{2}, \\ 1 + \cos a &= 2 \cos^2 \frac{a}{2}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

получаем

$$l^2 - 2l + 1 = - \left(4 \frac{t^2 c^2}{h^2} \sin^2 \frac{a}{2} \right) l.$$

Или

$$l^2 + \left(4 \frac{t^2 c^2}{h^2} \sin^2 \frac{a}{2} - 2 \right) l + 1 = 0. \tag{3.2}$$

Проанализируем последнее уравнение. Видно, что по теореме Виета произведение корней равно единице. Значит, схема устойчива, если

$$|l_1| = |l_2| = 1.$$

А это выполняется, когда дискриминант уравнения (3.2) меньше нуля:

$$D = \left(4 \frac{t^2 c^2}{h^2} \sin^2 \frac{a}{2} - 2 \right)^2 - 4 \leq 0 \quad \text{для } \forall a,$$

$$\left| 4 \frac{t^2 c^2}{h^2} \sin^2 \frac{a}{2} - 2 \right| \leq 2,$$

$$\left| 2 \frac{t^2 c^2}{h^2} \sin^2 \frac{a}{2} - 1 \right| \leq 1,$$

$$\left| \frac{t^2 c^2}{h^2} \sin^2 \frac{a}{2} \right| \leq 1.$$

Последнее выполняется для $\forall a \Rightarrow$

$$\left| \sin^2 \frac{a}{2} \right| \leq 1 \Rightarrow \frac{t^2 c^2}{h^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{t c}{h} \leq 1 \Rightarrow$$

$$t \leq \frac{h}{c}. \quad (3.3)$$

Таким образом, получили условие устойчивости (3.3), которое называется *условием Куранта*. Здесь $\frac{h}{c}$ – время, за которое волна проходит одну ячейку.

Перейдем к исследованию равномерной устойчивости по начальным данным в общем виде [3]. Схемы "крест" могут быть представлены с помощью операторного уравнения

$$A_h u^k - D_u u^k = f, \quad (3.4)$$

где u^k – неизвестная сеточная функция, k – номер временного слоя, A_h – неположительный сеточный линейный оператор, действующий в пределах одного временного слоя. Пусть $\{j_1, \mathbf{K}, j_n, \mathbf{K}\}$ – полная система собственных функций оператора A_h , $\{x_1, \mathbf{K}, x_n, \mathbf{K}\}$ – набор соответствующих им собственных значений или спектр оператора A_h . Тогда исследование устойчивости задачи (3.4) сводится к анализу устойчивости решений вида

$$u^k = j_n \exp(Z_n k), \quad n \in N, \quad (3.5)$$

где $Z_n \in \mathbb{C}$. Так как оператор A_h неположительный, то все собственные числа этого оператора будут неположительными:

$$A_h j_n = -x_n j_n, \quad x_n \geq 0.$$

Решение (3.5) будет устойчивым при выполнении условия

$$\operatorname{Re} Z_n \leq 0 \quad (\Leftrightarrow |I| \leq 1).$$

Подставляя (3.5) в однородное уравнение (3.4), получим:

$$\begin{aligned} & A_h j_n \exp(Z_n k) - D_u \exp(Z_n k) = \\ & = -x_n j_n \exp(Z_n k) - \\ & - \frac{1}{t^2} (j_n \exp(Z_n (k+1)) - 2j_n \exp(Z_n k) + j_n \exp(Z_n (k-1))) = 0, \end{aligned}$$

откуда после сокращения на $j_n \exp(Z_n k)$ получим

$$-x_n - \frac{1}{t^2} (\exp(Z_n) - 2 + \exp(-Z_n)) = 0.$$

Последнее равенство с помощью умножения на $(-t^2 \exp(Z_n))$ приводится к квадратному уравнению относительно $\exp(Z_n)$:

$$(\exp(Z_n))^2 - (2 - x_n t^2) \exp(Z_n) + 1 = 0. \quad (3.6)$$

Из теоремы Виета следует, что каждому корню уравнения (3.6) $\exp(Z_n)$ соответствует другой корень: $\exp(-Z_n)$. Таким образом, решение будет устойчиво только при чисто мнимых Z_n , (при выполнении условия $\operatorname{Re} Z_n = 0$), что эквивалентно случаю комплексно сопряженных или кратных корней квадратного уравнения. Отсюда получаем условие на дискриминант:

$$D = (2 - x_n t^2)^2 - 4 \leq 0.$$

Последнее неравенство эквивалентно условию на шаг интегрирования по времени

$$t \leq \frac{2}{\sqrt{x_n}}, \quad n \in N.$$

Пусть $a \leq x_n \leq b$, то есть $[a, b]$ - отрезок, содержащий спектр оператора. Тогда последнее неравенство переписется в виде:

$$t \leq \frac{2}{\sqrt{x_{\max}}}.$$

Таким образом, исследование устойчивости схемы (3.4) сводится к нахождению границ спектра оператора A_h . Схема будет устойчивой, если шаг интегрирования по времени t удовлетворяет условию Неймана

$$t \leq 2/\sqrt{b}, \quad (3.7)$$

где b - верхняя граница спектра оператора A_h .

Представляется более удобным рассматривать эквивалентную задачу нахождения собственной частоты колебаний полудискретной системы уравнений

$$A_h u - \lambda u = 0.$$

Решение рассмотрим в виде

$$u_n = j_n \exp(i\omega t).$$

Подставляем это решение в полудискретную систему уравнений, имея в виду, что оператор A_h неположительный, тогда

$$-x_n j_n = (i\omega)^2 j_n \Rightarrow x_n = \omega^2.$$

Получаем, что

$$t \leq \frac{2}{\sqrt{x_{\max}}} = \frac{2}{\sqrt{\omega_{\max}^2}} = \frac{2}{\omega_{\max}}.$$

Таким образом, условие устойчивости схемы (3.4) запишется в виде

$$t \leq 2/\omega_{\max}. \quad (3.8)$$

(Легко видеть, что $\omega_{\max} = \sqrt{b}$, откуда следует эквивалентность неравенств (3.7) и (3.8)).

ГЛАВА 4. ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ВАРИАЦИОННО- РАЗНОСТНЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Система динамических уравнений теории упругости для изотропной среды

$$(l + m)\text{grad div } u + m\Delta u = r \mathcal{J}^2 u / \mathcal{J} t^2 \quad (4.1)$$

может быть преобразована к виду отдельных скалярных волновых уравнений, описывающих распространение волн сжатия и сдвига.

При выполнении свойств индексной коммутативности:

$$D_{ij} D_{kl} = D_{kj} D_{il} = D_{il} D_{kj} \quad (i, j, k, l = 0, \mathbf{K}, n) . \quad (4.2)$$

которые вытекают из определения операторов D_{ij} и коммутативности линейных сеточных операторов:

$$D_{ij} D_{kl} = d_i^+ d_j^- d_k^+ d_l^- = d_k^+ d_j^- d_i^+ d_l^- = D_{kj} D_{il} = d_i^+ d_l^- d_k^+ d_j^- = D_{il} D_{kj} ,$$

аналогичные преобразования можно проводить и с разностными схемами. Рассмотрим преобразования систем уравнений и соответствующих им вариационно-разностных схем. Во избежание загромождения изложения несущественными деталями будут рассмотрены однородные уравнения.

Применяя к системе уравнений Ламе (4.1) оператор дивергенции, получим скалярное волновое уравнение [2]

$$(l + 2m)\Delta p = r \mathcal{J}^2 p / \mathcal{J} t^2 , \quad (4.3)$$

где $p = \text{div } u$. Аналогично, применяя к этой же системе уравнений оператор ротора, получим три скалярных волновых уравнения

$$m\Delta q_i = r \mathcal{J}^2 q_i / \mathcal{J} t^2 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.4)$$

где $q = (q_1, q_2, q_3) = \text{rot } u$. Полученные уравнения описывают распространение волн сжатия и сдвига в изотропной упругой среде. Проведем аналогичные преобразования с дискретным аналогом системы (4.1) (разностной схемой, построенной вариационно-разностным методом)

$$(l + m) \begin{vmatrix} D_{11} u_1 + D_{12} u_2 + D_{13} u_3 \\ D_{21} u_1 + D_{22} u_2 + D_{23} u_3 \\ D_{31} u_1 + D_{32} u_2 + D_{33} u_3 \end{vmatrix} + m D_{\Delta} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = r D_{\mathcal{J}} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} , \quad (4.5)$$

здесь $(D_{\Delta} = D_{11} + D_{22} + D_{33})$. Применим к первому уравнению системы (4.5)

разностный оператор D_{01} , ко второму - D_{02} , к третьему - D_{03} и сложим все три уравнения. Вследствие тождеств (4.2) получим сеточное уравнение для одной неизвестной функции

$$(1 + 2m)D_{\Delta} p = r D_{\#} p,$$

где $p = D_{01} u_1 + D_{02} u_2 + D_{03} u_3$ - сеточный аналог дивергенции. Аналогично получают скалярные сеточные уравнения для компонент ротора: ко второму уравнению системы (4.5) применяется оператор D_{03} , к третьему - D_{02} и третье вычитается из второго; к третьему уравнению применяется оператор D_{01} , к первому - D_{03} и первое вычитается из третьего; к первому уравнению применяется оператор D_{02} , ко второму - D_{01} и второе вычитается из первого. В результате получаем три скалярных сеточных уравнения

$$mD_{\Delta} q_i = D_{\#} q_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

где $q = (q_1, q_2, q_3) = (D_{30} u_2 - D_{20} u_2, D_{10} u_3 - D_{30} u_1, D_{20} u_1 - D_{10} u_2)$ - сеточный аналог ротора.

Замечание: Вариационно-разностная схема записывается в виде (4.5) и с ней можно провести данные преобразования, если в каждой ячейке основной сетки (1.1) лежит ровно одна ячейка вариационно-разностной схемы. В других случаях, например, для схемы на тетраэдральных ячейках данные преобразования провести невозможно, так как операторы схемы на тетраэдральных ячейках не удовлетворяют свойствам индексной коммутативности.

Рассмотрим устойчивость вариационно-разностных схем решения плоской задачи теории упругости [4]. Получим схему на четырехугольных ячейках, которая совпадает с «ажурной» схемой на треугольных ячейках, записанную в безразмерных величинах. В данном случае (4.5) будет иметь вид:

$$\begin{cases} (1 + m)(D_{11} u_1 + D_{12} u_2) + mD_{\Delta} u_1 = rD_{\#} u_1, \\ (1 + m)(D_{21} u_1 + D_{22} u_2) + mD_{\Delta} u_2 = rD_{\#} u_2, \end{cases}$$

где оператор Лапласа $D_{\Delta} = D_{11} + D_{22}$. Можем переписать:

$$\begin{cases} (1 + 2m)\underline{D_{11} u_1} + (1 + m)D_{12} u_2 + mD_{22} u_1 + (1 + 2m)\underline{D_{22} u_1} - (1 + 2m)D_{22} u_1 = rD_{\#} u_1, \\ (1 + 2m)\underline{D_{22} u_2} + (1 + m)D_{21} u_1 + mD_{11} u_2 + (1 + 2m)\underline{D_{11} u_2} - (1 + 2m)D_{11} u_2 = rD_{\#} u_2, \\ (1 + 2m)D_{\Delta} u_1 + (1 + m)D_{12} u_2 + mD_{22} u_1 - (1 + 2m)D_{22} u_1 = rD_{\#} u_1, \\ (1 + 2m)D_{\Delta} u_2 + (1 + m)D_{21} u_1 + mD_{11} u_2 - (1 + 2m)D_{11} u_2 = rD_{\#} u_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{\Delta} u_1 + \frac{l+m}{l+2m} D_{12} u_2 + \frac{m}{l+2m} D_{22} u_1 - D_{22} u_1 = \frac{r}{l+2m} D_{tt} u_1, \\ D_{\Delta} u_2 + \frac{l+m}{l+2m} D_{21} u_1 + \frac{m}{l+2m} D_{11} u_2 - D_{11} u_2 = \frac{r}{l+2m} D_{tt} u_2, \end{cases}$$

где $\frac{l+m}{l+2m} = \frac{1}{2(1-n)}$.

Переобозначим переменные:

$$u_1 = u, \quad u_2 = v.$$

Тогда получим искомую систему

$$\begin{aligned} D_{\Delta} u + \frac{1}{2(1-n)} (D_{12} v - D_{22} u) - D_{tt} u &= 0, \\ D_{\Delta} v + \frac{1}{2(1-n)} (D_{21} u - D_{11} v) - D_{tt} v &= 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

которая, как мы убедились, вытекает из уравнений (4.5) для двумерного случая.

Данная схема сводится к двум отдельным сеточным волновым уравнениям.

$$\begin{aligned} D_{\Delta} u + \frac{1}{2(1-n)} (D_{12} v - D_{22} u) - D_{tt} u &= 0, \\ D_{\Delta} v + \frac{1}{2(1-n)} (D_{21} u - D_{11} v) - D_{tt} v &= 0, \end{aligned}$$

где $p_0 = D_{01} u + D_{02} v$, $q_0 = D_{20} u - D_{10} v$.

Очевидно, что для исследования устойчивости достаточно рассмотреть только первое из них, поскольку они отличаются только коэффициентом при сеточном операторе Лапласа и собственные числа оператора первого уравнения больше. Поэтому анализ устойчивости сводится к нахождению максимальной собственной частоты полудискретного уравнения

$$D_{\Delta} p_0 - \frac{\partial^2 p_0}{\partial T^2} = 0. \quad (4.7)$$

В простейшем случае ортогональной координатной сетки для схемы на прямоугольных ячейках оператор Лапласа $D_{\Delta} = D_{11} + D_{22}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} D_{\Delta} f &= (D_{11} f)_{ij} + (D_{22} f)_{ij} = \frac{1}{4h_1^2} (f_{i+1j-1} + 2f_{i+1j} + f_{i+1j+1} - 2(f_{ij-1} + 2f_{ij} + f_{ij+1})) + f_{i-1j-1} + 2f_{i-1j} + f_{i-1j+1} + \\ &+ \frac{1}{4h_2^2} (f_{i-1j+1} + 2f_{ij+1} + f_{i+1j+1} - 2(f_{i-1j} + 2f_{ij} + f_{i+1j})) + f_{i-1j-1} + 2f_{ij-1} + f_{i+1j-1}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Подставим в (4.7) с оператором Лапласа (4.8) решение в виде

$$p_{jk} = \exp(i[aj + bk + wt]) \quad (4.9)$$

Получим дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4h_1^2} (\exp(ia)(\exp(-ib) + 2 + \exp(ib)) - 2(\exp(-ib) + 2 + \exp(ib)) + \exp(-ia)(\exp(-ib) + 2 + \exp(ib))) + \\ & + \frac{1}{4h_2^2} (\exp(ia)(\exp(-ib) - 2 + \exp(ib)) + 2(\exp(-ib) - 2 + \exp(ib)) + \exp(-ia)(\exp(-ib) - 2 + \exp(ib))) - \\ & = -w^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Произведем преобразования (4.10). Группируя слагаемые и учитывая (3.1), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4h_1^2} (\exp(ia) - 2 + \exp(-ia)) \cdot (\exp(-ib) + 2 + \exp(ib)) + \\ & + \frac{1}{4h_2^2} (\exp(ia) + 2 + \exp(-ia)) \cdot (\exp(-ib) - 2 + \exp(ib)) + w^2 = \\ & = \frac{1}{4h_1^2} (2 \cos a - 2) \cdot (2 \cos b + 2) + \frac{1}{4h_2^2} (2 \cos a + 2) \cdot (2 \cos b - 2) + w^2 = \\ & = \frac{1}{4h_1^2} \left(-4 \sin^2 \frac{a}{2} \right) \cdot \left(4 \cos^2 \frac{b}{2} \right) + \frac{1}{4h_2^2} \left(4 \cos^2 \frac{a}{2} \right) \cdot \left(-4 \sin^2 \frac{b}{2} \right) + w^2 = \\ & = - \left(\frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} + \frac{4}{h_2^2} \cos^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} - w^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$w^2 = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} + \frac{4}{h_2^2} \cos^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2}.$$

Найдем максимум правой части данного выражения при любых a и b . Она удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} + \frac{4}{h_2^2} \cos^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} \leq \max \left(\frac{4}{h_1^2}, \frac{4}{h_2^2} \right) \left(\sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} \right) \leq \\ & \leq \max \left(\frac{4}{h_1^2}, \frac{4}{h_2^2} \right) \left(\sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} \right) \leq \\ & \leq \max \left(\frac{4}{h_1^2}, \frac{4}{h_2^2} \right) \left(\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} \right) \left(\sin^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{b}{2} \right) \leq \max \left(\frac{4}{h_1^2}, \frac{4}{h_2^2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что равенство достижимо либо при $a = \frac{p}{2}, b = 0$, либо при $a = 0, b = \frac{p}{2}$

получаем точную оценку квадрата собственной частоты

$$w_{\max}^2 = \max\left(\frac{4}{h_1^2}, \frac{4}{h_2^2}\right),$$

из которой и (3.8) следует оценка устойчивости

$$t \leq \min(h_1, h_2). \quad (4.11)$$

Рассмотрим устойчивость «ажурной» схемы на треугольных ячейках в случае ортогональной координатной сетки. Оператор Лапласа данной схемы $D_{\Delta} = D_{11} + D_{22}$ имеет вид

$$D_{\Delta} f = \frac{1}{h_1^2} (f_{i+1j} - 2f_{ij} + f_{i-1j}) + \frac{1}{h_2^2} (f_{ij+1} - 2f_{ij} + f_{ij-1}) \quad (4.12)$$

Подставляя в (4.7) с оператором Лапласа (4.12) решение в виде (4.9), получим дисперсионное уравнение

$$\frac{1}{h_1^2} (\exp(ia) - 2 + \exp(-ia)) + \frac{1}{h_2^2} (\exp(ib) - 2 + \exp(-ib)) + w^2 = 0. \quad (4.13)$$

Преобразуем (4.13) и получим выражение для собственной частоты

$$\begin{aligned} w^2 &= -\left(\frac{1}{h_1^2} (\exp(ia) - 2 + \exp(-ia)) + \frac{1}{h_2^2} (\exp(ib) - 2 + \exp(-ib))\right) = \\ &= -\left(\frac{1}{h_1^2} (2\cos a - 2) + \frac{1}{h_2^2} (2\cos b - 2)\right) = -\left(\frac{1}{h_1^2} \left(-4\sin^2 \frac{a}{2}\right) + \frac{1}{h_2^2} \left(-4\sin^2 \frac{b}{2}\right)\right) = \\ &= \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{a}{2} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$w_{\max}^2 = \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2},$$

и получаем оценку устойчивости

$$t \leq \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}. \quad (4.14)$$

Перейдем к рассмотрению тех же схем в случае косоугольных сеток вида (1.16) с произвольной невырожденной матрицей

$$B_h = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим схему на четырехугольных ячейках. Ячейка параллелограммной сетки приведена на рисунке

Здесь h_1, h_2 - высоты, а $|\bar{b}_1|$ и $|\bar{b}_2|$ - стороны параллелограммной ячейки.

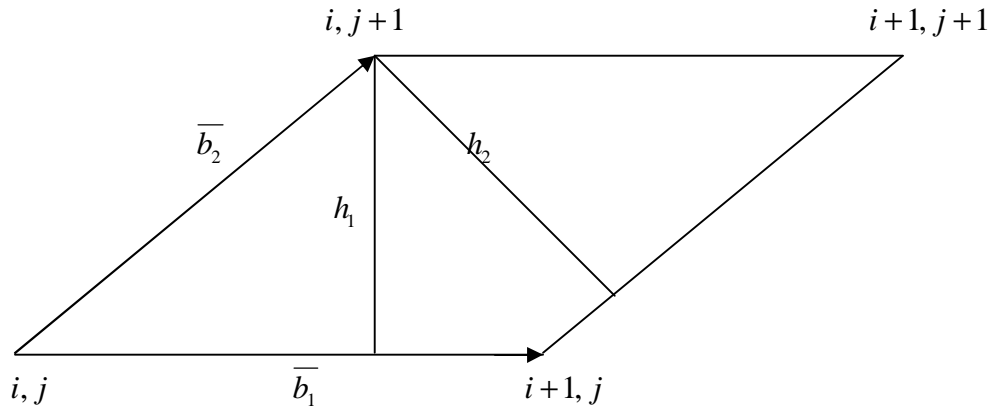


Рис. 4.1

Введем обозначения для столбцов матрицы B_h

$$\bar{b}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

есть площадь интересующей нас ячейки.

Пронумеруем узлы ячейки так, как показано на рис.4.2.

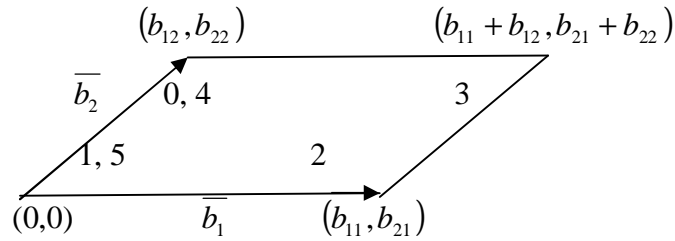


Рис. 4.2

Тогда из формул естественной аппроксимации производных (1.22) следует:

$$(d_1^+ f)_{ij} = \frac{1}{2|B|} ((f_{ij} - f_{i+1j+1})(b_{21} - b_{22}) - (f_{ij+1} - f_{i+1j})(b_{21} + b_{22})),$$

$$(d_2^+ f)_{ij} = \frac{1}{2|B|} ((f_{ij} - f_{i+1j+1})(b_{12} - b_{11}) - (f_{i+1j} - f_{ij+1})(b_{11} + b_{12})),$$

$$(d_1^- f)_{ij} = \frac{1}{2|B|} ((f_{ij} - f_{i-1j-1})(b_{22} - b_{21}) - (f_{i-1j} - f_{ij-1})(b_{21} + b_{22})),$$

$$(d_2^- f)_{ij} = \frac{1}{2|B|} ((f_{ij} - f_{i+1j+1})(b_{11} - b_{12}) - (f_{ij-1} - f_{i-1j})(b_{11} + b_{12})).$$

Для сеточного оператора Лапласа получим выражение:

$$\begin{aligned}
(D_{\Delta} f)_{ij} &= (d_1^+ d_1^- f + d_2^+ d_2^- f)_{ij} = \\
&= \frac{1}{4|B|^2} \left[(f_{i-1j-1} + f_{i+1j+1}) \left((b_{11} - b_{12})^2 + (b_{21} - b_{22})^2 \right) + (f_{i-1j+1} + f_{i+1j-1}) \left((b_{11} + b_{12})^2 + (b_{21} + b_{22})^2 \right) + \right. \\
&+ 2(f_{i-1j} + f_{i+1j}) \left(-b_{11}^2 - b_{21}^2 + b_{12}^2 + b_{22}^2 \right) + 2(f_{ij-1} + f_{ij+1}) \left(b_{11}^2 + b_{21}^2 - b_{12}^2 - b_{22}^2 \right) - \\
&\left. - 4f_{ij} (b_{11}^2 + b_{21}^2 + b_{12}^2 + b_{22}^2) \right] = \\
&= \frac{1}{4|B|^2} \left[(f_{i-1j-1} + f_{i+1j+1}) (\bar{b}_1 - \bar{b}_2)^2 + (f_{i-1j+1} + f_{i+1j-1}) (\bar{b}_1 + \bar{b}_2)^2 + \right. \\
&\left. + 2(f_{i-1j} + f_{i+1j}) (\bar{b}_2^2 - \bar{b}_1^2) + 2(f_{ij-1} + f_{ij+1}) (\bar{b}_1^2 - \bar{b}_2^2) - 2f_{ij} \left((\bar{b}_1 - \bar{b}_2)^2 + (\bar{b}_1 + \bar{b}_2)^2 \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Подставляя в (4.7) с оператором Лапласа (4.15) решение в виде (4.9), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4|B|^2} \left[(\bar{b}_1 - \bar{b}_2)^2 (\exp(-i(a+b)) + \exp(i(a+b))) + (\bar{b}_1 + \bar{b}_2)^2 (\exp(-i(a-b)) + \exp(i(a-b))) + \right. \\
&\left. + 2(\bar{b}_2^2 - \bar{b}_1^2) (\exp(-ia) + \exp(ia)) + 2(\bar{b}_1^2 - \bar{b}_2^2) (\exp(-ib) + \exp(ib)) - 2 \left((\bar{b}_1 - \bar{b}_2)^2 + (\bar{b}_1 + \bar{b}_2)^2 \right) \right] = -w^2.
\end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4|B|^2} \left[2(\bar{b}_1^2 - 2(\bar{b}_1, \bar{b}_2) + \bar{b}_2^2) (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + 2(\bar{b}_1^2 + 2(\bar{b}_1, \bar{b}_2) + \bar{b}_2^2) (\cos a \cos b + \sin a \sin b) + \right. \\
&\left. + 4(\bar{b}_2^2 - \bar{b}_1^2) \cos a + 4(\bar{b}_1^2 - \bar{b}_2^2) \cos b - 2 \left((\bar{b}_1 - \bar{b}_2)^2 + (\bar{b}_1 + \bar{b}_2)^2 \right) \right] = -w^2, \\
&\frac{1}{4|B|^2} \left[4(\bar{b}_1^2 + \bar{b}_2^2) \cos a \cos b + 8(\bar{b}_1, \bar{b}_2) \sin a \sin b + 4(\bar{b}_2^2 - \bar{b}_1^2) \cos a + 4(\bar{b}_1^2 - \bar{b}_2^2) \cos b - 4(\bar{b}_1^2 + \bar{b}_2^2) \right] = -w^2 \\
&\frac{1}{|B|^2} \left[-\bar{b}_1^2 (1 + \cos a)(1 - \cos b) - \bar{b}_2^2 (1 + \cos b)(1 - \cos a) + 2(\bar{b}_1, \bar{b}_2) \sin a \sin b \right] = -w^2.
\end{aligned}$$

Вспоминая (3.1), находим квадрат собственной частоты

$$w^2 = \frac{4}{|B|^2} \left[\bar{b}_2^2 \sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} - 2(\bar{b}_1, \bar{b}_2) \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} + \bar{b}_1^2 \cos^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} \right],$$

который может быть представлен в виде скалярного квадрата некоторого вектора:

$$w^2 = \frac{4}{|B|^2} \left[\bar{b}_2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} - \bar{b}_1 \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \right]^2.$$

Отсюда следует, что

$$w = \frac{2}{|B|} \left| \bar{b}_2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} - \bar{b}_1 \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \right| \tag{4.16}$$

Для нахождения максимальной собственной частоты преобразуем в правой части произведения тригонометрических функций в суммы, сделав замену

$$x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2},$$

получим:

$$w = \frac{2}{|B|} \left| \bar{b}_2 \frac{1}{2} (\sin x + \sin y) - \frac{1}{2} \bar{b}_1 ((\sin x - \sin y)) \right| = \frac{1}{|B|} \left| (\bar{b}_2 - \bar{b}_1) \sin x + (\bar{b}_2 + \bar{b}_1) \sin y \right|.$$

Нужно найти максимальное значение частоты. Из последнего выражения видно, что максимум достигается при экстремальных значениях $\sin x = \pm 1, \sin y = \pm 1$, откуда получаем

$$w_{\max} = \frac{2}{|B|} \max(|\bar{b}_1|, |\bar{b}_2|).$$

Теперь учтем, что площадь ячейки выражается так (см. рис.4.1):

$$|B| = |\bar{b}_1| h_1 = |\bar{b}_2| h_2.$$

Тогда получаем

$$w_{\max} = \max\left(\frac{2}{h_1}, \frac{2}{h_2}\right).$$

В итоге получаем оценку устойчивости

$$t \leq \min(h_1, h_2). \quad (4.17)$$

Рассмотрим аналогичным образом схему на треугольных ячейках. Введем обозначения: $\bar{b}_3 = \bar{b}_2 - \bar{b}_1$, h_3 - соответствующая высота треугольной ячейки.

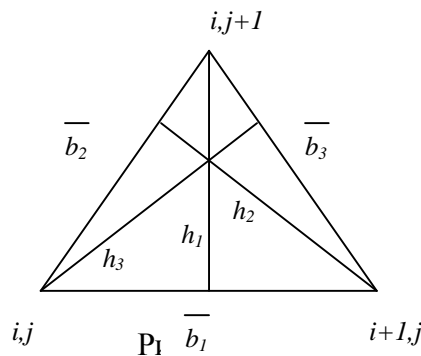


Рис. 4.3

Здесь, как и выше, $|B|$ есть площадь параллелограммной ячейки, то есть удвоенная площадь треугольной ячейки.

Пронумеровав узлы так же, как делали это ранее, - против часовой стрелки, из формул естественной аппроксимации производных (1.22) получим:

$$\begin{aligned}
(d_1^+ f)_{ij} &= \frac{1}{|B|} (f_{ij} (b_{21} - b_{22}) + f_{i+1j} b_{22} - f_{ij+1} b_{21}), \\
(d_2^+ f)_{ij} &= \frac{1}{|B|} (f_{ij} (b_{12} - b_{11}) - f_{i+1j} b_{12} + f_{ij+1} b_{11}), \\
(d_1^- f)_{ij} &= \frac{1}{|B|} (f_{ij} (b_{22} - b_{21}) - f_{i-1j} b_{22} + f_{ij-1} b_{21}), \\
(d_2^- f)_{ij} &= \frac{1}{|B|} (f_{ij} (b_{11} - b_{12}) + f_{i-1j} b_{12} - f_{ij-1} b_{11}).
\end{aligned}$$

Сеточный оператор Лапласа получим в виде:

$$(D_{\Delta} f)_{ij} = \frac{1}{|B|^2} [(f_{i-1j+1} + f_{i+1j-1})(\bar{b}_1, \bar{b}_2) + (f_{i-1j} + f_{i+1j})(\bar{b}_2, \bar{b}_3) - (f_{ij-1} + f_{ij+1})(\bar{b}_1, \bar{b}_3) - f_{ij}(\bar{b}_1^2 + \bar{b}_2^2 + \bar{b}_3^2)] \quad (4.18)$$

Подставляем в (4.7) с оператором Лапласа (4.18) решение в виде (4.9), имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B|^2} [(\exp(-i(a-b)) + \exp(i(a-b)))(\bar{b}_1, \bar{b}_2) + (\exp(-i a) + \exp(i a))(\bar{b}_2, \bar{b}_3) - \\
&\quad - (\exp(-i b) + \exp(i b))(\bar{b}_1, \bar{b}_3) - (\bar{b}_1^2 + \bar{b}_2^2 + \bar{b}_3^2)] = -w^2, \\
&\frac{1}{|B|^2} [2 \cos(a-b)(\bar{b}_1, \bar{b}_2) + 2 \cos a(\bar{b}_2, \bar{b}_3) - 2 \cos b(\bar{b}_1, \bar{b}_3) - (\bar{b}_1^2 + \bar{b}_2^2 + \bar{b}_3^2)] = -w^2, \\
&\frac{1}{|B|^2} [2 \cos(a-b)(\bar{b}_1, \bar{b}_2) - 4 \sin^2 \frac{a}{2}(\bar{b}_2, \bar{b}_3) + 4 \sin^2 \frac{b}{2}(\bar{b}_1, \bar{b}_3) + 2(b_{12}^2 - b_{11}b_{12} + b_{22}^2 - b_{21}b_{22}) - \\
&\quad - 2(b_{11}b_{12} - b_{11}^2 + b_{21}b_{22} - b_{21}^2) - b_{11}^2 - b_{21}^2 - b_{12}^2 - b_{22}^2 - (b_{12}^2 - 2b_{12}b_{11} + b_{11}^2) - (b_{22}^2 - 2b_{22}b_{21} + b_{21}^2)] = -w^2, \\
&\frac{1}{|B|^2} \left[\left(2 - 4 \sin^2 \frac{b}{2} - 4 \sin^2 \frac{a}{2} + 8 \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} + 8 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} \right) (b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22}) - \right. \\
&\quad \left. - 4 \sin^2 \frac{a}{2} (b_{12}^2 - b_{11}b_{12} + b_{22}^2 - b_{21}b_{22}) + 4 \sin^2 \frac{b}{2} (b_{11}b_{12} - b_{11}^2 + b_{21}b_{22} - b_{21}^2) - 2b_{11}b_{12} - 2b_{21}b_{22} \right] = -w^2, \\
&\frac{1}{|B|^2} \left[\left(2 - 4 \sin^2 \frac{b}{2} - 4 \sin^2 \frac{a}{2} + 8 \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} + 8 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} \right) (b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22}) - \right. \\
&\quad \left. - 4 \sin^2 \frac{a}{2} (b_{12}^2 - b_{11}b_{12} + b_{22}^2 - b_{21}b_{22}) + 4 \sin^2 \frac{b}{2} (b_{11}b_{12} - b_{11}^2 + b_{21}b_{22} - b_{21}^2) - 2b_{11}b_{12} - 2b_{21}b_{22} \right] = -w^2, \\
&\frac{1}{|B|^2} \left[\left(8 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \left(\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} + \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \right) \right) (\bar{b}_1, \bar{b}_2) - 4 \sin^2 \frac{a}{2} \bar{b}_2^2 - 4 \sin^2 \frac{b}{2} \bar{b}_1^2 \right] = -w^2.
\end{aligned}$$

Получаем выражение для квадрата собственной частоты в виде

$$w^2 = \frac{4}{|B|^2} \left[\bar{b}_1^2 \sin^2 \frac{b}{2} + \bar{b}_2^2 \sin^2 \frac{a}{2} - 2(\bar{b}_1, \bar{b}_2) \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \right] \quad (4.19)$$

или

$$w^2 = \frac{4}{|B|^2} \left[\bar{b}_1^2 \sin^2 \frac{b}{2} \left(\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} \right) + \bar{b}_2^2 \sin^2 \frac{a}{2} \left(\sin^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{b}{2} \right) - 2(\bar{b}_1, \bar{b}_2) \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} - 2(\bar{b}_1, \bar{b}_2) \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} \right],$$

$$w^2 = \frac{4}{|B|^2} \left[\bar{b}_1^2 \cos^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} + \bar{b}_2^2 \sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} + \bar{b}_3^2 \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} - 2(\bar{b}_1, \bar{b}_2) \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} \right].$$

В отличие от предыдущего случая, ни одно из данных выражений не может быть представлено в виде скалярного квадрата, поэтому для нахождения оценки последнее из них преобразуем к виду

$$w^2 = 4 \left[\frac{1}{h_1^2} \cos^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} + \frac{1}{h_2^2} \sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} + \frac{1}{h_3^2} \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} - \frac{2(\bar{b}_1, \bar{b}_2)}{|B|^2} \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} \right]. \quad (4.20)$$

Из анализа выражений (4.19), (4.20) можно сделать следующие выводы. Максимальная собственная частота w_{\max} близка к величине $\max\left(\frac{2}{h_1}, \frac{2}{h_2}, \frac{2}{h_3}\right)$ и совпадает с ней в случае прямоугольных или тупоугольных ячеек. Максимальное отличие достигается в случае ячейки в виде равностороннего треугольника, при этом $w_{\max} = \frac{9}{8} \frac{2}{h}$, где h – высота ячейки. Точную формулу в общем случае остроугольных ячеек получить не удалось, однако в каждом конкретном случае при известной матрице B задача не представляет трудностей, нужно лишь в качестве векторов \bar{b}_1 и \bar{b}_2 выбрать две наименьшие стороны треугольной ячейки. Таким образом, можно привести две оценки временного шага. Для прямоугольных и тупоугольных ячеек получим точную оценку:

$$t \leq \min(h_1, h_2, h_3) \quad (4.21)$$

Отметим, что оценка (5.16) совпадает с оценкой (5.9) для ортогональной сетки. Для остроугольных треугольников приведем приближенную оценку временного шага:

$$t \leq \frac{8}{9} \min(h_1, h_2, h_3) \quad (4.22)$$

Здесь коэффициент $8/9$ получен для худшего случая ячейки в виде равностороннего треугольника.

Приведем все полученные оценки в размерных величинах. Для схемы на четырехугольных ячейках получим

$$t \leq \min(h_1, h_2)/c, \quad (4.23)$$

где h_1, h_2 - высоты параллелограммной ячейки.

Для схемы на прямоугольных или тупоугольных треугольных ячейках получим

$$t \leq \min(h_1, h_2, h_3)/c, \quad (4.24)$$

где h_1, h_2, h_3 - высоты треугольника. Для схемы на остроугольных треугольниках приведем приближенную оценку

$$t \leq \frac{8}{9} \min(h_1, h_2, h_3)/c, \quad (4.25)$$

В (4.23)-(4.25) c – скорость распространения волн растяжения-сжатия, равная $\sqrt{\frac{1+2G}{r}}$

для задачи плоской деформации или $\sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)r}}$ для задачи плоского напряженного состояния.

Относительно всех приведенных оценок, кроме (5.20) (или (5.17)) можно сделать замечание, что они совпадают с условием Куранта-Фридрихса-Леви относительно минимального размера ячейки, если интерпретировать его как минимальную высоту параллелограмма или треугольника.

Итак, мы привели оценки устойчивости вариационно-разностных схем решения двумерной задачи теории упругости. Теперь сделаем то же для трехмерной задачи теории упругости.

Рассмотрим схему (4.5)

$$(I + G) \begin{bmatrix} D_{11} u_1 + D_{12} u_2 + D_{13} u_3 \\ D_{21} u_1 + D_{22} u_2 + D_{23} u_3 \\ D_{31} u_1 + D_{32} u_2 + D_{33} u_3 \end{bmatrix} + G D_{\Delta} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = D_{\Pi} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

на шестигранных ячейках для случая равномерной сетки в R^3 вида (1.15)

$$\begin{bmatrix} X_{jkl}^1 \\ X_{jkl}^2 \\ X_{jkl}^3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0^1 \\ X_0^2 \\ X_0^3 \end{bmatrix}.$$

Исследование устойчивости схемы (4.5) сводится к нахождению максимальной собственной частоты уравнений

$$(\lambda + 2G)D_{\Delta}p = \rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad GD_{\Delta}q_i = \rho \frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.26)$$

где $p = D_{01} u_1 + D_{02} u_2 + D_{03} u_3$ - сеточный аналог дивергенции,

$q = (q_1, q_2, q_3) = (D_{30} u_2 - D_{20} u_2, D_{10} u_3 - D_{30} u_1, D_{20} u_1 - D_{10} u_2)$ - сеточный аналог ротора.

Максимальная собственная частота полудискретной системы (4.26) достигается для уравнения

$$(\lambda + 2G)D_{\Delta}p = \rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (4.27)$$

поэтому ограничимся рассмотрением только этого уравнения.

Для аппроксимации производных шаблон разностного оператора

$\Pi = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\} \subset Z^3$ разобьем на два симплекса:

$$\Pi_A = \{(0,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$$

и

$$\Pi_B = \{(1,1,1), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}.$$

Пронумеруем узлы каждого симплекса от 1 до 4.

Значения производных на симплексах возьмем с весами $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$.

В результате получим формулы для операторов d_i^+ ($i=1,2,3$):

$$d_i^+ = \frac{1}{2}(d_{i,A}^+ + d_{i,B}^+),$$

где $d_{i,A}^+, d_{i,B}^+$ - операторы, аппроксимирующие первые производные соответственно на шаблонах Π_A и Π_B .

Распишем сначала разностные операторы d_i^+ следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = d_i^+ = \frac{1}{2} \left(\frac{|V_i|_A}{|V|_A} + \frac{|V_i|_B}{|V|_B} \right) = \frac{1}{2} (d_{i,A}^+ + d_{i,B}^+), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.28)$$

где

$$|V|_A = |V|_B = |V| = \begin{vmatrix} x_1^1 - x_4^1 & x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \\ x_2^1 - x_4^1 & x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \\ x_3^1 - x_4^1 & x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \end{vmatrix} = 2|B|$$

есть удвоенный объем параллелепипедальной ячейки.

$$|V_1| = \begin{vmatrix} f_1 - f_4 & x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \\ f_2 - f_4 & x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \\ f_3 - f_4 & x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \end{vmatrix} =$$

$$= f_1 \begin{vmatrix} x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \\ x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \end{vmatrix} + f_2 \begin{vmatrix} x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \\ x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \end{vmatrix} + f_3 \begin{vmatrix} x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \\ x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \end{vmatrix} + f_4 \begin{vmatrix} x_1^3 - x_3^3 & x_1^2 - x_3^2 \\ x_2^3 - x_3^3 & x_2^2 - x_3^2 \end{vmatrix},$$

$$|V_2| = \begin{vmatrix} x_1^1 - x_4^1 & f_1 - f_4 & x_1^3 - x_4^3 \\ x_2^1 - x_4^1 & f_2 - f_4 & x_2^3 - x_4^3 \\ x_3^1 - x_4^1 & f_3 - f_4 & x_3^3 - x_4^3 \end{vmatrix} =$$

$$= f_1 \begin{vmatrix} x_3^1 - x_4^1 & x_3^3 - x_4^3 \\ x_2^1 - x_4^1 & x_2^3 - x_4^3 \end{vmatrix} + f_2 \begin{vmatrix} x_1^1 - x_4^1 & x_1^3 - x_4^3 \\ x_3^1 - x_4^1 & x_3^3 - x_4^3 \end{vmatrix} + f_3 \begin{vmatrix} x_2^1 - x_4^1 & x_2^3 - x_4^3 \\ x_1^1 - x_4^1 & x_1^3 - x_4^3 \end{vmatrix} + f_4 \begin{vmatrix} x_2^3 - x_3^3 & x_2^1 - x_3^1 \\ x_1^3 - x_3^3 & x_1^1 - x_3^1 \end{vmatrix},$$

$$|V_3| = \begin{vmatrix} x_1^1 - x_4^1 & x_1^2 - x_4^2 & f_1 - f_4 \\ x_2^1 - x_4^1 & x_2^2 - x_4^2 & f_2 - f_4 \\ x_3^1 - x_4^1 & x_3^2 - x_4^2 & f_3 - f_4 \end{vmatrix} =$$

$$= f_1 \begin{vmatrix} x_2^1 - x_4^1 & x_2^2 - x_4^2 \\ x_3^1 - x_4^1 & x_3^2 - x_4^2 \end{vmatrix} + f_2 \begin{vmatrix} x_3^1 - x_4^1 & x_3^2 - x_4^2 \\ x_1^1 - x_4^1 & x_1^2 - x_4^2 \end{vmatrix} + f_3 \begin{vmatrix} x_1^1 - x_4^1 & x_1^2 - x_4^2 \\ x_2^1 - x_4^1 & x_2^2 - x_4^2 \end{vmatrix} + f_4 \begin{vmatrix} x_1^2 - x_3^2 & x_1^1 - x_3^1 \\ x_2^2 - x_3^2 & x_2^1 - x_3^1 \end{vmatrix}.$$

Пусть $\overline{N}_m = (N_{m1}, N_{m2}, N_{m3})$ – внутренняя нормаль к соответствующим граням

тетраэдров, образованных вершинами симплекса Π_B или Π_A , то есть

$\overline{N}_I = -\overline{N}_1$ – нормаль к грани с вершинами 2, 3, 4;

$\overline{N}_{II} = -\overline{N}_2$ – нормаль к грани с вершинами 1, 3, 4;

$\overline{N}_{III} = -\overline{N}_3$ – нормаль к грани с вершинами 1, 2, 4;

$\overline{N}_{IV} = -\overline{N}_4$ – нормаль к грани с вершинами 1, 2, 3.

f_m – сеточная функция, заданная в узле с номером m . Тогда можем записать, что

$$|V_i|_A = f_1 N_{1i} + f_2 N_{2i} + f_3 N_{3i} + f_4 N_{4i},$$

$$|V_i|_B = f_I N_{Ii} + f_{II} N_{IIi} + f_{III} N_{IIIi} + f_{IV} N_{IVi},$$

где $i = 1, 2, 3$.

Перепишем (4.28) согласно с вышесказанным:

$$d_i^+ = \frac{1}{4|B|} (f_{jkl} N_{li} - f_{j+1kl} N_{4i} - f_{jk+1l} N_{3i} + f_{j+1k+1l} N_{2i} - f_{jkl+1} N_{2i} + f_{j+1kl+1} N_{3i} + f_{jk+1l+1} N_{4i} - f_{j+1k+1l+1} N_{li})$$

Теперь можем записать и двойственный оператор

$$d_i^- = -\frac{1}{4|B|} (f_{jkl} N_{1i} - f_{j-1kl} N_{4i} - f_{jk-l} N_{3i} + f_{j-1k-l} N_{2i} - f_{jkl-1} N_{2i} + f_{j-1kl-1} N_{3i} + f_{jk-l-1} N_{4i} - f_{j-1k-l-1} N_{1i})$$

Тогда оператор $D_\Delta = D_{11} + D_{22} + D_{33}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} (D_\Delta f)_{jkl} = & \frac{1}{16|B|^2} \left\{ \bar{N}_1^2 (f_{j-1k-l-1} + f_{j+1k+l+1}) + \bar{N}_2^2 (f_{j-1k-l+1} + f_{j+1k+l-1}) + \bar{N}_3^2 (f_{j-1k+l-1} + f_{j+1k-l+1}) \right. \\ & + \bar{N}_4^2 (f_{j+1k-l-1} + f_{j-1k+l+1}) - 2[(\bar{N}_1, \bar{N}_2)(f_{j-1k-l} + f_{j+1k+l}) + (\bar{N}_1, \bar{N}_3)(f_{j-1kl-1} + f_{j+1kl+1}) + \\ & + (\bar{N}_1, \bar{N}_4)(f_{jk-l-1} + f_{jk+l+1}) + (\bar{N}_2, \bar{N}_3)(f_{jk+l-1} + f_{jk-l+1}) + (\bar{N}_2, \bar{N}_4)(f_{j-1kl+1} + f_{j+1kl-1}) + \\ & + (\bar{N}_3, \bar{N}_4)(f_{j-1k+l} + f_{j+1k-l})] + 2[(\bar{N}_1, \bar{N}_4) + (\bar{N}_2, \bar{N}_3)](f_{j-1kl} + f_{j+1kl}) + \\ & + [(\bar{N}_2, \bar{N}_4) + (\bar{N}_1, \bar{N}_3)](f_{jk-l} + f_{jk+l}) + [(\bar{N}_1, \bar{N}_2) + (\bar{N}_3, \bar{N}_4)](f_{jkl-1} + f_{jkl+1}) \Big] - \\ & \left. - 2(\bar{N}_1^2 + \bar{N}_2^2 + \bar{N}_3^2 + \bar{N}_4^2) f_{jkl} \right\} \end{aligned}$$

(4.29)

Подставляя в уравнение (4.27) функцию p в виде одного члена ряда Фурье

$$p_{jkl} = \exp[2 \cdot i (a j + b k + g l + w t / 2)]$$

получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16|B|^2} \left\{ \overline{N}_1^2 (\exp(2i(a+b+g)) + \exp(-2i(a+b+g))) + \overline{N}_2^2 (\exp(2i(a+b-g)) + \exp(-2i(a+b-g))) + \right. \\
& \quad + \overline{N}_3^2 (\exp(2i(a-b+g)) + \exp(-2i(a-b+g))) + \overline{N}_4^2 (\exp(2i(-a+b+g)) + \exp(-2i(-a+b+g))) - \\
& \quad \left. - 2(\overline{N}_1^2 + \overline{N}_2^2 + \overline{N}_3^2 + \overline{N}_4^2) - \right. \\
& \quad - 2[(\overline{N}_1, \overline{N}_2)(\exp(2i(a+b)) + \exp(-2i(a+b))) + (\overline{N}_1, \overline{N}_3)(\exp(2i(a+g)) + \exp(-2i(a+g))) + \\
& \quad + (\overline{N}_1, \overline{N}_4)(\exp(2i(b+g)) + \exp(-2i(b+g))) + (\overline{N}_2, \overline{N}_3)(\exp(2i(b-g)) + \exp(-2i(b-g))) + \\
& \quad + (\overline{N}_2, \overline{N}_4)(\exp(2i(a-g)) + \exp(-2i(a-g))) + (\overline{N}_3, \overline{N}_4)(\exp(2i(a-b)) + \exp(-2i(a-b)))] + \\
& \quad + 2[(\overline{N}_1, \overline{N}_4) + (\overline{N}_2, \overline{N}_3)](\exp(2ia) + \exp(-2ia)) + [(\overline{N}_2, \overline{N}_4) + (\overline{N}_1, \overline{N}_3)](\exp(2ib) + \exp(-2ib)) + \\
& \quad \left. + [(\overline{N}_1, \overline{N}_2) + (\overline{N}_3, \overline{N}_4)](f_{jkl-1} + f_{jkl+1}) \right\} = \frac{r}{I+2G} (-w^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16|B|^2} \left\{ 2[\overline{N}_1^2 (\cos(2(a+b+g)) - 1) + \overline{N}_2^2 (\cos(2(a+b-g)) - 1) + \right. \\
& \quad + \overline{N}_3^2 (\cos(2(a-b+g)) - 1) + \overline{N}_4^2 (\cos(2(-a+b+g)) - 1)] + \\
& \quad + 4[(\overline{N}_1, \overline{N}_2)(\cos 2g - \cos(2(a+b))) + (\overline{N}_1, \overline{N}_3)(\cos 2b - \cos(2(a+g))) + \\
& \quad + (\overline{N}_1, \overline{N}_4)(\cos 2a - \cos(2(b+g))) + (\overline{N}_2, \overline{N}_3)(\cos 2a - \cos(2(b-g))) + \\
& \quad \left. + (\overline{N}_2, \overline{N}_4)(\cos 2b - \cos(2(a-g))) + (\overline{N}_3, \overline{N}_4)(\cos 2g - \cos(2(a-b)))] \right\} = -\frac{w^2}{c^2},
\end{aligned}$$

Вспомогательные формулы:

$$\cos 2j - 1 = -2 \sin^2 j,$$

$$\sin^2 g - \sin^2(a+b) = -\sin(a+b+g)\sin(a+b-g),$$

$$\sin^2 g - \sin^2(a-b) = \sin(a-b+g)\sin(-a+b+g),$$

$$\sin(a+b+g) = \sin a \cos b \cos g + \cos a \sin b \cos g + \cos a \cos b \sin g - \sin a \sin b \sin g,$$

$$\sin(a+b-g) = \sin a \cos b \cos g + \cos a \sin b \cos g - \cos a \cos b \sin g + \sin a \sin b \sin g,$$

$$\sin(a-b+g) = \sin a \cos b \cos g - \cos a \sin b \cos g + \cos a \cos b \sin g + \sin a \sin b \sin g,$$

$$\sin(-a+b+g) = -\sin a \cos b \cos g + \cos a \sin b \cos g + \cos a \cos b \sin g + \sin a \sin b \sin g,$$

$$\overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{N}_3 + \overline{N}_4 = 0, \quad \overline{N}_1 + \overline{N}_2 - \overline{N}_3 - \overline{N}_4 = 2(\overline{N}_1 + \overline{N}_2),$$

$$\overline{N}_1 - \overline{N}_2 + \overline{N}_3 - \overline{N}_4 = 2(\overline{N}_1 + \overline{N}_3), \quad \overline{N}_1 - \overline{N}_2 - \overline{N}_3 + \overline{N}_4 = 2(\overline{N}_1 + \overline{N}_4).$$

$$\frac{1}{4|B|^2} \left\{ \overline{N}_1^2 \sin^2(a+b+g) + \overline{N}_2^2 \sin^2(a+b-g) + \overline{N}_3^2 \sin^2(a-b+g) + \overline{N}_4^2 \sin^2(-a+b+g) \right\} +$$

$$+ 2 \left[(\overline{N}_1, \overline{N}_2) (\sin^2 g - \sin^2(a+b)) + (\overline{N}_1, \overline{N}_3) (\sin^2 b - \sin^2(a+g)) + \right.$$

$$+ (\overline{N}_1, \overline{N}_4) (\sin^2 a - \sin^2(b+g)) + (\overline{N}_2, \overline{N}_3) (\sin^2 a - \sin^2(b-g)) +$$

$$\left. + (\overline{N}_2, \overline{N}_4) (\sin^2 b - \sin^2(a-g)) + (\overline{N}_3, \overline{N}_4) (\sin^2 g - \sin^2(a-b)) \right\} = \frac{w^2}{c^2},$$

$$\frac{1}{4|B|^2} \left\{ \overline{N}_1^2 \sin^2(a+b+g) + \overline{N}_2^2 \sin^2(a+b-g) + \overline{N}_3^2 \sin^2(a-b+g) + \overline{N}_4^2 \sin^2(-a+b+g) \right\} -$$

$$- 2 \left[(\overline{N}_1, \overline{N}_2) \sin(a+b+g) \sin(a+b-g) + (\overline{N}_1, \overline{N}_3) \sin(a+b+g) \sin(a-b+g) + \right.$$

$$\left. + (\overline{N}_1, \overline{N}_4) \sin(a+b+g) \sin(-a+b+g) \right] +$$

$$+ 2 \left[(\overline{N}_2, \overline{N}_3) \sin(a+b-g) \sin(a-b+g) + (\overline{N}_2, \overline{N}_4) \sin(a+b-g) \sin(-a+b+g) + \right.$$

$$\left. + (\overline{N}_3, \overline{N}_4) \sin(a-b+g) \sin(-a+b+g) \right\} = \frac{w^2}{c^2},$$

$$\frac{1}{4|B|^2} \left[\overline{N}_1 \sin(a+b+g) - \overline{N}_2 \sin(a+b-g) - \overline{N}_3 \sin(a-b+g) - \overline{N}_4 \sin(-a+b+g) \right]^2 = \frac{w^2}{c^2},$$

$$\frac{1}{4|B|^2} \left[\sin a \cos b \cos g (\overline{N}_1 - \overline{N}_2 - \overline{N}_3 + \overline{N}_4) + \cos a \sin b \cos g (\overline{N}_1 - \overline{N}_2 + \overline{N}_3 - \overline{N}_4) + \right.$$

$$\left. + \cos a \cos b \sin g (\overline{N}_1 + \overline{N}_2 - \overline{N}_3 - \overline{N}_4) - \sin a \sin b \sin g (\overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{N}_3 + \overline{N}_4) \right]^2 = \frac{w^2}{c^2}.$$

В результате получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{1}{|B|^2} \left[(\overline{N}_1 + \overline{N}_4) \sin a \cos b \cos g + (\overline{N}_1 + \overline{N}_3) \cos a \sin b \cos g + (\overline{N}_1 + \overline{N}_2) \cos a \cos b \sin g \right]^2 - w^2 / c^2 = 0.$$

Введем обозначения:

$$\overline{N}_1 + \overline{N}_4 = 2\overline{S}_1, \quad \overline{N}_1 + \overline{N}_3 = 2\overline{S}_2, \quad \overline{N}_1 + \overline{N}_2 = 2\overline{S}_3,$$

где \overline{S}_m , $m = 1, 2, 3$ - векторы внешней нормали к граням параллелепипеда (ячейки)

длина каждого из которых равна площади соответствующей грани. Тогда последнее переписывается так:

$$\frac{4}{|B|^2} \left[\overline{S}_1 \sin a \cos b \cos g + \overline{S}_2 \cos a \sin b \cos g + \overline{S}_3 \cos a \cos b \sin g \right]^2 - w^2 / c^2 = 0, \quad (4.30)$$

где $c = (I + 2G)/r$ - скорость звука.

Из последнего уравнения следует оценка временного шага

$$t \leq 1/(c \cdot L), \quad (4.31)$$

где

$$L = \max_{a,b,g} \left| \overline{S}_1 \sin a \cos b \cos g + \overline{S}_2 \cos a \sin b \cos g + \overline{S}_3 \cos a \cos b \sin g \right| / |B|.$$

Если хотя бы одна из граней ячейки ортогональна двум другим, необходимая и достаточная оценка устойчивости принимает вид

$$t \leq \min(h_1, h_2, h_3) / c \quad (4.32)$$

(условие Куранта для ячейки), где h_i ($i=1,2,3$) - высоты ячейки разностной сетки.

Покажем, что (4.32) следует из (4.30) при принятом предположении. Предположим, что вектор нормали \overline{S}_3 ортогонален другим векторам внешних нормалей граней. При этом $(\overline{S}_1, \overline{S}_3) = (\overline{S}_2, \overline{S}_3) = 0$. Из (6.6) следует:

$$\begin{aligned} L^2 &= \frac{1}{|B|^2} \max_{a,b,g} \left[\overline{S}_1^2 \sin^2 a \cos^2 b \cos^2 g + \overline{S}_2^2 \cos^2 a \sin^2 b \cos^2 g + \overline{S}_3^2 \cos^2 a \cos^2 b \sin^2 g + \right. \\ &\quad \left. + 2(\overline{S}_1, \overline{S}_2) \sin a \cos a \sin b \cos b \cos^2 g \right] = \\ &= \frac{1}{|B|^2} \max_{a,b,g} \left[\overline{S}_1^2 \sin^2 a \cos^2 b \cos^2 g + 2(\overline{S}_1, \overline{S}_2) \sin a \cos a \sin b \cos b \cos^2 g + \overline{S}_2^2 \cos^2 a \sin^2 b \cos^2 g \right] + \\ &\quad \left. + \overline{S}_3^2 \cos^2 a \cos^2 b \sin^2 g \right] = \\ &= \frac{1}{|B|^2} \max_{a,b,g} \left[(\overline{S}_1 \sin a \cos b + \overline{S}_2 \cos a \sin b)^2 \cos^2 g + \overline{S}_3^2 \cos^2 a \cos^2 b \sin^2 g \right] = \\ &= \frac{1}{|B|^2} \max_{a,b,g} \left[\max_{a,b} (\overline{S}_1^2 \sin^2 a \cos^2 b, \overline{S}_2^2 \cos^2 a \sin^2 b) \cos^2 g + \overline{S}_3^2 \cos^2 a \cos^2 b \sin^2 g \right] = \\ &= \frac{1}{|B|^2} \max[\overline{S}_1^2, \overline{S}_2^2, \overline{S}_3^2] = \max\left[\frac{1}{h_1^2}, \frac{1}{h_2^2}, \frac{1}{h_3^2}\right] = \frac{w^2}{4c^2} \end{aligned}$$

Из последнего равенства и (3.8) следует (4.32).

Оценка (4.32) также является необходимой и для произвольных неортогональных сеток, причем отличие ее от достаточной невелико и может составлять не более 5%.

Рассмотрим «ажурную» схему (4.5) на тетраэдральных ячейках. Для аппроксимации производных шаблон разностного оператора возьмем в виде

$$\text{Ш} = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}.$$

Так же, как и в случае параллелепипедальной ячейки, пронумеруем узлы шаблона по порядку от 1 до 4, введем N_i - векторы внутренних нормалей к граням шаблонного

тетраэдра, длина каждого из которых равна площади соответствующей грани, тогда получим:

$$\begin{aligned}\overline{d}^+ &= (d_1^+, d_2^+, d_3^+) = \frac{1}{|B|} (f_1 \overline{N}_1 + f_2 \overline{N}_2 + f_3 \overline{N}_3 + f_4 \overline{N}_4) = \frac{1}{|B|} (f_{jkl} \overline{N}_1 + f_{j+1kl} \overline{N}_2 + f_{jk+1l} \overline{N}_3 + f_{jkl+1} \overline{N}_4), \\ \overline{d}^- &= (d_1^-, d_2^-, d_3^-) = -\frac{1}{|B|} (f_{jkl} \overline{N}_1 + f_{j-1kl} \overline{N}_2 + f_{jk-1l} \overline{N}_3 + f_{jkl-1} \overline{N}_4).\end{aligned}$$

Здесь $|B|$ - удвоенная площадь тетраэдральной ячейки.

Максимальная частота полудискретной системы достигается для уравнения (4.27).

Оператор D_Δ имеет вид:

$$\begin{aligned}(D_\Delta f)_{jkl} &= -\frac{1}{|B|^2} \left[(\overline{N}_1, \overline{N}_2) (f_{j+1kl} + f_{j-1kl}) + (\overline{N}_1, \overline{N}_3) (f_{jk+1l} + f_{jk-1l}) + \right. \\ &+ (\overline{N}_1, \overline{N}_4) (f_{jkl-1} + f_{jkl+1}) + (\overline{N}_2, \overline{N}_3) (f_{j-1k+l} + f_{j+1k-l}) + (\overline{N}_2, \overline{N}_4) (f_{j-1kl+1} + f_{j+1kl-1}) + \\ &\left. + (\overline{N}_3, \overline{N}_4) (f_{jk-l+1} + f_{jk+l-1}) + (\overline{N}_1^2 + \overline{N}_2^2 + \overline{N}_3^2 + \overline{N}_4^2) f_{jkl} \right] \quad (4.33)\end{aligned}$$

Подставляя решение (4.29) в уравнение (4.27) с сеточным оператором Лапласа (4.33), получим дисперсионное уравнение.

$$\begin{aligned}\frac{2}{(\det B)^2} \left[(N_1, N_2) \cos 2a + (N_1, N_3) \cos 2b + (N_1, N_4) \cos 2g + \right. \\ \left. + (N_2, N_3) \cos 2(a-b) + (N_2, N_4) \cos 2(a-g) + \right. \\ \left. + (N_3, N_4) \cos 2(b-g) - \frac{1}{2} (N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + N_4^2) f_{jkl} \right] - \frac{w^2}{c^2} = 0.\end{aligned} \quad (4.34)$$

Получение оценки устойчивости сводится к нахождению максимума первого слагаемого в левой части равенства. Была выдвинута гипотеза о том, что оценка устойчивости совпадает с условием Куранта-Фридрихса-Леви относительно минимального размера ячейки. В качестве минимального размера можно принять либо минимальную высоту, либо минимальное расстояние между парами скрещивающихся ребер тетраэдральной ячейки. Таким образом, была предложена оценка устойчивости

$$t \leq \frac{\min(h_1, h_2, h_3, h_4, l_1, l_2, l_3)}{c} \quad (4.35)$$

Для данной оценки была выполнена частичная проверка на компьютере. Была написана программа, вычисляющая собственные частоты из выражения (4.34) для тетраэдров различной формы при разных значениях волнового вектора (a, b, g) . Был рассмотрен случай тетраэдров с тремя ребрами единичной длины. Ребра задавались в виде тройки векторов

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos j \\ \sin j \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos z \cos q \\ \sin z \cos q \\ \sin q \end{pmatrix}.$$

В программе 6 параметров j, z, q, a, b, g изменялись с шагом 0.01 в пределах от 0 до $\frac{p}{2}$ для первых трех и от 0 до $2p$ для последних трех. Результаты сопоставлялись с оценкой (4.35) и показали, что оценка временного шага нигде не нарушается. Очевидно, что это не может являться доказательством, но служит аргументом в пользу данной оценки. Таким образом, для «ажурной» схемы на тетраэдральных ячейках примем оценку (4.35).

Из полученных оценок задач теории упругости следует, что можно при решении двумерных и трехмерных задач на параллелограммных (параллелепипедальных) ячейках вести счет с числом Куранта, равным единице, то есть по характеристикам. Это позволяет с высокой точностью описывать разрывные решения, распространяющиеся перпендикулярно наибольшей стороне (границы) ячейки. В этом случае численная дисперсия решения минимальна.

ГЛАВА 5. ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ТЕОРИИ ПЛАСТИН ТИПА ТИМОШЕНКО

Рассмотрим систему (1.18). Для удобства от безразмерной величины \bar{h} перейдем к безразмерной величине h . Получим:

$$\begin{cases} a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{12a}{h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + y \right) - \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Системе (5.1) эквивалентно уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{12a}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \left(1 + \frac{1}{a} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \tau^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial \tau^4} = 0. \quad (5.2)$$

Рассмотрим разностные схемы, аппроксимирующие систему уравнений (1.12), записанную в безразмерных величинах (то есть систему (5.1)).

Итак, конечно-разностная схема

$$\begin{aligned} \Phi(w, y) &= a(D_{11}w + D_{01}y) - D_{\tau\tau}w = 0 \\ \Lambda(w, y) &= D_{11}y - \frac{12a}{h^2}(D_{01}w + y) - D_{\tau\tau}w = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

вариационно-разностная схема

$$\begin{aligned} \Phi(w, y) &= a(D_{11}w + D_{01}y) - D_{\tau\tau}w = 0 \\ \Lambda'(w, y) &= D_{11}y - \frac{12a}{h^2}(D_{01}w + D_{00}y) - D_{\tau\tau}w = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

и схема линейного конечного элемента

$$\begin{aligned} \Phi(w, y) &= a(D_{11}w + D_{01}y) - D_{\tau\tau}w = 0 \\ \Lambda''(w, y) &= D_{11}y - \frac{12a}{h^2} \left(D_{01}w + D_{00}y - \frac{h_1^2}{12} D_{11}y \right) - D_{\tau\tau}w = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

где D_{00} , D_1 , D_{11} – система разностных операторов:

$$(D_{00}f)_j = \frac{1}{4}(f_{j-1} + 2f_j + f_{j+1}), \quad (D_{01}f)_j = \frac{1}{2\Delta x}(f_{j+1} - f_{j-1}), \quad (D_{11}f)_j = \frac{1}{\Delta x^2}(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1})$$

Системы (5.3)-(5.5) отличаются аппроксимацией единственного члена уравнений – функции y : с помощью тождественного оператора в (5.3), оператора D_{00} в (5.4) и

оператора $D_0^* = D_{00} - \frac{\Delta x^2}{12} D_{11}$ в (5.5). При этом все три схемы имеют второй порядок аппроксимации. Преобразуем схему (5.3) к виду, аналогичному (5.2).

"Продифференцируем" с помощью оператора D_{00} часть системы (5.3):

$$D_{01} \Lambda(w, y) = 0$$

В полученном уравнении

$$D_{01} D_{11} y - \frac{12a}{h^2} (D_{01} D_{10} w + D_{01} y) - D_{01} D_{\tau\tau} w = 0$$

выразим члены, содержащие функцию y , из равенств:

$$\begin{aligned} \Phi(w, y) &= 0, \\ D_{11} \Phi(w, y) &= 0, \\ D_{\tau\tau} \Phi(w, y) &= 0. \end{aligned}$$

В результате получим сеточное уравнение, содержащее одну неизвестную функцию:

$$D_{11} D_{11} w + \frac{12}{h^2} D_{\tau\tau} w - \left(1 + \frac{1}{a}\right) D_{11} D_{\tau\tau} w + \frac{1}{a} D_{\tau\tau} D_{\tau\tau} w + \frac{12a}{h^2} (D_{01} D_{10} w - D_{11} w) = 0.$$

или, учитывая равенство

$$D_{01} D_{10} - D_{11} = \frac{\Delta x^2}{4} D_{11} D_{11}$$

(см. ниже) его же в виде

$$\left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) D_{11} D_{11} w + \frac{12}{h^2} D_{\tau\tau} w - \left(1 + \frac{1}{a}\right) D_{11} D_{\tau\tau} w + \frac{1}{a} D_{\tau\tau} D_{\tau\tau} w = 0. \quad (5.6)$$

Аналогичные преобразования вариационно-разностной схемы (5.4) приводят к уравнению

$$D_{11} D_{11} w + \frac{12}{h^2} D_{00} D_{\tau\tau} w - \left(1 + \frac{1}{a}\right) D_{11} D_{\tau\tau} w + \frac{1}{a} D_{\tau\tau} D_{\tau\tau} w = 0. \quad (5.7)$$

Для схемы линейного КЭ (5.5) уравнение получим в виде

$$\left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) D_{11} D_{11} w + \frac{12}{h^2} D_0^* D_{\tau\tau} w - \left(1 + \frac{1}{a}\right) D_{11} D_{\tau\tau} w + \frac{1}{a} D_{\tau\tau} D_{\tau\tau} w = 0. \quad (5.8)$$

Сопоставляя (5.6)-(5.8) с исходным дифференциальным уравнением (5.2), приходим к выводу, что при конечных значениях величины $(\Delta x/h)$ (отношения шага сетки к толщине

оболочки) сеточные уравнения (5.6) и (5.8) аппроксимируют не (5.2), а, соответственно, уравнения

$$\left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} x^4} + \frac{12}{h^2} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \tau^2} - \left(1 + \frac{1}{a}\right) \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} x^2 \mathcal{I} \tau^2} + \frac{1}{a} \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} \tau^4} = 0. \quad (5.9)$$

и

$$\left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} x^4} + \frac{12}{h^2} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \tau^2} - \left(1 + \frac{1}{a}\right) \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} x^2 \mathcal{I} \tau^2} + \frac{1}{a} \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} \tau^4} = 0. \quad (5.10)$$

Поскольку нас будет интересовать влияние аппроксимации только по пространственным координатам, рассмотрим полудискретные уравнения, полученные заменой в (5.6)-(5.8) разностного оператора $D_{\tau\tau}$ производной по времени. Для конечно-разностной схемы получим

$$\left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) D_{11} D_{11} w + \frac{12}{h^2} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \tau^2} - \left(1 + \frac{1}{a}\right) D_{11} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \tau^2} + \frac{1}{a} \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} \tau^4} = 0. \quad (5.11)$$

Для вариационно-разностной схемы:

$$D_{11} D_{11} w + \frac{12}{h^2} D_{00} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \tau^2} - \left(1 + \frac{1}{a}\right) D_{11} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \tau^2} + \frac{1}{a} \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} \tau^4} = 0. \quad (5.12)$$

Для схемы линейного КЭ:

$$\left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) D_{11} D_{11} w + \frac{12}{h^2} D_0^* \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \tau^2} - \left(1 + \frac{1}{a}\right) D_{11} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \tau^2} + \frac{1}{a} \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} \tau^4} = 0. \quad (5.13)$$

Иследуем устойчивость уравнения (5.11) методом гармоник. Будем искать решение (5.11) в виде

$$w_j = \exp(i[aj + w\tau]). \quad (5.14)$$

Нужно подставить решение такого вида в (5.11) и разделить на w_j . Делая вспомогательные выкладки:

$$D_{11} w_j = \frac{1}{\Delta x^2} (e^{ia} - 2 + e^{-ia}) e^{i(aj + w\tau)} = -\frac{4}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) w_j,$$

$$D_{11} D_{11} w_j = D_{11} \left(-\frac{4}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) w_j \right) = \frac{16}{\Delta x^4} \sin^4\left(\frac{a}{2}\right) w_j,$$

$$\frac{\partial^2 w_j}{\partial \tau^2} = -w^2 w_j, \quad \frac{\partial^4 w_j}{\partial \tau^4} = w^4 w_j,$$

получим:

$$\left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) \frac{16}{\Delta x^4} \sin^4 \frac{a}{2} - \frac{12}{h^2} w^2 - \left(1 + \frac{1}{a}\right) \frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{a}{2} w^2 + \frac{1}{a} w^4 = 0.$$

Обозначим $I = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$, $I^2 = 4 \sin^4 \frac{a}{2}$, и, умножая на a , получим биквадратное уравнение относительно w :

$$w^4 - 2 \left(\frac{6a}{h^2} + (1+a) \frac{I}{\Delta x^2} \right) w^2 + \frac{4aI^2}{\Delta x^4} \left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) = 0.$$

Таким образом, задача исследования устойчивости схемы (5.11) сводится к нахождению максимальной собственной частоты полудискретной системы, или максимального значения корня дисперсионного уравнения. Квадрат большей по модулю собственной частоты равен:

$$w^2(I) = \frac{6a}{h^2} + \frac{1+a}{\Delta x^2} I + \sqrt{\left(\frac{6a}{h^2} + \frac{1+a}{\Delta x^2} I \right)^2 - \frac{4aI^2}{\Delta x^4} \left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right)}.$$

Известно, что максимум функции достигается либо на границах интервала, либо в точках экстремума функции. Переменная I изменяется в пределах от 0 до 2, поэтому максимум $w^2(I)$ будем искать при $I = 0$, $I = 2$ и при I , являющимся корнем

уравнения: $\frac{\partial w^2}{\partial I} = 0$. Получим:

1) $I = 0$:

$$w^2(0) = \frac{6a}{h^2} + \frac{6a}{h^2} = \frac{12a}{h^2};$$

2) $I = 2$:

$$w^2(2) = \frac{6a}{h^2} + \frac{2(a+1)}{\Delta x^2} + \sqrt{\left(\frac{6a}{h^2} + \frac{2(a+1)}{\Delta x^2} \right)^2 - \frac{16a}{\Delta x^4} \left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right)};$$

3) $\frac{\partial w^2}{\partial I} = 0$:

$$\frac{a+1}{\Delta x^2} + \frac{\left(\frac{6a}{h^2} + \frac{a+1}{\Delta x^2} I \right) \frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{4aI}{\Delta x^4} \left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right)}{\sqrt{\left(\frac{6a}{h^2} + \frac{a+1}{\Delta x^2} I \right)^2 - \frac{4aI^2}{\Delta x^4} \left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right)}} = 0,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+1}{\Delta x^2}\right)^2 \left[\left(\frac{6a}{h^2} + \frac{a+1}{\Delta x^2} I \right)^2 - \frac{4aI^2}{\Delta x^4} \left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) \right] &= \left(\frac{6a}{h^2} + \frac{a+1}{\Delta x^2} I \right)^2 \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} \right)^2 + \frac{16a^2 I^2}{h^8} \left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right)^2 - \\ &- \frac{8aI}{\Delta x^6} (a+1) \left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) \left(\frac{6a}{h^2} + \frac{a+1}{\Delta x^2} I \right) \end{aligned}$$

Сокращаем одинаковые члены в правой и левой частях равенства и делим на

$$\frac{4aI}{\Delta x^6} \left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right):$$

$$\begin{aligned} -I \left(\frac{a+1}{\Delta x} \right)^2 &= \frac{4aI}{\Delta x^2} \left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) - 2 \left(\frac{6a}{h^2} + \frac{a+1}{\Delta x^2} I \right) (a+1), \\ \frac{12a(a+1)}{h^2} &= \left[\frac{4a}{\Delta x^2} \left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) + \left(\frac{a+1}{\Delta x} \right)^2 - \frac{2(a+1)^2}{\Delta x^2} \right] I. \end{aligned}$$

Отсюда получим выражение для λ :

$$I^* = \frac{12a(a+1)}{h^2 \left[\frac{4a}{\Delta x^2} \left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) - \left(\frac{a+1}{\Delta x} \right)^2 \right]}.$$

I^* всегда принадлежит отрезку $[0,2]$ и соответствует максимальному значению $w^2(I)$. Уравнение всегда имеет корень на отрезке $[0,2]$ независимо от величины $\left(\frac{\Delta x}{h} \right)$. Окончательная оценка устойчивости одномерной разностной схемы теории

пластин, записанной в безразмерных величинах (5.3), имеет вид:

$$\tau \leq \frac{2}{\omega(\lambda^*)}. \quad (5.15)$$

То же для схемы, записанной в размерных величинах:

$$t \leq \frac{2\Delta X}{c w(I^*)}.$$

Исследуем теперь устойчивость вариационно-разностной схемы (5.4). Подставим в (5.12) решение в виде монохроматической волны (5.14), учтем, что

$$D_{00} w_j = \frac{1}{4} (e^{ia} + 2 + e^{-ia}) e^{i(aj + \omega t)} = \frac{1}{4} (2 \cos a + 2) w_j = \cos^2 \left(\frac{a}{2} \right) w_j.$$

и разделим на w_j . Получим дисперсионное уравнение:

$$\frac{1}{a} w^4 - \left[\frac{12}{h^2} \cos^2 \frac{a}{2} + \left(1 + \frac{1}{a}\right) \frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{a}{2} \right] w^2 + \frac{16}{\Delta x^4} \sin^4 \frac{a}{2} = 0.$$

Введем обозначение $I = 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right)$ ($\Rightarrow 2 \cos^2 \frac{a}{2} = (2 - I)$), умножим на a , тогда

последнее уравнение преобразуется к виду

$$w^4 - 2 \left[\frac{3a}{h^2} (2 - I) + (1 + a) \frac{I}{\Delta x^2} \right] w^2 + \frac{4aI^2}{\Delta x^4} = 0.$$

Квадрат большей по модулю собственной частоты равен:

$$w^2(I) = \frac{3a}{h^2} (2 - I) + \frac{a+1}{\Delta x^2} I + \sqrt{\left(\frac{3a}{h^2} (2 - I) + \frac{a+1}{\Delta x^2} I \right)^2 - \frac{4a}{\Delta x^4} I^2}.$$

Так же, как и выше, максимум $w^2(I)$ будем искать при $I = 0, I = 2$ и при

значении I , являющимся корнем уравнения $\frac{dw^2}{dI} = 0$. Получим:

$$1) w^2(0) = \frac{12a}{h^2};$$

$$2) w^2(2) = 2 \frac{(a+1)}{\Delta x^2} + \sqrt{\left(2 \frac{a+1}{\Delta x^2} \right)^2 - 16 \frac{a}{\Delta x^4}} = 2 \frac{(a+1)}{\Delta x^2} + 2 \frac{|a-1|}{\Delta x^2} = [\text{знаем, что } a < 1] = \frac{4}{\Delta x^2};$$

$$3) \frac{d(w^2)}{dI} = -\frac{3a}{h^2} + \frac{a+1}{\Delta x^2} + \frac{\left(\frac{3a}{h^2} (2 - I) + \frac{a+1}{\Delta x^2} I \right) \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{3a}{h^2} \right) - \frac{4aI}{\Delta x^4}}{\sqrt{\left(\frac{3a}{h^2} (2 - I) + \frac{a+1}{\Delta x^2} I \right)^2 - \frac{4aI^2}{\Delta x^4}}} = 0.$$

$$\left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{3a}{h^2} \right)^2 \left(\left(\frac{3a}{h^2} (2 - I) + \frac{a+1}{\Delta x^2} I \right)^2 - \frac{4aI^2}{\Delta x^4} \right) = \left(\frac{3a}{h^2} (2 - I) + \frac{a+1}{\Delta x^2} I \right)^2 \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{3a}{h^2} \right)^2 + \left(\frac{4aI}{\Delta x^4} \right)^2 - \frac{8aI}{\Delta x^4} \left(\frac{3a}{h^2} (2 - I) + \frac{a+1}{\Delta x^2} I \right) \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{3a}{h^2} \right).$$

Сокращаем одинаковые слагаемые и делим на $\frac{4aI}{\Delta x^4}$. Получаем

$$-I \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{3a}{h^2} \right)^2 = \frac{4aI}{\Delta x^4} - 2 \frac{3a}{h^2} (2 - I) \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{3a}{h^2} \right) - 2 \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} \right)^2 I + \frac{6a}{h^2} \frac{a+1}{\Delta x^2} I,$$

$$-I \left(\left(\frac{a+1}{\Delta x^2} \right)^2 - \frac{6a}{h^2} \frac{a+1}{\Delta x^2} + \left(\frac{3a}{h^2} \right)^2 \right) - \frac{4aI}{\Delta x^4} + \frac{6a}{h^2} (2-I) \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{3a}{h^2} \right) + 2 \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} \right)^2 I - \frac{6a}{h^2} \frac{a+1}{\Delta x^2} I = 0.$$

Приводя подобные слагаемые, имеем

$$\left(\frac{a+1}{\Delta x^2} \right)^2 I - \left(\frac{3a}{h^2} \right)^2 I - \frac{4aI}{\Delta x^4} + \frac{6a}{h^2} (2-I) \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{3a}{h^2} \right) = 0.$$

Или

$$\left[\left(\frac{a-1}{\Delta x^2} \right)^2 - \left(\frac{3a}{h^2} \right)^2 \right] I + \frac{6a}{h^2} \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{3a}{h^2} \right) (2-I) = 0. \quad (5.16)$$

Это равенство может быть верным только в том случае, когда слагаемые имеют разные знаки. Учитывая, что $0 \leq I \leq 2$ и $\frac{6a}{h^2} > 0$, получаем, что оно возможно в двух случаях:

$$\begin{cases} \left(\frac{a-1}{\Delta x^2} \right)^2 - \left(\frac{3a}{h^2} \right)^2 \geq 0, \\ \frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{3a}{h^2} \leq 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \left(\frac{a-1}{\Delta x^2} \right)^2 - \left(\frac{3a}{h^2} \right)^2 \leq 0, \\ \frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{3a}{h^2} \geq 0 \end{cases}.$$

Первая система преобразуется к виду

$$\begin{cases} \left(\frac{\Delta x^2}{h^2} - \frac{1-a}{3a} \right) \left(\frac{\Delta x^2}{h^2} - \left(-\frac{1-a}{3a} \right) \right) \leq 0, \\ \frac{\Delta x^2}{h^2} - \frac{1+a}{3a} \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{\Delta x^2}{h^2} \leq \frac{1-a}{3a}, \\ \frac{\Delta x^2}{h^2} \geq \frac{1+a}{3a}. \end{cases}$$

Видно, что эта система не имеет решений.

А из второй системы следует

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\Delta x^2}{h^2} - \frac{1-a}{3a} \right) \left(\frac{\Delta x^2}{h^2} - \left(-\frac{1-a}{3a} \right) \right) \geq 0 \\ \frac{\Delta x^2}{h^2} \leq \frac{1+a}{3a} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta x^2}{h^2} \geq \frac{1-a}{3a} \\ \frac{\Delta x^2}{h^2} \leq -\frac{1-a}{3a} \\ \frac{\Delta x^2}{h^2} \geq 0 \\ \frac{\Delta x^2}{h^2} \leq \frac{1+a}{3a} \end{array} \right. ,$$

таким образом, получаем двойное неравенство, которое является параметрическим условием существования решения уравнения $\frac{dw^2}{dl} = 0$:

$$\frac{1}{3a} - \frac{1}{3} \leq \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \leq \frac{1}{3a} + \frac{1}{3}.$$

При выполнении этого условия уравнение $\frac{dw^2}{dl} = 0$ имеет корень l_0 на отрезке $[0,2]$.

Найдем его из (5.16).

$$l \left[\left(\frac{a-1}{\Delta x^2} \right)^2 - \left(\frac{3a}{h^2} \right)^2 - \frac{6a}{h^2} \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{3a}{h^2} \right) \right] = -\frac{12a}{h^2} \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{3a}{h^2} \right),$$

$$l \left[\left(\frac{a-1}{\Delta x^2} \right)^2 + 9 \left(\frac{a}{h^2} \right)^2 - \frac{6a}{h^2} \frac{a+1}{\Delta x^2} \right] = \frac{12a}{h^2} \left(\frac{3a}{h^2} - \frac{a+1}{\Delta x^2} \right).$$

Умножим обе части уравнения на Δx^4 . Тогда

$$l \left[(a-1)^2 + 9a^2 \left(\frac{\Delta x^2}{h^2} \right)^2 - 6a(a+1) \frac{\Delta x^2}{h^2} \right] = 12a \frac{\Delta x^2}{h^2} \left(3a \frac{\Delta x^2}{h^2} - a - 1 \right).$$

Выражение в квадратной скобке можно расписать

$$\begin{aligned} (a-1)^2 + 9a^2 \left(\frac{\Delta x^2}{h^2} \right)^2 - 6a(a+1) \frac{\Delta x^2}{h^2} &= a^2 - 2a + 1 + 9a^2 \left(\frac{\Delta x^2}{h^2} \right)^2 - 6a^2 \frac{\Delta x^2}{h^2} - 6a \frac{\Delta x^2}{h^2} = \\ &= \left(\left(3a \frac{\Delta x^2}{h^2} \right)^2 + a^2 + 1 - 2 \cdot 3a \frac{\Delta x^2}{h^2} a - 2 \cdot 3a \frac{\Delta x^2}{h^2} + 2a \right) - 4a = \left(3a \frac{\Delta x^2}{h^2} - a - 1 \right)^2 - 4a. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$I_0 = \frac{12a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \left[3a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 - a - 1 \right]}{\left[3a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 - a - 1 \right]^2 - 4a}.$$

В остальных случаях максимальная собственная частота достигается на границе отрезка $[0,2]$. Окончательная оценка устойчивости одномерной вариационно-разностной схемы теории пластин (5.4), записанной в безразмерных величинах, имеет вид:

$$t \leq \begin{cases} Dx, & \frac{Dx}{h} \leq \left(\frac{1}{3a} - \frac{1}{3} \right)^{1/2} \\ h/\sqrt{3a}, & \frac{Dx}{h} \geq \left(\frac{1}{3a} + \frac{1}{3} \right)^{1/2} \\ 2/w(I_0), & \frac{Dx}{h} \in \left[\left(\frac{1}{3a} - \frac{1}{3} \right)^{1/2}, \left(\frac{1}{3a} + \frac{1}{3} \right)^{1/2} \right]. \end{cases} \quad (5.17)$$

Приведем оценки (5.15) и (5.17) в размерных величинах. Конечно-разностная схема решения одномерных задач теории пластин Тимошенко будет устойчива при выполнении условия

$$t \leq \frac{2}{cw(I^*)} \quad (5.18)$$

Вариационно-разностная схема будет устойчива при выполнении условия

$$t \leq \begin{cases} h_1, & \frac{h_1}{h} \leq \left(\frac{1}{3a} - \frac{1}{3} \right)^{1/2} \\ h/\sqrt{3a}, & \frac{h_1}{h} \geq \left(\frac{1}{3a} + \frac{1}{3} \right)^{1/2} \\ 2/w(I_0), & \frac{h_1}{h} \in \left[\left(\frac{1}{3a} - \frac{1}{3} \right)^{1/2}, \left(\frac{1}{3a} + \frac{1}{3} \right)^{1/2} \right] \end{cases} \quad (5.19)$$

Практически вместо оценки (5.19) удобно пользоваться приближенной оценкой

$$\tau < \frac{1}{c} \min[\Delta X, h/\sqrt{3a}], \quad (5.20)$$

$$t < \frac{1}{c} \min[\Delta X, h/\sqrt{3a}]$$

которая отличается от точной лишь в небольших пределах изменения параметра разностной сетки $\frac{h_1}{h} \in \left[\sqrt{\frac{1}{3a} - \frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3a} + \frac{1}{3}} \right]$, при этом отличие составляет не более 4%.

Таким образом, получили оценки устойчивости уравнений (5.11) и (5.12), и рассмотрели технологию исследования устойчивости методом гармоник. Теперь получим оценку устойчивости для схемы линейного КЭ (5.13). Учитывая то, что

$$D_0^* = D_{00} - \frac{\Delta x^2}{12} D_{11},$$

перепишем (5.13):

$$\left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) D_{11} D_{11} w + \frac{12}{h^2} \left(D_{00} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} T^2} - \frac{\Delta x^2}{12} D_{11} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} T^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{a} \right) D_{11} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} T^2} + \frac{1}{a} \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} T^4} = 0. \quad (5.21)$$

Итак, подставим в (5.21) решение в виде монохроматической волны (5.14), имея в виду следующее:

$$D_{11} w_j = -\frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) w_j, \quad D_{11} D_{11} w_j = \frac{16}{\Delta x^4} \sin^4 \left(\frac{a}{2} \right) w_j, \quad D_{00} w_j = \cos^2 \left(\frac{a}{2} \right) w_j,$$

$$\frac{\partial^2 w_j}{\partial T^2} = -w^2 w_j, \quad \frac{\partial^4 w_j}{\partial T^4} = w^4 w_j.$$

Сократив на w_j , получим:

$$\left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) \frac{16}{\Delta x^4} \sin^4 \left(\frac{a}{2} \right) + \frac{12}{h^2} \left((-w^2) \cos^2 \left(\frac{a}{2} \right) - \frac{\Delta x^2}{12} (-w^2) \left(-\frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) \right) \right) - \left(1 + \frac{1}{a} \right) (-w^2) \left(-\frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) \right) + \frac{1}{a} w^4 = 0.$$

Упростим это уравнение:

$$\left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) \frac{16}{\Delta x^4} \sin^4 \left(\frac{a}{2} \right) - \frac{12}{h^2} w^2 \left(\cos^2 \left(\frac{a}{2} \right) + \frac{1}{3} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) \right) - \left(1 + \frac{1}{a} \right) w^2 \frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) + \frac{1}{a} w^4 = 0,$$

$$\frac{1}{a}w^4 - \left[\frac{12}{h^2} \left(\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{1}{3} \left(1 - \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) \right) \right) + \left(1 + \frac{1}{a} \right) \frac{4}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \right] w^2 + \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) \frac{16}{\Delta x^4} \sin^4\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$w^4 - \left[\frac{12a}{h^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) \right) + (a+1) \frac{4}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \right] w^2 + \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) \frac{16a}{\Delta x^4} \sin^4\left(\frac{a}{2}\right) = 0,$$

$$w^4 - \left[\frac{4a}{h^2} \left(1 + 2 \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) \right) + (a+1) \frac{4}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \right] w^2 + \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) \frac{16a}{\Delta x^4} \sin^4\left(\frac{a}{2}\right) = 0.$$

В полученном дисперсионном уравнении введем обозначение

$$I = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \quad \left(\Rightarrow 2 \cos^2\frac{a}{2} = (2 - I) \right).$$

Тогда получим:

$$w^4 - \left[\frac{4a}{h^2} (1 + 2 - I) + (a+1) \frac{2I}{\Delta x^2} \right] w^2 + \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) \frac{4aI^2}{\Delta x^4} = 0,$$

$$w^4 - 2 \left[\frac{2a}{h^2} (3 - I) + (a+1) \frac{I}{\Delta x^2} \right] w^2 + \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) \frac{4aI^2}{\Delta x^4} = 0.$$

Найдем квадрат большей по модулю собственной частоты:

$$w^2(I) = \frac{2a}{h^2} (3 - I) + (a+1) \frac{I}{\Delta x^2} + \sqrt{\left(\frac{2a}{h^2} (3 - I) + (a+1) \frac{I}{\Delta x^2} \right)^2 - \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) \frac{4aI^2}{\Delta x^4}}.$$

Найдем максимум $w^2(I)$:

$$1) \quad w^2(0) = \frac{6a}{h^2} + \frac{6a}{h^2} = \frac{12a}{h^2};$$

$$2) \quad w^2(2) = \frac{2a}{h^2} + (a+1) \frac{2}{\Delta x^2} + \sqrt{\left(\frac{2a}{h^2} + (a+1) \frac{2}{\Delta x^2} \right)^2 - \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) \frac{16a}{\Delta x^4}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2a}{h^2} + (a+1) \frac{2}{\Delta x^2} + \sqrt{\left(\frac{2a}{h^2}\right)^2 + 8 \frac{a}{h^2} \frac{(a+1)}{\Delta x^2} + (a+1)^2 \frac{4}{\Delta x^4} - \frac{16a}{\Delta x^4} - \frac{16a^2}{\Delta x^2 h^2}} = \\
&= \frac{2a}{h^2} + (a+1) \frac{2}{\Delta x^2} + \sqrt{\left(\frac{2a}{h^2}\right)^2 + \frac{8a^2 + 8a - 16a^2}{h^2 \Delta x^2} + \frac{4a^2 + 8a + 4 - 16a}{\Delta x^4}} = \\
&= \frac{2a}{h^2} + (a+1) \frac{2}{\Delta x^2} + \sqrt{\left(\frac{2a}{h^2}\right)^2 + \frac{8a(1-a)}{h^2 \Delta x^2} + \left(\frac{2(1-a)}{\Delta x^2}\right)^2} = \\
&= \frac{2a}{h^2} + (a+1) \frac{2}{\Delta x^2} + \left| \frac{2a}{h^2} + \frac{2(1-a)}{\Delta x^2} \right| = \frac{4a}{h^2} + \frac{4}{\Delta x^2}.
\end{aligned}$$

$$3) \frac{d(w^2)}{dl} = -\frac{2a}{h^2} + \frac{(a+1)}{\Delta x^2} + \frac{\left(\frac{2a}{h^2}(3-1) + (a+1) \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{2a}{h^2}\right) - \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) \frac{4al}{\Delta x^4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2a}{h^2}(3-1) + (a+1) \frac{1}{\Delta x^2}\right)^2 - \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) \frac{4al^2}{\Delta x^4}}} = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{2a}{h^2}\right)^2 \left(\left(\frac{2a}{h^2}(3-1) + (a+1) \frac{1}{\Delta x^2}\right)^2 - \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) \frac{4al^2}{\Delta x^4} \right) = \\
&= \left(\frac{2a}{h^2}(3-1) + (a+1) \frac{1}{\Delta x^2}\right)^2 \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{2a}{h^2}\right)^2 - \frac{8al}{\Delta x^4} \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) \left(\frac{2a}{h^2}(3-1) + (a+1) \frac{1}{\Delta x^2}\right) \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{2a}{h^2}\right) + \\
&\quad + \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right)^2 \left(\frac{4al}{\Delta x^4}\right)^2.
\end{aligned}$$

Приводим подобные слагаемые:

$$\begin{aligned}
&-\left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) \frac{4al^2}{\Delta x^4} \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{2a}{h^2}\right)^2 = \\
&= -\frac{8al}{\Delta x^4} \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) \left(\frac{2a}{h^2}(3-1) + (a+1) \frac{1}{\Delta x^2}\right) \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{2a}{h^2}\right) + \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right)^2 \left(\frac{4al}{\Delta x^4}\right)^2.
\end{aligned}$$

Делим уравнение на $\left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) \frac{4al}{\Delta x^4}$. Получаем

$$-I \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{2a}{h^2}\right)^2 + 2 \left(\frac{2a}{h^2}(3-1) + (a+1) \frac{1}{\Delta x^2}\right) \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{2a}{h^2}\right) - \frac{4al}{\Delta x^4} \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) = 0.$$

$$-I \left(\left(\frac{a+1}{\Delta x^2} \right)^2 - \frac{4a}{h^2} \frac{a+1}{\Delta x^2} + \left(\frac{2a}{h^2} \right)^2 \right) + \frac{4a}{h^2} (3-I) \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{2a}{h^2} \right) + 2 \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} \right)^2 I - \frac{4a}{h^2} \frac{a+1}{\Delta x^2} I - \frac{4aI}{\Delta x^4} - \frac{4a^2 I}{\Delta x^2 h^2} = 0.$$

Приводим подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} \right)^2 I - \left(\frac{2a}{h^2} \right)^2 I + \frac{4a}{h^2} (3-I) \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{2a}{h^2} \right) - \frac{4aI}{\Delta x^4} - \frac{4a^2 I}{\Delta x^2 h^2} = 0. \\ & \left[\left(\frac{a+1}{\Delta x^2} \right)^2 - \left(\frac{2a}{h^2} \right)^2 - \left(\frac{2a}{\Delta x h} \right)^2 \right] I + \frac{4a}{h^2} (3-I) \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{2a}{h^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Это равенство может быть верным только в том случае, когда слагаемые имеют разные знаки. Учитывая, что $0 \leq I \leq 2$ и $\frac{6a}{h^2} > 0$, получаем, что оно возможно в двух случаях:

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{a+1}{\Delta x^2} \right)^2 - \left(\frac{2a}{h^2} \right)^2 - \left(\frac{2a}{\Delta x h} \right)^2 \right] \geq 0, \\ \frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{2a}{h^2} \leq 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{a+1}{\Delta x^2} \right)^2 - \left(\frac{2a}{h^2} \right)^2 - \left(\frac{2a}{\Delta x h} \right)^2 \right] \leq 0, \\ \frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{2a}{h^2} \geq 0. \end{cases}$$

Первая система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} (a-1)^2 - 4a^2 \left(\frac{\Delta x^2}{h^2} \right)^2 - 4a^2 \frac{\Delta x^2}{h^2} \geq 0, \\ \frac{\Delta x^2}{h^2} \geq \frac{a+1}{2a}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 \left(\frac{\Delta x^2}{h^2} \right)^2 + 4a^2 \frac{\Delta x^2}{h^2} - (a-1)^2 \leq 0, \\ \frac{\Delta x^2}{h^2} \geq \frac{a+1}{2a}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{\Delta x^2}{h^2} \leq \frac{-a + \sqrt{a^2 + (1-a)^2}}{2a}, \\ \frac{\Delta x^2}{h^2} \geq \frac{a+1}{2a}. \end{cases}$$

Помним, что $a = \frac{(1-n)}{3} \approx \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-a + \sqrt{a^2 + (1-a)^2}}{2a} < \frac{a+1}{2a}$. Значит, первая система

решений не имеет. Перейдем ко второй системе.

$$\begin{cases} 4a^2 \left(\frac{\Delta x^2}{h^2} \right)^2 + 4a^2 \frac{\Delta x^2}{h^2} - (a-1)^2 \geq 0, \\ \frac{\Delta x^2}{h^2} \leq \frac{a+1}{2a}. \end{cases},$$

из которой получаем параметрическое условие существования решения уравнения

$$\frac{dw^2}{dl} = 0:$$

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 + (1-a)^2}}{2a} \leq \frac{\Delta x^2}{h^2} \leq \frac{a+1}{2a}.$$

При выполнении этого условия уравнение $\frac{dw^2}{dl} = 0$ имеет корень l_1 на отрезке $[0,2]$.

Найдем его из (5.22).

$$\left[\left(\frac{a-1}{\Delta x^2} \right)^2 - \left(\frac{2a}{h^2} \right)^2 - \left(\frac{2a}{\Delta x h} \right)^2 - \frac{4a}{h^2} \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{2a}{h^2} \right) \right] l = -\frac{12a}{h^2} \left(\frac{a+1}{\Delta x^2} - \frac{2a}{h^2} \right)$$

Умножим обе части уравнения на Δx^4 :

$$\left[(a-1)^2 - 4a^2 \left(\frac{\Delta x^2}{h^2} \right)^2 - 4a^2 \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 - 4a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \left(a+1 - 2a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) \right] l = -12a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \left(a+1 - 2a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right)$$

$$\left[a^2 - 2a + 1 - 4a^2 \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^4 - 4a^2 \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 - 4a^2 \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 - 4a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 + 8a^2 \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^4 \right] l = 12a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \left(2a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 - a - 1 \right)$$

$$\left[a^2 - 2a + 1 + \left(2a \frac{\Delta x^2}{h^2} \right)^2 - 8a^2 \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 - 4a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right] l = 12a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \left(2a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 - a - 1 \right)$$

$$\left[\left\{ \left(2a \frac{\Delta x^2}{h^2} \right)^2 + a^2 + 1 - 2 \cdot 2a \frac{\Delta x^2}{h^2} \cdot a - 2 \cdot 2a \frac{\Delta x^2}{h^2} + 2a \right\} - 4a - 4a^2 \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right] I = 12a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \left(2a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 - a - 1 \right)$$

$$\left[\left\{ \left(2a \frac{\Delta x^2}{h^2} \right)^2 - a - 1 \right\}^2 - 4a - 4a^2 \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right] I = 12a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \left(2a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 - a - 1 \right)$$

Таким образом, получаем

$$I_1 = \frac{12a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \left(2a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 - a - 1 \right)}{\left\{ \left(2a \frac{\Delta x^2}{h^2} \right)^2 - a - 1 \right\}^2 - 4a^2 \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 - 4a}$$

В остальных случаях максимальная собственная частота достигается на границе отрезка $[0,2]$. Окончательная оценка устойчивости одномерной схемы линейного конечного элемента теории пластин (5.5), записанной в безразмерных величинах, имеет вид:

$$t \leq \begin{cases} \frac{\Delta x^2 h^2}{2(a\Delta x^2 + h^2)}, & \frac{\Delta x}{h} \leq \left(\frac{\sqrt{a^2 + (1-a)^2}}{2a} - \frac{1}{2} \right)^{1/2} \\ h/\sqrt{3a}, & \frac{\Delta x}{h} \geq \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \\ 2/w(I_1), & \frac{\Delta x}{h} \in \left[\left(\frac{\sqrt{a^2 + (1-a)^2}}{2a} - \frac{1}{2} \right)^{1/2}, \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \right]. \end{cases} \quad (5.23)$$

Получим оценки устойчивости (5.23) в размерных величинах. Схема линейного конечного элемента решения одномерных задач теории пластин Тимошенко будет устойчива при выполнении условия

$$t \leq \frac{2L}{cw(I)} \quad (5.24)$$

Схема линейного конечного элемента будет устойчива при выполнении условия:

$$t \leq \begin{cases} \frac{\Delta x^2 h^2 L}{2(a\Delta x^2 + h^2)c}, & \frac{h_1}{h} \leq \left(\frac{\sqrt{a^2 + (1-a)^2}}{2a} - \frac{1}{2} \right)^{1/2} \\ h/c\sqrt{3a}, & \frac{h_1}{h} \geq \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \\ 2L/cw(I_1), & \frac{h_1}{h} \in \left[\left(\frac{\sqrt{a^2 + (1-a)^2}}{2a} - \frac{1}{2} \right)^{1/2}, \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \right]. \end{cases} \quad (5.25)$$

Практически вместо оценки (5.25) удобно пользоваться приближенной оценкой

$$\tau < \frac{1}{c} \min[\Delta X, h/\sqrt{3a}], \quad (5.26)$$

$$t < \frac{1}{c} \min[\Delta X, h/\sqrt{3a}]$$

которая отличается от точной лишь в небольших пределах изменения параметра разностной сетки $\frac{h_1}{h} \in \left[\sqrt{\frac{1}{3a} - \frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3a} + \frac{1}{3}} \right]$, при этом отличие составляет не более 4%.

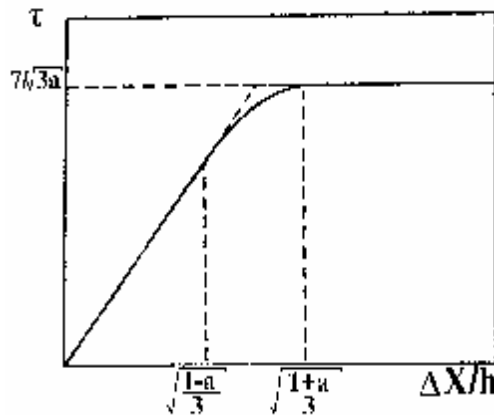


Рис. 5.1

Графики оценок устойчивости представлены на рис.5.1. Нижняя кривая соответствует оценке устойчивости конечно-разностной схемы, верхняя - вариационно-разностной, средняя - схемы линейного КЭ. Штриховой линией обозначена приближенная оценка, соответствующая (5.20). Области устойчивости схем лежат под кривыми. Из графиков можно сделать вывод, что вариационно-разностная схема имеет несколько лучшую устойчивость по сравнению с конечно-разностной, причем максимальное отличие достигается в области параметров $h_1 \approx h$, поскольку $a \approx 1/3$.

ГЛАВА 6. ГРАНИЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ

При выводе оценок устойчивости среда предполагалась безграничной [7]. С учетом этого рассматривалась только устойчивость решений в виде тригонометрических функций. Но при наличии свободных границ возможны также решения с экспоненциальным затуханием решения при удалении от границы типа рэлеевских волн. Отметим, что скорость распространения рэлеевских волн ниже, чем волн растяжения-сжатия [8]. Поэтому, исходя из того, что полученные оценки для задачи теории упругости близки к условию Куранта-Фридрихса-Леви, можно предположить, что данные решения также будут устойчивыми при полученных оценках. Большое число решенных задач с разными типами граничных условий подтверждает этот вывод во всех случаях, кроме одного. Численные эксперименты показывают, что при решении задач трехмерной теории упругости со свободными границами полученное условие устойчивости (5.34) не всегда обеспечивает действительную устойчивость численного решения. Неустойчивость проявляется только в тех случаях, когда свободная граница содержит двугранные или трехгранные углы. Таким образом, мы имеем дело с эффектом граничной неустойчивости на свободных границах с углами. Данный эффект, предположительно, может быть объяснен взаимодействием решений типа волн Рэлея на свободных ребрах или трехгранных углах. Для проведения полного анализа устойчивости в данном случае требуется записать дискретные решения рэлеевского типа, удовлетворяющие разностной схеме везде, в том числе и на свободной границе. Ввиду сложности данной задачи ограничимся теоретическим анализом одного простейшего случая.

Рассмотрим задачу о свободных продольных колебаниях стержня квадратного сечения. Проведем анализ устойчивости вариационно-разностной схемы решения данной задачи с одной ячейкой в сечении (рис.6.1). Будем считать ячейки кубическими, полагая $h_1 = h_2 = h_3$. Рассмотрим одну ячейку и введем в ней локальную нумерацию узлов (рис.6.2).

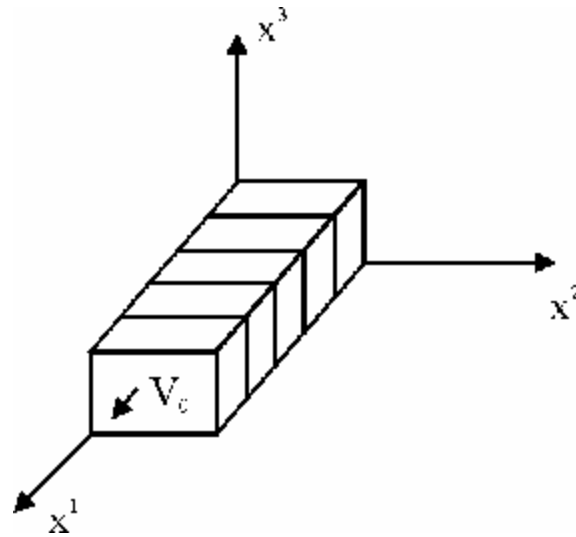


Рис.6.1

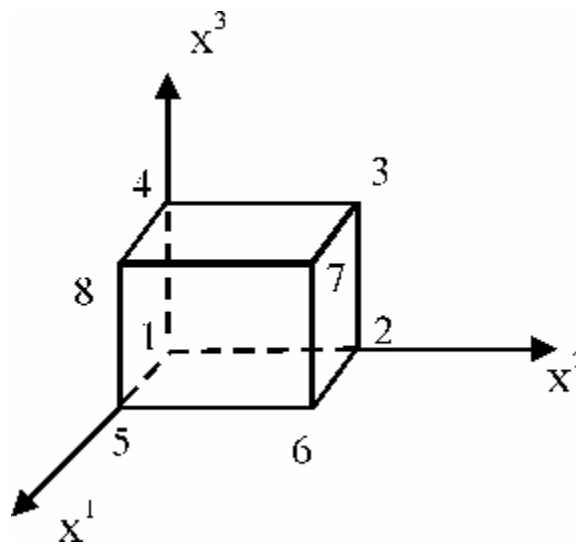


Рис.6.2

Учитывая симметрию задачи, введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 U_i &= u_1^1 = u_1^2 = u_1^3 = u_1^4; U_{i+1} = u_1^5 = u_1^6 = u_1^7 = u_1^8; \\
 V_i &= u_2^2 = u_2^3 = -u_2^1 = -u_2^4 = u_3^3 = u_3^4 = -u_3^1 = -u_3^2; \\
 V_{i+1} &= u_2^6 = u_2^7 = -u_2^5 = -u_2^8 = u_3^7 = u_3^8 = -u_3^5 = -u_3^6
 \end{aligned}$$

Здесь нижний индекс у компонент вектора перемещений обозначает номер компоненты, а верхний – номер узла в локальных обозначениях.

Запишем выражения для деформаций.

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{4h_1}(u_1^5 + u_1^6 + u_1^7 + u_1^8 - u_1^1 - u_1^2 - u_1^3 - u_1^4) = \frac{1}{h_1}(U_{i+1} - U_i); \\
e_{22} = e_{33} &= \frac{1}{4h_2}(u_2^2 + u_2^3 + u_2^6 + u_2^7 - u_2^1 - u_2^4 - u_2^5 - u_2^8) = \\
&= \frac{1}{4h_3}(u_3^3 + u_3^4 + u_3^7 + u_3^8 - u_3^1 - u_3^2 - u_3^5 - u_3^6) = \frac{1}{h_1}(V_i + V_{i+1}); \\
e_{ij} &= 0 \quad , \quad (i \neq j)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Подставляя (6.1) в закон Гука, получим выражения для напряжений

$$\begin{aligned}
(\mathbf{s}_{11})_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{2I}{h_1}(V_i + V_{i+1}) + \frac{I + 2G}{h_1}(U_{i+1} - U_i); \\
(\mathbf{s}_{22})_{i+\frac{1}{2}} = (\mathbf{s}_{33})_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{I}{h_1}(U_{i+1} - U_i) + \frac{2(I + G)}{h_1}(V_i + V_{i+1}) \\
(\mathbf{s}_{ij})_{i+\frac{1}{2}} &= 0 \quad , \quad (i \neq j)
\end{aligned}$$

Подставляя их в дискретные уравнения движения

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_1} \left((\mathbf{s}_{11})_{i+\frac{1}{2}} - (\mathbf{s}_{11})_{i-\frac{1}{2}} \right) &= r D_{tt} U_i, \\
\frac{1}{h_1} \left((\mathbf{s}_{22})_{i-\frac{1}{2}} + (\mathbf{s}_{22})_{i+\frac{1}{2}} \right) &= r D_{tt} V_i,
\end{aligned}$$

(третье уравнение тождественно второму и поэтому не приведено) получим разностную схему

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_1^2} ((I + 2G)(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) + 2I(V_{i+1} - V_{i-1})) &= r D_{tt} U_i, \\
\frac{1}{h_1^2} (2(I + G)(V_{i+1} + 2V_i + V_{i-1}) + I(U_{i+1} - U_{i-1})) &= r D_{tt} V_i
\end{aligned}$$

или, в операторных обозначениях,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_1^2} [(I + 2G)\tilde{D}_{11}U + 2I\tilde{D}_{01}V] &= r D_{tt} U, \\
\frac{1}{h_1^2} [2(I + G)\tilde{D}_{00}V + I\tilde{D}_{10}U] &= r D_{tt} V
\end{aligned}$$

где

$$(\tilde{D}_{00}f)_i = f_{i-1} + 2f_i + f_{i+1}, (\tilde{D}_{01}f)_i = (\tilde{D}_{10}f)_i = f_{i+1} - f_{i-1}, (\tilde{D}_{11}f)_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}.$$

Преобразуем систему к виду одного уравнения, исключив функцию V . Получим:

$$r^2 h_1^4 D_{tt} D_{tt} U - r h_1^2 D_{tt} [2(I + G)D_{00}U + (I + 2G)D_{11}U] + (6IG + 4G^2)D_{00}D_{11}U = 0 \tag{6.2}$$

Подставляя в полудискретный аналог (6.2) решение в виде $U_j = \exp(i(aj + wt))$, получим биквадратное уравнение относительно собственной частоты

$$r^2 h_1^4 w^4 - r h_1^2 \left[8(I + G) \cos^2 \frac{a}{2} - 4(I + 2G) \sin^2 \frac{a}{2} \right] w^2 + 4(6I G + 4G^2) \sin^2 a = 0$$

Найдя корни данного биквадратного уравнения, получим, что w_{\max} достигается при $a = 0$ и равна

$$w_{\max} = \frac{2\sqrt{2}}{h_1} \sqrt{\frac{I + G}{r}}.$$

Из спектрального признака Неймана (3.8) следует:

$$t \leq \frac{h_1}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{I + G}{r}}} \quad (6.3)$$

С другой стороны, условие (5.34), совпадающее с условием Куранта-Фридрихса-Леви, дает более слабую оценку. Таким образом, предельный шаг по времени, полученный из оценки (6.3), составляет примерно 75% от предельного шага (5.34).

Анализ «ажурной» схемы на тетраэдральных ячейках дает идентичный результат.

Причиной данного эффекта является взаимодействие поперечных волн в двух направлениях вдоль осей OX^2 и OX^3 , что легко установить, проводя аналогичный анализ для плоской задачи теории упругости.

Рассмотрим аналогичную задачу для плоской задачи теории упругости (плоская деформация).

Поскольку деформация $e_{33} = 0$, в плоском случае выражения для напряжений примут вид

$$\begin{aligned} (s_{11})_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{I}{h_1}(V_i + V_{i+1}) + \frac{I + 2G}{h_1}(U_{i+1} - U_i); \\ (s_{22})_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{I}{h_1}(U_{i+1} - U_i) + \frac{I + 2G}{h_1}(V_i + V_{i+1}) \\ (s_{12})_{i+\frac{1}{2}} &= 0 \end{aligned}$$

Подставляя их в дискретные уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} \left((s_{11})_{i+\frac{1}{2}} - (s_{11})_{i-\frac{1}{2}} \right) &= r D_{\#} U_i, \\ \frac{1}{h_1} \left((s_{22})_{i-\frac{1}{2}} + (s_{22})_{i+\frac{1}{2}} \right) &= r D_{\#} V_i, \end{aligned}$$

получим разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2} ((I + 2G)(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) + I(V_{i+1} - V_{i-1})) &= r D_{tt} U_i, \\ \frac{1}{h_1^2} ((I + 2G)(V_{i+1} + 2V_i + V_{i-1}) + I(U_{i+1} - U_{i-1})) &= r D_{tt} V_i \end{aligned}$$

или, в операторных обозначениях,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2} [(I + 2G)\tilde{D}_{11}U + I\tilde{D}_{01}V] &= r D_{tt} U, \\ \frac{1}{h_1^2} [(I + 2G)\tilde{D}_{00}V + I\tilde{D}_{10}U] &= r D_{tt} V \end{aligned}$$

Преобразовав систему к виду одного уравнения, получим:

$$r^2 h_1^4 D_{tt} D_{tt} U - r h_1^2 D_{tt} (I + 2G)(D_{11}U + D_{00}U) + 4(I + G) D_{00} D_{11} U = 0 \quad (6.4)$$

Из полудискретного аналога (6.4) получим дисперсионное уравнение

$$r^2 h_1^4 w^4 - 4r h_1^2 (I + 2G) \left(\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} \right) + 16G(I + G) \sin^2 a = 0$$

Найдя корни данного биквадратного уравнения, получим, что максимальная частота достигается при $a = 0$ и равна

$$w_{\max} = \frac{2}{h_1} \sqrt{\frac{I + 2G}{r}}.$$

Из последнего равенства следует оценка устойчивости (5.34). Таким образом, для плоской задачи теории упругости оценка устойчивости данной задачи совпала с оценкой, полученной в предположении безграничности сеточной расчетной области, что подтверждает сделанный выше вывод о том, что причина неустойчивости кроется во взаимодействии поверхностных волн, действующих в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

В заключение сделаем ряд замечаний общего характера, касающихся устойчивости разностных схем при решении нелинейных задач и применении неравномерных сеток. Полученные оценки зависят от параметров, имеющих простой геометрический смысл (размеры ячейки и толщина пластинки). В случае неравномерных сеток можно предположить, что схема будет устойчивой, если условия будут выполнены для каждой ячейки. Для геометрически нелинейных задач правдоподобным является предположение о том, что схема будет устойчивой, если условия выполнены для текущего размера ячейки. Оценки, полученные для пластинок, являются асимптотически точными (при $\Delta X/r \rightarrow 0$, где r - радиус кривизны, ΔX - диаметр ячейки) и для оболочек. Все высказанные

предположения подтверждаются многочисленными практическими расчетами при эксплуатации программ. Отметим также, что оценка (5.54) (с небольшим коэффициентом запаса) применялась также и к схеме на треугольных ячейках (4.6) и показала свою пригодность при решении ряда задач. Выбор шага в конкретно решаемых задачах осуществляется по полученным выше формулам, применяемым к ячейке минимальных размеров. Для гарантированной устойчивости схемы (особенно при решении нелинейных задач) к шагу берется коэффициент запаса (обычно в пределах 10%).

ГЛАВА 7. ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ. ЯВНО-НЕЯВНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ

В данной главе рассматривается метод повышения эффективности численных схем решения задач динамики тонкостенных конструкций на основе уравнений механики сплошной среды и теории оболочек.

Мерой эффективности разностной схемы будем считать затраты машинного времени (или количество арифметических операций) на решение данной задачи с заданной точностью. Из двух схем более эффективной будем считать ту, у которой затраты меньше. Эффективность явных схем фактически определяется количеством узлов пространственно-временной сетки (для неявных схем существенное влияние может оказывать еще и выбор алгоритма решения системы уравнений). Таким образом, эффективность явных схем определяется двумя факторами: 1) аппроксимацией исходной системы уравнений, определяющей шаг сетки по пространственным координатам, и 2) устойчивостью схемы, определяющей шаг по времени.

При расчете тонкостенных конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок типичной является картина, когда процесс деформирования является преимущественно длинноволновым по сравнению с толщиной, но требует мелкой пространственной сетки для описания квазистатического решения в областях с большими градиентами, в частности, по толщине оболочки или пластинки. Полученные оценки устойчивости разностных схем теории пластин и оболочек в грубом приближении можно интерпретировать как условие Куранта-Фридрихса-Леви относительно минимального размера пространственной ячейки (считая толщину одним из размеров). Так как для многих задач с точки зрения эффективности целесообразно применять сетки с размерами ячеек больше толщины пластинки, ограничение на временной шаг $\tau < h/c$ становится весьма обременительным. Возможность снятия этого ограничения основывается на одной из описанных выше особенностей задач теории пластин и оболочек. Суть подхода состоит в том, что указанное ограничение определяется высокочастотными сдвиговыми колебаниями пластины или оболочки с длиной волны, равной двум толщинам. Учитывая, что размеры ячеек разностной сетки при этом больше толщины, не может быть и речи о сколько-нибудь правильном описании разностной схемой таких колебаний. При этом приходим к парадоксальной ситуации: временной шаг интегрирования (а с ним и

эффективность численной схемы) определяется высокочастотными колебаниями, существенно не влияющими на общий процесс деформирования. Поэтому имеет смысл в данном случае модифицировать (регуляризовать) схему таким образом, чтобы снизить максимальную собственную частоту полудискретной системы до необходимых пределов, чтобы обеспечить вычисления с более крупным временным шагом.

Идея регуляризации основана на искусственном понижении верхней границы частот сеточной задачи, что позволяет повысить ее устойчивость. Пусть собственные частоты полудискретной системы уравнений, соответствующей разностной схеме, находятся в пределах $\omega \in [0, \theta_1]$, где θ_1 определяется, главным образом, размерами ячейки разностной сетки. Оценка устойчивости схемы при этом определяется условием устойчивости (5.6). Предположим, что существенная для данной задачи часть спектра находится в пределах $[0, \theta_0]$, где $\theta_0 < \theta_1$. Последнее неравенство является абсолютно необходимым, так как в противном случае разностная задача перестает аппроксимировать дифференциальную. Регуляризация разностной схемы состоит в том, чтобы искусственно понизить максимальную собственную частоту полудискретной системы до некоторой величины $\theta^* \in [\theta_0, \theta_1]$, что в свою очередь позволит вести устойчивый счет с шагом по времени $\tau^* = 2/\theta^*$, в θ_1/θ^* раз большим, чем у исходной разностной схемы. Тем самым эффективность численной методики соответственно повышается в θ_1/θ^* раз. Пределы повышения эффективности путем регуляризации разностной схемы определяются отношением θ_1 к θ_0 . Реальный эффект регуляризации зависит от относительной (по сравнению с характерными геометрическими размерами задачи) толщины оболочки и может приводить для тонких оболочек к сокращению объема вычислений в 10 и более раз.

Для реализации данной модернизации разностной схемы воспользуемся идеей метода расщепления [10], комбинируя явную схему "крест" во всей области с локально неявной схемой для получения мелкомасштабного квазистатического решения. Получаемые при рассматриваемом подходе частично неявные схемы отличаются от чисто неявных схем простотой систем алгебраических уравнений и легкостью их расщепления на одномерные схемы. Предлагается дополнить разностную схему (ее инерционный член) стабилизирующим оператором, обладающим следующими свойствами: 1) он понижает высшие собственные частоты и, тем самым, позволяет увеличить шаг интегрирования по времени до необходимой величины; 2) его влияние в существенной части спектра незначительно, и поэтому он не вносит заметной погрешности в решение; 3) он должен

иметь простую структуру и легко обращаться. При этом возможность повышения временного шага ограничивается отношением верхних границ полного спектра дискретной системы и существенной части спектра исходной задачи - то есть, по сути, теми частотами, которые можно отбросить без ущерба для точности решения.

Наиболее просто и полно данный подход реализован в теории пластин и оболочек типа Тимошенко, где короткие и длинные волны уже по сути разделены (сдвиговые и изгибные волны). Его применение при решении большого числа задач показало свою надежность и эффективность, позволило в несколько раз сократить время расчетов.

При решении плоских и трехмерных задач теории упругости и пластичности данный подход приводит к полностью или частично неявным схемам, отличающимся, однако, от чисто неявной схемы простотой получаемой системы и легкостью ее расщепления на одномерные схемы. Он может быть реализован независимо от способа построения дискретной модели по пространственным координатам как для конечноразностных, так и для вариационно-разностных и конечноэлементных схем. Его частные случаи реализованы при решении задач динамики многослойных оболочек в рамках МКЭ [11], динамики упругопластических тел [12]. Аналогичная схема рассмотрена также в [13] при решении осесимметричных задач теории упругости для тонкостенного цилиндра

Выделяя из движений сетки формы с разной собственной частотой колебаний, будем искусственно замедлять высокочастотные колебания до необходимых пределов, определяемых из требуемой для данной задачи оценки устойчивости схемы:

$$\omega < 2/\tau^* . \quad (7.1)$$

Замедление высокочастотных колебаний осуществляется путем фиктивного завышения инерционных параметров уравнений. Для каждой формы вводится свой корректирующий коэффициент, чтобы удовлетворить неравенство (7.1) при примерном равенстве левой и правой части. Для форм с частотами, априорно удовлетворяющими неравенство (7.1), корректирующие коэффициенты не вводятся.

При регуляризации в описание коротковолновых высокочастотных колебаний вносятся большие погрешности (но они и без того не могут быть описаны на грубой сетке достаточно точно). При условии, что влияние регуляризации на низкочастотные волновые процессы незначительно и не превышает погрешностей, вносимых дискретизацией задачи, регуляризация дает нам возможность многократно повысить эффективность численных методик без ухудшения качества решения.

Процедура регуляризации успешно применялась к задачам теории оболочек [11] с целью поднять временной шаг до величины, определяемой оценкой устойчивости плоской задачи теории упругости.

Рассмотрим конкретные примеры регуляризации с анализом возникающих при этом погрешностей.

6.1 Регуляризация численных схем теории пластин и оболочек

Рассмотрим разностную схему (4.24). Ее регуляризацию осуществить наиболее просто, так как в ней фактически уже разделены высокочастотные сдвиговые колебания (функция ψ) и низкочастотные изгибные колебания (функция w). Таким образом, регуляризация сводится к введению множителя к инерции вращения в системе уравнений (4.24). Регуляризованная система уравнений примет вид:

$$a(D_{11}w + D_1\psi) - D_{yy}w = 0, \quad D_{11}\psi - \frac{12a}{\eta^2}(D_1w + D_0\psi) - A D_{yy}\psi = 0, \quad (7.2)$$

где A - регуляризирующий множитель. Множитель A должен быть выбран таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\omega_{\max} \leq 2/\Delta x, \quad (7.3)$$

аналогичное (7.1), накладываемое на собственную частоту регуляризованной полудискретной системы

$$a(D_{11}w + D_0Y) - \frac{\eta^2 w}{\eta t^2} = 0, D_{11}Y - \frac{12a}{h^2}(D_{10}w + D_{00}Y) - A \frac{\eta^2 Y}{\eta t^2} = 0. \quad (7.4)$$

Для упрощения задачи рассмотрим не полную, а парциальную частоту системы (7.4), полученную наложением связи $w=0$ на ее решение. Из уравнения

$$D_{11}Y - \frac{12a}{h^2}D_{00}Y - A \frac{\eta^2 Y}{\eta t^2} = 0.$$

после подстановки в него решения $Y = \exp[i \cdot (aj + \omega t)]$ получим дисперсионное уравнение, а из него - выражение для частоты

$$\omega^2 = \frac{4}{A \Delta x^2} \left(\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 3a \left(\frac{\Delta x}{\eta}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)$$

и необходимое условие на множитель A

$$A \geq 1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{\eta}\right)^2 \quad (7.5)$$

Полное исследование устойчивости регуляризованной разностной схемы проводится аналогично рассмотренным выше случаям и в итоге при выполнении неравенства (2.5) приводит к условию Куранта-Фридрихса-Леви

$$\tau \leq \Delta x. \quad (7.6)$$

Множитель A , удовлетворяющий неравенству (7.5), будем выбирать таким образом, чтобы значения погрешностей собственной частоты регуляризованной полудискретной системы в существенной части спектра были минимальными. То есть будем определять A из условия минимума выражения

$$\delta_A = \frac{\omega_A^* - \omega_0}{\omega_0},$$

где

$$\omega_A^* = \left\{ \frac{3a}{A \eta^2} (2 - \lambda) + \left(a + \frac{1}{A} \right) \frac{\lambda}{\Delta x^2} + \left[\left(\frac{3a}{A \eta^2} (2 - \lambda) + \left(a + \frac{1}{A} \right) \frac{\lambda}{\Delta x^2} \right)^2 - \frac{4a\lambda^2}{A \Delta x^4} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

- собственная частота регуляризованной полудискретной системы

(здесь $\lambda = 2\sin^2(\pi\Delta x / 2)$), а

$$\omega_0 = \left\{ \frac{6a}{\eta^2} + \frac{a+1}{2} \pi^2 + \left[\left(\frac{6a}{\eta^2} + \frac{a+1}{2} \pi^2 \right)^2 - a\pi^4 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

- собственная частота исходной дифференциальной системы (4.22). Разлагая функцию ω_A^* в ряд по Δx и оставляя в разложении по три члена ряда, получим, что при $\Delta x \rightarrow 0$ оптимальное значение множителя A равно

$$\left(1 + (\Delta X/h)^2 \right)^{-1}.$$

Таким образом, окончательно получаем, что регуляризирующий множитель нужно выбирать в виде

$$A = \begin{cases} 1, & \Delta X/h \leq 1 \\ \left(1 + (\Delta X/h)^2 \right)^{-1}, & \Delta X/h \geq 1 \end{cases} \quad (7.7)$$

При этом асимптотические значения погрешностей собственной частоты регуляризованной разностной схемы равны

$$\delta_A = \frac{7\pi^4}{120} \left(\frac{\Delta X}{L} \right)^4, \quad (7.8)$$

в то время как для исходной схемы те же погрешности имеют вид:

$$\delta^{**} = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{\Delta X}{L} \right)^2. \quad (7.9)$$

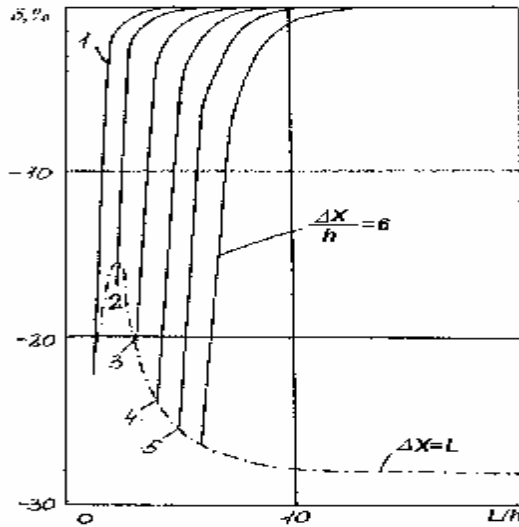


Рис.7.1

Таким образом, приходим к выводу, что в нижней части спектра (а только она и необходима в задачах теории оболочек) регуляризованная разностная схема оказалась точнее исходной. На рис.6.1 приведены погрешности собственных частот регуляризованной разностной схемы (7.2). Сравнивая их с аналогичными погрешностями для схемы без регуляризации, получаем подтверждение сделанного вывода. Результаты показывают, что максимальные погрешности регуляризованной схемы меньше, а скорость убывания погрешностей - больше, чем исходной.

7.2 Разностная схема решения плоской задачи теории упругости с неявным стабилизирующим оператором

Так как, согласно оценке (5.6), устойчивость схемы «крест» связана с максимальной собственной частотой дискретной системы, то, понижая высшие частоты, мы можем улучшить устойчивость разностной схемы. С этой целью дополним схему «крест» общего вида стабилизирующим оператором A в инерционном слагаемом уравнения:

$$L_h u = A D_{tt} u. \quad (7.10)$$

Поскольку анализ разностных схем теории упругости достаточно громоздок, рассмотрим подробно и проанализируем применение стабилизирующего оператора на примере двумерного волнового уравнения

$$\Delta u = \frac{\mathcal{I}^2 u}{\mathcal{I} t^2}, \quad (7.11)$$

тем более, что и метод анализа, и результаты могут быть перенесены на задачу теории упругости без изменений.

Будем считать, что ячейки разностной сетки вытянуты вдоль координаты

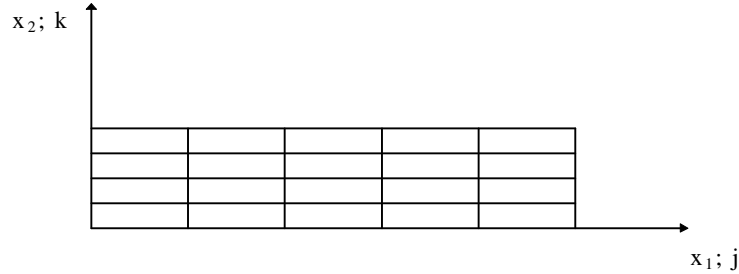


Рис.7.2

x_1 , (рис. 7.2). Разностная схема «крест» для уравнения (7.11) имеет вид

$$D_{\Delta} u = D_{tt} u. \quad (7.12)$$

Здесь D_{Δ} - сеточный оператор Лапласа, который в рассматриваемом случае ортогональной по координатам сетки на девятиточечном шаблоне имеет вид суммы двух суперпозиций элементарных разностных операторов:

$$D_{\Delta} = D_0^{(2)} D_{11} + D_0^{(1)} D_{22}.$$

Здесь D_{11} и D_{22} - одномерные операторы вторых производных соответственно по x_1 и x_2 , $D_0^{(1)}$ и $D_0^{(2)}$ - операторы усреднения по тем же координатам. Все они определяются следующими формулами:

$$\left(D_{11} u \right)_{jk}^1 = \frac{1}{h_1^2} \left(u_{j+1k}^1 - 2u_{jk}^1 + u_{j-1k}^1 \right), \quad \left(D_{22} u \right)_{jk}^1 = \frac{1}{h_2^2} \left(u_{jk+1}^1 - 2u_{jk}^1 + u_{jk-1}^1 \right),$$

$$\left(D_0^{(1)} u \right)_{jk}^1 = \frac{1}{4} \left(u_{j-1k}^1 + 2u_{jk}^1 + u_{j+1k}^1 \right), \quad \left(D_0^{(2)} u \right)_{jk}^1 = \frac{1}{4} \left(u_{jk-1}^1 + 2u_{jk}^1 + u_{jk+1}^1 \right).$$

Дополним схему стабилизирующим оператором A в инерционном члене, тогда она примет вид:

$$D_D u = A D_{tt} u, \quad (7.13)$$

Оператор A зададим в виде $A = E - a D_{S2}$, где E - тождественный оператор, D_{S2} - оператор, построенный по трем узлам вдоль короткой стороны ячеек разностной сетки и пропорциональный второй производной по данному направлению. В данном случае

$D_{S2}u_{jk}^1 = u_{j+1k}^1 - 2u_{jk}^1 + u_{j-1k}^1$, аналогично определяется оператор D_{S1} формулой $D_{S1}u_{jk}^1 = u_{j+1k}^1 - 2u_{jk}^1 + u_{j-1k}^1$. Здесь цифра 1 или 2 обозначает номер изменяющегося индекса. Таким же образом строятся операторы D_{S1}, D_{S2}, D_{S3} на трехмерной сетке (их применение см. ниже). Коэффициент a ниже определим из необходимого условия устойчивости разностной схемы.

Схема (4.12) устойчива при выполнении условия (5.21), то есть в данном случае $t \leq h_2$. Попытаемся увеличить устойчивый шаг схемы (7.13) до оценки

$$t \leq h_1. \quad (7.14)$$

Для этого рассмотрим полудискретные уравнения схем (7.12) и (7.13) (также и исходного уравнения (7.11)). Подставляя в (7.11), (7.12) и (7.13) решение в виде $u = ce^{i(a x_1 + b x_2 + w t)}$, получим соответствующие дисперсионные уравнения:

$$w^2 = a^2 + b^2, \quad (7.15)$$

$$w_h^2 = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{a h_1}{2} \cos^2 \frac{b h_2}{2} + \frac{4}{h_2^2} \cos^2 \frac{a h_1}{2} \sin^2 \frac{b h_2}{2}, \quad (7.16)$$

$$w_p^2 = \frac{\frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{a h_1}{2} \cos^2 \frac{b h_2}{2} + \frac{4}{h_2^2} \cos^2 \frac{a h_1}{2} \sin^2 \frac{b h_2}{2}}{1 + 4a \sin^2(b h_2 / 2)}. \quad (7.17)$$

Здесь w, w_h, w_p — собственные частоты уравнений (7.11), (5.12), (5.13). Для того, чтобы достичь оценки устойчивости (7.14), выберем $a = \left(\left(h_1 / h_2 \right)^2 - 1 \right) / 4$. При меньших значениях a условие (7.14) не достигается. С другой стороны, большее увеличение шага невозможно, так как это приведет к неустойчивости по координате x_1 . Оценим влияние стабилизирующего оператора на точность численного решения. Для этого проанализируем погрешности квадратов собственных частот (7.16), (7.17) по отношению к (7.15). Разложим (7.16) и (7.17) при $a = \left(\left(h_1 / h_2 \right)^2 - 1 \right) / 4$ в ряды Тейлора и оставим в них только главные члены разложения до четвертого порядка включительно. Получим, соответственно

$$\Delta_h = w_h^2 - w^2 = \frac{a^4 h_1^2}{12} + \frac{a^2 b^2 (h_1^2 + h_2^2)}{4} + \frac{b^4 h_2^2}{12} + o(h_1^2 + h_2^2) \quad (7.18)$$

и

$$\Delta_p = w_p^2 - w^2 = \frac{a^4 h_1^2}{12} + 2 \frac{a^2 b^2 h_1^2}{4} + \frac{b^4 h_1^2}{12} + o(h_1^2 + h_2^2). \quad (7.19)$$

Анализ приведенных выражений позволяет сделать следующие выводы: 1) увеличение максимальной погрешности по частоте при любых отношениях h_1 / h_2 происходит не более чем в 1,5 раза, 2) схема (7.13) обладает меньшей сеточной анизотропией (погрешности по направлениям x_1 и x_2 становятся одинаковыми). Таким образом, обе схемы с точки зрения аппроксимации примерно равноценны.

С практической точки зрения важно рассмотреть обобщение данного подхода на более широкий класс сеток - неортогональных, неравномерных и нерегулярных. Теоретический анализ всех этих случаев либо невозможен по принципиальным соображениям (для нерегулярных сеток), либо приводит к чересчур большим техническим сложностям. Поэтому ограничимся рассмотрением численной схемы на равномерных косоугольных сетках с параллелограммными ячейками. Ячейка определяется парой неколлинеарных векторов l_1, l_2 , образующих стороны параллелограмма; h_1, h_2 - высоты параллелограмма, опущенные из концов соответствующих векторов на другой вектор (или его продолжение). Предположим, что $|l_1| > |l_2|$. Приведем без обоснования вид стабилизирующего оператора и формулы, аналогичные (7.18), (7.19). Оператор A принимаем в таком же виде: $A = E - \chi D_{S_2}$, где $\chi = \left((|l_1|/|l_2|)^2 - 1 \right) / 4$. При этом схема будет устойчива для $t \leq h_1 / c$. Погрешности квадратов частот равны:

$$\Delta_h = \frac{c^2 \left((a^2 - 4ab \cos j + 3b^2) a^2 l_1^2 + (b^2 - 4ab \cos j + 3a^2) b^2 l_2^2 \right)}{12 \sin^2 j} + o(h_1^2 + h_2^2) \quad (7.20)$$

и

$$\Delta_p = \frac{c^2 \left((a^2 + 6b^2) a^2 l_1^2 - ab \cos j (4a^2 l_1^2 - 2b^2 l_2^2 + 6b^2 l_1^2) + b^4 (3l_1^2 - 2l_2^2) \right)}{12 \sin^2 j} + o(h_1^2 + h_2^2) \quad (7.21)$$

Анализ данных выражений позволяет оценить погрешности обеих схем на косоугольной сетке и влияние неортогональности сетки на точность численного решения.

Алгоритмически введение стабилизирующего оператора приводит к необходимости решать для каждого ряда узлов вдоль коротких сторон ячеек систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, что удобно делать методом прогонки. При рациональной организации вычислений это приведет к увеличению времени расчета одного шага по времени примерно на 15-20% для линейных задач и

несколько меньше - для геометрически и физически нелинейных. В итоге, с учетом увеличения временного шага, общие временные затраты при использовании стабилизирующего оператора уменьшатся не менее, чем в $h_1 / 1.2h_2$ раз.

Отметим свойства введенного в рассмотрение стабилизирующего оператора: 1) он понижает высшие собственные частоты и, тем самым, позволяет увеличить шаг интегрирования по времени до необходимой величины; 2) его влияние в существенной части спектра незначительно, и поэтому он не вносит заметной погрешности в решение; 3) он имеет простую структуру и легко обращается. Поскольку в рассмотренной явно- неявной схеме стабилизирующий оператор идентичен получаемому при конечно-элементном подходе, то выводы данного пункта можно распространить и на явно-неявные схемы МКЭ, рассмотренные выше.

Нет необходимости делать подобный анализ для плоской задачи теории упругости, так как она может быть преобразована к виду отдельных скалярных волновых уравнений и, следовательно, все выводы полностью аналогичны.

6.3 Схемы со стабилизирующим оператором с точки зрения МКЭ

Рассмотрим построение явно-неявной численной схемы на примере плоской задачи теории упругости. Для аппроксимации дифференциальной задачи матрица масс конечного элемента должна удовлетворять следующему условию: сумма ее элементов должна равняться массе конечного элемента. В рамках этого ограничения ее можно изменять, что приводит к различным разностным схемам. В частности, для получения явной схемы матрица масс должна быть диагональной. Рассмотрим варианты матрицы масс для четырехузлового билинейного элемента. Элементы матрица масс, согласованной с конечно-элементной аппроксимацией, определяются с помощью формул

$$M_{ij} = \rho \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dS, \text{ где } \rho - \text{плотность, } \varphi_i (i=1,2,3,4) - \text{базисные функции, } n - \text{число узлов}$$

элемента. В результате получаем ее в виде

$$M_s = \frac{k}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Здесь $k = \rho h_1 h_2$. Очевидно, что такая матрица масс приводит к неявной схеме.

Рассмотрим матрицы:

$$M_0 = \frac{k}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_1 = \frac{k}{4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, M_2 = \frac{k}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Чисто явную схему получим, если взять матрицу масс в виде M_0 . Если же принять матрицу масс в виде $M_0 + \alpha M_1$ или $M_0 + \alpha M_2$ (где α - коэффициент, значение которого определяется из соображений устойчивости) то получим численную схему, явную в одном направлении и неявную в другом. Очевидно, что с точки зрения теории МКЭ все рассмотренные схемы имеют второй порядок аппроксимации.

6.4 Регуляризация численных схем решения трехмерных задач теории упругости

При решении трехмерных задач теории упругости можно различить случаи: а) сплюснутых ячеек, когда один размер ячейки существенно меньше двух других; б) вытянутых ячеек, когда один размер существенно больше двух других. Пусть разностная сетка ортогональная и покоординатная с шагами h_1, h_2, h_3 , где $h_1 \leq h_2 \leq h_3$. Тогда в

случае а) оператор выберем в виде $A = E - \frac{1}{4} \left(\frac{h_2^2}{h_1^2} - 1 \right) D_{S1}$, что позволит получить

разностную схему, устойчивую при $t \leq h_2 / c$. В случае б) возможны два варианта

стабилизирующего оператора - двумерный $A = E - \frac{1}{4} \left(2 \frac{h_3^2}{h_1^2} - 1 \right) (D_{S1} + D_{S2})$, либо

суперпозиция двух одномерных: $A = A_1 * A_2$, где, $A_1 = E - \frac{1}{4} \left(2 \frac{h_3^2}{h_1^2} - 1 \right) D_{S1}$,

$$A_2 = E - \frac{1}{4} \left(2 \frac{h_3^2}{h_2^2} - 1 \right) D_{S2}.$$

В обоих вариантах оценка устойчивости - условие Куранта относительно максимального размера ячейки: $t \leq h_3 / c$.

При другом расположении сетки относительно координатных осей или на косоугольной сетке стабилизирующие операторы строятся аналогично. При этом

параметры h_1, h_2 принимают смысл высот прямоугольников или параллелограммов (ячеек сетки).

Случай использования крупных и мелких ячеек

Предположим, мы решаем задачу, имеющую некоторую геометрическую особенность (выточку, отверстие, жесткое включение и т.п.) малого размера по отношению к геометрическим параметрам как самой конструкции, так и происходящего в ней волнового процесса. Пример конструкции такого рода с нанесенной на ней разностной сеткой приведен на рис.7.3, где

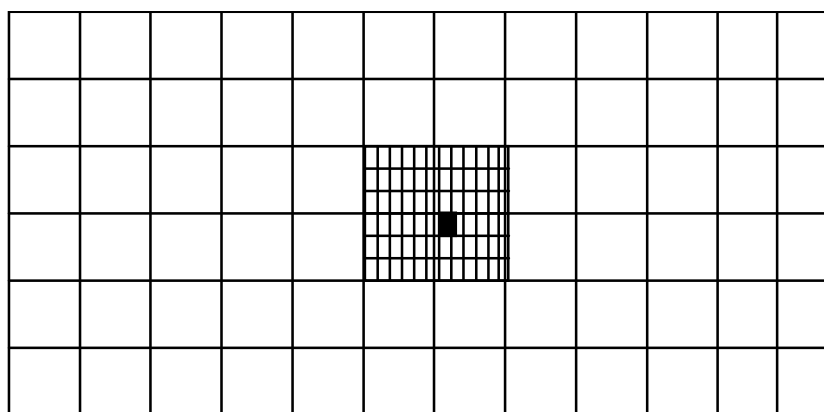


Рис. 7.3

закрашенная область - отверстие. В данном случае для обеспечения достаточной точности решения в окрестностях особенности, являющейся концентратором напряжений, необходимо ввести более мелкую сетку. Для того, чтобы расчеты можно было вести с временным шагом, соответствующим крупной сетке, также введем стабилизирующий

оператор в виде $A = A_1 * A_2$, где $A_1 = E - \frac{1}{4} \left(2 \frac{H^2}{h_1^2} - 1 \right) D_{S1}$,

$A_2 = E - \frac{1}{4} \left(2 \frac{H^2}{h_2^2} - 1 \right) D_{S2}$. Здесь h_1, h_2 - шаги мелкой сетки, H - наименьший

размер крупной сетки. В трехмерном случае оператор имеет аналогичный вид:

$A = A_1 * A_2 * A_3$, где $A_1 = E - \frac{1}{4} \left(3 \frac{H^2}{h_1^2} - 1 \right) D_{S1}$,

$A_2 = E - \frac{1}{4} \left(3 \frac{H^2}{h_2^2} - 1 \right) D_{S2}$, $A_3 = E - \frac{1}{4} \left(3 \frac{H^2}{h_3^2} - 1 \right) D_{S3}$. И в том и в другом случае

схема будет устойчивой при условии $t \leq H / c$. Погрешности аппроксимации по частоте

на мелкой сетке в этом случае увеличатся примерно в H/h раз, но не превысят аналогичной погрешности на крупной сетке. Погрешности решения статической задачи не изменятся.

6.5 Численные результаты

Для иллюстрации приведем решения тестовых задач

1) Рассмотрим задачу об ударе упругой пластины о жесткую преграду. Задача формулируется как плоская задача теории упругости для изотропной среды с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$. Ввиду линейности постановки задачи ее можно рассматривать в безразмерном виде, где остальные параметры среды несущественны.

Пластина размерами $L \times l$ ($l/L=0.2$) ударяется короткой стороной о неподвижную преграду со скоростью V_0 , направленной вдоль оси x_1 (рис.7.4).

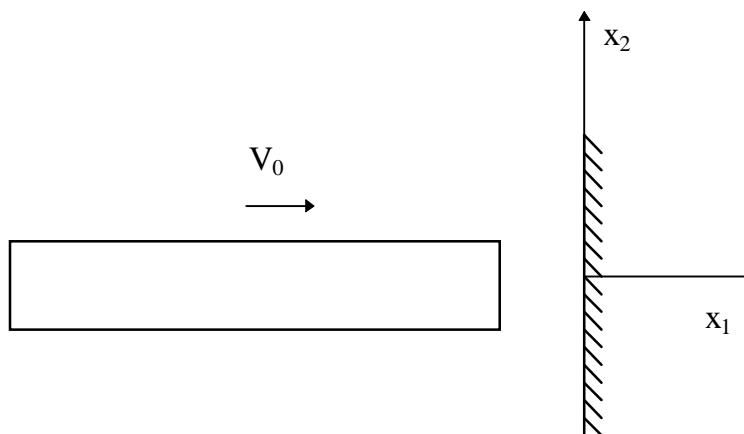


Рис. 7.4

Задача имеет следующие начальные и граничные условия:

$$u_1|_{t=0}=0, \quad u_2|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{t=0}=V_0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{t=0}=V_0,$$

$$u_1|_{x_1=0}=0, \quad u_2|_{x_1=0}=0,$$

$$S_{12}|_{x_2=\pm 1/2}=0, \quad S_{22}|_{x_2=\pm 1/2}=0, \quad S_{11}|_{x_1=-L}=0, \quad S_{12}|_{x_1=-L}=0.$$

Для расчета пластина покрывалась разностной сеткой 10×10 ячеек, при этом $h_1 / h_2 = 5$. Расчеты проводились по схеме «крест» на 9-точечном пространственном шаблоне и той же схеме со стабилизирующим оператором. При этом у второй схемы временной шаг был в 5 раз больше, а вычислительные затраты - примерно в 4 раза

меньше, чем у первой. Проведенные расчеты показали хорошее качественное и количественное совпадение результатов. На рис. 7.5 приведена геометрия пластин в момент времени $tc/L = 1$, где перемещения по x_1 и x_2 увеличены в одинаковое число раз из соображения наглядности результатов.

Верхний рисунок - схема «крест», нижний - схема со стабилизирующим оператором.

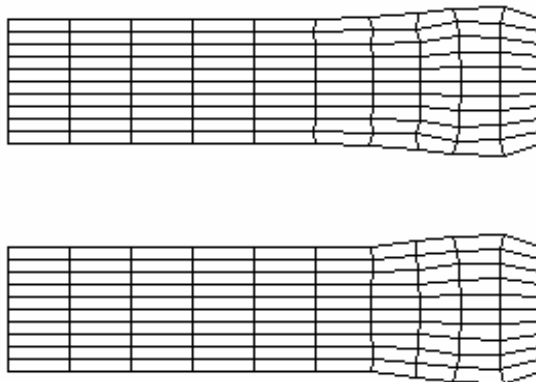


Рис.7.5

На рис.7.6 приведены зависимости от времени перемещений u_1 (верхний график) и u_2 (нижний график) в точке, расположенной на краю пластинки на расстоянии $0,3L$ от ударяемого торца. Здесь $u_1^* = u_1 c / (V_0 L)$, $u_2^* = u_2 c / (V_0 L)$. Сплошные линии соответствуют расчету по схеме «крест», пунктирные - по схеме со стабилизирующим оператором.

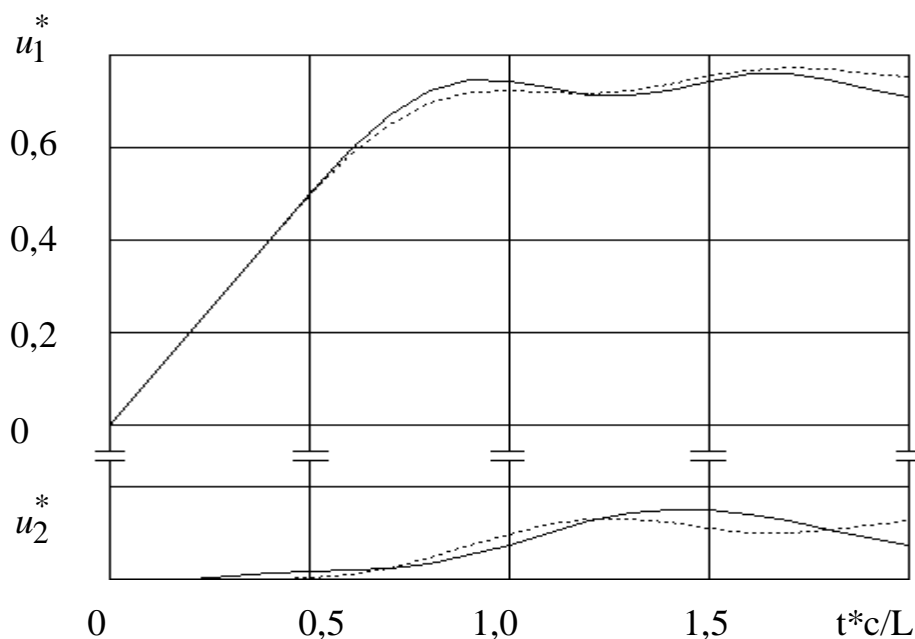


Рис. 7.6

Результаты показывают хорошее совпадение и соответствуют выводам, сделанным при теоретическом анализе схемы.

Рассмотрим также результаты решения ряда тестовых и прикладных задач, принадлежащие В.К Ломунову, М.Б.Прокопенко и В.П.Столову, в которых использовался разработанный авторами метод повышения эффективности численного решения, рассмотренный в данной главе.

2) Рассмотрим результаты решения задачи [14] о раскрытии плоской стержневой системы (рис. 7.7), состоящей из трех гибких стержней, соединенных последовательно с помощью специальных шарниров. Моделируется принудительный взаимный поворот смежных стержней. Конструктивная схема, размеры и условия раскрытия взяты из доклада [15] А.Н. Данилина. Все стержни имеют одинаковую длину $L=2\text{м}$, поперечное сечение квадратное со стороной $d=10^{-2}\text{м}$. Материал – Д16Т с характеристиками: модуль упругости $E=0.72 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $\mu=0.3$, плотность $\rho=2800 \text{ кг/м}^3$. Задача решалась в упругой постановке.

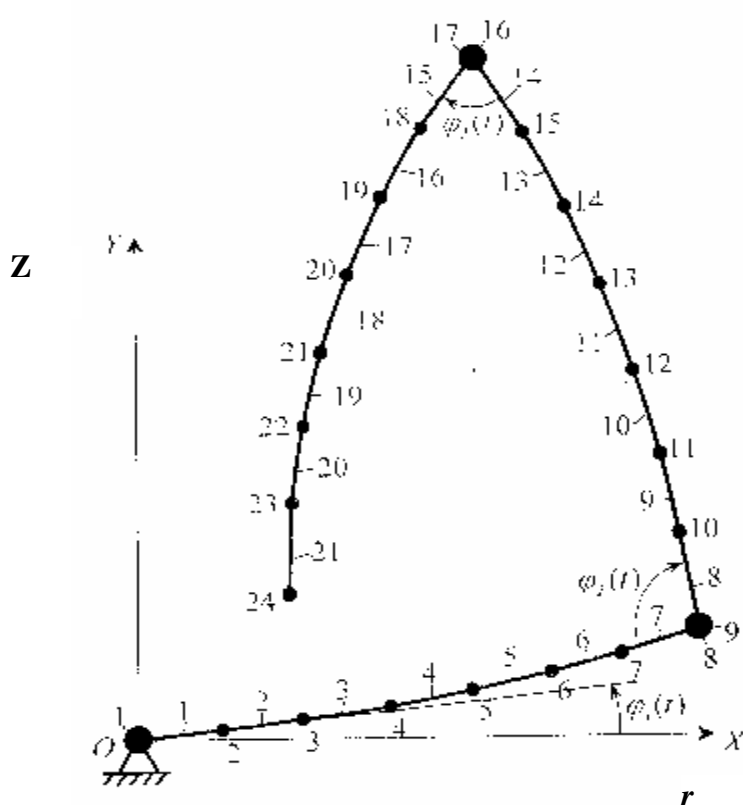


Рис.7.7

$$j_1 = 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq 5$$

$$j_1 = -\frac{(t-5)p}{10} \quad \text{при } 5 < t \leq 15$$

$$j_1 = -\frac{p}{2} \quad \text{при } t > 15$$

$$j_2 = \frac{t}{5}p \quad \text{при } 0 \leq t \leq 5$$

$$j_2 = p \quad \text{при } t > 5$$

$$j_3 = 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq 5$$

$$j_3 = \frac{(t-5)p}{5} \quad \text{при } 5 < t \leq 10$$

$$j_3 = p \quad \text{при } t > 10$$

(время задано в секундах)

В исходном состоянии перемещения и напряжения в стержневых элементах равны нулю. Система упакована таким образом, что все стержни сложены и располагаются на

оси r общего базиса, углы $j_1(0) = j_2(0) = j_3(0) = 0$. Граничные условия задаются в виде $i_r^{(1)}(0,t) = i_z^{(1)}(0,t) = 0$, $i_j^{(1)}(0,t) = j_1(t)$ для первого стержня и $P_r^{(3)}(t) = P_z^{(3)}(t) = P_j^{(3)}(t) = 0$ на свободном конце ($s=L$) третьего стержня системы. Раскрытие осуществляется в результате заданного закона изменения углов $j_1(t), j_2(t), j_3(t)$. Положительным считается вращение по часовой стрелке. Анализ влияния регуляризации разностной схемы проводился на задаче о малых поперечных колебаниях консольного стержня под действием внезапно приложенной нагрузки, соответствующей первой форме собственных колебаний. Размеры стержня принимались те же, что и в задаче о подборе шага сетки. Задача решалась в двух вариантах: без регуляризации численной схемы и с регуляризацией при шаге по времени, равном 0,97 от предельного, полученного из условия Куранта. Расчеты показали, что период колебаний, полученных по схеме с регуляризацией мало изменяется со временем и отличается от аналитического решения менее, чем на 0.2%. При решении задачи без регуляризации ошибка в определении периода колебаний уже во втором цикле со-

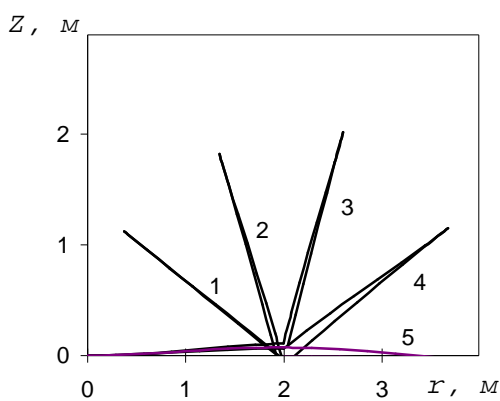


Рис.7.8а

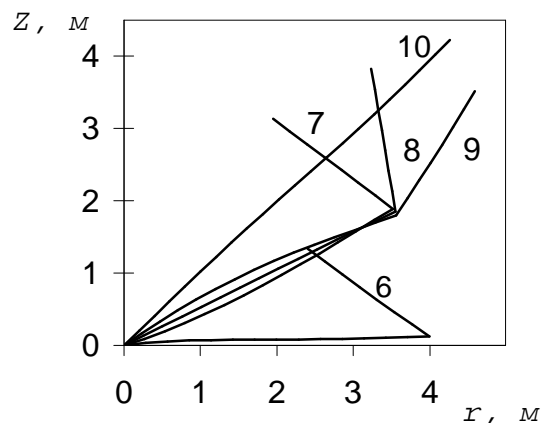


Рис.7.8б

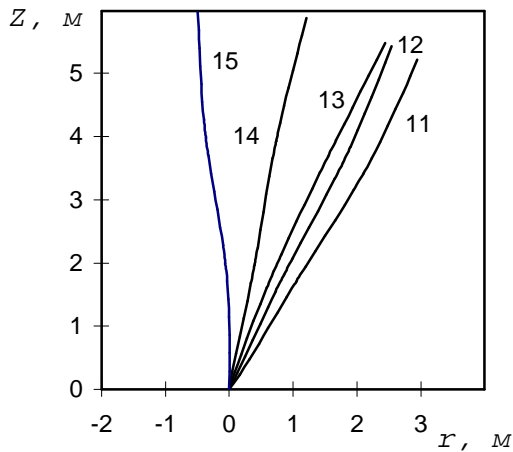


Рис.7.8в

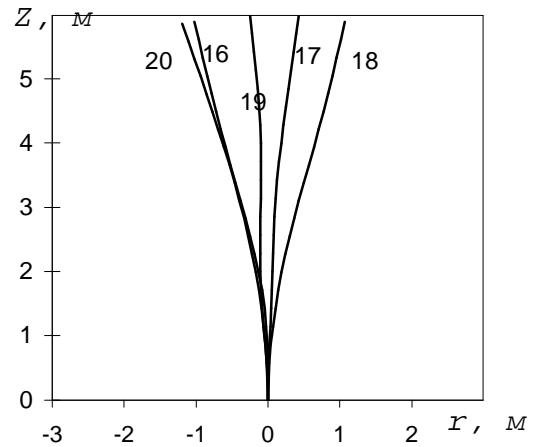


Рис.7.8г

ставляет около 10% и растет со временем. Отметим, что при расчете без регуляризации количество шагов по времени возрастает в 26 раз по сравнению с расчетом с регуляризацией и составляет для описания одного периода колебаний более миллиона шагов, а рост ошибок округления зависит от числа шагов интегрирования. Результаты расчетов представлены на рис. 6.8- 6.9. Конфигурации системы в процессе раскрытия показаны на рис. 6.8а – 6.8г. Цифры на графиках обозначают время в секундах. На рис. 6.9 приведено сравнение решений по схемам без регуляризации (кривые 1,2) и с регуляризацией (кривые 3,4). Изображено изменение во времени координат r (кривые 1,3) и z (кривые 2,4) для 24-го узла.

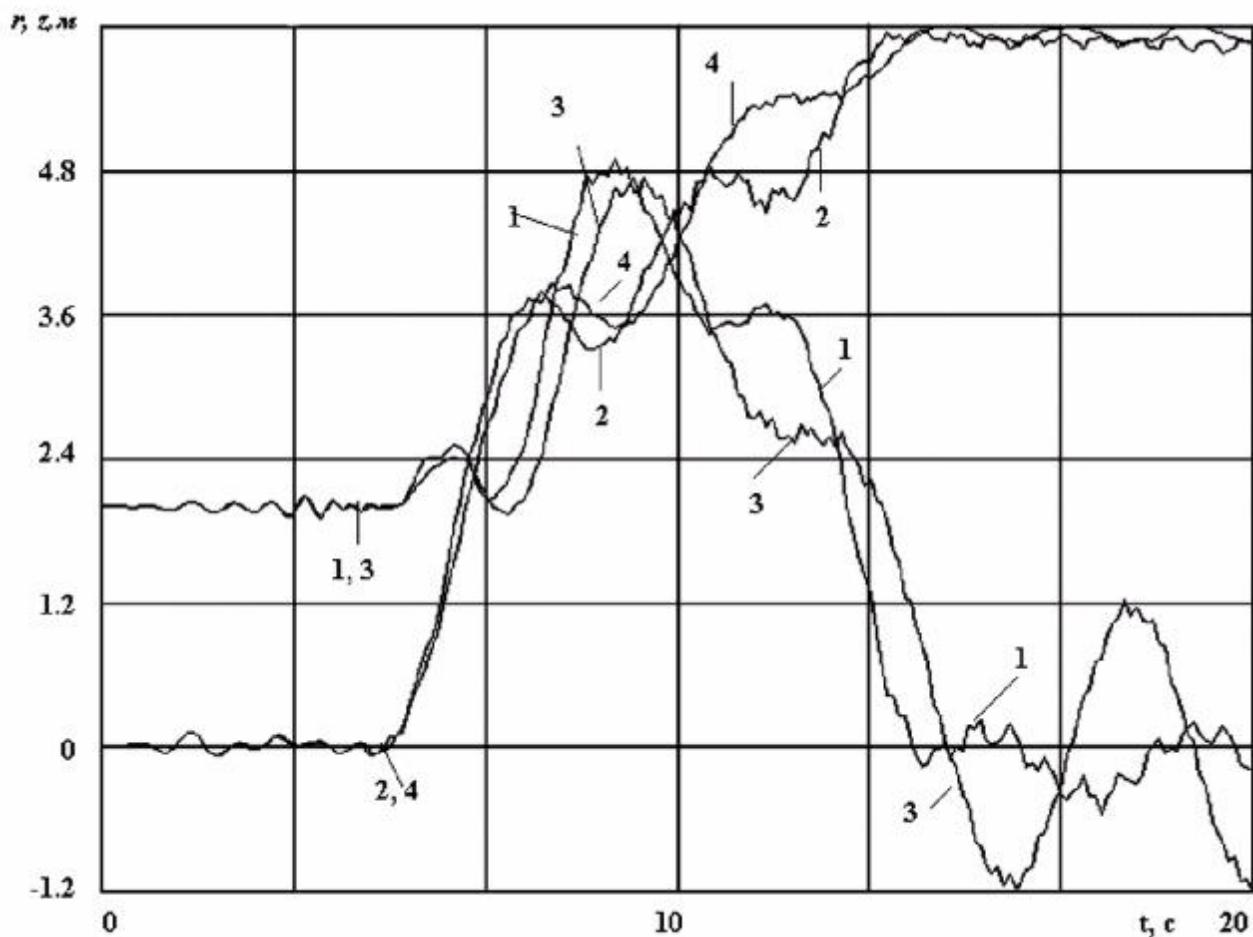


Рис. 7.9

Результаты, полученные по схеме с регуляризацией находятся в хорошем соответствии с расчетными данными работы [15], где применяется метод продолжения решения по наилучшему параметру и неявная схема. Явная схема при описании колебаний конструкций при больших перемещениях приводит к накоплению ошибок и заметному искажению как формы колебаний конструкции, так и амплитудно-частотных характеристик после полного раскрытия. Регуляризация позволяет заметно расширить возможности явной схемы, повысить точность и эффективность расчетов.

3) Деформирование упругопластической полосы при высокоскоростном ударе о жесткую преграду [16].

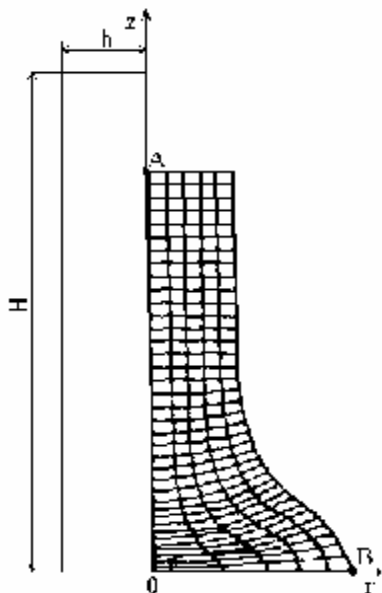


Рис. 7.10

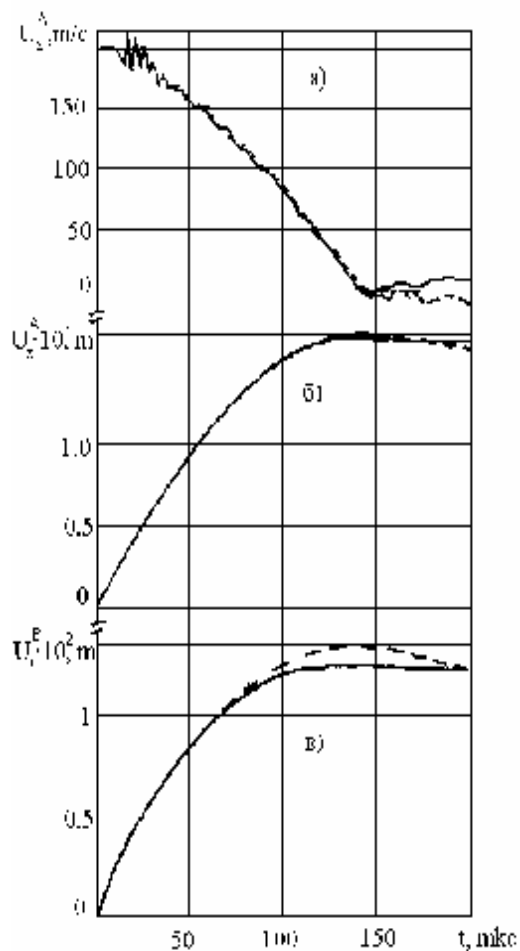


Рис. 7.11

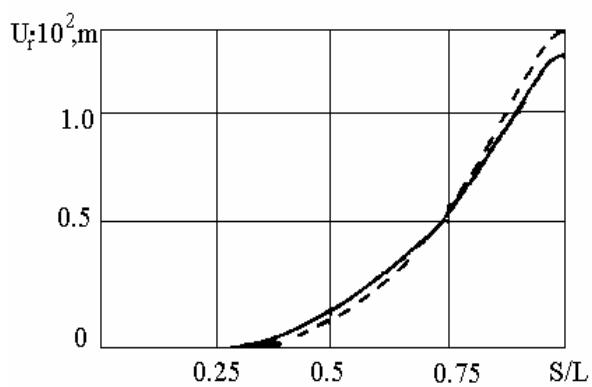


Рис.7.12

Рассматривалась задача удара упругопластической прямоугольной полосы о преграду.

Прямоугольная полоса высотой $H=7,5 \cdot 10^{-2}$ м. и толщиной $2h=1,9 \cdot 10^{-2}$ м.

ударяется со скоростью $V^0=200$ м/с о жесткую стену (рис. 7.10-7.12). Полоса выполнена из алюминиевого сплава с механическими характеристиками: $E=70$ ГПа; $\nu=0,3$; $\rho=2,73$ г/см³; $\sigma_T=0,123$ ГПа; $\sigma_g=0,1$ ГПа. Здесь E - модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность, σ_T – предел текучести, σ_g - модуль упрочнения.

На рис. 7.10 изображена конечно-элементная сетка, покрывающая конструкцию в момент отскока полосы от преграды ($t=140$ мкс). На рис. 7.12 изображено распределение смещений по оси r вдоль боковой поверхности полосы. Сплошными линиями обозначены зависимости, полученные с использованием явной схемы "крест", пунктирными - неявной схемы. На рис. 7.11а,б показано изменение во времени скорости перемещений и перемещений по оси z точки A , а на рис. 7.11в - перемещения по оси r точки B (см. рис. 7.10).

На начальном этапе деформирования полосы происходит сильное локальное смятие конечно-элементной сетки в области ударяемого торца (см. рис. 7.11). При использовании явной по пространству численной схемы это приводит к падению шага интегрирования по времени более чем в 4 раза. Неявная регуляризация численной схемы позволяет проводить расчет нестационарного деформирования конструкции с постоянным шагом. Затраты машинного времени снижаются при этом более чем в 2,5 раза без существенного снижения точности.

Рассмотренный подход к увеличению временного шага разностной схемы «крест» и его конкретные реализации позволяют существенно повысить эффективность существующих методик численного решения задач нестационарной динамики конструкций.

Отметим, что его можно применять при решении как линейных, так и геометрически и физически нелинейных задач, а также независимо от способа построения численной схемы - конечно-разностного, вариационно-разностного, МКЭ. Получаемая за счет регуляризации экономия машинного времени составляет в зависимости от задачи от 2 до 10 и более раз при сохранении точности численного решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в работе результаты исследований устойчивости явных численных схем решения задач механики сплошных сред и конструкций являются важной составной частью конструирования эффективных численных методов, схем и алгоритмов решения задач математической физики. Точное знание оценок устойчивости и причин возникновения неустойчивости позволяет строить наиболее экономные алгоритмы решения разнообразных задач механики сплошных сред. Приведенные примеры демонстрируют повышение эффективности в десятки раз. В целом изложенный в учебном пособии материал может быть полезен при разработке новых численных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баженов, В.Г. Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев. - Н.Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. - 159с.
2. Баженов, В.Г. Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев. - Н.Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2000. – 159с.
3. Баженов, В.Г. Оценки устойчивости явной конечно-разностной схемы “крест” решения нестационарных задач теории упругости и теории оболочек / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. – Горький, 1984. – С. 42 - 49.
4. Чекмарев, Д.Т. “Ажурные” схемы метода конечного элемента / Д.Т. Чекмарев // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико – механических процессов: Межвуз. сб. - М.: ТНИ КМК, 1997. – С36 - 39.
5. Чекмарев, Д.Т. Граничная неустойчивость численных решений трехмерных динамических задач теории упругости / Д.Т. Чекмарев // Вестник ННГУ. Серия Механика, 2004. - вып. 1 (6). – С. 84 - 90.
6. Чекмарев, Д.Т. Построение конечно-разностных схем, эквивалентных численным схемам метода конечного элемента / Д.Т. Чекмарев // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико – механических процессов: Межвуз. сб. - М.: ТНИ КМК, 1997. – С. 14 - 21.
7. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1989. – 608с.
8. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика, т. VII. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Наука, 1987. – 248с.
9. Самарский, А.А. Численные методы. / А.А. Самарский, А.В. Гулин. М: Наука, 1989. – 365с.
10. Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 263 с.
11. . Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н.Новгород: Издательство ННГУ, 2002. 400 с.

12. Баженов В.Г., Кибец А.И., Тулинцев О.В. Применение моментной схемы МКЭ для анализа нелинейных трехмерных задач динамики массивных и оболочечных элементов конструкций // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения. Нижний Новгород: изд-во Нижегород. ун-та, 1991. Вып. 47. С. 46-53.
13. Шешенин С.В., Минхуэй Фу. Полуявный метод решения задач теории упругости для тонкостенных осесимметрических тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1995. № 5. С. 78-85.
14. Баженов В.Г., Ломунов В.К. Методика расчета динамического деформирования геометрически изменяемых плоских стержневых систем // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб., 2002, Вып. 64, с. 55-63
15. Данилин А.Н., Марков А.В. Моделирование динамики разворачивания гибких стержневых систем при различных способах изменения их начальной геометрии // Материалы VIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Ярополец 11 – 15 февраля 2002 г.). Москва. 2002, с. 61
16. Баженов В.Г., Прокопенко М.Б. Численное решение осесимметричных нелинейных нестационарных задач динамики составных упругопластических конструкций. // Прикладные проблемы прочности и пластичности, Численное моделирование физико-механических процессов: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т., Нижний Новгород - 1991. С. 55-63