МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

О. А. Кузенков,
Е. А. Рябова

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРАКТИКУМ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2019

УДК 517.1
ББК В22.1
К89

К89 Кузенков О.А., Рябова Е.А. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРАКТИКУМ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. 63 с.

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доцент **А.В. Грезина**

Пособие составлено на основе практических занятий по дисциплине «Математический анализ», проводимых для студентов Института информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета. Цель пособия – обеспечить методическую поддержку начального этапа изучения математического анализа, повторить необходимый школьный материал, привить навыки строгого абстрактного мышления. Материал пособия охватывает вводную часть математического анализа – теорию действительных чисел и числовых последовательностей. Является дополнением к учебному пособию «Введение в математический анализ. Лекции». Предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Прикладная математика и информатика».

УДК 517.1
ББК В22.1

Содержание

Практика 1. Метод математической индукции

1.1. Аксиомы натуральных чисел.

Число можно определить только как элемент некоторого множества, подчиняющийся заданным правилам – аксиомам. Действительные числа задаются с помощью двенадцати аксиом. Аналогично аксиоматически можно задать натуральные числа (не используя при этом действительные). Впервые дал формальное определение натурального числа выдающийся итальянский математик Джузеппе Пеано в 19 веке. Он же является автором так называемой аксиоматики Пеано натуральных чисел.

Джузеппе Пеано утверждал, что натуральными числами называется множество $\mathbb{N}$, элементы которого удовлетворяют следующим аксиомам:

1. 1 является натуральным числом;
2. число $n+1$, следующее за натуральным n, тоже является натуральным;
3. 1 не следует ни за каким натуральным числом;
4. если натуральное число n непосредственно следует как за числом m, так и за числом k, то m и k тождественны;
5. предложение (утверждение) $A(n)$ истинно для всех натуральных значений переменной n, если выполняются следующие два условия:
   - предложение $A(n)$ истинно для $n = 1$;
   - из предположения, что $A(n)$ истинно для $n = k$ (где k – любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего значения $n = k + 1$.

Пятая аксиома называется аксиомой индукции или принципом математической индукции.

Для математического анализа, как и для любого другого раздела математики, огромное значение имеет формальный язык, на котором формулируются его утверждения. Этот язык обеспечивает строгость формулировок и логических выводов. В математике повсеместно используются символы для упрощения и сокращения текста.

Так, символическая запись истинности некоторого предложения (утверждения) $A(n)$ для всех натуральных n имеет вид:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A(n). \tag{1.1}$$

Всякое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно, называют высказыванием. Например, утверждение $A(n)$ для каждого фиксированного элемента n есть высказывание, так как может быть истинным (выполняться) или ложным (не выполняться). Утверждение (1.1) либо истинно, либо ложно, следовательно, тоже является высказыванием.

$A(1)$ – запись высказывания «предложение $A(n)$ истинно для $n = 1$».

$\overline{A(n)}$ – запись истинности высказывания, противоположного высказыванию $A(n)$, другими словами, это означает, что высказывание $A(n)$ ложно.

Пример 1.1. Дать символическую запись четвертой и пятой аксиом Пеано с помощью кванторов и логических операций.

◇ $(m+1=n \;\wedge\; k+1=n) \;\Rightarrow\; m=k$ – аксиома 4.

$\Big(A(1) \wedge \big(\forall k \in \mathbb{N},\, A(k) \Rightarrow A(k+1)\big)\Big) \Rightarrow \Big(\forall n \in \mathbb{N},\, A(n)\Big)$. – аксиома 5.

Пример 1.2. Записать отрицание утверждения (1.1).

◇ Согласно сформулированному в лекции 1 [4] правилу записи отрицания утверждений, содержащих кванторы, отрицание утверждения (1.1) есть

$$\exists n \in \mathbb{N},\, \overline{A(n)},$$

которое читается так: «Существует (найдется) натуральное число n, для которого справедливо утверждение, противоположное $A(n)$».

1.2. Метод математической индукции

Во многих разделах математики приходится доказывать истинность предложений $A(n)$, определенных на множестве натуральных чисел, для всех значений n, т. е. истинность высказывания (1.1). Часто это удается сделать *методом математической индукции*. Этот метод основан на принципе математической индукции (аксиоме индукции).

Под методом математической индукции понимают следующий способ доказательства. Если требуется доказать истинность предложения $A(n)$ для всех натуральных значений n, то

1. проверяют истинность высказывания $A(1)$;
2. допустив истинность высказывания $A(k)$, доказывают истинность высказывания $A(k+1)$.

Если доказательство верно для каждого натурального значения k, то в соответствии с принципом математической индукции предложение $A(n)$ является истинным для всех значений n.

Пример 1.3. (№ 1[1]) Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливо равенство:

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1)\frac{n}{2}. \tag{1.2}$$

С этой задачей связана одна история о величайшем математике Иоганне Гауссе. Согласно легенде, школьный учитель математики, чтобы занять детей на долгое время, предложил им сосчитать сумму чисел от 1 до 100. Девятилетний Гаусс заметил, что попарные суммы с противоположных концов одинаковы: $1+100 = 101$, $2+99 = 101$ и т. д., и мгновенно получил результат: $101 \cdot 50 = 5050$.

Итак, докажем справедливость формулы для любого натурального n.

1. При $n = 1$ равенство (1.2) выполняется, так как $1 = (1 + 1)\frac{1}{2} = \frac{2}{2}$.

2. Пусть равенство (1.2) справедливо при некотором $n = k$, $k \in \mathbb{N}$. Проверим справедливость (1.2) при $n = k + 1$:

$$\underbrace{1 + 2 + \cdots + k}_{(k+1)k/2} + (k+1) = (k+1)\frac{k}{2} + (k+1) = (k+1)\frac{k+2}{2} = ((k+1)+1)\frac{k+1}{2}.$$

Отсюда видно, что из справедливости равенства (1.2) при некотором $n = k$ вытекает справедливость равенства при $n = k + 1$. Таким образом, на основании принципа математической индукции можно заключить, что равенство (1.2) справедливо при любом натуральном n.

Замечание 1.1. Заметим, что формула (1.2) – частный случай формулы, по которой находится сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ \ldots,\ a_1 + (n - 1)d,\ \ldots\ ,$$

каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего добавлением к нему постоянного числа d (т. е. $a_k = a_{k-1} + d$, где $k = 2, 3, \ldots, n, \ldots$), называемого шагом или разностью арифметической прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Замечание 1.2. Для сокращения записи суммы в математике используется символ $\sum$. Если a_1, a_2, …, a_n – некоторые заданные числа, то их сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ обозначается $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, т. е. $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$,

[1]Номера задач здесь и далее даны согласно [1].

где индекс i называется индексом суммирования. Сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования. Так, сумма в формуле (1.2) сокращенно записывается $\sum\limits_{i=1}^{n} i$ или $\sum\limits_{k=1}^{n} k$.

Пример 1.4. (№ 4) Выведем с помощью метода математической индукции формулу, которая позволяет решить старинную задачу о шахматной доске.

Легенда говорит, что изобретатель шахмат попросил в качестве награды одно зерно риса за первую клетку шахматной доски, два зерна — за вторую, четыре за третью и так далее — за каждую следующую вдвое больше, чем за предыдущую. Спрашивается, сколько всего зерен риса должен был получить изобретатель шахмат?

Очевидно, общее число зерен риса будет составлять $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = \sum\limits_{i=1}^{64} 2^{i-1}$. Чтобы эффективно сосчитать эту сумму, докажем справедливость равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1, \tag{1.3}$$

выполняющегося для любого натурального числа n. Применим для этого метод математической индукции.

1. При $n = 1$ равенство (1.3) истинно, так как $1 = 2^0 = 2^1 - 1$.

2. Пусть равенство (1.3) справедливо при некотором $n = k$, $k \in \mathbb{N}$. Проверим справедливость (1.3) при $n = k + 1$:

$$\underbrace{1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}}_{2^k - 1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Отсюда видно, что из справедливости равенства (1.3) при некотором $n = k$ вытекает справедливость равенства при $n = k + 1$. Таким образом, на основании принципа математической индукции можно заключить, что равенство (1.3) справедливо при любом натуральном n.

Следовательно, изобретатель шахмат должен был получить $2^{64} - 1$ зёрен, что равно числу 18 446 744 073 709 551 615. Общая масса такого количества риса примерно составляет 461 168 602 000 тонн.

Пример 1.5. Решим методом математической индукции еще одну задачу, связанную со старинной легендой. Существует легенда, что в Индии, в городе Бенаресе, есть храм, в котором индусский бог Брама при сотворении мира установил три алмазные палочки и надел на одну из них 64 золотых диска: самый большой внизу, а каждый следующий меньше предыдущего.

Жрецы храма обязаны без устали, днем и ночью, перекладывать эти диски с одной палочки на другую, пользуясь третьей, как вспомогательной, и соблюдая правила:

1. переносить за один раз только один диск,

2. не класть больший диск на меньший.

Легенда говорит, что когда будут перенесены все 64 диска, наступит конец света.

Спрашивается, сколько нужно перекладываний, чтобы перенести все диски с первой палочки на вторую по указанным правилам?

Обобщим поставленную задачу и ответим на заданный вопрос при любом количестве дисков. Покажем, что если задано n дисков, то для переноса потребуется $2^n - 1$ перекладывание.

1. Очевидно, что если диск один, то его можно перенести за одно перекладывание. При этом $1 = 2^1 - 1$, то есть формула верна при $n = 1$.

2. Пусть эта формула верна при некотором $n = k$: чтобы переложить k дисков, нужно $2^k - 1$ перекладывание. Сколько тогда перекладываний понадобится для переноса $k + 1$ дисков?

   Для того, чтобы перенести $(k + 1) -$ й диск, нужно сначала перенести k верхних дисков с первой палочки на вспомогательную третью палочку, а для этого по предположению индукции понадобится $2^k - 1$ перекладывание. Затем нужно перенести $(k + 1) -$ й диск на вторую палочку одним перекладыванием, а потом на него перенести меньшие k дисков со вспомогательной третьей палочки за $2^k - 1$ перекладывание. В целом понадобится $2^k - 1 + 1 + 2^k - 1$ перекладываний. Так как

   $$2^k - 1 + 1 + 2^k - 1 = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1,$$

   то формула оказывается справедливой и для $n = k + 1$.

Итак, на основании принципа математической индукции можно заключить, что для переноса n дисков нужно $2^n - 1$ перекладывание. Тогда для переноса 64 дисков нужно $2^{64} - 1$ перекладывание.

1.3. Бином Ньютона

Бином Ньютона – формула для разложения на отдельные слагаемые натуральной степени n суммы двух переменных, имеющая вид

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n, \qquad (1.4)$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ n)$ – биномиальные коэффициенты, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ – факториал[2] числа n.
В таком виде формула (1.4) была известна ещё индийским математикам[3].

Заметим, что $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1$, при $k \geq 1$ биномиальные коэффициенты преобразуются следующим образом:

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n,$$

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-2)!(n-1)n}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2!},$$

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!},$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Запись $k = \overline{1,n}$ означает, что k принимает всевозможные целые значения от 1 до n.

Биномиальные коэффициенты обладают следующими свойствами:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k. \tag{1.5}$$

Полагая в формуле (1.4) значения $a = 1$, $b = x$, получаем $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$. Подставляя в это равенство $x = 1$, находим сумму[4] всех биномиальных коэффициентов степени n:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Пример 1.6. (№5) Доказать справедливость формулы бинома Ньютона для любой натуральной степени n.

$\diamond$ Докажем это равенство методом математической индукциии.

1. При $n = 1$ имеем $(a+b)^1 = a + b$ – верное равенство.

[2]Факториал числа n – произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно. По определению полагают $0! = 1$. Факториал определён только для целых неотрицательных чисел.

[3]Индийские математики, видимо, первыми открыли биномиальные коэффициенты и их связь с биномом Ньютона. Исаак Ньютон вывел формулу бинома для более общего случая, когда показатель степени — произвольное рациональное число (возможно, отрицательное). В этом случае бином представляет собой бесконечную сумму. К изучению этого случая мы обратимся позднее.

[4]Это свойство биномиальных коэффициентов было известно индийским математикам еще во II веке до н. э..

2. Предположим, что утверждение верно для некоторого $n = m$:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k,$$

докажем утверждение для $n = m+1$:

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k. \tag{1.6}$$

Итак, $(a+b)^{m+1} = (a+b)(a+b)^m = (a+b)\sum\limits_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k =$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^{k+1}.$$

Извлечём из первой суммы слагаемое при $k = 0$:

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k+1} b^k = a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^{m-k+1} b^k.$$

Извлечём из второй суммы слагаемое при $k = m$:

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^{k+1} = b^{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k a^{m-k} b^{k+1}.$$

Переобозначим индекс суммирования в последней сумме — введем индекс $i = k+1$, пробегающий значения от 1 до m, так как индекс k меняется от 0 до $m-1$, тогда $k = i-1$:

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_m^k a^{m-k} b^{k+1} = \sum_{i=1}^{m} C_m^{i-1} a^{m-i+1} b^i = \sum_{k=1}^{m} C_m^{k-1} a^{m-k+1} b^k.$$

Теперь сложим преобразованные суммы:

$$a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^{m-k+1} b^k + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^{k-1} a^{m-k+1} b^k =$$

$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\left(C_m^k + C_m^{k-1}\right)}_{C_{m+1}^k} a^{m-k+1} b^k + b^{m+1}.$$

Учитывая второе из свойств (1.5) и то, что $C_{m+1}^0 = 1$ и $C_{m+1}^{m+1} = 1$, получим требуемое равенство (1.6).

Таким образом, на основании принципа математической индукции можно заключить, что равенство (1.4) справедливо при любом натуральном n.

Иногда метод математической индукции применяется в несколько видоизмененной форме. Если требуется доказать истинность предложения $A(n)$ для всех целых значений $n \geq m$ ($m-$ некоторое целое число), то

1. проверяют истинность предложения $A(m)$;
2. допустив истинность предложения $A(k)$ ($k-$ целое, $k > m$), доказывают истинность высказывания $A(k+1)$.

Если доказательство верно для любого целого значения $k > m$, то в соответствии с принципом математической индукции предложение $A(n)$ является истинным для всех значений $n \geq m$.

Пример 1.7. (№ 7) Доказать, что если $x > -1$, то $\forall n > 1$ справедливо неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$, причем знак равенства имеет место лишь при $x = 0$. Это неравенство называют неравенством Бернулли.

$\diamond$ Заметим, что если $x = 0$, то $\forall n > 1$ имеем равенство $1 = 1$. Покажем, что при $n > 1$ и $x > -1$ ($x \neq 0$) получим строгое неравенство $(1+x)^n > 1+nx$.

1. При $n = 2$ утверждение выполняется, так как
$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x.$$
2. Пусть неравенство справедливо при некотором $n = k$, $k > 2$. Докажем справедливость предложения при $n = k+1$: $(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x$. Действительно,
$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) > (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 > 1+(k+1)x.$$

1.4. Задачи для самостоятельной работы

- Дать символическую запись первых трех аксиом Пеано с помощью кванторов и логических операций.
- №№ 2, 3, 6, 10, 10.1 (а, в).
- Доказать свойства (1.5) биномиальных коэффициентов.

Практика 2. Модуль; ограниченные и неограниченные множества

2.1. Модуль действительного числа

Абсолютной величиной (модулем) действительного числа a называется неотрицательное число $|a|$, равное числу a, если $a > 0$, и числу $-a$, если $a < 0$:

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Из определения модуля следуют следующие свойства (для всех $a, b \in \mathbb{R}$):

1. $|a| \geq 0$;
2. $|a| = |-a|$;
3. $-|a| \leq a \leq |a|$;
4. $|ab| = |a||b| \quad$ (если $b \neq 0$, то $|a/b| = |a|/|b|$).
5. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$;
6. $|a+b| \leq |a| + |b|$;
7. $|a-b| \geq ||a| - |b||$.

Пример 2.1. (№ 21(a)) Доказать неравенство $|x-y| \geq ||x|-|y||$.

$\diamond$ Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $|x| = |(x-y)+y|$, тогда из неравенства треугольника следует, что $|x| \leq |x-y|+|y|$, т. е. $|x-y| \geq |x|-|y|$, при этом, очевидно,

$$|x-y| = |y-x| \geq |y| - |x| = -(|x| - |y|),$$

т. е. $|x| - |y| \geq -|x-y|$. В результате получили:

$$-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|,$$

что, согласно свойству 5, равносильно выполнению исходного неравенства.

2.2. Ограниченные и неограниченные числовые множества.

Пусть A некоторое непустое множество действительных чисел: $A \subset \mathbb{R}$. Множество A называется ограниченным сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \;\; a \leq M$. Число M при этом называется верхней гранью множества A.

Множество A называется ограниченным снизу, если $\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \;\; a \geq m$. Число m при этом называется нижней гранью множества A.

Множество A называется ограниченным, если оно ограничено сверху и снизу, т. е. $\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \;\; m \leq a \leq M$.

Если ввести обозначение $C = max\{|m|, |M|\}$, то последнее определение можно сформулировать иначе.

Множество A называется ограниченным, если
$\exists C > 0 : \forall a \in A \;\; |a| \leq C$.

Множество A называется неограниченным, если
$\forall C > 0 \;\; \exists a \in A : \;\; |a| > C$.

Пример 2.2. Доказать, что множество $A = \{a : a = \dfrac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}}, n \in \mathbb{N}\}$ ограничено.

$\diamond$ Поскольку $|(-1)^n n + 10| \leq |(-1)^n n| + 10 = n + 10, \quad \sqrt{n^2+1} > n$, имеем $|a| = \dfrac{|(-1)^n n + 10|}{\sqrt{n^2+1}} \leq \dfrac{n+10}{n} = 1 + \dfrac{10}{n} \leq 11 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$\exists C = 11 : \forall a \in A \;\; |a| \leq C,$$

что и означает ограниченность множества A.

Пример 2.3. Доказать, что множество $A = \{a : a = \dfrac{n}{b^n}, n \in \mathbb{N}, b > 1\}$ ограничено.

$\diamond$ Очевидно, для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\dfrac{n}{b^n} > 0$. Поскольку $b - 1 > 0$, то по доказанному в практике 2 неравенству Бернулли (№ 7) имеем $b^n = (1 + b - 1)^n \geq 1 + n(b-1) > n(b-1)$, для всех $n \in \mathbb{N}$, откуда $\dfrac{n}{b^n} < \dfrac{1}{b-1}$.

Так как $0 < a < \dfrac{1}{b-1} \Rightarrow 0 \leq a \leq \dfrac{1}{b-1}$, то

$$\exists\, m = 0,\; M = \frac{1}{b-1} : \forall a \in A \;\; m \leq a \leq M,$$

что и означает ограниченность множества A.

Пример 2.4. Доказать, что множество $A = \{a : a = n + (-1)^n n, n \in \mathbb{N}\}$ неограниченное.

$\diamond$ Если $n = 2k$, то $(-1)^{2k} = 1$ и $a = 4k$. Пусть C – произвольное положительное число. Возьмем четное число $n = 2k$, большее C (например, $2k = 2\left([C]+1\right)$, где $[C]$ – целая часть числа C), тогда

$$a = 4k = 4\left([C]+1\right) > C.$$

Таким образом, $\forall C > 0\ \exists a = 4\left([C]+1\right) \in A:\ \ |a| > C$, что означает неограниченность множества A.

Пример 2.5. Доказать, что множество $A = \{a : a = \dfrac{n-n^4}{(n+2)^3},\ n \in \mathbb{N}\}$ неограниченное.

$\diamond$ Абсолютную величину элементов множества A преобразуем следующим образом: $|a| = \dfrac{|n-n^4|}{(n+2)^3} = \dfrac{n^4\left|\dfrac{1}{n^3}-1\right|}{n^3\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^3} = n\dfrac{\left|1-\dfrac{1}{n^3}\right|}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^3}$. Если $n \geq 2$, то $\dfrac{1}{n^3} \leq \dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{2}$ и $1 - \dfrac{1}{n^3} > \dfrac{1}{2}$, в то время как знаменатель удовлетворяет ограничениям $1 < \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^3 \leq 8$, поэтому $|a| = n\dfrac{1-\dfrac{1}{n^3}}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^3} > n\dfrac{1/2}{8} = \dfrac{n}{16}$.

Для произвольного положительного числа C возьмем $n > 16C$ (например, $n = [16C]+1$), тогда $|a| > \dfrac{n}{16} > C$ и, значит, множество A неограниченное.

2.3. Точные верхние и нижние грани.

Наименьшая из всех верхних граней ограниченного сверху множества A – т о ч н а я в е р х н я я г р а н ь этого множества, обозначается $\sup A$.

Число β – точная верхняя грань множества A, т. е. $\beta = \sup A$, если

1. $\forall\, a \in A\ \ a \leq \beta$;
2. $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, a \in A:\ \ a > \beta - \varepsilon$.

Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества A – т о ч н а я н и ж н я я г р а н ь этого множества, обозначается $\inf A$.

Число α – точная нижняя грань множества A, т. е. $\alpha = \inf A$, если

1. $\forall\, a \in A\ \ a \geq \alpha$;
2. $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, a \in A:\ \ a < \alpha + \varepsilon$.

Пример 2.6. Для множества $A = \{a : a = 1 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$ найти $\inf A$, $\sup A$.

$\diamond$ Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедлива следующая цепочка рассуждений:

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \;\Rightarrow\; -1 \leq -\frac{1}{n} < 0 \;\Rightarrow\; 0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

из которой следует, что 1 – верхняя грань множества A, 0 – нижняя грань множества A.

Так как числу $n = 1$ соответствует элемент $a = 0$, то 0 является точной нижней гранью множества A, поскольку в любой сколь угодно малой окрестности 0 обязательно найдется элемент множества A: $a = 0$.

Докажем, что 1 – наименьшая верхняя грань множества A:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, a \in A : a > 1 - \varepsilon.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выполняется следующее:

$$a > 1 - \varepsilon \;\Leftrightarrow\; 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{n} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Из принципа Архимеда вытекает, что $\exists\, n \in \mathbb{N}$, больший произвольного числа $1/\varepsilon$, например, $n = [1/\varepsilon] + 1$. Этому n согласно равносильности приведенных неравенств соответствует элемент множества A, удовлетворяющий соотношению $a > 1 - \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Пример 2.7. Для множества $A = \left\{a : a = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2},\; n \in \mathbb{N}\right\}$ найти $\inf A$, $\sup A$.

$\diamond$ Поскольку $-1 \leq \cos\frac{\pi n}{2} \leq 1$, то $\forall\, a \in A$ справедливо

$$1 - \frac{n}{n+1} \leq a \leq 1 + \frac{n}{n+1} \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{n+1} \leq a \leq 2 - \frac{1}{n+1} < 2,$$

значит, 0 – нижняя грань множества A, 2 – верхняя грань множества A. Докажем, что эти числа являются соответственно наибольшей нижней гранью и наименьшей верхней гранью множества A:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, a \in A : a < 0 + \varepsilon,$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, a \in A : a > 2 - \varepsilon.$$

Если $n = 4k - 2$, то $\cos\dfrac{\pi n}{2} = \cos\left(\pi(2k-1)\right) = -1$ и $a = \dfrac{1}{4k-1}$. Неравенство $\dfrac{1}{4k-1} < \varepsilon$ справедливо при $4k > 1/\varepsilon + 1$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем число $4k$ большее, чем $1/\varepsilon + 1$, например, $4k = 4\,[1/\varepsilon] + 4$. Следовательно, $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, a = \frac{1}{4[1/\varepsilon]+3}$, удовлетворяющее неравенству $a < 0 + \varepsilon$, т. е. $0 = \inf A$.

Если $n = 4k$, то $\cos\dfrac{\pi n}{2} = \cos(\pi 2k) = 1$ и $a = 2 - \dfrac{1}{4k+1}$. Неравенство $2 - \dfrac{1}{4k+1} > 2 - \varepsilon$ справедливо при $4k > 1/\varepsilon - 1$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем число $4k$ большее, чем $1/\varepsilon - 1$, например, $4k = 4\,[1/\varepsilon] + 4$. Следовательно, $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, a = 2 - \dfrac{1}{4\,[1/\varepsilon] + 5}$, удовлетворяющее неравенству $a > 2 - \varepsilon$, т. е. $2 = \sup A$.

2.4. Задачи для самостоятельной работы

- №№ 21(б), 23 - 25.
- Доказать свойство модуля $|a| \geq b \ \Leftrightarrow\ (a \geq b\ \vee\ a \leq -b)$.
- Доказать, что множество $A = \{a : a = \dfrac{5n^6 + 6}{(n^4+1)(n^2-2)},\ n \in \mathbb{N}\}$ ограниченное.
- Сформулировать с помощью правила записи отрицания утверждений, содержащих кванторы, определения неограниченного сверху (снизу) множества.
- Доказать, что множество $A = \{a : a = \dfrac{100 - n^3}{n^2 - 10},\ n \in \mathbb{N}\}$ неограниченное.
- Для множества $A = \{a : a = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}\}$ найти $\inf A$, $\sup A$.

Практика 3. Числовые функции

3.1. Понятие числовой функции

Пусть X и Y некоторые непустые числовые множества.

Ф у н к ц и я (отображение) – это закон или правило по которому каждому элементу x множества X ставится в соответствие единственный элемент y множества Y.

Обозначают функцию как $y = y(x)$ или $y = f(x)$. Буква f в последнем обозначении символизирует указанное правило соответствия и называется характеристикой функции; x называют а р г у м е н т о м рассматриваемой функции или н е з а в и с и м о й п е р е м е н н о й, а соответствующее ему y – частным значением функции, множество X называют о б л а с т ь ю о п р е д е л е н и я (или о б л а с т ь ю с у щ е с т в о в а н и я) функции, множество Y – множеством значений функции. Область определения функции обозначают также $D(f)$, а множество значений функции – $E(f)$.

Пусть $A \subset X$, тогда о б р а з о м этого множества при отображении f называют множество $B = f(A) = \{y : y \in E(f),\, y = f(x)\,\forall\, x \in A\}$. Множество A называют п р о о б р а з о м множества B.

Геометрическое место точек с координатами $(x, f(x))$ на плоскости Oxy называют г р а ф и к о м функции.

Пример 3.1. Найти область определения функции, заданной формулой

$$y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2-\sqrt{x}}}.$$

$\diamond$ Значения $\sqrt{x}$ определены лишь при $x \geq 0$. При $x = 0$ и $x = 1$ знаменатель

$$x^2 - \sqrt{x} = \sqrt{x}\big(\big(\sqrt{x}\big)^3 - 1\big)$$

равен нулю (других нулей нет), поэтому следует считать, что $x \neq 0$, $x \neq 1$. Значения $\sqrt[3]{a}$ определены для любого $a \in \mathbb{R}$, и при любом $x > 0$, $x \neq 1$, $a = \dfrac{x-1}{x^2-\sqrt{x}}$ – действительное число. Поэтому областью определения рассматриваемой функции является множество $X = \{x : x > 0,\, x \neq 1\}$.

Пример 3.2. (№ 152) Найти область определения функции, заданной формулой
$y = \sqrt{3x - x^3}$.

◇ Подкоренное выражение должно быть неотрицательным: $3x - x^3 \geq 0$. Преобразуем левую часть неравенства: выносим общий множитель x и с помощью формулы «разность квадратов»[5] раскладываем оставшееся выражение на множители:

$$x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) \geq 0.$$

Решаем неравенство методом интервалов. Откладываем на числовой оси нули функции, стоящей в левой части неравенства (нули подкоренного выражения): $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$, и определяем ее знак в промежутках $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, +\infty)$ (см. рис. 1). В промежутках, от-

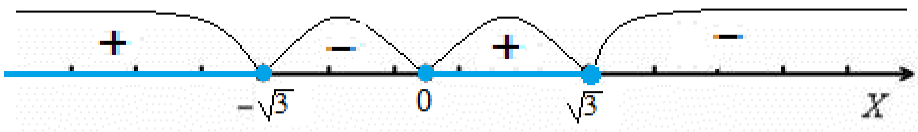

Рис. 1. Метод интервалов

меченных голубым цветом подкоренное выражение $3x - x^3$ неотрицательно, значит, область определения интересующей нас функции
$X = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}]$.

Пример 3.3. (№ 165.1) Найти область определения функции, заданной формулой
$y = \log_2 \log_3 \log_4 x$.

◇ Данная функция определена, если $\log_3 \log_4 x > 0$. Множество решений этого неравенство совпадает с множеством решений неравенства $\log_4 x > 1$. Решая это логарифмическое неравенство получим $x > 4$. Значит, областью определения рассматриваемой функции является множество $X = (4, +\infty)$.

Пример 3.4. (№ 165.1) Найти область определения и множество значений функции, заданной формулой $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.

◇ Функция определена, если

$$\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2|x| \leq 1 + x^2,$$

т. е. при всех $x \in \mathbb{R}$, поскольку при всех $x \in \mathbb{R}$

$$(1 - |x|)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + x^2 \geq 2|x|.$$

Область определения функции есть $X = \mathbb{R}$.

Множеством значений данной функции является $Y = [0, \pi]$ – множество значений функции $\arccos u$, когда u пробегает все значения из промежутка $[-1, 1]$.

[5] $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Пример 3.5. (№ 180) Найти образ множества $X = (-\infty, +\infty)$ при отображении, задаваемом формулой $y = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$.

$\diamond$ Образом множества X при отображении $y = \operatorname{arctg} x$ является интервал $(-\pi/2, \pi/2)$, так как $D(\operatorname{arctg} x) = (-\infty, +\infty)$, $E(\operatorname{arctg} x) = (-\pi/2, \pi/2)$. При отображении $y = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$, все значения $\operatorname{arctg} x$ делятся на число π, следовательно, образом множества X при этом будет интервал $(-1/2, 1/2)$.

3.2. Композиция функций

Пусть заданы функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$, и пусть область значений функции f содержится в области определения функции g. Функцию

$$z = g(f(x)),\ x \in D(f),$$

называют с л о ж н о й функцией или к о м п о з и ц и е й (с у п е р п о з и ц и е й) функций f и g и обозначают $g \circ f$.

Пример 3.6. (№ 206) Составить композиции $\varphi(\varphi(x))$, $\psi(\psi(x))$, $\varphi(\psi(x))$, $\psi(\varphi(x))$ функций $\varphi(x) = x^2$ и $\psi(x) = 2^x$.

$\diamond$ Из свойств степенной и показательной функции известно, что

$$D(\varphi) = D(\psi) = \mathbb{R}, E(\varphi) = [0, +\infty), E(\psi) = (0, +\infty).$$

Так как $E(\varphi) \subset D(\varphi)$, $E(\varphi) \subset D(\psi)$, $E(\psi) \subset D(\psi)$, $E(\psi) \subset D(\varphi)$, то

$$\varphi(\varphi(x)) = \left(x^2\right)^2 = x^4, \psi(\varphi(x)) = 2^{x^2}, \psi(\psi(x)) = 2^{2^x}, \varphi(\psi(x)) = (2^x)^2 = 2^{2x}.$$

Пример 3.7. (№ 211) Найти $f(x)$, если $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$.

$\diamond$ Введем обозначение $x+1 = t$. Тогда $x = t-1$. Перейдя в предложенном выражении к новой переменной t, найдем искомую функцию:

$$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2 = t^2 - 5t + 6.$$

Понятно, что совсем не обязательно для обозначения аргумента функции использовать букву x.

3.3. Взаимно-однозначные функции

Функция $f(x)$ называется в з а и м н о - о д н о з н а ч н о й, если $\forall\, x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 \neq x_2$ выполняется соотношение $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Пример 3.8. Доказать, что функция $y = \sin x$ является взаимно-однозначной в промежутке $-\pi/2 \le x \le \pi/2$.

$\diamond$ Возьмем произвольные $x_1, x_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$ такие, что $x_1 \ne x_2$. Докажем, что при этом $\sin x_1 \ne \sin x_2$.

Рассмотрим разность значений функции в этих точках:

$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Она обратится в ноль, если $\sin \dfrac{x_1 - x_2}{2} = 0$ или $\cos \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 0$. Это случится, если $\dfrac{x_1 - x_2}{2} = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Заметим, что при $x_1, x_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$ выражения $\dfrac{x_1 - x_2}{2}$, $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$ принимают значения из отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$. Следовательно, разность $\sin x_1 - \sin x_2$ может обратиться в ноль при $x_1 - x_2 = 0$ или $x_1 + x_2 = \pi$, но первое равенство не может иметь место, так как $x_1 \ne x_2$, второе было бы возможно при $x_1 = \pi/2 \wedge x_2 = \pi/2$, но опять же не имеет места, так как $x_1 \ne x_2$.

Следовательно, $\sin x_1 \ne \sin x_2$ для любых $x_1, x_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$ таких, что $x_1 \ne x_2$, что и требовалось доказать.

3.4. Задачи для самостоятельной работы

- №№ 158, 164, 165.3, 169, 181.
- Доказать, что функция $y = \operatorname{ctg} x$ является взаимно-однозначной при $x \in (0; \pi)$.

Практика 4. Элементарные функции и их свойства

Элементарной функцией называют функцию, которая может быть задана с помощью конечного числа арифметических операций и композиций из основных элементарных функций.

К *основным элементарным* функциям относят постоянную, степенную, показательную, логарифмическую, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Пример 4.1. Доказать, что функция, обратная для функции

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in [0, +\infty),$$

является элементарной.

$\diamond$ На $[0, +\infty)$ функция $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ взаимно-однозначная и поэтому обратима. Областью определения обратной функции будет промежуток $[1, +\infty)$, являющийся множеством значений исходной функции.

Для каждого $y \in [1, +\infty)$ уравнение $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = y$ сводится к квадратному относительно e^x уравнению:

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0.$$

Отсюда находим $e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$, $x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right)$. Условию $x \geq 0$ удовлетворяет только решение $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$.

Поменяв обозначения зависимой и независимой переменных, получим, что обратная функция задается формулой

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \in [1, +\infty).$$

Видно, что эта функция получается с помощью конечного числа арифметических операций и композиций степенных и логарифмической функций, т. е. является элементарной.

4.1. Свойства функций

Четность. Функцию $f(x)$, определенную на симметричном относительно нуля множестве X, называют *четной*, если для любого $x \in X$ верно равенство $f(-x) = f(x)$; нечетной, если для любого $x \in X$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример 4.2. (№ 231 а, д) Определить, являются ли четными функции:

$$\text{а) } f(x) = 3x - x^3; \quad \text{д) } f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

$\diamond$ а) $f(-x) = 3(-x) - (-x)^3 = -\left(3x - x^3\right) = -f(x)$ – нечетная функция.

д) $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1 + (-x)^2}) = \ln(\sqrt{1 + x^2} - x) = \ln \dfrac{1 + x^2 - x^2}{\sqrt{1 + x^2} + x} =$ $= \ln \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x} = \ln\left(\sqrt{1 + x^2} + x\right)^{-1} = -\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ – нечетная функция.

Монотонность. Функцию f называют возрастающей (неубывающей) на множестве $X \subset D(f)$, если

$$\forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Функцию f называют убывающей (невозрастающей) на множестве $X \subset D(f)$, если $\forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Если в этих определениях из неравенства $x_1 < x_2$ следует строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$), то функцию называют строго возрастающей (соответственно строго убывающей) на множестве X.

Возрастающие и убывающие функции объединяют названием монотонные, строго возрастающие и строго убывающие – строго монотонные.

Если $X = D(f)$, то указание на множество X опускают.

Пример 4.3. Доказать, что функция $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ является строго монотонно убывающей в промежутке $(0, 1)$ и строго монотонно возрастающей в промежутке $(1, \infty)$.

$\diamond$ Рассмотрим разность значений функции в точках x_1, x_2:

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1 - x_2 + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2}.$$

Если $x_1, x_2 \in (0, 1)$, $0 < x_1 < x_2 < 1$, то $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 x_2 - 1 < 0$, $x_1 x_2 > 0$, значит $f(x_1) - f(x_2) > 0$ и $f(x_1) > f(x_2)$, следовательно, $f(x)$ строго монотонно убывает в промежутке $0 < x < 1$.

Если $x_1, x_2 \in (1, \infty)$, $1 < x_1 < x_2 < +\infty$, то $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 x_2 - 1 > 0$, $x_1 x_2 > 0$, значит $f(x_1) - f(x_2) < 0$ и $f(x_1) < f(x_2)$, следовательно, $f(x)$ строго монотонно возрастает в промежутке $1 < x < +\infty$.

Периодичность. Число $T \neq 0$ называют периодом функции f, если для любого $x \in D(f)$ выполнено $f(x+T) = f(x)$.

Если T – период функции, то для любого $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, число kT также является периодом этой функции. Наименьший положительный период функции называется основным (или главным) периодом.

Функцию, имеющую главный период, будем называть периодической.

Если T_1 и T_2 – основные периоды функций f и g, то эти функции имеют общий период тогда и только тогда, когда числа T_1 и T_2 соизмеримы, т. е. когда отношение T_1/T_2 – рационально.

Если основные периоды функций f и g соизмеримы, то и сумма (произведение) этих функций – также периодическая функция.

Замечание 4.1. Сумма двух функций с соизмеримыми периодами T_1 и T_2 не всегда является функцией с основным периодом, равным наименьшему общему кратному T_1 и T_2 (просто периодом это число является). Например, у функции $f(x) = \sin(2x) - \sin(3x)$ основной период равен 2π, у функции $f(x) = \sin(3x)$ основной период равен $2\pi/3$, а у их суммы $f(x)+g(x) = \sin(2x)$ основной период, очевидно, равен π.

Замечание 4.2. Если отношение наименьших периодов всюду определенных и непрерывных функций иррационально, то сумма и произведение этих функций – функции непериодические.

Пример 4.4. (№ 233 в, д) Выяснить, имеют ли данные функции период и какие из них являются периодическими (найти основной период), если:

$$\text{в) } f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3\operatorname{tg}\frac{x}{3}; \quad \text{д) } f(x) = \sin x^2.$$

$\diamond$ в) $f(x)$ есть разность периодических функций с основными периодами соответственно 2π и 3π. В этом случае $f(x)$ также будет периодической с периодом, равным наименьшему общему кратному этих чисел, т. е. 6π.

Для того чтобы доказать, что 6π будет основным периодом $f(x)$ (заметим, что $f(0) = 0$) достаточно доказать, что уравнение

$$2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3\operatorname{tg}\frac{x}{3} = 0$$

имеет наименьшее положительное решение равное 6π. Найдем положительные решения этого уравнения. Очевидно, что они совпадают с решением уравнения

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}-3\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}=0. \tag{4.1}$$

Справедливы преобразования левой части этого уравнения:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}-3\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}=2(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3})-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}=$$

$$=2\sin\frac{x}{6}-\cos\frac{x}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{6}=2\sin\frac{x}{6}\left(1-\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{6}\right).$$

Переходим от 4.1 к уравнению: $\sin\frac{x}{6}\left(1-\cos\frac{x}{6}\cos\frac{x}{2}\right)=0$. Положительные решения этого уравнения:

$$x=6\pi n \quad \vee \quad (x=12\pi k \quad \wedge \quad x=4\pi m), \quad k,m,n\in\mathbb{N}.$$

Так как $x=12\pi k \quad \wedge \quad x=4\pi m$ есть множество $x=12\pi k$, то уже очевидно, что наименьшее положительное решение равно 6π, что и требовалось доказать.

д) Достаточно доказать, что функция $f(x)=\sin x^2$ не имеет положительного периода, так как если бы число $T<0$ было периодом, то число $-T$ было бы положительным периодом. Доказательство проведем методом от противного.

Допустим, что число $T>0$ – период функции, т. е. для любого $x\in\mathbb{R}$

$$\sin(x+T)^2=\sin x^2.$$

При $x=0$ отсюда следует, что $\sin T^2=0$, т. е. $T^2=\pi n$, а $T=\sqrt{\pi n}$ при некотором $n\in\mathbb{N}$. Если $0<x<\sqrt{\pi}$, то $\sin x^2\neq 0$, а поскольку по предположению $\sqrt{\pi n}$ – период, то и $\sin(x+\sqrt{\pi n})^2\neq 0$. Если же $x=\sqrt{\pi}$, то поскольку считается, что $\sqrt{\pi n}$ – период, то $\sin(\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n})^2=\sin(\sqrt{\pi})^2=0$. Значит, число $\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n}$ является ближайшим справа к $\sqrt{\pi n}$ числом, при котором $\sin x^2$=0. Так как $\sin\left(\sqrt{\pi(n+1)}\right)^2=0$ и $\sqrt{\pi(n+1)}>\sqrt{\pi n}$, то число $\sqrt{\pi(n+1)}$ может располагаться на числовой оси только правее $\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n}$:

$$\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n}\leq\sqrt{\pi(n+1)} \quad \Leftrightarrow \quad 1\leq\sqrt{n+1}-\sqrt{n},$$

Но последнее неравенство неверно для любого $n\in\mathbb{N}$, поскольку

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<1.$$

Значит, неверно и допущение о существовании периода функции $\sin x^2$, следовательно, функция – непереодическая.

4.2. Графическое изображение функций.

Геометрическое место точек с координатами $(x, f(x))$ на плоскости Oxy называют г р а ф и к о м функции $f(x)$.

В ряде случаев график функции можно получить преобразованием известного графика другой функции $f(x)$. В таблице указаны простейшие из этих случаев.

Функция	Преобразование графика функции $f(x)$
$y = f(x) + c$	сдвиг вдоль оси ординат на c
$y = f(x - c)$	сдвиг вдоль оси абсцисс на c
$y = f(-x)$	симметрия относительно оси ординат
$y = -f(x)$	симметрия относительно оси абсцисс
$y = af(x)$	умножение каждой ординаты на a
$y = f(ax)$	деление каждой абсциссы на a
$y = \lvert f(x)\rvert$	$\lvert f(x)\rvert = f(x)$, где $f(x) \geq 0$; симметрия относительно Ox части, где $f(x) < 0$
$y = f(\lvert x\rvert)$	$f(\lvert x\rvert) = f(x)$, при $x \geq 0$; симметрия относительно Oy при $x < 0$.

Пример 4.5. (№ 250) Построить график дробно-линейной функции:

$$y = \frac{1-x}{1+x}.$$

◇ Для построения графика дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0, \quad c \neq 0)$$

сначала преобразуют его к виду $y = \dfrac{m}{x - x_0} + y_0$, а затем последовательно строят графики функций:

- $y = \dfrac{1}{x}$ — известный график гиперболы;
- $y = \dfrac{m}{x}$ — умножить каждую ординату гиперболы на число m;
- $y = \dfrac{m}{x - x_0} + y_0$ — выполнить параллельный перенос гиперболы, при котором её центр $(0; 0)$ переходит в точку $(x_0; y_0)$

Предложенная дробно-линейная функция преобразуется следующим образом:

$y = \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{-(x-1)}{x+1} = \dfrac{-(x+1-2)}{x+1} = \dfrac{2}{x+1} - 1$. Построение графика продемонстрировано на рис. 2 при $m = 2$, $x_0 = -1$, $y_0 = -1$.

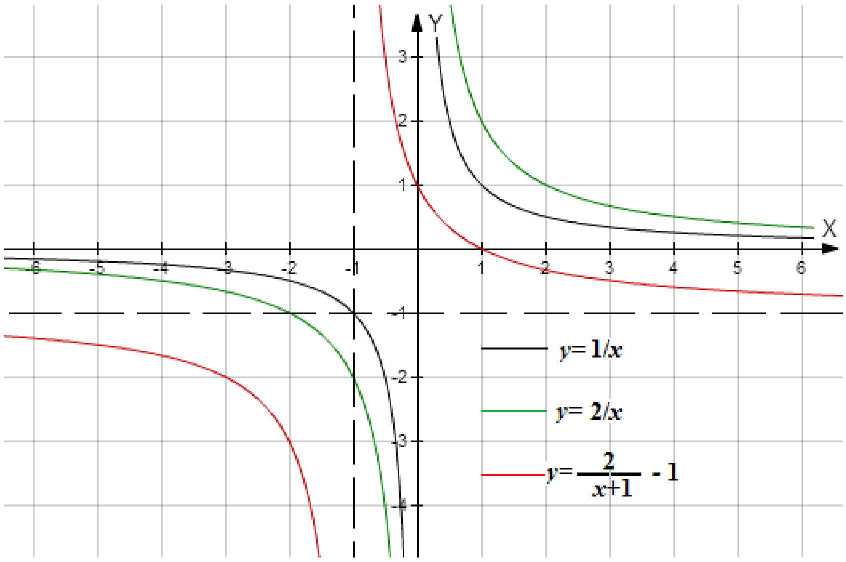

Рис. 2. Построение графика дробно-линейной функции.

Пример 4.6. Построить график функции, заданной формулой $y = \cos^2 x$.

$\diamond$ Функция определена на $\mathbb{R}$, является четной, периодической с периодом π. Поскольку $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, ее график получается из графика функции $y = \cos x$ сжатием вдвое вдоль оси Ox, сдвигом на единицу вверх по оси Oy и сжатием вдвое вдоль оси Oy. В соответствии с этим изображен график на рис. 3

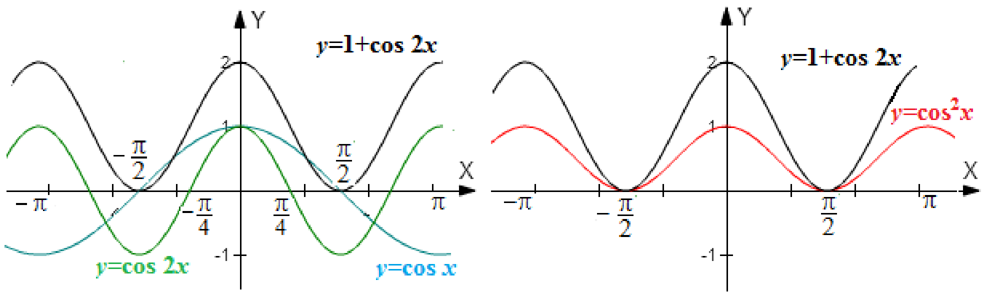

Рис. 3. Преобразования графика функции $y = \cos x$.

4.3. Задачи для самостоятельной работы

- Повторить графики основных элементарных функций: №№ 274—278, 280, 289, 290, 311-314.
- Выполнить №№ 229, 231(б, г), 233(б), 243, 251, 281, 287, 293.

Практика 5. Графики функций.

5.1. Правило сложения, умножения графиков

В этом разделе предполагается, что свойства простейших элементарных функций – степенной, показательной, тригонометрических и т. п., известны студенту.

Пользуясь этими свойствами, можно, не проделывая большой вычислительной работы, сразу рисовать эскизы графиков многих функций. Другие графики иногда удается свести к комбинации (сумме или произведению и т. п.) этих простейших графиков.

Построение графика суммы (произведения) двух функций производится сложением (умножением) ординат точек графиков с одинаковыми абсциссами.

Пример 5.1. (№ 253) Построить график дробной рациональной функции: $y = x + \dfrac{1}{x}$.

$\diamond$ Областью определения функции является множество всех $x \in \mathbb{R}$, за исключением точки $x = 0$. Функция является нечетной, следовательно, можно строить график для положительных x, а для отрицательных x отобразить симметрично относительно начала координат. При построении графика будем руководствоваться тем, что ординаты его точек получаются сложением ординат точек графиков линейной функции $y = x$ и гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$. На рис. 4 это соответственно графики (1) и (2).

В примере 4.3 в предыдущей практике было доказано, что при $x \in (0, 1)$ функция $y = x + \dfrac{1}{x}$ строго монотонно убывает, а при $x \in (1, +\infty)$ – строго монотонно возрастает. Значению $x = 1$ соответствует точка B с координатами $(1, 2)$, так как $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\Big|_{x=1} = 2$. Поскольку при $x \in (0, 1)$ гипербола $\dfrac{1}{x}$ строго убывает от $+\infty$ до 1, то $\dfrac{1}{x} + x$ строго убывает от $+\infty$ до 2. При увеличении x от 1 до $+\infty$ значения $\dfrac{1}{x}$ строго убывают от 1 до 0, сумма $x + \dfrac{1}{x}$ строго возрастает от2 до $+\infty$.

В соответствии с этим, рассчитав и отметив несколько промежуточных точек A, C, D соответствующих значениям $x = 1/2$, $x = 2$ и $x = 3$, изображаем график (3) на рис. 4.

Пример 5.2. (№ 333) Применяя правило сложения графиков, построить график функции $y = x + \sin x$.

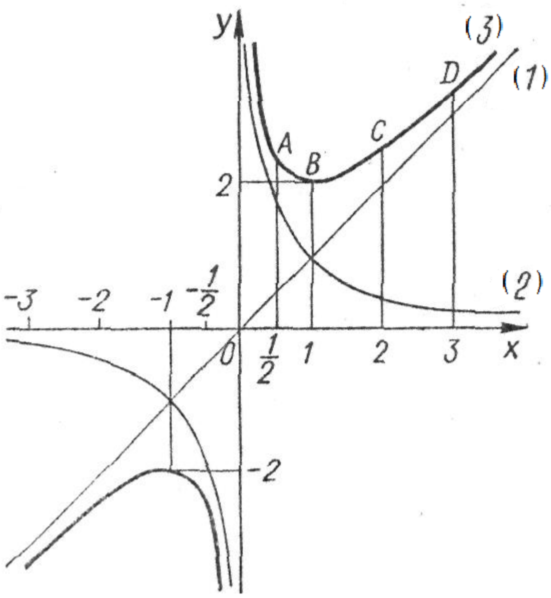

Рис. 4. Правило сложения графиков: $y = x + \dfrac{1}{x}$

◇ Область определения функции – множество всех $x \in \mathbb{R}$. Функция – нечетная, поэтому построим ее график при $x \geq 0$, а затем совершим симметрию относительно начала координат. При построении графика будем руководствоваться тем, что ординаты его точек получаются сложением ординат точек графиков функций $y = x$ и $y = \sin x$ (рис. 5).

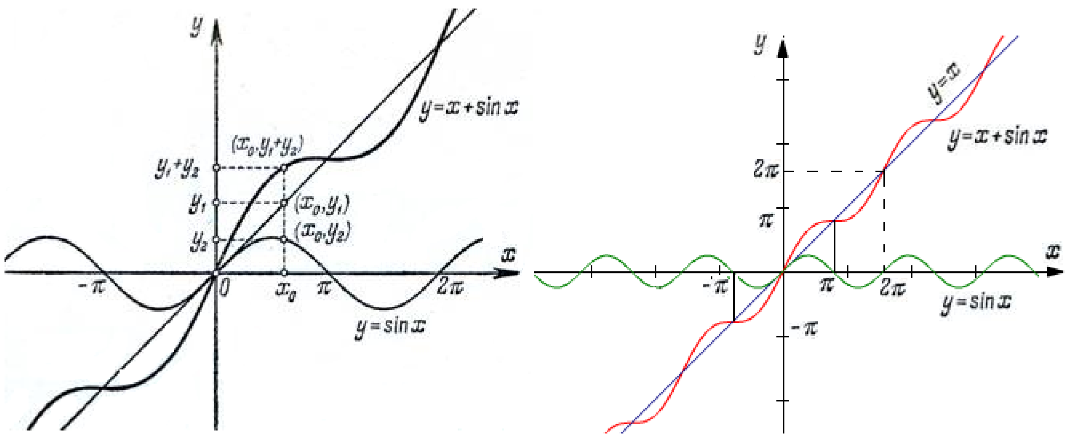

Рис. 5. Правило сложения графиков: $y = x + \sin x$.

Пример 5.3. (№ 342) Применяя правило умножения графиков, построить график функции $y = x \cos x$.

◇ Область определения функции – множество всех $x \in \mathbb{R}$. Функция – нечетная, поэтому построим ее график при $x \geq 0$, а затем совершим симметрию относительно начала координат. При построении графика будем руководствоваться тем, что ординаты его точек получаются перемножением ординат точек графиков функций $y = x$ и $y = \cos x$ (рис. 6).

График проходит через начало координат, пересекает ось Ox при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (где $\cos x = 0$). Поскольку $-1 \leq \cos x \leq 1$ при $x \geq 0$ имеем $-x \leq x\cos x \leq x$, т. е. график лежит между прямыми $y = x$ и $y = -x$. При $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (где $\cos x = 1$), график имеет общие точки с прямой $y = x$, а при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (где $\cos x = -1$), – общие точки с прямой $y = -x$.

Если $0 < x < 1$, то $0 < x\cos x < \cos x$ и $x \cos x < x$, т. е. график лежит ниже графиков $y = \cos x$ и $y = x$. При $x = 1$ графики $y = x\cos x$ и $y = \cos x$ пересекаются, при этом $y = \cos 1 \approx 0,54$. Если $x > 1$, то $|x\cos x| > |\cos x|$, если $\cos x \neq 0$, т. е. точки графика $y = x\cos x$ лежат дальше от оси Ox, чем соответствующие точки графика $y = x\cos x$ (рис. 6*а*).

В соответствии с этим, рассчитав и отметив несколько промежуточных точек, изображаем график (рис. 6*б*).

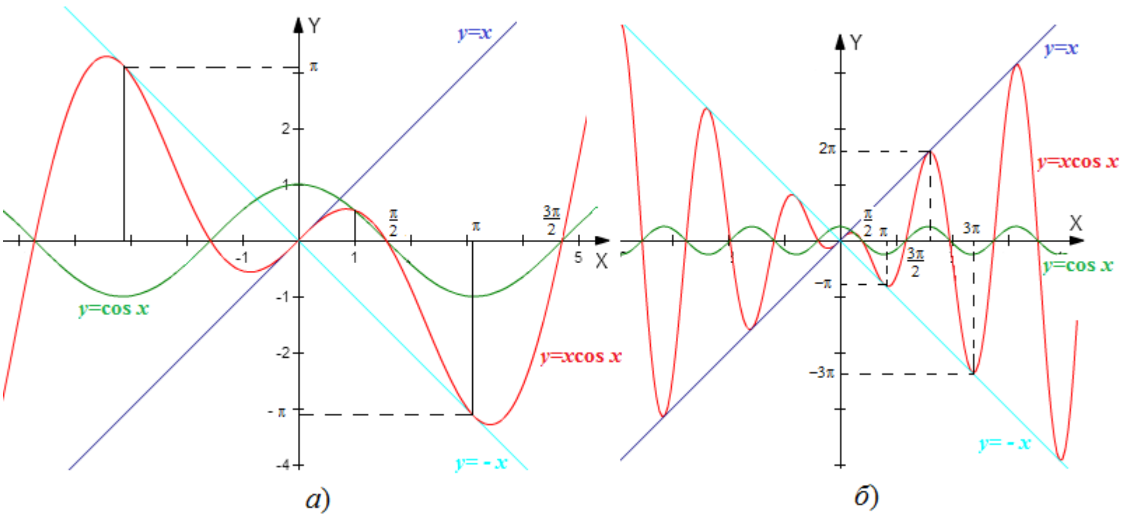

Рис. 6. Правило умножения графиков: $y = x\cos x$.

Пример 5.4. (№ 353) Построить график функции $y = \dfrac{1}{f(x)}$, если $f(x) = \sin^2 x$.

$\diamond$ Областью определения функции является множество всех $x \in \mathbb{R}$, таких, что $f(x) \neq 0$, т. е. $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Функция – четная, периодическая с периодом π. Построим график на интервале $(0, \pi/2]$, затем отобразим его на интервал $[-\pi/2, 0)$ симметрично относительно оси Oy, а далее продолжим периодически с периодом π.

Если $x \in (0, \pi/2]$, то $0 < \sin^2 x \leq \sin x \leq 1$, и поэтому $\dfrac{1}{\sin^2 x} \geq 1$, причем

$$\min \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}\Big|_{x=\pi/2} = 1.$$

При увеличении x от 0 до $\pi/2$ значения $\sin^2 x$ строго возрастают от 0 до 1, поэтому значения $1/\sin^2 x$ строго убывают от $+\infty$ до 1 (рис. 7).

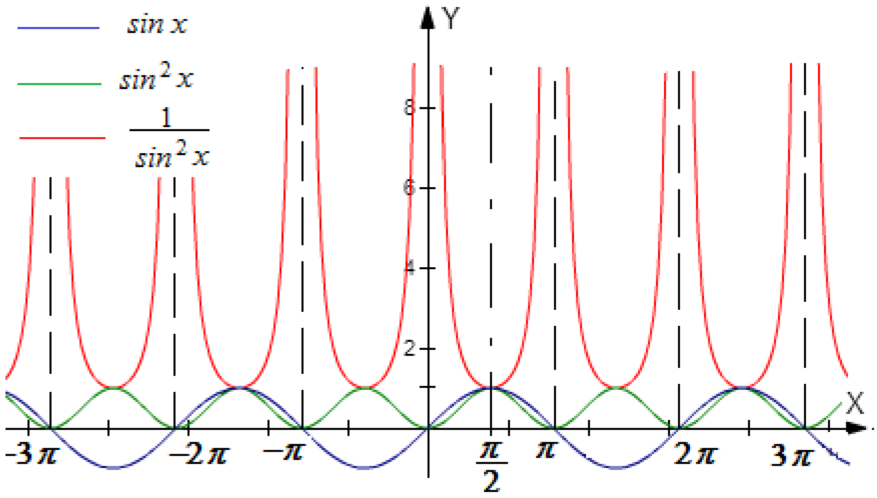

Рис. 7. Построение графика $y = 1/\sin^2 x$.

5.2. Графики композиции функций

Пример 5.5. (282 а) Построить график функции, заданной формулой $y = \ln(x^2 + 1)$.

$\diamond$ Функция определена для всех $x \in \mathbb{R}$. Функция – четная, ее график симметричен относительно оси ординат.

Данная функция является композицией функций $y = x^2 + 1$ (рис. 8) и логарифмической функции $y = \ln x$ с основанием e[6]. На интервале $(0, +\infty)$ значения $x^2 + 1$ строго возрастают от 1 до $+\infty$, поэтому значения $\ln(x^2 + 1)$ строго возрастают от 0 до $+\infty$. График проходит через точку $(1, \ln 2)$ так как $(x^2 + 1)|_{x=1} = 2$. Для отрицательных значений x отображаем построенную ветку симметрично относительно оси ординат.

Пример 5.6. (№318) Построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

$\diamond$ Эта функция определена на $\mathbb{R}$. Поскольку $\sin(-x) = -\sin x$, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, то $\arcsin(\sin(-x)) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin x$, т.е. функция – нечетная. Функция периодическая с периодом 2π, так как $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ и, значит, $\arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin x)$.

Из того, что $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, следует, что

$$\arcsin\left(\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)\right) = \arcsin\left(\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)\right),$$

значит, график данной функции симметричен относительно прямой $x = \pi/2$.

[6] e — математическая константа, основание натурального логарифма, трансцендентное число. $e \approx 2,7$. Подробнее об этом числе поговорим позднее в специально ему посвященном разделе.

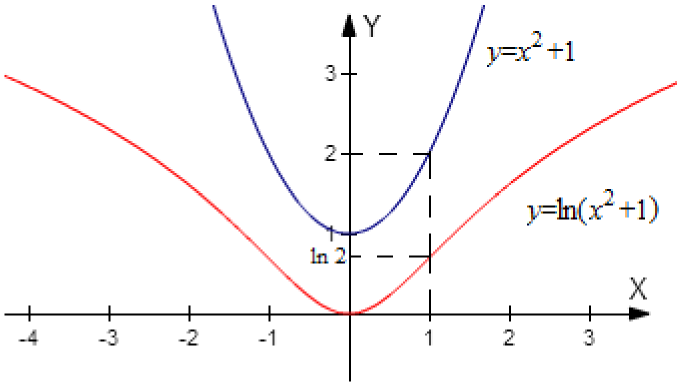

Рис. 8. Построение графика $y = \ln(x^2+1)$.

Функция $\arcsin x$ – обратная для функции $\sin x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, поэтому[7] $\arcsin(\sin x) = x$ для любого $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Таким образом, на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ график данной функции совпадает с прямой $y = x$. Из симметрии графика относительно прямой $x = \pi/2$ следует, что на отрезке $[\pi/2, 3\pi/2]$ он совпадает с прямой $y = \pi - x$, действительно,

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin\left(\sin(\pi - x)\right) = \pi - x \text{ если } -\pi/2 \le \pi - x \le \pi/2,$$

т.е. при $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$. На отрезке $[\pi/2, 3\pi/2]$ функция $y = \arcsin x$ не является обратной для функции $y = \sin x$. Теперь продолжим график функции с отрезка $[-\pi/2, 3\pi/2]$ периодически с периодом 2π. График симметричен относительно начала координат (рис. 9).

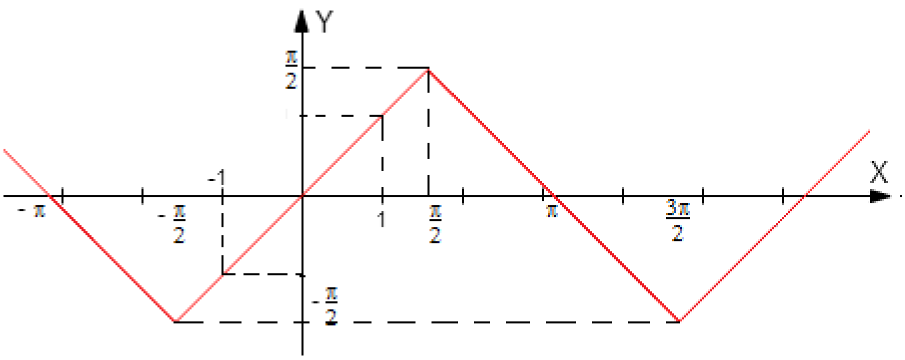

Рис. 9. Построение графика $y = \arcsin(\sin x)$.

Заметим, что равенство $\sin(\arcsin x) = \arcsin(\sin x)$ выполняется только при $x \in [-1, 1]$, поскольку $\sin(\arcsin x) = x$ для любого x из области определения функции[8] $\arcsin x$.

[7] $\forall x \in D(f)$, $f^{-1}(f(x)) = x$ – этот факт следовал из определения обратной функции.

[8] $\forall x \in E(f)$, $f(f^{-1}(x)) = x$.

Пример 5.7. (№324 б) Построить график функции $y = \operatorname{arctg}\left(1/x^2\right)$.

$\diamond$ Данная функция является композицией функций $z = 1/x^2$, $x \neq 0$, с множеством значений $(0, +\infty)$ и функции $y = \operatorname{arctg} z$, $z \in \mathbb{R}$. Областью определения функции $\operatorname{arctg}\left(1/x^2\right)$ являются все значения $x \neq 0$. Функция – четная, ее график симметричен относительно оси ординат.

Из свойств функций $z = 1/x^2$ и $y = \operatorname{arctg} z$ (рис. 10) следует, что при возрастании x от 0 до $+\infty$ значения $1/x^2$ убывают от $+\infty$ до 0, а значения $\operatorname{arctg}\left(1/x^2\right)$ убывают от $\pi/2$ до 0. Рассчитав и отметив несколько промежуточных точек, рисуем график (рис. 10). Точка $(0, \pi/2)$ не входит в график.

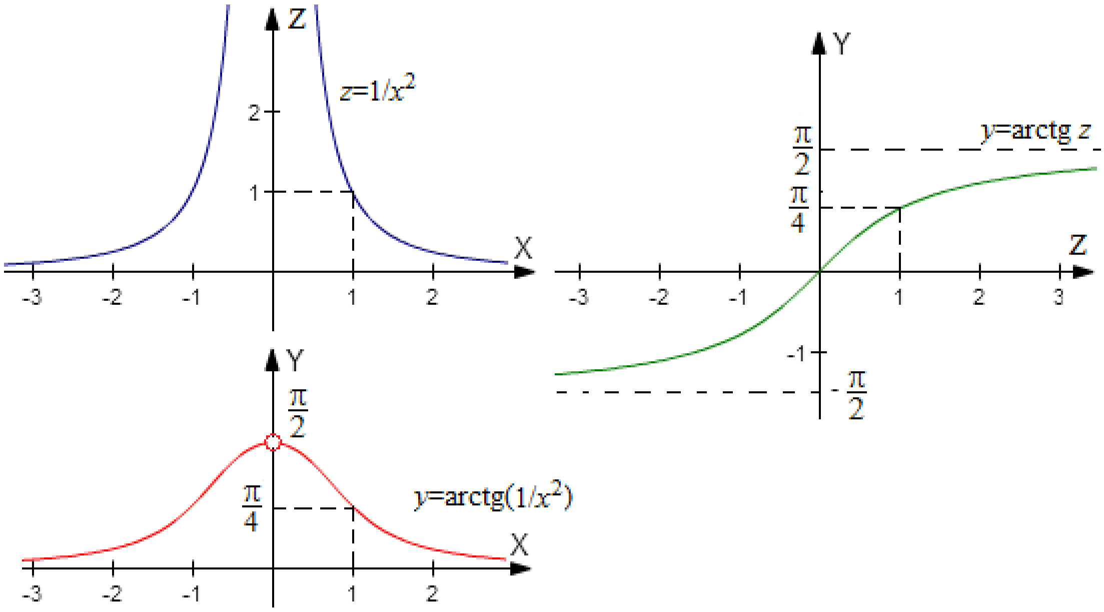

Рис. 10. Построение графика $y = \operatorname{arctg}\left(1/x^2\right)$.

5.3. Задачи для самостоятельной работы

- №№ 334, 347, 354, 279(б), 308, 320.

Практика 6. Предел последовательности

6.1. Предел последовательности

Определение последовательности. Определение предела последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности (поставить определения из лекций).

Определение 6.1.1. Последовательность — это функция натурального аргумента: $a_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}$. Здесь n — номер члена последовательности, a_n — общий член последовательности.

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ обозначают $\{a_n\}$. Элементы, из которых составлена последовательность, называют членами последовательности. Последовательности, членами которых являются числа, называют числовыми. Если $a_n = const$, то последовательность называется стационарной.

Определение 6.1.2. Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N (зависящее от ε) такое, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{6.1}$$

В этом случае пишут $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$ и говорят, что a_n сходится (или стремится) к a.

Спомощью кванторов определение 6.1.2 записывается так: число a — предел последовательности $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Определение 6.1.3. Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для каждой $\varepsilon-$окрестности числа a найдется номер, начиная с которого все члены последовательности принадлежат этой окрестности.

Иными словами, какую бы окрестность числа a ни взять, вне этой окрестности либо нет ни одного члена последовательности, либо находится лишь конечное число ее членов.

Определение 6.1.4. Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к нулю, то она называется бесконечно малой.

В кванторах: $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N \quad |a_n| < \varepsilon.$$

Определение 6.1.5. Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

Определение 6.1.6. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\forall\, E > 0 \quad \exists\, N(E) \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad |a_n| > E$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ и говорят, что последовательность имеет *бесконечный предел*.

В соответствии со сказанным выше последовательности, имеющие бесконечные пределы, являются расходящимися. Но нередко от этого правила отступают и называют такие последовательности сходящимися к соответствующему бесконечному пределу. В настоящем курсе, когда говорится о *сходимости* последовательности, это всегда будет означать, что она имеет *конечный предел*. В тех случаях, когда последовательность может иметь и бесконечный предел, это будет специально оговариваться.

Пример 6.1. (№ 42 а) Доказать, что $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ есть *бесконечно малая* (т.е. имеет предел, равный 0), указав для всякого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|a_n| < \varepsilon$ при $n > N$, если $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$\diamond$ Имеет место тождество $|a_n| = \left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = 1/n$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Выберем натуральное N такое, что $1/N < \varepsilon$, например[9], $N = [1/\varepsilon] + 1$. Тогда для любого $n > N$ имеем $|a_n| = 1/n < 1/N < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Связь между числом ε и номером N в данном случае следующая: если $\varepsilon = 0,1$, то $N = 11$; если $\varepsilon = 0,001$, то $N = 1001$; если $\varepsilon = 0,0001$, то $N = 10001$.

Пример 6.2. (№ 41) Пусть $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, определив для каждого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|a_n - 1| < \varepsilon$, если $n > N$.

$\diamond$ Имеет место оценка $|a_n - 1| = \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\dfrac{n-n-1}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Выберем натуральное N такое, что $1/N < \varepsilon$, например, $N = [1/\varepsilon] + 1$. Тогда для любого $n > N$ имеем $|a_n - 1| < 1/n < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Пример 6.3. (№ 43 а) Доказать, что последовательность $a_n = (-1)^n n$ является бесконечно большой, определив для всякого $E > 0$ число $N = N(E)$ такое, что $|a_n| > E$ при $n > N$.

---

[9] Ввиду очевидности неравенств $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \le \frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Минимальное значение N, которое можно здесь взять, есть $N = [1/\varepsilon]$, при этом все члены последовательности, начиная с номера $[1/\varepsilon] + 1$ попадают в ε-окрестность нуля. В качестве N можно указать и любое значение больше $[1/\varepsilon]$, например, $N = [1/\varepsilon] + 1$.

◇ Имеет место тождество $|a_n| = |(-1)^n n| = n$.

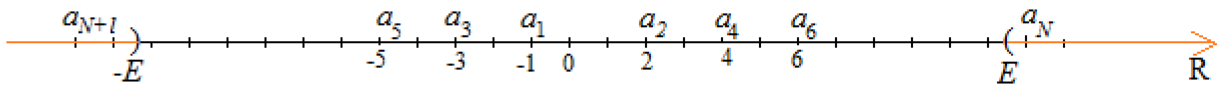

Рис. 11. Значения последовательности $a_n = (-1)^n n$ на числовой оси.

Пусть E – произвольное положительное число, а N – такое натуральное число, что $N > E$ (например, $N = [E] + 1$). Тогда для всех $n > N$ верно неравенство $|a_n| = n > N > E$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n = \infty$

Пример 6.4. (№ 45 б) Сформулировать с помощью неравенств утверждение

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

◇ Последовательность $\{a_n\}$ имеет пределом $-\infty$, если

$$\forall\, E > 0 \quad \exists\, N(E) \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad a_n < -E.$$

Пример 6.5. (№ 91) Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

◇ Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для него существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $|a_n - a| < \varepsilon$, если $n > N$, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда для $n > N$ в силу свойств модуля справедливы оценки $||a_n| - |a|| \le |a_n - a| < \varepsilon$. Отсюда вытекает справедливость равенства $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Пример 6.6. Доказать, что:

$$\text{а)} \ \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \text{при} \quad |q| < 1; \quad \text{б)} \ \lim_{n\to\infty} q^n = \infty \quad \text{при} \quad |q| > 1.$$

◇ а) Если $q = 0$, то равенство а) очевидно. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно и $0 < |q| < 1$. Тогда, $\dfrac{1}{|q|} - 1 > 0$ и для любого $n \ge 1$ справедливо[10]

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(1 + (\frac{1}{|q|} - 1)\right)^n = 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)^n > n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Отсюда $|q^n| = |q|^n < \dfrac{|q|}{n(1 - |q|)} < \varepsilon \quad \forall\, n > \dfrac{|q|}{\varepsilon(1 - |q|)}$.

Вывод: при $|q| < 1 \ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = \left[\dfrac{|q|}{\varepsilon(1 - |q|)}\right] + 1: \quad \forall\, n > N \quad |q^n| < \varepsilon$, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$.

[10]Здесь использовалось биномиальное разложение, в котором все слагаемые положительные.

б) Пусть $|q| > 1$ и $E > 0$ – произвольно. Тогда из неравенства

$$|q|^n = (1 + |q| - 1)^n = 1 + n(|q| - 1) + \ldots + (|q| - 1)^n > n(|q| - 1) > E$$

находим, что $|q^n| = |q|^n > E \quad \forall\, n > \frac{E}{|q|-1}$. Вывод: при $|q| > 1$

$$\forall\, E > 0 \quad \exists\, N = \left[\frac{E}{|q| - 1}\right] + 1 : \quad \forall\, n > N \quad |q^n| > E,$$

значит, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ при $|q| > 1$.

6.2. Связь ограниченности и сходимости

Определение 6.2.1. Последовательность о г р а н и ч е н а, если ограничено числовое множество значений ее членов.

В символах: $\{a_n\}$ – ограниченная последовательность (о г р а н и ч е н а), если

$$\exists C > 0 : \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \le C.$$

$\{a_n\}$ – неограниченная последовательность (н е о г р а н и ч е н а), если

$$\forall C > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N} : \quad |a_n| > C.$$

Теорема 6.2.1. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Ограниченность последовательности – н е о б х о д и м о е условие ее сходимости, т. е. если последовательность неограничена, то она расходится.

Пример 6.7. Доказать, что последовательность $\{(n^3 - 5)/n^2\}$ расходится.

$\diamond$ Докажем, что данная последовательность неограничена. Имеем

$$a_n = n - \frac{5}{n^2} \ge n - 5.$$

Пусть C – произвольное положительное число. Возьмем какое-нибудь натуральное число $n_0 > C + 5$, тогда $a_{n_0} \ge n_0 - 5 > C$. Это означает, что последовательность $\{(n^3 - 5)/n^2\}$ неограничена, а поэтому расходится.

6.3. Задачи для самостоятельной работы

- №№ 42(б,в,г), 43(б,в), 44, 45 (а, в), 58, 62.
- Доказать утверждение: для того чтобы последовательность $\{a_n\}$ была бесконечно малой, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{|a_n|\}$ была бесконечно малой.
- Справедливо ли утверждение: если последовательность $\{|a_n|\}$ сходится, то и последовательность $\{a_n\}$ сходится. Обосновать.

Практика 7. Замечательные[11] пределы

7.1. Свойства, связанные с неравенствами

- Теорема „о двух милиционерах“:

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a \wedge (a_n \le b_n \le c_n \ \vee \ a_n < b_n < c_n)\right) \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

- Предельные переходы в неравенствах. Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходящиеся последовательности, то справедливы утверждения

  1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n \quad \Rightarrow \quad (\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad a_n > b_n)\,;$
  2. $(\exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n > N \ (a_n \ge b_n \ \vee \ a_n > b_n)) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} b_n.$

Пример 7.1. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0 \quad (a > 1).$

$\diamond$ Поскольку $a-1 > 0$ и $n-1 \ge n/2$ при всех $n \ge 2$, то $a^n = (1+a-1)^n =$

$$= 1+n(a-1)+\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2+\ldots+(a-1)^n > \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 \ge \frac{n^2}{4}(a-1)^2$$

для всех $n \ge 2$. Отсюда следует, что $0 < \dfrac{n}{a^n} < \dfrac{4}{(a-1)^2 n}.$

Слева и справа в двойном неравенстве стоят бесконечно малые последовательности, следовательно, по теореме „о двух милиционерах“ и последовательность $\{n/a^n\}$ при $a > 1$ является бесконечно малой.

7.2. Замечательные пределы

Пример 7.2. (№ 61) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0.$

$\diamond$ Для любого a найдется некоторое натуральное число m[12]: $|a| < m+1$, тогда

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{m}\cdot\frac{|a|}{m+1}\cdots\frac{|a|}{n-1}\cdot\frac{|a|}{n}.$$

Так как $\dfrac{|a|}{m+1} < 1$, $\dfrac{|a|}{m+2} < 1, \ldots, \dfrac{|a|}{n-1} < 1$, то очевидно неравенство

---

[11] Замечательные пределы — термин, использующийся в советских и российских учебниках по математическому анализу для обозначения некоторых широко известных математических тождеств со взятием предела.

[12] Следут из принципа Архимеда

$$\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{m}\cdot\frac{|a|}{m+1}\cdots\frac{|a|}{n-1}\cdot\frac{|a|}{n}<\frac{|a|^m}{m!}\cdot\frac{|a|}{n},\text{ следовательно,}$$

$$0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|<\frac{|a|^{m+1}}{m!}\cdot\frac{1}{n}. \tag{7.1}$$

Поскольку $\frac{|a|^{m+1}}{m!}$ – константа, то последовательность, стоящая в правой части неравенства (7.1), также как и в левой, стремится к нулю. По теореме „о двух милиционерах“ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{n!}\right|=0$. Отсюда[13] вытекает требуемое неравенство.

Пример 7.3. (№ 63) Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ при $a>0$.

◇ При $a=1$ равенство очевидно. Пусть $a>1$, тогда $\sqrt[n]{a}-1>0$ и

$$a=\big(1+(\sqrt[n]{a}-1)\big)^n>1+n(\sqrt[n]{a}-1)>n(\sqrt[n]{a}-1),$$

откуда получаем, что $0<\sqrt[n]{a}-1<a/n$, т.е. $1<\sqrt[n]{a}<1+a/n$ и по теореме „о двух милиционерах“ $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a})=1$.

Если $0<a<1$, то $1/a>1$ и по доказанному $0<\sqrt[n]{1/a}-1<1/(an)$. Но тогда $1<\sqrt[n]{1/a}<\dfrac{an+1}{an}\Rightarrow\dfrac{an}{an+1}<\sqrt[n]{a}<1\Rightarrow 1-\dfrac{1}{an+1}<\sqrt[n]{a}<1$. Согласно теореме „о двух милиционерах“ и в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

Пример 7.4. (№ 65) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

◇ Так как $\sqrt[n]{n}\geq 1$ и $\sqrt[n]{n}-1\geq 0$, то применив бином Ньютона, получим неравенство $n=(1+(\sqrt[n]{n}-1))^n=1+n(\sqrt[n]{n}-1)+\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2+\ldots+(\sqrt[n]{n}-1)^n\geq$

$$\geq\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2\geq\frac{n^2}{4}(\sqrt[n]{n}-1)^2$$

справедливое при $n\geq 2$. Мы использовали известное неравенство $n-1\geq n/2$, верное при всех $n\geq 2$. Тогда $0\leq\sqrt[n]{n}-1\leq\frac{2}{\sqrt{n}}$, $1\leq\sqrt[n]{n}\leq 1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. Согласно теореме „о двух милиционерах“ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Пример 7.5. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ и $x_n\geq -1$ для любого $n\in\mathbb{N}$; пусть $p\in\mathbb{N}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[p]{1+x_n}=1$.

◇ Если $x_n\geq 0$, то $1\leq\sqrt[p]{1+x_n}\leq\big(\sqrt[p]{1+x_n}\big)^p=1+x_n=1+|x_n|$, а если $-1\leq x_n<0$, то $1\geq\sqrt[p]{1+x_n}\geq\big(\sqrt[p]{1+x_n}\big)^p=1+x_n=1-|x_n|$. Объединяя эти результаты, для любого $x_n\geq -1$ получаем $1-|x_n|\leq\sqrt[p]{1+x_n}\leq 1+|x_n|$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(1-|x_n|)=\lim\limits_{n\to\infty}(1+|x_n|)=1$. В силу теоремы „о двух милиционерах“ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[p]{1+x_n}=1$.

[13] Ранее требовалось доказать, что последовательность $\{a_n\}$ бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $\{|a_n|\}$ бесконечно малая.

Пример 7.6. Доказать с помощью теоремы „о двух милиционерах“

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+5}} = 1;$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2013}{n}\right)^n = 0.$

$\diamond$ 1. Заметим, что под корнем стоит выражение $1 + x_n$, где $x_n = \frac{-4}{n+5}$, для которого выполняются условия из предыдущего примера: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \geq -1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, но к последовательности $\sqrt[n]{1 - \frac{4}{n+5}}$ нельзя применить только что доказанный замечательный предел. Обратитет внимание на степень корня. В выражении $\sqrt[n]{\frac{n+1}{n+5}}$ она не фиксированная, а сколь угодно большая. Нам известен предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ при $a > 0$, им и воспользуемся, оценив данный общий член последовательности.

Так как для всех n справедливо $\frac{n+1}{n+5} = \frac{1+1/n}{1+5/n} \leq \frac{2}{1}$ и $\frac{1+1/n}{1+5/n} \geq \frac{1}{6}$, то $\sqrt[n]{\frac{1}{6}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+5}} \leq \sqrt[n]{2}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+5}} = 1$.

2. Для всех $n \geq 2014$ справедливы неравенства $0 < \frac{2013}{n} \leq \frac{2013}{2014}$, $0 < \left(\frac{2013}{n}\right)^n \leq \left(\frac{2013}{2014}\right)^n$. В силу замечательного предела $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$ и теоремы „о двух милиционерах“ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2013}{n}\right)^n = 0$.

7.3. Задачи для самостоятельной работы

- №№ 58, 59, 62.
- Найти пределы следующих последовательностей, обосновав ответ с помощью теоремы „о двух милиционерах“, используя замечательные пределы.

  1. $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2n^2 - 5n + 3}{n^3 + 1}}$.
  2. $a_n = \sqrt[n]{2 + n}$.

Практика 8. Арифметические свойства пределов

8.1. Свойства бесконечно малых

- Алгебраическая сумма *конечного числа* бесконечно малых есть бесконечно малая.
- Произведение бесконечно малых — бесконечно малая.
- Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную — бесконечно малая.
- Обратная к бесконечно малой есть бесконечно большая: если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $\alpha_n \neq 0$ при всех n, то $\{1/\alpha_n\}$ — бесконечно большая последовательность. Обратная к бесконечно большой есть бесконечно малая.

Пример 8.1. (№66) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

$\diamond$ Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$, из которого будет следовать требуемое. Возьмем произвольное $E > 0$. Нужно найти номер N такой, что для всех $n > N$ выполнялось бы $\sqrt[n]{n!} > E$. Очевидно, что это неравенство справедливо тогда и только тогда, когда для всех $n > N$

$$\frac{E^n}{n!} < 1. \tag{8.1}$$

Ранее было доказано (№ 61), что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{E^n}{n!} = 0$, поэтому существует натуральное N такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство 8.1, следовательно, для этих n справедливо $\sqrt[n]{n!} > E$. Значит, $\{\sqrt[n]{n!}\}$ — бесконечно большая последовательность, а обратная к ней — бесконечно малая, что и требовалось доказать.

Пример 8.2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

$\diamond$ Так как $\{1/n\}$ — бесконечно малая последовательность, а $\{\sin n\}$ — ограниченная (для всех n верно $|\sin n| \leq 1$), то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \sin n = 0$

Пример 8.3. (№ 51) Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

◇ Заметим, что слагаемые этой суммы $\frac{1}{n^2}, \frac{2}{n^2}, \dots \frac{k}{n^2}, \dots$ – бесконечно малые последовательности, но их бесконечно много. Только сумма конечного числа бесконечно малых равна бесконечно малой. Сумма бесконечного числа бесконечно малых может не быть бесконечно малой. Действительно, приведя слагаемые к общему знаменателю и воспользовавшись формулой для нахождения суммы $n-1$ членов арифметической прогрессии[14], получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

Пример 8.4. (№ 60) Доказать равенство для любого фиксированного k

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0 \quad (a>1). \tag{8.2}$$

◇ Пусть m – натуральное и $m \geq k$. Тогда

$$0<\frac{n^k}{a^n}\leq\frac{n^m}{a^n}=\left(\frac{n}{\sqrt[m]{a^n}}\right)^m=\left(\frac{n}{b^n}\right)^m,$$

где $b=\sqrt[m]{a}>1$. Ранее было доказано, равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b^n}=0 \quad \text{при} \quad b>1. \tag{8.3}$$

Применяя теорему о произведении бесконечно малых, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{b^n}\right)^m=0 \quad \text{при} \quad b>1.$$

Далее, из теоремы „о двух милиционерах“ следует требуемое.

Пример 8.5. (№ 64) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0 \quad \text{при} \quad a>1.$

◇ Если $\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}:\forall n>N\ \left|\frac{\log_a n}{n}\right|<\varepsilon$, то требуемое будет доказано.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. На множестве натуральных чисел n при $a>1$ выполняется $\left|\frac{\log_a n}{n}\right|=\frac{\log_a n}{n}$, и неравенство $\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon$ равносильно неравенствам $\log_a n<n\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n<a^{n\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{(a^\varepsilon)^n}<1$. Поскольку $a^\varepsilon>1$, то из предельного равенства 8.3 имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(a^\varepsilon)^n}=0$, поэтому существует натуральное N такое, что $\frac{n}{(a^\varepsilon)^n}<1$ для всех $n>N$. Отсюда следует, что $\left|\frac{\log_a n}{n}\right|<\varepsilon$, для всех $n>N$ это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0$.

[14]Сумма n членов арифметической прогрессии равна $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$.

Замечание 8.1. Из доказанных предельных равенств (№№ 60, 61, 64) следует, что при $a > 1$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполняются неравенства $\dfrac{a^n}{n!} < 1$, $\dfrac{n^a}{a^n} < 1$, $\dfrac{n}{a^n} < 1$, $\dfrac{\log_a n}{n} < 1$, следовательно, при достаточно больших n члены последовательностей $\{a^n\}$, $\{n\}$, $\{\log_a n\}$, $\{n!\}$ находятся в соотношениях:

$$\log_a n < n < n^a < a^n < n!$$

Пример 8.6. (№ 67 б) Какое выражение больше при достаточно больших n:

$$2^n \quad \text{или} \quad n^{1000}?$$

$\diamond$ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{1000}}{2^n} = 0$ согласно (8.2), то существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\dfrac{n^{1000}}{2^n} < 1$. Следовательно, при достаточно больших n справедливо

$$2^n > n^{1000}.$$

8.2. Арифметические свойства пределов

1. Если последовательность $\{a_n\}$ сходится, то для любого c существует

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

2. Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то
   (a) существует $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
   (b) существует $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
   (c) если к тому же $b_n \neq 0$ при всех n и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Пример 8.7. Обосновать формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + \ldots = \frac{b}{1-q}.$$

$\diamond$ Для суммы n первых членов геометрической прогрессии при $q \neq 1$ справедливо равенство

$$b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} = \frac{b\,(1-q^n)}{1-q} = \frac{b}{1-q}\,(1-q^n)\,.$$

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Согласно арифметическим свойствам пределов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b}{1-q}(1-q^n) = \frac{b}{1-q}\left(1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right) = \frac{b}{1-q}.$$

$$b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + \ldots = \lim_{n\to\infty}\left(b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1}\right) = \frac{b}{1-q}$$

Пример 8.8. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{10} - 2}{1 + \sqrt[n]{0,01}}$.

$\diamond$ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ при $a > 0$ и знаменатель $\dfrac{\sqrt[n]{10} - 2}{1 + \sqrt[n]{0,01}}$ не обращается в ноль даже при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{10} - 2}{1 + \sqrt[n]{0,01}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10} - 2}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{0,01}} = \frac{-1}{2}.$$

8.3. Раскрытие неопределенностей

Р а с к р ы т и е н е о п р е д е л ё н н о с т е й[15] – методы вычисления пределов последовательностей (или функций), заданных формулами, которые в результате формальной подстановки в них предельных значений аргумента теряют смысл, то есть переходят в выражения типа:

$$\infty - \infty, \quad , \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Здесь 0 – бесконечно малая последовательность (величина), ∞ – бесконечно большая последовательность (величина), 1 – последовательность (величина), стремящаяся к единице. По таким выражениям невозможно судить о том, существуют или нет искомые пределы, не говоря уже о нахождении их значений, если они существуют. Всего семь неопределенностей. Для каждой есть свой способ раскрытия, с которыми мы начинаем знакомиться.

Пример 8.9. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^2}{3n^2+1}$.

$\diamond$ При $n \to \infty$ выражение $\dfrac{(2n+1)^2}{3n^2+1}$ является частным бесконечно больших последовательностей, то есть это неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Обратим внимание, что в числителе и в знаменателе стоят многочлены 2-го порядка (старшая степень n^2). Преобразуем формулу для общего члена, поделив числитель и

[15] В лекции 2 говорилось о неопределенностях: $(+\infty) - (+\infty)$ или $(+\infty) + (-\infty)$ (для краткости эту неопределенность обозначают $\infty - \infty$), $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

знаменатель на старшую степень (при этом не требуется раскрывать квадрат суммы в числителе): $a_n = \dfrac{(2n+1)^2}{3n^2+1} = \dfrac{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^2}{3+\dfrac{1}{n^2}}$.

Учитывая, что $\{1/n\}$, $\{1/n^2\}$ — бесконечно малые последовательности, и используя арифметические свойства пределов, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2}{3n^2+1} = \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\right)^2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{4}{3}.$$

Пример 8.10. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000n^3+3n^2}{0,001n^4-100n^3+1}$.

$\diamond$ Надо раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Заметим, что в числителе многочлен 3-го порядка, а в знаменателе — 4-го (старшая степень n^4). Преобразуем формулу для общего члена, поделив числитель и знаменатель на старшую степень: $a_n = \dfrac{\dfrac{1000}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{0{,}001-\dfrac{100}{n}+\dfrac{1}{n^4}}$.

Учитывая, что $\{1/n\}$, $\{1/n^2\}$, $\{1/n^4\}$ — бесконечно малые последовательности, и используя арифметические свойства пределов, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1000n^3+3n^2}{0,001n^4-100n^3+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1000}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(0,001-\dfrac{100}{n}+\dfrac{1}{n^4}\right)} = \frac{0}{0,001} = 0.$$

Пример 8.11. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$.

$\diamond$ Раскрываем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Заметим, что в числителе многочлен 3-го порядка, а в знаменателе — 2-го (старшая степень n^3). Преобразуем формулу для общего члена, поделив числитель и знаменатель на старшую степень: $a_n = \dfrac{1-\dfrac{100}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{100}{n}+\dfrac{15}{n^2}}$.

Учитывая, что $\{1/n\}$, $\{1/n^2\}$, $\{1/n^3\}$ — бесконечно малые последовательности, видим, что предел числителя равен 1, предел знаменателя равен 0. Свойство (2c) не работает, воспользуемся тем, что обратная к бесконечно малой последовательности является бесконечно большой. Учтя при этом, что члены последовательностей, стоящих в числителе и знаменателе, положительны[16] (хотя бы начиная с некоторого номера), получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{100}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{100}{n}+\dfrac{15}{n^2}}=+\infty$$

.

Используя алгоритм, примененный в рассмотренных примерах, нетрудно сделать вывод, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\ldots+b_k}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } m=k;\\ 0, & \text{если } m<k;\\ \infty, & \text{если } m>k.\end{cases}$$

Замечание 8.1. Для раскрытия неопределенности в примерах 8.9–8.11 мы делили числитель и знаменатель на старшую степень n - общий член „самой большой последовательности“[17], участвующей в выражении. Такой метод раскрытия не подходит, если в числителе или в знаменателе содержится неопределенность $\infty-\infty$.

Пример 8.12. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

◇ В знаменателе, очевидно, многочлен 2-го порядка, а в числителе стоит разность многочленов одинакового $(n+1)^3$ и $(n-1)^3$, представляющая неопределенности $\infty-\infty$. Для раскрытия этой неопределенности (т. е. для определения порядка многочлена в числителе) воспользуемся формулами сокращенного умножения[18]:

$$(n+1)^3-(n-1)^3=6n^2+2.$$

Теперь видно, что и в числителе стоит многочлен 2-го порядка. *В числителе и знаменателе многочлены одинакового порядка, следовательно, предел равен отношению коэффициентов при старших степенях*:

$$a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+2}{(n+1)^2+(n-1)^2}=\frac{6}{1+1}=3.$$

[16] Все члены сходящейся последовательности с достаточно большими номерами положительны, если её предел положителен, и отрицательны, если предел отрицателен.

[17] „Самая большая последовательность“ – последовательность с наибольшим общим членом среди последовательностей, входящих в выражение.

[18] $(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$ или $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$, $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Замечание 8.2. Если в примере 8.12 сразу поделить числитель и знаменатель на „старшую степень", участвующую в выражении (в данном случае - третью), то перейдем к частному

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^3-(1-\frac{1}{n})^3}{\frac{1}{n}\left((1+\frac{1}{n})^2+(1-\frac{1}{n})^2\right)},$$

являющемуся при $n\to\infty$ неопределенностью $\frac{0}{0}$, и ответ не получим.

Заметим, что, например, разность n^3-100n^2 при $n\to\infty$ не является неопределенностью $\infty-\infty$, так как эта разность бесконечно больших последовательностей $\{n^3\}$ и $\{100n^2\}$ точно является многочленом третьего порядка. Можно преобразовать

$$n^3-100n^2=n^3(1-\frac{100}{n}).$$

Разность в скобках стремится к единице, а произведение не равного нулю числа на бесконечность всегда равно бесконечности согласно аксиомам бесконечности. Все определено.

Пример 8.13. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{3^n+1}$.

$\diamond$ Так как $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0 \quad$ при $\quad |q|<1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\left(1-(1/2)^n\right)}{3^n\left(1+(1/3)^n\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-(1/2)^n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+(1/3)^n\right)}=0.$$

Фактически, раскрывая неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, мы поделили числитель и знаменатель на 3^n — больший общий член входящих в выражение последовательностей.

Пример 8.14. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n/2}+(n+1)!}{n\left(3^n+n!\right)}$.

$\diamond$ При $n\to\infty$ выражение $\dfrac{2^{n/2}+(n+1)!}{n\left(3^n+n!\right)}$ представляет собой неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для достаточно больших n члены последовательностей $\{2^{n/2}\}$, $\{(n+1)!\}$, $\{n\cdot 3^n\}$, $\{n\cdot n!\}$ находятся в соотношениях $2^{n/2}<n\cdot 3^n<n\cdot n!<(n+1)!$. Поделим числитель и знаменатель на общий член „самой большой последовательности":

$$\frac{2^{n/2}+(n+1)!}{n\left(3^n+n!\right)}=\frac{\frac{1}{(n+1)}\cdot\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}+1}{\frac{n}{n+1}\left(\frac{3^n}{n!}+1\right)}.$$

Так как $\frac{1}{(n+1)} \to 0$, $\frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \to 0$, $\frac{n}{n+1} \to 1$, $\frac{3^n}{n!} \to 0$ при $n \to \infty$, то из арифметических свойств пределов следует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n/2} + (n+1)!}{n\left(3^n + n!\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} + 1}{\frac{n}{n+1}\left(\frac{3^n}{n!} + 1\right)} = \frac{0+1}{1\cdot(0+1)} = 1.$$

Пример 8.15. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{4}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$.

◇ При $n \to \infty$ выражение $\dfrac{\sqrt[n]{4}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$ представляет собой неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Чтобы избавиться от этой неопределенности выделим в числителе и знаменателе одинаковые сомножители, стремящиеся к нулю при $n \to \infty$, и сократим их:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{4}-1}{\sqrt[n]{2}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\left(\sqrt[n]{2}+1\right)}{\sqrt[n]{2}-1} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{2}+1\right) = 2.$$

Пример 8.16. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[3]{6n} - \sqrt[4]{81n^6-1}}{\left(\sqrt[3]{n} + 4\sqrt{n}\right)\sqrt{n^2-5}}$.

◇ При $n \to \infty$ выражение $\dfrac{n\sqrt[3]{6n} - \sqrt[4]{81n^6-1}}{\left(\sqrt[3]{n} + 4\sqrt{n}\right)\sqrt{n^2-5}}$ представляет собой неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Преобразуем выражения, вынося из-под корней старшую степень n:

$$\frac{n\sqrt[3]{6n} - \sqrt[4]{81n^6-1}}{\left(\sqrt[3]{n} + 4\sqrt{n}\right)\sqrt{n^2-5}} = \frac{n^{4/3}\sqrt[3]{6} - n^{3/2}\sqrt[4]{81 - \frac{1}{n^6}}}{n^{3/2}\left(\frac{1}{n^{1/6}} + 4\right)\sqrt{1 - \frac{5}{n^2}}}.$$

Поделим числитель и знаменатель на $n^{3/2}$ – наибольшую степень n, участвующую в выражении:

$$\frac{n^{4/3}\sqrt[3]{6} - n^{3/2}\sqrt[4]{81 - \frac{1}{n^6}}}{n^{3/2}\left(\frac{1}{n^{1/6}} + 4\right)\sqrt{1 - \frac{5}{n^2}}} = \frac{\frac{\sqrt[3]{6}}{n^{1/12}} - 3\sqrt[4]{1 - \frac{1}{81n^6}}}{\left(\frac{1}{n^{1/6}} + 4\right)\sqrt{1 - \frac{5}{n^2}}}.$$

Так как $\frac{\sqrt[3]{6}}{n^{1/12}} \to 0$, $\sqrt[4]{1 - \frac{1}{81n^6}} \to 1$, $\frac{1}{n^{1/6}} \to 0$, $\sqrt{1 - \frac{5}{n^2}} \to 1$[19] при $n \to \infty$, то из арифметических свойств пределов следует, что

[19]Здесь воспользовались ранее доказанным пределом

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{1+x_n} = 1, \quad \text{если} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad x_n \geq -1, \quad p \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{6n}-\sqrt[4]{81n^6-1}}{\left(\sqrt[3]{n}+4\sqrt{n}\right)\sqrt{n^2-5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{6}}{n^{1/12}}-3\sqrt[4]{1-\frac{1}{81n^6}}}{\left(\frac{1}{n^{1/6}}+4\right)\sqrt{1-\frac{5}{n^2}}}=\frac{0-3\cdot 1}{(0+4)\cdot 1}=-\frac{3}{4}.$$

Пример 8.17. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3+1}\right)$.

$\diamond$ При $n\to\infty$ выражение $\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3+1}\right)$ представляет собой неопределенность $\infty-\infty$. В этом случае, как уже было сказано, вынесение старшей степени не помогает. Для раскрытия неопределенности домножим числитель выражения и знаменатель (он равен единице) на сумму корней $\left(\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}\right)$, воспользовавшись формулой сокращенного умножения „разность квадратов“:

$$\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3+1}\right)=\frac{\sqrt{n^3+8}\left(n^3+2-(n^3+1)\right)}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}=\frac{\sqrt{n^3+8}}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}.$$

Последнее выражение при $n\to\infty$ представляет собой неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Раскрываем ее так же, как в примере 8.16:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+8}}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{8}{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}=\frac{1}{1+1}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3+1}\right)=\frac{1}{2}$.

8.4. Задачи для самостоятельной работы

- №№ 46, 47, 48, 49, 50, 56, 67.

Практика 9. Монотонные последовательности

9.1. Существование предела

Определение 9.1.1. Последовательность $\{a_n\}$ называется возрастающей, если $a_n \le a_{n+1}$ при всех n. Последовательность $\{a_n\}$ называется убывающей, если $a_n \ge a_{n+1}$ при всех n. Если $a_n < a_{n+1}$, соответственно, $a_n > a_{n+1}$ для всех n, то говорят о строгом возрастании и строгом убывании последовательности.

Определение 9.1.2. Последовательность $\{a_n\}$ называется монотонной, если она возрастает или убывает. Последовательность $\{a_n\}$ — строго монотонная, если она строго возрастает или строго убывает.

Теорема 9.1.1. *Если монотонно возрастающая последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху, то она сходится. При этом* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$.

Теорема 9.1.2. *Если монотонно убывающая последовательность $\{a_n\}$ ограничена снизу, то она сходится. При этом* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$.

Пример 9.1. (№ 77) Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности

$$a_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \ldots + \frac{p_n}{10^n}, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где p_i — целые неотрицательные числа, не превышающие 9, начиная с p_1.

$\diamond$ Так как $a_{n+1} - a_n = \dfrac{p_{n+1}}{10^{n+1}} > 0$, то $a_{n+1} > a_n$, следовательно, последовательность строго монотонно возрастает. Кроме того,

$$a_n \le p_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n} < p_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots = p_0 + \frac{9/10}{1 - 1/10} = p_0 + 1.$$

Здесь воспользовались формулой суммы членов бесконечно убывающей прогрессии. Итак, последовательность является ограниченной свеху, откуда вытекает существование ее предела.

Пример 9.2. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$, где $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1 = 0$, имеет предел, и найти его.

$\diamond$ Рассмотрим разность

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{6 + a_n} - a_n = \frac{6 + a_n - a_n^2}{\sqrt{6 + a_n} + a_n} = -\frac{a_n^2 - a_n - 6}{\sqrt{6 + a_n} + a_n} = -\frac{(a_n - 3)(a_n + 2)}{\sqrt{6 + a_n} + a_n}.$$

Очевидно, что $a_n + 2 > 0$ и $\sqrt{6 + a_n} + a_n > 0$. Выясним соотношение между членами последовательности $\{a_n\}$ и числом 3.

Из формулы общего члена последовательности можно предположить, что $a_n < 3$. Докажем это методом математической индукции.

1. При $n = 1$ это соотношение истинно, так как $a_1 = 0 < 3$.

2. Пусть при некотором $n = k$, $k \in \mathbb{N}$ выполняется $a_k < 3$, тогда при $n = k + 1$ будет справедливо неравенство $a_{k+1} = \sqrt{6 + a_k} < \sqrt{6 + 3} = 3$.

Таким образом, на основании принципа математической индукции можно заключить, что $a_n < 3$ при любом натуральном n и, следовательно, $a_{n+1} > a_n$. Тем самым мы доказали не только монотонное возрастание последовательности $\{a_n\}$, но и ее ограниченность сверху числом 3, значит, существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Заметим, что $a > 0$. Переходя к пределу в равенстве $a_{n+1}^2 = 6 + a_n$ и учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, получаем $a^2 = 6 + a$, откуда находим $a = 3$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Пример 9.3. (№ 96) Найти наибольший член последовательности $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

$\diamond$ Найдем отношение членов последовательности

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Так как $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2 < 2$ тогда и только тогда, когда $1 + \frac{1}{n} < \sqrt{2}$, то при $n > \sqrt{2} + 1 > 2$ вытекает, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает начиная с третьего элемента. Поэтому наибольший член содержится среди элементов x_1, x_2, x_3. Сравнив между собой эти три элемента, находим, что

$$\max\{x_n\} = x_3 = \frac{9}{8}.$$

9.2. Число e

Теорема 9.2.1. *Последовательность* $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, *монотонно возрастает и ограничена сверху.*

Определение 9.2.1. Предел последовательности $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ называют ч и с л о м e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Пример 9.4. (№ 69) Доказать, что последовательность $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, монотонно убывает и ограничена снизу. На основании этого установить

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{9.1}$$

$\diamond$ Последовательность $\{b_n\}$ ограничена снизу числом 1. Покажем, что $\{b_n\}$ монотонно убывает. Для этого рассмотрим частное

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2}\frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2}\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n(2+n)}\right)^{n+2}\frac{n}{n+1}.$$

В силу неравенства Бернулли[20] имеем $\left(1+\dfrac{1}{n(2+n)}\right)^{n+2} > 1+(n+2)\dfrac{1}{n(2+n)}$ и

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} > \left(1+\frac{n+2}{n(2+n)}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = 1.$$

Таким образом, $b_n > b_{n+1}$ при всех n. Поэтому согласно теореме о пределе монотонной последовательности предел $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ существует.

Заметим, что $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, то сославшись на теорему о пределе произведения, получим равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Значит, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \nearrow e$, а $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \searrow e$. Убедившись в том, что множество $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ не имеет наибольшего элемента, а $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ — наименьшего, делаем вывод о справедливости неравенства неравенства 9.1.

Пример 9.5. (№ 75 а) Доказать неравенство $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$, где n — любое натуральное число.

[20] Если $x > -1$, то $\forall n > 1$ справедливо неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$, причем знак равенства имеет место лишь при $x = 0$.

$\diamond$ Взяв натуральный логорифм от всех частей неравенства 9.1, получим

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда следует требуемое неравенство.

Пример 9.6. (№ 80) Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

$\diamond$ Имеем $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1+\frac{1}{2^{n+1}} > 1$, следовательно, последовательность возрастает.

Ограниченность вытекает из неравенств

$$\ln a_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/2} = 1.$$

При оценке воспользовались неравенством примера 9.5.

Таким образом, $a_n < e$ для всех n и последовательность $\{a_n\}$ возрастает, значит, она сходится.

9.3. Задачи для самостоятельной работы

- №№ 70, 78, 79, 81, 97, 100.
- Найти предел последовательности из №81.

Практика 10. Критерий Коши

10.1. Сходимость последовательности

Следующее необходимое и достаточное условие позволяет судить о сходимости последовательности без нахождения предела, лишь по расстоянию между последующими членами последовательности.

Критерий Коши. *Последовательность* $\{x_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N, \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{10.1}$$

Последовательность, удовлетворяющую условию (10.1), называют ф у н д а м е н т а л ь н о й или п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю К о ш и.

Пример 10.1. (№ 82) Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n, \quad \text{где} \quad |a_k| < M \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad |q| < 1.$$

$\diamond$ Очевидно, $x_{n+p} = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n + a_{n+1} q^{n+1} + \ldots + a_{n+p} q^{n+p}$,

$$|x_{n+p} - x_n| = |a_{n+1} q^{n+1} + \ldots + a_{n+p} q^{n+p}| \leq |a_{n+1}||q^{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}||q^{n+p}| \leq$$

$$\leq M|q|^{n+1}(1 + \ldots + |q|^{p-1}) < M|q|^{n+1}(1 + \ldots + |q|^{p-1} + \ldots) = M|q|^{n+1}\frac{1}{1-|q|}.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $M|q|^{n+1}\frac{1}{1-|q|} < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $|q|^n < \varepsilon\frac{1-|q|}{|q|M}$, и $|q| < 1$, то при $n > \log_{|q|}\frac{\varepsilon(1-|q|)}{|q|M}$ модуль разности $|x_{n+p} - x_n|$ будет меньше ε. Вывод:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N = \left[\log_{|q|}\frac{\varepsilon(1-|q|)}{|q|M}\right]: \quad \forall\, n > N, \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность сходится на основании критерия Коши.

Пример 10.2. (№ 84) Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности $x_n = \dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$.

$\diamond$ Для произвольного $\varepsilon > 0$ и всех натуральных p имеем

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} =$$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

при $n > 1/\varepsilon$. Вывод: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = [1/\varepsilon] : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Таким образом, последовательность сходится на основании критерия Коши.

Пример 10.3. (№ 85) Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

Указание. Воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, \quad n \geq 2.$$

$\diamond$ Для произвольного $\varepsilon > 0$ и всех натуральных p имеем

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$
$$< \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} =$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

при $n > 1/\varepsilon$ и $n \geq 2$. Вывод:

$$\forall \, \varepsilon > 0 \quad \exists \, N = [1/\varepsilon] + 2 : \quad \forall \, n > N, \quad \forall \, p \in \mathbb{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность сходится на основании критерия Коши.

10.2. Расходимость последовательности

Поскольку критерий Коши — это необходимое и достаточное условие сходимости последовательности, это означает, что если

$$\exists \, \varepsilon > 0 \quad \forall \, N \in \mathbb{N} : \quad \exists \, n > N, \quad \exists \, p \in \mathbb{N} : \quad |a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon, \tag{10.2}$$

то последовательность $\{a_n\}$ расходится.

Пример 10.4. (№ 88) Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

$\diamond$ Поскольку $|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}$, то при $p = n$ справедливо $|x_{n+p} - x_n| > 1/2$ для всех n. Вывод:

$$\exists\, \varepsilon = 1/2 : \quad \forall\, N \in \mathbb{N} \quad \exists\, n = N+1 > N, \quad \exists\, p = n : \quad |x_{n+p} - x_n| > \varepsilon.$$

Последовательность расходится на основании критерия Коши.

Пример 10.5. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности $x_n = \frac{\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \ldots + \frac{\sqrt{n-1}}{n}$.

$\diamond$ Поскольку $|x_{n+p} - x_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} + \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} + \ldots + \frac{\sqrt{n+p-1}}{n+p} > p \cdot \frac{\sqrt{n}}{n+p}$, то при $p = n$ справедливо $|x_{n+p} - x_n| > \frac{n\sqrt{n}}{2n} > \frac{\sqrt{n}}{2} \geq \frac{1}{2}$ для всех n. Вывод:

$$\exists\, \varepsilon = 1/2 : \quad \forall\, N \in \mathbb{N} \quad \exists\, n = N+1 > N, \quad \exists\, p = n : \quad |x_{n+p} - x_n| > \varepsilon.$$

Последовательность расходится на основании критерия Коши.

10.3. Задачи для самостоятельной работы

- №№ 83.
- Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальная, если

$$x_n = 0,\underbrace{77\ldots7}_{n\,\text{цифр}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Доказать сходимость последовательности

$$x_n = \frac{1}{1^2+3} + \frac{1}{2^2+3} + \ldots + \frac{1}{n^2+3}, \quad n \in \mathbb{N},$$

  а) пользуясь критерием Коши; б) пользуясь теоремой о монотонной и ограниченной последовательности.

- Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательностей:

$$x_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Практика 11. Подпоследовательности

11.1. Точные грани последовательности; частичные пределы

Определение 11.1.1. $\beta = \sup\{a_n\}$, если

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq \beta$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N}: \quad a_p > \beta - \varepsilon$.

Определение 11.1.2. $\alpha = \inf\{a_n\}$, если

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq \alpha$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N}: \quad a_p < \alpha + \varepsilon$.

Определение 11.1.3. Последовательность $\{y_k\}$ будем называть *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$, если

1. $\{y_k\}$ состоит из членов последовательности $\{a_n\}$;
2. в последовательности $\{y_k\}$ сохранен тот же порядок следования элементов, какой они имели в последовательности $\{a_n\}$.

Если последовательность сходится к конечному или бесконечному пределу, то любая её подпоследовательность сходится к тому же самому пределу.

Определение 11.1.4. Предел подпоследовательности (конечный или бесконечный) называется *частичным пределом* последовательности.

Определение 11.1.5. Наибольший частичный предел (конечный или бесконечный) последовательности $\{a_n\}$ называется *верхним пределом* и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

Определение 11.1.6. Наименьший частичный предел последовательности называется $\{a_n\}$ *нижним пределом* и обозначается $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

Равенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ является необходимым и достаточным условием существования предела (конечного или бесконечного) последовательности $\{a_n\}$.

Пример 11.1. (№101) Для последовательности $\{a_n\}$ найти $\inf\{a_n\}$, $\sup\{a_n\}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, если $a_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$.

$\diamond$ Так как последовательность $\{a_n\}$ строго монотонно возрастает и ограничена сверху, то ее предел есть ее точная верхняя грань; ее первый член есть ее точная нижняя грань, в силу определения 11.1.2; так как последовательность сходится то верхний и нижний пределы совпадают с пределом последовательности. Отсюда

$\sup\{a_n\} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$; $\inf\{a_n\} = a_1 = 0$.

Пример 11.2. (№ 101.1) Для последовательности $\{a_n\}$ найти $\inf\{a_n\}$, $\sup\{a_n\}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, если $a_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$.

$\diamond$ Так как все элементы последовательности $\{a_n\}$ содержатся в последовательностях $a_{2n-1} = 2 + \dfrac{3}{2n-1}$, $a_{2n} = -2 - \dfrac{3}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, и $a_{2n} < a_{2n-1}$, причем последовательность $\{a_{2n-1}\}$ монотонно убывает, а последовательность $\{a_{2n}\}$ монотонно возрастает, то

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = 2$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = -2$; $\sup\{a_n\} = a_1 = 5$; $\inf\{a_n\} = a_2 = -7/2$.

Пример 11.3. (№ 103) Для последовательности $\{a_n\}$ найти $\inf\{a_n\}$, $\sup\{a_n\}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, если $a_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$.

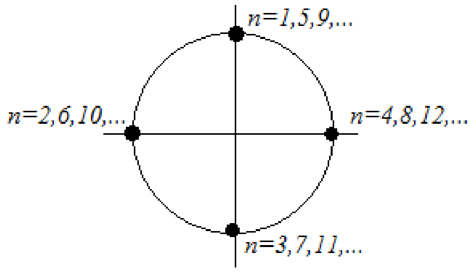

Рис. 12. Точки $\dfrac{\pi n}{2}$ на тригонометрической окружности.

$\diamond$ Все члены последовательности содержатся в последовательностях: $a_{4n-2} = 1 - \frac{4n-2}{4n-1} = \frac{1}{4n-1}$, $a_{2n-1} = 1$, $a_{4n} = 1 + \frac{4n}{4n+1} = 2 - \frac{1}{4n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Имеем $a_{4n-2} < a_{2n-1} < a_{4n}$, причем $\{a_{4n-2}\}$ убывает, а $\{a_{4n}\}$ возрастает. Поэтому

$$\inf\{a_n\} = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{4n-2} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{4n-1} = 0;$$

$$\sup\{a_n\} = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{4n} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \left(2 - \frac{1}{4n+1}\right) = 2.$$

Пример 11.4. (№ 116) Найти частичные пределы последовательности

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{1}{8},\quad \frac{7}{8},\quad \ldots,\frac{1}{2^n},\quad \frac{2^n-1}{2^n},\quad \ldots$$

◇ Из членов данной последовательности составим две сходящиеся подпоследовательности: $\overline{a}_n = \dfrac{1}{2^n}$ и $\overline{\overline{a}}_n = \dfrac{2^n-1}{2^n}$. Их пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\overline{a}}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-1}{2^n} = 1$, будут частичными пределами. Так как все другие сходящиеся подпоследовательности входят в состав этих двух, то других частичных пределов нет.

Пример 11.5. (№ 121) Построить пример числовой последовательности, имеющей в качестве своих частичных пределов числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p$.

◇ Построим последовательности, сходящиеся к числам a_k, $k=\overline{1,p}$, следующим образом: $x_{kn} = a_k + \frac{1}{n}$, $\quad k=\overline{1,p}$, $\quad n \in \mathbb{N}$. Затем из этих последовательностей построим искомую последовательность, включая в нее поочередно сначала все первые члены этих последовательностей, затем – вторые, затем – третьи и т. д.:

$$a_1+1, a_2+1, \ldots, a_p+1, a_1+\frac{1}{2}, a_2+\frac{1}{2}, \ldots, a_p+\frac{1}{2}, \ldots, a_1+\frac{1}{n}, a_2+\frac{1}{n}, \ldots, a_p+\frac{1}{n}, \ldots$$

Поскольку построенная последовательность будет иметь в качестве подпоследовательности каждую последовательность $\{x_{kn}\}$, то их пределы будут частичными пределами построенной последовательности.

11.2. Задачи для самостоятельной работы

- Доказать, что если все члены последовательности $\{x_n\}$ можно разбить на конечное число подпоследовательностей[21] $\{x_{n_{k1}}\}, \quad \{x_{n_{k2}}\}, \quad \ldots, \quad \{x_{n_{kr}}\}$, каждая из которых имеет соответствующую точную нижнюю грань $\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots,$ и точную верхнюю грань $\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_r$, то $\inf\{x_n\} = \min\limits_{i=\overline{1,r}} \alpha_i, \quad \sup\{x_n\} = \max\limits_{i=\overline{1,r}} \beta_i$.

- Доказать, что если все члены последовательности $\{x_n\}$ можно разбить на конечное число с х о д я щ и х с я подпоследовательностей $\{x_{n_{k1}}\}, \quad \{x_{n_{k2}}\}, \quad \ldots,$ с соответствующими пределами $a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_r$, то любая другая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ будет сходиться к одному из этих частичных пределов или расходиться.

- №№ 105, 106, 109.

[21]Каждый член последовательности $\{x_n\}$ обязательно входит в одну из этих подпоследовательностей.

Контрольная работа

11.0.1. Теоретическая часть

- Вариант 1.

  Сформулировать определения с помощью кванторов $\forall$ и $\exists$

  1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$;
  2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$;
  3. $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность;
  4. Критерий Коши сходимости последовательности.

- Вариант 2.

  Сформулировать определения с помощью кванторов $\forall$ и $\exists$

  1. $\{x_n\}$ – расходящаяся последовательность;
  2. $\{x_n\}$ – бесконечно малая последовательность;
  3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;
  4. $\sup\{x_n\} = M$.

- Вариант 3.

  Сформулировать определения с помощью кванторов $\forall$ и $\exists$

  1. $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность;
  2. $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность;
  3. $\{x_n\}$ – неограниченная последовательность;
  4. Критерий Коши расходимости последовательности.

- Вариант 4. Сформулировать определения с помощью кванторов $\forall$ и $\exists$

  1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$;
  2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$;
  3. $\inf\{x_n\} = m$;
  4. $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность.

11.0.2. Практическая часть

- Вариант 1.

1. Док-ть огранич-ть $\{x_n\}$, если $x_n = \dfrac{(-1)^n n + 7}{\sqrt{n^2+2}}$.
2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\lg n + 2\cos\pi n) = +\infty$.
3. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности
$$x_n = (0,2)^{(-1)^n n}.$$
4. Найти $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\inf\{x_n\}$, если
$x_n = 2 + \dfrac{n+3}{n+2}\cos\dfrac{\pi n}{2}$.
5. Доказать по определению, что $\sup\{2 + \dfrac{n+3}{n+2}\cos\dfrac{\pi n}{2}\} = 3\dfrac{1}{6}$.
6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^3}{n^2+1}\right)$.
7. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3 - 3n + 1}$, обосновав вычисления.

- Вариант 2.

1. Док-ть неогр-ть $\{x_n\}$, если $x_n = (1-n)^{\sin(\pi n/2)}$.
2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2n^2}{3n^2-1} = -\dfrac{2}{3}$.
3. Доказать фундаментальность $\{x_n\}$, если
$x_n = \dfrac{\cos 5}{1\cdot 5} + \dfrac{\cos 5^2}{2\cdot 5^2} + \dots + \dfrac{\cos 5^n}{n\cdot 5^n}$.
4. Найти $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\sup\{x_n\}$, если
$x_n = \sqrt[n]{(-1)^n 4^{(-1)^n} + 1}$.
5. Доказать по определению, что $\inf\{\sqrt[n]{(-1)^n 4^{(-1)^n} + 1}\} = \dfrac{3}{4}$.
6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{n(n-1)}\right)$.
7. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n n^2 + 2n - 1}$, обосновав вычисления.

Список литературы

[1] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 13-е изд., испр. – М.: Изд-во Моск. ун-та ЧеРо,1997. – 624с.; То же [Электронный ресурс]. – URL:http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm

[2] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: Часть I. – 7-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 648 с.; То же [Электронный ресурс]. – URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59376

[3] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Том 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. Учебник. – 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 400 с.; То же [Электронный ресурс]. – URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2224

[4] Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 496 с.; То же [Электронный ресурс]. – URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2226

[5] Кузенков О.А., Рябова Е.А. Введение в математический анализ. Лекции. Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 112 с.

Олег Анатольевич **Кузенков**
Елена Александровна **Рябова**

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРАКТИКУМ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.