МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ: ПРОГРАММА, ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ, ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ И ЭКЗАМЕНУ

Учебно-методическое пособие

Под общей редакцией Е.В. Круглова

Нижний Новгород
2015

УДК 517
ББК 22.161.1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ: ПРОГРАММА, ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ, ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ И ЭКЗАМЕНУ: Учебно-методическое пособие. Авторы: Вильданов В.К., Круглов Е.В., Отделкина А.А., Перова В.И., Умилина А.Ю. / Под общей редакцией Е.В. Круглова. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015 – 101 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент кафедры математической физики и оптимального управления института информационных технологий, математики и механики Т.М. Митрякова.

Учебно-методическое пособие представляет собой руководство по математическому анализу для студентов института экономики и предпринимательства ННГУ, обучающихся по направлению подготовки бакалавриата 38.03.01 «Экономика»

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
института экономики и предпринимательства ННГУ,
к.э.н., доцент **С.В. Едемская**

УДК 517
ББК 22.161.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Пособие, предлагаемое вниманию читателя, содержит учебные материалы по дисциплине «Математический анализ», читаемой кафедрой математического моделирования экономических процессов института экономики и предпринимательства студентам направления подготовки бакалавриата «Экономика». Глава 1 содержит учебную программа, демонстрационные варианты контрольных работ и билетов для зачета и экзамена и критерии оценок на зачете и экзамене. Главы 2-7 представляет собой краткую сводку теоретических сведений и задач. Глава 2 написана А.Ю. Умилиной, глава 3 – В.К. Вильдановым, главы 4 и 7 – Е.В. Кругловым, глава 5 – А.А. Отделкиной, глава 6 – В.И. Перовой. Общую редакцию пособия осуществлял Е.В. Круглов. Содержание учебного пособия соответствует государственному стандарту, принятому для направления подготовки «Бизнес-информатика», а также тем требованиям, которые предъявляют к содержанию курса «Математический анализ» последующие дисциплины. Авторы надеются, что публикация предлагаемого пособия поможет студентам-экономистам Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского сориентироваться в той разнообразной литературе, которая существует по математическому анализу, отобрать материал для изучения в течение семестра и подготовки к зачету и экзамену.

Авторы благодарны заведующему кафедрой математического моделирования экономических процессов доктору физико-математических наук профессору Ю.А. Кузнецову за интерес, проявленный к работе, и оказанную организационную поддержку.

Глава 1. Программа курса и демонстрационные материалы

1.1. Учебная программа курса «Математический анализ» для направления подготовки бакалавриата «Экономика»

Дисциплина «Математический анализ» преподается в первых двух семестрах и является основой математической подготовки студента-экономиста.

Тема 1. Числа, множества, функции.

1. Развитие понятия о числе. Натуральные, целые, рациональные, действительные числа. Координатная ось (действительная прямая).
2. Числовые множества. Ограниченные множества. Интервалы (отрезки) на действительной прямой, открытые, замкнутые, полуоткрытые. Максимум, минимум, супремум, инфимум. Предельная точка.
3. Число сочетаний C_n^k. Бином Ньютона (без доказательства). Треугольник Паскаля.
4. Понятие функции, область определения, область значений. Способы её задания (графический, табличный, аналитический). Возрастающие и убывающие функции. Монотонные функции. Чётные, нечётные, периодические функции; функции общего вида. Сложная функция как композиция нескольких функций. Повторение тем: линейная, квадратичная функции, обратная пропорциональность.
5. Явное задание функций в декартовых координатах. Основные элементарные функции: степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические, их свойства и графики. Понятие функции, обратной данной. Элементарные функции как функции, полученные из основных элементарных путем применения четырех арифметических действий и образования сложных функций.
6. Элементарные способы построения графиков (сдвиг и растяжение вдоль осей, отображение относительно осей, сложение и умножение).
7. Другие способы аналитического задания функций и кривых в декартовых координатах: неявное, параметрическое (примеры: прямая, окружность). Другие способы введения координат: полярные координаты (примеры: спираль Архимеда, окружность и т.п.).
8. Функция натурального аргумента – последовательность. Примеры последовательностей. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Предельные точки последовательности.

Тема 2. Введение в теорию пределов. Непрерывные функции. Асимптоты.

1. Предел последовательности, геометрическая интерпретация. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Единственность предела последовательности (без доказательства).

2. Теоремы о пределах последовательности, связанных с равенствами и с неравенствами (без доказательства; геометрические интерпретации). Понятие о неопределённостях, раскрытие неопределённости типа $\frac{\infty}{\infty}$.
3. Ограниченность сходящейся последовательности. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности, геометрическая интерпретация. Сходимость последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. (Всё без доказательства.) Число e. Понятие натурального логарифма.
4. Предел функции при $x \to \pm\infty$ и на конечном участке прямой (на языке последовательностей). Единственность предела, теоремы о пределах (без доказательства). Возможные виды неопределённостей.
5. Первый и второй замечательные пределы, следствия из них.
6. Приложения понятия предела к формализации свойств функций.
   А) Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация. Односторонняя непрерывность. Непрерывность функции на множестве. Свойства непрерывных функций на замкнутом интервале (без доказательства). Непрерывность элементарных функций в области их определения. Б) Асимптоты графиков функций и их классификация. Нахождение асимптот.

Тема 3. Дифференциальное исчисление функции одного переменного.

1. Секущая и касательная к графику функции. Задача об определении тангенса угла наклона касательной к кривой как отношения предела приращения функции и приращения аргумента. Задача об определении мгновенной скорости при движении автомобиля по прямой трассе. Определение производной функции в точке. Обозначения производной. Объяснение термина «Дифференцирование функции».
2. Правила дифференцирования и производные основных элементарных функций. Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование.
3. Определение дифференцируемой функции и дифференциала. Геометрический смысл дифференциала. Идея приближенных вычислений с помощью замены приращения функции её дифференциалом при малых приращениях аргумента. Непрерывность дифференцируемой функции.
4. Эластичность функции как предел отношения относительных изменений зависимой и независимой переменных. Правило Маршалла (геометрический смысл эластичности). Примеры вычисления эластичности в экономическом анализе.
5. Производные и дифференциалы высших порядков.
6. Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши (все – без доказательства). Геометрические интерпретации. Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

7. Монотонность функции и знак производной. Точки экстремума: определение, необходимое условие экстремума, достаточные условия экстремума. Вторая производная и геометрия кривой, точки перегиба. Общая схема исследования функции и построения графика. Задачи на наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом промежутке.

Тема 4. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

1. Понятие функции n-переменных. Функция двух независимых переменных: область определения, область значений. Геометрическая интерпретация функции двух переменных. Линии уровня. Общее представление о пределе функции двух переменных.
2. Частное приращение, частная производная и частный дифференциал функции двух переменных. Полное приращение и дифференциал функции двух переменных. Частные производные высших порядков.
3. Производная по направлению. Градиент. Экстремум функции двух переменных. Необходимые условия, достаточные условия. Условный экстремум. Метод непосредственной подстановки; метод Лагранжа поиска условного экстремума.
4. Функции нескольких переменных в экономической науке. Теория потребительского выбора и функция полезности. Производственная функция. Производственная функция Кобба – Дугласа, производственная функция с постоянной эластичностью замещения и т.п.

Тема 5. Интегральное исчисление.

1. Интегральное исчисление. Первообразная. Совокупность всех первообразных – неопределённый интеграл. Интегрирование – операция, обратная дифференцированию. Классы интегрируемых функций. Четыре свойства и таблица интегралов. Неберущиеся интегралы. Замена переменного. Подведение под знак дифференциала.
2. Интегрирование по частям. Интегрирование дробно-рациональной функции. Некоторые замены в интегралах от тригонометрических функций и простейших иррациональностей.
3. Определённый интеграл: площадь криволинейной трапеции и определение определённого интеграла. Свойства определённого интеграла. Теоремы о среднем, интеграл с переменным верхним пределом, формула Ньютона-Лейбница. Специальные функции: интегральный синус, функция Лапласа.
4. Приложения определенного интеграла: площадь криволинейной трапеции, длина дуги (для явно заданных функций). Стоимость хранения продукции на складе при условии её кусочно-непрерывного поступления и убытия.
5. Несобственные интегралы: введение в проблематику. Интегралы первого и второго рода. Понятие сходимости и расходимости, вычисление $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$,

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

6. Восстановление функции двух переменных по её полному дифференциалу.

Тема 6. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

1. Простейшие обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка: использование интегрального исчисления при их решении. Уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ – подробный разбор его решения, построение интегральных кривых, введение на этом примере основных понятий теории дифференциальных уравнений первого порядка: области определения уравнения, особой точки, общего решения, частного решения, задачи Коши.
2. Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае. Основные определения. Разрешение относительно производной. Уравнения с разделяющимися переменными.
3. Однородная функция. Однородные обыкновенные дифференциального уравнения первого порядка.
4. Линейные обыкновенные дифференциального уравнения первого порядка и уравнения Бернулли: решение методом Бернулли.
5. Уравнения в полных дифференциалах.
6. Обыкновенные дифференциального уравнения высших порядков: общее решение, частное решение. Пояснения на примере уравнения типа $y^{(5)}=\sin x$.
7. Определение комплексного числа. Геометрическая интерпретация, модуль, аргумент. Комплексно сопряженные величины. Четыре арифметических действия над комплексными числами. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом. Тригонометрическая форма комплексного числа. Показательная форма комплексного числа. Формулы Эйлера (без доказательства). Формула Муавра возведения в степень. Извлечение корня натуральной степени из комплексного числа.
8. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков: однородные и неоднородные. Структура общего решения однородного уравнения. Однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение (с выводом). Линейно независимые решения в случаях различных действительных корней характеристического уравнения; кратных действительных корней; комплексно сопряженных корней; кратных комплексно сопряженных корней.
9. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью: метод неопределённых коэффициентов.

Тема 7. Ряды.

1. Задачи, подводящие к идее конечности бесконечной суммы: апория Зенона об Ахиллесе и черепахе, последовательное деление отрезка на две части с образованием убывающей геометрической прогрессии длин.

2. Числовые ряды. Определение, сходящиеся и расходящиеся ряды, необходимое условие сходимости, признак расходимости. Ряды с положительными членами: теоремы сравнения. Признак Даламбера, радикальный признак Коши (в предельной форме). Интегральный признак сходимости Коши знакоположительного числового ряда.
3. Знакочередующиеся числовые ряды: признак Лейбница.
4. Знакопеременные числовые ряды: абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана для условно сходящегося ряда.
5. Функциональные ряды: общие понятия. Область сходимости и расходимости. Степенной ряд: определение. Всё об области сходимости (абсолютной, условной) степенного ряда: радиус, интервал, формулы Даламбера и Коши-Адамара поиска радиуса сходимости. Исследование сходимости на концах интервала сходимости.
6. Ряды Тейлора. Ряды Маклорена. Пять классических разложений, определение радиусов сходимости к соответствующим функциям.
7. Вычисление интегралов с использованием степенных рядов. Решение дифференциальных уравнений с использованием степенных рядов.

Повторение, обобщения.

1.2. Демонстрационные варианты контрольных работ

Тема №2. Введение в теорию пределов. Непрерывные функции. Асимптоты.

1. Найти указанные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2+x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x+3}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+24x)}{e^{8x}-1}$.

2. Найти точки разрыва и определить их тип для функции $y=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}$.

3. Найти асимптоты функции $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Тема №3. Дифференциальное исчисление функции одного переменного.

1. Найти производные и дифференциалы функций: а) $y=5x^{12}-\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}-10)$;

б) $y=\dfrac{4\sin 3x-9tg\sqrt{x}}{x^4+e^x}$; в) $y=3^{\arcsin 2x}\cdot\cos(\sqrt[3]{x}-2)$; г) $y=\operatorname{arctg}\ln x^3+3x\sqrt[3]{x}$.

2. Используя правило Лопиталя, найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$.

3. Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики. Для функции из пункта а) найти дополнительно наибольшее и наименьшее значения на отрезке [-3, 5].

а) $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$, $\alpha = -3$, $\beta = 5$; б) $y = \dfrac{x+3}{x-2}$.

Тема №4. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных.

1. Для функции $f(x,y) = e^{5x-3xy+y^3}$ найти частные производные первого порядка и выписать полный дифференциал первого порядка в точке $M(1,-1)$.

2. Для данной функции $f(x,y) = y\sqrt[4]{x+3y}$ найти: а) градиент функции в точке M(1;1); б) модуль найденного градиента; в) производную по направлению градиента в указанной точке.

3. Для данной функции $f(x,y) = \cos\left(x^3 - 3y\right)$ найти все частные производные второго порядка и показать, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

4. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y) = 6x - 6y - 3x^2 - 3y^2$

5. Найти условные экстремумы функции $f(x,y) = 2x^2 + 2xy - 4x - \dfrac{y^2}{2}$ при условии $y = 2x$ 1) методом подстановки; 2) методом Лагранжа.

Тема №5 Интегральное исчисление.

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int\left(2x - \dfrac{3}{x} + 7\cos x\right)dx$; б) $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$; в) $\int x\cos\left(x^2\right)dx$; г) $\int xe^{x+2}dx$;

д) $\int \dfrac{dx}{\left(x^2-4\right)(x+3)}$; е) $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 2$, $y = 0$.

Тема №6 Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Контрольная работа №1. «Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка».

1. Решить задачу Коши: $\dfrac{yy'}{x} + e^y = 0$, $y(1) = 0$.

2. Решить уравнения:

а) $xy'\sin\frac{x}{y}+x=y\sin\frac{x}{y}$; б) $y'=ytgx+\cos x$; в) $y'+y=x\sqrt{y}$;
г) $(x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin y)dy=0$.

Контрольная работа №2. «Линейные дифференциальные уравнения».

1. Решить задачу Коши: $y''+y'-2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$
2. Решить уравнения: а) $y''+12y'+36y=0$, б) $4y''+9y=0$.
3. Решить задачу Коши: $y''+y'-2y=6x^2$, $y(0)=-4$, $y'(\ )=-1$.

Тема №7. Ряды.

1. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n x^n}{5^n\sqrt{n+2}}$ написать первые три члена, найти радиус сходимости и исследовать на сходимость на концах интервала сходимости.
2. Записав подынтегральную функцию интеграла $\int x^2e^{-x^2}dx$ в виде степенного ряда, вычислить интеграл в виде степенного ряда.
3. Найти первые пять членов разложения в степенной ряд частного решения уравнения $y''+xy'+5y=x$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0)=y'(0)=1$.

1.3. Образцы билетов и критерии оценок для зачета и экзамена

Программа зачета и экзамена в точности соответствует учебной программе (темы 1-5 и темы 6-7 соответственно).

Демонстрационный вариант билета на зачете в первом семестре.

1. Вычислить производную функции $y=x\cdot\sin x$.
2. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_1^2\left(x^2+2x-3\right)dx$.
3. Геометрическая интерпретация производной функции $y=f(x)$.
4. Для функции $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ найти координаты и модуль градиента в точке (1,1), а также производную в этой точке по направлению вектора $\vec{a}=\left\{\sqrt{3};1\right\}$.
5. Первый замечательный предел. Сформулировать и доказать.
6. Корректно ли задан интеграл $\int\limits_0^x\frac{\sin x}{x}dx$? Ответ обоснуйте. Что это за функ-

ция? Вычислите $\left(\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx\right)'$.

7. Докажите, что производственная функция с постоянной эластичностью замещения является однородной первой степени (т.е. обладает свойством постоянства отдачи от масштаба).

Форма проведения зачета: письменно.

Критерии оценок:
«зачтено» ставится, если:

- Полученные исчерпывающие ответы на три вопроса;
- либо получены исчерпывающие ответы на два вопроса и ответы (решения) ещё на два вопроса, не доведённые до конца, в которых рассуждения логичны и правильны, причем автор продвинулся в рассуждениях (решении) более, чем наполовину.

«Не зачтено» ставится, если полный (правильный) ответ представлен только на 1-2 вопроса билета или письменная работа не содержит полных (правильных) износов.

Демонстрационный вариант билета на экзамене во втором семестре.

1. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 3y' + 2y = 0$.
2. Решить дифференциальное уравнение $\sin x dx - y dy = 0$.
3. Сформулируйте признак Даламбера сходимости знакоположительного ряда.

С помощью этого признака исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

4. Найти область абсолютной сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$
5. Решите дифференциальное уравнение: $y'' - 8y' + 25y = 2\sin 3x$.
6. Решите уравнение $y^{(6)} + y = 0$.
7. Записать первые пять членов степенного ряда, являющегося решением дифференциального уравнения $y'' + xy' + y = 2x$ с начальными условиями $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.

Форма проведения экзамена: письменно.

Критерии оценок:

Оценка	Критерий
Превосходно	Получены правильные полные исчерпывающие ответы на все семь вопросов.
Отлично	Получены правильные полные исчерпывающие ответы на шесть вопросов.
Очень хорошо	Полученные правильные полные исчерпывающие ответы на пять вопросов; либо получены правильные полные исчерпывающие ответы на четыре вопроса и ответы (решения) ещё на два вопроса, не доведённые до конца, в которых рассуждения логичны и правильны, причем автор продвинулся в рассуждениях (решении) более, чем наполовину.
Хорошо	Полученные правильные полные исчерпывающие ответы на четыре вопроса; либо получены правильные полные исчерпывающие ответы на три вопроса и ответы (решения) ещё на два вопроса, не доведённые до конца, в которых рассуждения логичны и правильны, причем автор продвинулся в рассуждениях (решении) более, чем наполовину.
Удовлетворительно	Полученные исчерпывающие правильные полные ответы на три вопроса; либо получены правильные полные исчерпывающие ответы на два вопроса и ответы (решения) ещё на два вопроса, не доведённые до конца, в которых рассуждения логичны и правильны, причем автор продвинулся в рассуждениях (решении) более, чем наполовину.
Неудовлетворительно	Полный (правильный) ответ представлен только на 1-2 вопроса билета; ответы на другие вопросы билета либо фрагментарны и разрозненны, либо неправильны, либо отсутствуют.
Плохо	Письменная работа не содержит правильных ответов на вопросы билета либо студент замечен в использовании справочных материалов в бумажном или электронном виде, подсказок соседей, общении (устном или письменном) с использованием различных устройств.

1.3. Основная литература.

Теоретические разделы подробно можно изучать по следующим электронным изданиям, выложенным в фонде образовательных электронных ресурсов http://www.unn.ru/rus/books/table.html ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

448.12.06. Солдатов М.А., Круглова С.С., Круглов Е.В. Математический анализ. Часть 1. Предел функции. Непрерывность. Учебное пособие. 70 с.

449.12.06 Солдатов М.А., Круглова С.С., Круглов Е.В. Математический анализ. Часть 2. Дифференциальное исчисление функции одного переменного. Учебное пособие. 81 с.

470.12.06 Солдатов М.А., Круглова С.С., Круглов Е.В. Математический анализ. Часть 3. Интегральное исчисление функции одного переменного. Учебное пособие. 73 с.

792.14.06 Солдатов М.А., Круглова С.С., Круглов Е.В. Математический анализ функций нескольких переменных. Часть 1. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Учебное пособие. 66 с.

795.14.07 Солдатов М.А., Круглова С.С., Круглов Е.В. Несобственные интегралы и ряды. Часть 1. Интегралы несобственные и зависящие от параметра. Учебное пособие. 41 с.

796.14.07 Солдатов М.А., Круглова С.С., Круглов Е.В. Несобственные интегралы и ряды. Часть 2. Числовые и функциональные ряды. Учебное пособие. 44 с.

Раздел «Дифференциальные уравнения» рекомендуется изучать, следуя учебнику:

Общий курс высшей математики для экономистов. Под редакцией Ермакова В.И. М.: Инфра-М, 2007. – 656 с.

Задачники, используемые на практике.

Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие для вузов.- 20-е изд. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 384 с.

Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике, М.:Наука, 1987. – 335 с.

Сборник задач по высшей математике для экономистов. Под редакцией Ермакова В.И. М.: Инфра-М, 2003. – 575 с.

Сборник задач по математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменных: Учеб. Пособие. Авторы: Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – 2-е изд., перераб. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 472 с.

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 176 с.

Глава 2. Введение в теорию пределов

2.1. Числовая последовательность. Предел последовательности

Пусть заданы два множества действительных чисел $D \subset \mathbf{R}$ и $E \subset \mathbf{R}$, где $\boldsymbol{R}$ – множество действительных чисел.

Определение 1. Если каждому элементу (аргументу) $x \in D$ поставлен в соответствие по определенному правилу f единственный элемент $y \in E$, тогда говорят, что на множестве D определена функция, которую обозначают $y = f(x)$.

Определение 2. Функция натурального аргумента называется числовой последовательностью.

Обычно числовая последовательность обозначается следующим образом: $f(n) = x_n$, $n = 1, 2, 3\ldots$ или $n \in \mathbf{N}$, где $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел.

Примеры. 1) $x_n = \dfrac{1}{2^n}$: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \ldots$. 2) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots$. 3) $x_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$

Определение 3. ε-окрестностью числа a назовем множество точек x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \varepsilon$, то есть $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$).

Определение 4. Множество D точек действительной оси называется ограниченным, если существуют два таких числа m и M, что для всех x из этого множества выполняется неравенство $m \le x \le M$, $x \in D$.

Определение 5. Число a (если оно существует) называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется зависящий от ε номер элемента последовательности $n_0(\varepsilon)$, начиная с которого будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Обозначается это так: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$.

Это определение можно записать следующим образом:

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такой, что для всех элементов последовательности $\{x_n\}$ с номером $n > n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

С геометрической точки зрения вне ε-окрестности числа a будет находиться конечное число членов последовательности $\{x_n\}$, тогда как внутри ε-окрестности точки a всегда бесконечное число членов последовательности, независимо от величины ε.

Определение 6. Последовательность, у которой есть предел, называется сходящейся. В противном случае говорят о расходящейся последовательности.

Пример.

Проиллюстрируем определение предела последовательности на примере последовательности $\frac{1}{n+1}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$.

Рассмотрим любое $\varepsilon>0$ и изучим неравенство $\left|\frac{1}{n+1}-0\right|<\varepsilon$. Так как $n+1>0$, то оно эквивалентно неравенству $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$, что справедливо тогда и только тогда когда $n+1>\frac{1}{\varepsilon}$, или $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$.

Обозначим $\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$ максимальное целое число, не превосходящее $\frac{1}{\varepsilon}-1$. Очевидно, что это есть $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$ такое, что для всех n, больших n_0, выполняется неравенство $\left|\frac{1}{n+1}-0\right|<\varepsilon$. Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$.

Определение 7. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

Замечание. Любую сходящуюся последовательность $\{x_n\}$ можно представить в виде $x_n=a+\alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Определение 8. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа ε найдется номер элемента последовательности $n_0=n_0(\varepsilon)$, зависящий от ε, начиная с которого будет выполняться неравенство $|x_n-a|>\frac{1}{\varepsilon}$ (т.е. её пределом является бесконечность). Обозначается это так: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\infty$.

2.2. Свойства сходящихся последовательностей

1. **Теоремы о пределах последовательности.**

Пусть даны две сходящиеся последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=b$. Тогда: а) $\lim\limits_{n\to+\infty}kx_n=ka,\ k\in\mathbf{R}$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$; в) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$; г) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{a}{b}$.

2. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.
3. Сходящаяся последовательность ограничена.

4. Последовательность, обратная к бесконечно малой, будет бесконечно большой и наоборот.

5. Сумма конечного числа бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.

6. Произведение бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$на ограниченную последовательность $\{x_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.

Пример. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos\sqrt{2n+1}}{n^3-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\sqrt{2n+1}\cdot\dfrac{1}{n^3-n}\right)=0$ (так как $\left|\cos\sqrt{2n+1}\right|\le 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3-n}=0$.

7. «Теорема о конвоирующих». Если $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=a$ и $x_n\le z_n\le y_n$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=a$.

8. Начиная с некоторого номера n: $n!>a^n>n^k>\log_a n\quad(a>0)$.

Примеры.

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac12+\frac14+\frac18+\ldots+\frac{1}{2^n}}{\frac13+\frac19+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac12\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\frac13\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}=\dfrac32$. (Здесь использовали формулы для суммы геометрической прогрессии и арифметические свойства пределов.)

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n}{n!}=0$.

Для доказательства этого факта воспользуемся свойством 6 сходящихся последовательностей. Имеем: $0<\dfrac{3^n}{n!}=\dfrac31\dfrac32\dfrac33\dfrac34\dfrac35\ldots\dfrac3n<\dfrac92\dfrac34\dfrac34\dfrac34\ldots\dfrac34=\dfrac92\left(\dfrac34\right)^{n-3}\underset{n\to+\infty}{\to}0$.

Однако при вычислении пределов не всегда можно сразу применить теорему о пределах и другие свойства последовательностей. При формальной подстановке бесконечности (точнее бесконечно большой величины) вместо n в общий элемент последовательности могут возникать неопределенности (например, такие, как $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac00$, $\infty-\infty$, ∞^0, 1^∞, $\dfrac00$). Чтобы избежать неопределенностей и вычислить предел последовательности, обычно сначала используют технику раскрытия неопределенностей, включающую вынесение за скобки в числителе и знаменателе старшей степени (или наиболее быстро растущего слагаемого), разложение на множители, умножение на сопряженное выражение и другие приемы. Рассмотрим некоторые из этих способов на примерах.

Примеры.

Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ надо числитель и знаменатель разделить на старшую степень знаменателя:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2+3n-1}{8n^2+10}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{8+\frac{10}{n^2}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Для раскрытия неопределенности $\infty-\infty$ надо умножить и разделить разность на одно и то же сопряженное выражение:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+4}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+4}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}=-1.$$

Умножив числитель и знаменатель на сопряженное числителю выражение $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}$, получаем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, которую раскрываем как в примере 1.

Определение 9. Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (неубывающей), если для любого $n\geq 1$ выполняется неравенство $x_n\leq x_{n+1}$, т.е. $x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n\leq\ldots$.

Последовательность называется строго возрастающей, если неравенства строгие (равенство исключено), т.е. $x_1<x_2<\ldots<x_n<\ldots$.

Аналогично, последовательность называется убывающей (невозрастающей), если для любого $n\geq 1$ выполняется неравенство $x_n\geq x_{n+1}$, и соответственно строго убывающей, если $x_n>x_{n+1}$.

Убывающие и возрастающие последовательности вместе называются монотонными (строго монотонными, если равенства исключаются).

Примеры.

$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots$ – строго убывающая последовательность,

$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots$ – строго возрастающая последовательность,

$-1,1,-1,1,\ldots,(-1)^n,\ldots$ не является монотонной.

Теорема Вейерштрасса.

Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Пример.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$: $2, \frac{2}{9}, \frac{64}{27},\ldots$. Она имеет предел, т.к. является возрастающей и ограниченной. Принято обозначение: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ – этот предел называется «число *e*». Это иррациональное число $e = 2{,}71828182845\ldots$. Оно часто применяется, например, если его взять в качестве основания показательной функции, получим экспоненциальную функцию e^x. Также число e является основанием натурального логарифма $\log_e x=\ln x$.

2.3. Предел функции одного действительного переменного

До сих пор мы рассматривали функции натурального аргумента, который менялся дискретно. Рассмотрим теперь функции от непрерывно меняющегося аргумента x.

Определение 10. Число L (если оно существует) называется пределом функции $f(x)$ при значении аргумента x стремящемся к a, если для любой сходящейся к a и отличной от a последовательности $\{x_n\}$ соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ стремится к L:

$$x_n\to a,\ x_n\ne a,\ n\to+\infty\ \Rightarrow\ f(x_n)\to L,\ n\to+\infty.$$

Обозначают это так: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

Замечание. Если для разных последовательностей $\{x_n\}$ получаются разные пределы $L_1\ne L_2$, это означает, что в точке a функции $f(x)$ не имеет предела.

Пример.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$. Для последовательности $x_n^1=\frac{1}{\pi n}\to0$ последовательность значений функции $f(x_n)=\sin\pi n\to0$ при $n\to\infty$. Для последовательности $x_n^2=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\to0$ последовательность значений функции $f(x_n)=\sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)\to1$ при $n\to\infty$. Для разных последовательностей аргумента, стремящихся к нулю, предел последовательности значений функции будет разным. Следовательно, $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ не существует.

Пусть функция $f(x)$ определена на всей оси или, во всяком случае, для всех достаточно больших по абсолютной величине значений x.

Определение 11. Число L (если оно существует) называется пределом функции $f(x)$ на бесконечности ($x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$), если для любой неограниченной последовательности $\{x_n\}$ соответствующая последовательность значений функции стремится к L.

Записывают это так: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ или $f(x) \to L$ при $x \to +\infty$.

Замечание. Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, то график функции $y = f(x)$ при неограниченном возрастании $|x|$ сколь угодно близко подходит (или асимптотически приближается) к горизонтальной прямой $y = L$, которая является горизонтальной асимптотой для кривой $y = f(x)$ при $x \to \infty$.

Пример. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, следовательно, $y = 0$ является горизонтальной асимптотой для кривой $y = f(x)$ при $x \to -\infty$.

Определение 12 . Число L^+ (если оно существует) называется пределом функции $f(x)$ в точке a справа (правым пределом, $x \to a+0$ – при стремлении x к a справа), если для любой сходящейся к a и отличной от a последовательности $\{x_n\}$, причем $x_n > a$, соответствующая последовательность значений функции стремится к L^+.

$$x_n \to a,\ x_n \neq a,\ x_n > a,\ n \to +\infty \ \Rightarrow\ f(x_n) \to L^+,\ n \to +\infty.$$

Обозначают это так: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = L^+$.

Определение 13. Число L^- (если оно существует) называется пределом функции $f(x)$ в точке a слева (левым пределом, $x \to a-0$ – при стремлении x к a слева), если для любой сходящейся к a и отличной от a последовательности $\{x_n\}$, причем $x_n < a$, соответствующая последовательность значений функции стремится к L^-.

$$x_n \to a,\ x_n \neq a,\ x_n < a,\ n \to +\infty \ \Rightarrow\ f(x_n) \to L^-,\ n \to +\infty.$$

Обозначают это так: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = L^-$.

Теорема. Функция $f(x)$ имеет предел L в точке a тогда и только тогда, когда существуют пределы как справа, так и слева, и они равны L : $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Свойства предела функции

Так как мы сформулировали определение предела функции в точке «на языке последовательности», то арифметические свойства предела функции в точке будут следовать из свойств предела числовой последовательности.

Теоремы о пределах. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$. Тогда:

1. $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = b \pm c$; $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = b\cdot c$; $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{b}{c}$, если $c \neq 0$.
2. Если функция имеет предел в точке (или на бесконечности), то он един-

ственный.

3. Функция, обратная к бесконечно малой функции, будет бесконечно большой и наоборот.
4. Сумма конечного числа бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.
5. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая функция.
6. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ и $f(x\le h(x)\le g(x))$, то $\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$ (это «теорема о конвоирующих»).

Замечательные пределы.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Приемы раскрытия неопределенностей, изложенные выше для пределов последовательностей, также можно использовать для вычисления пределов функций. Рассмотрим другие способы раскрытия неопределенностей на примерах.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$ (по свойству логарифма степени и второго замечательного предела)

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1$ (сделаем замену $e^x-1=t$, $t\to 0$, $x=\ln(1+t)$).

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 5x}{(x+1)5x}=5$.

Для раскрытия неопределенности $\dfrac{0}{0}$ также применяется техника разложения на множители:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^4+4x^2-5}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-x-1)(x+1)}{(x^2-1)(x^2+5)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+5)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-x-1)}{(x-1)(x^2+5)}=\frac{1}{12};$$

и умножение на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{(1+2x-9)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)}=\frac{4}{3}.$$

Для раскрытия неопределенности 1^∞ используется второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-4}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{4}{x}\right)^x} = \frac{e}{e^{-4}} = e^5.$$

Здесь мы вынесли за скобки x^x, сократили и воспользовались вторым замечательным пределом. Можно выделить в основании целую часть, а затем умножить и разделить показатель на получившуюся в основании правильную дробь.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x^2+3}\right)^{3x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x+3}{x^2+3}\right)^{3x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x+3}{x^2+3}\right)^{\left(-\frac{x^2+3}{2x+3}\right)3x^2\left(-\frac{2x+3}{x^2+3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-\frac{x^2+3}{2x+3}}\right)^{\left(-\frac{x^2+3}{2x+3}\right)}\right)^{3x^2\left(-\frac{2x+3}{x^2+3}\right)} = e^{-\infty} = 0.$$

2.4. Непрерывность функции

Определение 14. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

1) она определена в некоторой окрестности точки x_0 (включая её саму), имеет предел в точке x_0;

2) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 15. Функция называется непрерывной на множестве (в области), если она непрерывна в произвольной точке этого множества (этой области).

Теорема. Все элементарные функции непрерывны в области определения. Арифметические действия над элементарными функциями не выводят из класса непрерывных функций.

<u>Примеры.</u>

1) Функции $\sqrt{x}$, $\ln x$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\sin\sqrt{x}$ определены и непрерывны при любом $x > 0$.

2) Функция $\frac{1}{x}$ определена и непрерывна всюду кроме $x = 0$.

3) Функции $\sin x$, $\cos x$, e^x, многочлен $a_n x^n + a_{n+1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ определены и непрерывны на всей числовой оси.

Определение 16. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 справа, если существует $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$, и называется непрерывной в точке x_0 слева, если существует $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$. Это односторонняя непрерывность.

Теорема. Функция $f(x)$ является непрерывной в точке x_0 тогда и только тогда, когда она в этой точке непрерывна справа и слева (т.е. существуют односторонние пределы как справа, так и слева, и они равны): $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$.

Будем предполагать, что функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a.

Определение 17. Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке a, то говорят, что функция терпит разрыв в этой точке, а сама точка a называется точкой разрыва функции.

Классификация точек разрыва

Точки устранимого разрыва.

Определение 18. Точка a называется точкой устранимого разрыва, если существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \neq \infty$, но он не совпадает со значением функции в точке a (оно вообще может быть не определено).

Разрыв будет устранён, если доопределить (переопределить) значение функции в точке a, положив $f(a) = L$. После этого функция становится непрерывной в точке a.

Точки неустранимого разрыва.

Определение 19. Точка a называется точкой неустранимого разрыва, если не существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Неустранимый разрыв бывает первого и второго рода.

Определение 20. Точка a называется точкой разрыва первого рода (конечный скачок), если в ней существуют пределы слева и справа, но они не равны: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$.

Определение 21. Точка a называется точкой разрыва второго рода (бесконечный скачок), если в ней хотя бы один из односторонних пределов не существует (или бесконечен).

<u>Примеры.</u>

Функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ имеет в точке $x = 0$ устранимый разрыв, т.к. $\lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, но $f(0)$ не сущестует.

Функция $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ имеет в точке $x=0$ неустранимый разрыв 1го рода, т.к. $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=1$.

Функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ имеет $f(x)=\frac{1}{x}$ имеет в точке $x=0$ неустранимый разрыв 2го рода, т.к. оба односторонних предела бесконечны.

2.5. Нахождение асимптот графика функции

Определение 22. Асимптотой называется прямая, к которой неограниченно приближается (не достигая ее при этом) график функции. Различают вертикальные, наклонные и горизонтальные асимптоты.

Определение 23. Если $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой для кривой (для функции) $y=f(x)$, и наоборот. При этом указанная прямая может быть асимптотой только для левой ($x\to a-0$) или правой ($x\to a+0$) ветви графика функции.

Определение 24. Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой для графика функции $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0$. Справедливо и обратное. В частности, при $k=0$ имеем горизонтальную асимптоту $y=b$. Аналогично при $x\to-\infty$, $x\to+\infty$.

Теорема. Для того чтобы прямая $y=kx+b$ была наклонной асимптотой для графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)$.
Аналогично при $x\to-\infty$, $x\to+\infty$.
<u>Примеры.</u>

Рассмотрим функцию $y=e^{-x^2}$ (кривая Гаусса). Прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой для графика функции, т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2}=0$. Вертикальных асимптот нет, потому что функция определена и ограничена на всей числовой оси.

Рассмотрим функцию $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$. Исследуем ее поведение на границе области определения:

$$y(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=+\infty,\quad y(-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=-\infty$$

$$y(-1-0)=\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3}{1-x^2}=+\infty,\quad y(-1+0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=-\infty$$

$$y(1-0)=\lim_{x\to1-0}\frac{x^3}{1-x^2}=+\infty,\quad y(1+0)=\lim_{x\to1+0}\frac{x^3}{1-x^2}=-\infty.$$

Следовательно, $x=-1$ и $x=1$ – вертикальные асимптоты. Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x-x^3}=-1;\ b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x^2}=0.$$

Таким образом, $y=-x$ – наклонная асимптота на обоих направлениях (при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$).

2.6. Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить предел последовательности:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2-n)^2-\left(2+n^2\right)}{4n+3}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+1)^2+(n-1)^2}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{3+n^3}-n\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)^3-n^2}{n^4-(n+1)^4}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n-1)}-\sqrt{n^2-5}\right)$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2-n)^3}{n^3-(n+1)^3}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+1}-n\right)$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^3-7n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2}\right)$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-3}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[3]{3n^2+1}+\sqrt[4]{n^5+3}}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{6n-3}-\sqrt{n^4+2}}{\sqrt[3]{n^3+1}-4n^2}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^3-\sqrt{n^5-2n}}{\sqrt[3]{4n^9+1}-\sqrt[4]{n^8+1}}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-3}+n^2}{\sqrt[5]{3n^5+1}-\sqrt[3]{n^4+3}}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+6^n}{2^n-6^{n+1}}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n-3^n}{3^n+4^{n-1}}$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{4n-n^2}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+6+\ldots+2n}{n-1}-n\right)$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\left(n^2-1\right)}{n^2+1}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\left(\sqrt{n}+n\right)}{\sqrt{n^4+1}}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+2n-1}\right)^{2n^2-n}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2-1}\right)^{-n^2}$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-4}{n+2}\right)^{3n+2}$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{5-n}$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2}$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{n^2-3n}$

2. Вычислить предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2-x)^2-(2+x)^2}{x^3+3}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-5}+\sqrt{x^3+2}}{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[4]{x^8+2}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{5^x-4^{x+1}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\left(x^2(x+1)\right)}{x^5+4x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\sqrt{x-3}+3x\right)}{\sqrt{9x^6+16}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-4}{2x+5}\right)^{x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{-x^4}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^2-x-1}$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}$

11. $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

12. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt{2x}-4}$

13. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x}}$

14. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2+x-2}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 3x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{9x^2}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin 5x}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\left(e^{3x}-1\right)^2}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos^2 x}{1-\cos 4x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(1+2x)}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x^2+\pi x}$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{e^{x^2}-1}$

24. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x}$

25. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$

26. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$

27. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 2x\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$

30. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\cos x}{\cos 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

3. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность и классифицировать точки разрыва, если они существуют у функции.

1. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

2. $f(x)=\dfrac{|2x-1|}{x^2+1}$.

3. $f(x)=\begin{cases}-2x^2, & x\le 3,\\ 3x, & x>3.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1,\\ -x, & x>1.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}\frac{1-x^2}{1-x}, & x\ne 1,\\ 3, & x=1.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+3}, & x\ne -3,\\ 0, & x=-3.\end{cases}$

7. $f(x)=\dfrac{4x+4}{(x-1)^2}$.

8. $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^2-4}$

9. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$

10. $f(x)=\dfrac{2x^3-1}{x^2}$

11. $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0,\\ 1-x, & 0<x\le 1.\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}1-x, & 0<x\le 1,\\ \frac{1}{1-x}, & x>1.\end{cases}$

13. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

14. $f(x)=\dfrac{\ln(1-2x)}{x}$.

15. $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$.

16. $f(x)=\begin{cases}x\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}, & x\ne 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|-x}{x^2}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

18. $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{2-x}$.

19. $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases}1+2^x, & x\le 0,\\ \sin\dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$

4. Найти асимптоты графика функции $f(x)$.

1. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$

2. $f(x)=x+\mathrm{arctg}\,x$

3. $f(x)=x+\dfrac{9}{x^2}$

4. $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{-x+3}$

5. $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2+3}{x^2+1}$

6. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2}$

7. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2}$

8. $f(x)=\dfrac{1}{x^4-1}$

9. $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}$

10. $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}$

11. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{(x-1)^2}$

12. $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^3}$

13. $f(x)=\dfrac{3}{x^2-2x+3}$

14. $f(x)=\dfrac{5x}{x^2+3}$

15. $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^2$

16. $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^2+1}$

17. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

18. $f(x)=\dfrac{1}{x^3-1}$

19. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

20. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-3}$

21. $f(x)=(x-4)\ln(x-4)$

22. $f(x)=xe^{-x^2}$

23. $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{x-2}$

24. $f(x)=\dfrac{x-5}{e^x}$

25. $f(x)=(1-|x|)\ln(1-|x|)$

26. $f(x)=x^{-2}e^{x^2}$

27. $f(x)=x^2e^{-x^2}$

28. $f(x)=x^{-2}e^{2x}$

29. $f(x)=x^3e^{-x^2}$

30. $f(x)=x^{-3}e^{x^2}$

Глава 3. Дифференциальное исчисление функции одного переменного

Пусть $y = f(x)$ некоторая функция, определенная на интервале X. Рассмотрим приращение аргумента Δx функции в некоторой точке $x_0 \in X : x = x_0 + \Delta x$ и соответствующее этому приращению приращение функции: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента в точке x_0, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Другие обозначения производной: y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$. Операция нахождения производной называется операцией дифференцирования.

Производная функции $f'(x_0)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке:

$$tg\alpha = f'(x_0).$$

Правила дифференцирования. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в некоторой точке x. Тогда в этой точке существуют производные суммы, разности, произведения и частного (если $g(x) \neq 0$) данных функций, причем:

1) $(Cf(x))' = Cf'(x)$,

2) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,

3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Производная сложной функции. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, функция $z = g(y)$ имеет производную $y_0 = f(x_0)$. Тогда функция $h(x) = g(f(x))$ имеет производную в точке x_0, причем: $h'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0)$.

Производные некоторых функций.

1. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \alpha \neq 0$;
2. $(e^x)' = e^x$;
3. $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$;
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$;
6. $(\sin x)' = \cos x$;
7. $(\cos x)' = -\sin x$;

8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12. $(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$;

13. $(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле. Таким образом, если имеется неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Производные высших порядков. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $y' = f'(x)$ в каждой точке x некоторого интервала X. Таким образом, каждой точке x ставится в соответствие некоторое значение производной $f'(x)$. Полученное соответствие снова является функцией.

Определение. Производной второго порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от производной функции первого порядка, т.е.

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Аналогично определяется производная порядка n:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Теорема. Если дифференцируемая на промежутке X функция $y = f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x) = 0$.

Теорема. Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y = f(x)$ меняет знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума функции $y = f(x)$, если с минуса на плюс, - то точка минимума.

Теорема. Вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции в точке перегиба x_0 равна нулю, т.е. $f''(x) = 0$.

Теорема. Если вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции при переходе через некоторую точку x_0 меняет свой знак, то x_0 есть точка перегиба графика функции $y = f(x)$.

Схема исследования функции с помощью производной.

1. Найти область определения функции и ее характерные особенности (четность, нечетность, периодичность); Найти точки разрыва и промежутки непрерывности;
2. По первой производной найти промежутки монотонности, точки, подозрительные на экстремум, исследовать их;
3. По второй производной найти точки перегиба и интервалы выпуклости.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Определить нули (корни) функции, указать другие специфические особенности функции;
6. Построить график функции.

Примеры и задачи.

Пример 1. Найти производную функции $y = x^2$, используя определение.

Решение: Найдем приращение функции в точке x:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Найдем предел $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x.$$

Таким образом: $(x^2)' = 2x$.

Задачи для самостоятельного решения.

Найти производную функции с помощью определения:

1. $y = 2x^3$,
2. $y = x^2 - 2x + 5$,
3. $y = \sqrt{x}$,
4. $y = \sin x$,
5. $y = 2\cos x$,
6. $y = \dfrac{1}{x}$,
7. $y = \sqrt{2x+1}$,
8. $y = \sqrt{1+x^2}$,
9. $y = \operatorname{tg} x$.

Пример 2. Вычислить производную функции $y = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{2x^3}{3} + x$.

Решение: Воспользуемся правилом дифференцирования суммы и разности:

$$y' = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x\right)' = \left(\frac{x^5}{5}\right)' - \left(\frac{2x^3}{3}\right)' + \left(x\right)';$$

Вынесем постоянные множители за знак производной:

$$y' = \left(\frac{x^5}{5}\right)' - \left(\frac{2x^3}{3}\right)' + \left(x\right)' = \frac{1}{5}\left(x^5\right)' - \frac{2}{3}\left(x^3\right)' + \left(x\right)';$$

С помощью таблицы производных найдем производную степенной функции:

$$y' = \frac{1}{5}\left(x^5\right)' - \frac{2}{3}\left(x^3\right)' + \left(x\right)' = \frac{1}{5}\left(5x^4\right) - \frac{2}{3}\left(3x^2\right) + 1 = x^4 - 2x^2 + 1;$$

Ответ: $y' = x^4 - 2x^2 + 1$.

Пример 3. Вычислить производную функции $y = x^2 \cos x$.

Решение: Воспользуемся правилом нахождения производной произведения двух функций: $y' = \left(x^2 \cos x\right)' = \left(x^2\right)' \cos x + x^2 \left(\cos x\right)'$;

По таблице производных находим производные функций x^2 и $\cos x$:

$$y' = \left(x^2\right)' \cos x + x^2 \left(\cos x\right)' = 2x \cos x + x^2 \left(-\sin x\right) = x\left(2\cos x - x\sin x\right).$$

Ответ: $y' = x\left(2\cos x - x\sin x\right)$.

Пример 4. Вычислить производную функции $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$.

Решение: Воспользуемся правилом нахождения производной частного двух функций:

$$y' = \left(\frac{\cos x}{1 - \sin x}\right)' = \frac{\left(\cos x\right)' \left(1 - \sin x\right) - \cos x \left(1 - \sin x\right)'}{\left(1 - \sin x\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(-\sin x\right)\left(1 - \sin x\right) - \cos x\left(-\cos x\right)}{\left(1 - \sin x\right)^2};$$

По таблице производных находим производную функции $\cos x$, по правилу дифференцирования разности находим производную $1 - \sin x$:

$$y' = \frac{\left(\cos x\right)' \left(1 - \sin x\right) - \cos x \left(1 - \sin x\right)'}{\left(1 - \sin x\right)^2} = \frac{\left(-\sin x\right)\left(1 - \sin x\right) - \cos x\left(-\cos x\right)}{\left(1 - \sin x\right)^2}$$

$$= \frac{-\sin x + 1}{\left(1 - \sin x\right)^2};$$

Раскроем скобки и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$y' = \frac{\left(-\sin x\right)\left(1 - \sin x\right) - \cos x\left(-\cos x\right)}{\left(1 - \sin x\right)^2} = \frac{1 - \sin x}{\left(1 - \sin x\right)^2} = \frac{1}{1 - \sin x}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{1}{1 - \sin x}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. $y = \left(x^3 - 3x + 2\right)\left(x^4 + x^2 - 1\right)$;
2. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$;
3. $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{2x}}$;
4. $y = \dfrac{tgx}{x}$;
5. $y = \dfrac{x}{\sin x + \cos x}$;
6. $y = \cos^2 x$;
7. $y = \cos x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x$;
8. $y = \dfrac{x \sin x}{1 + tgx}$;
9. $y = \sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\, x$;

10. $y=\dfrac{x-1}{\log_2 x}$;

11. $y=\ln(1-2x)$;

12. $y=x10^x$;

13. $y=\dfrac{x}{e^x}$;

14. $y=10^{2x-3}$;

Пример 5. Вычислить производную сложной функции $y=\sqrt{\cos 4x}$.

Решение: Внешняя функция $g(u)=u^{\frac{1}{2}}$, ее производная равна $g'(u)=\dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u'$:

$y'=\left(\sqrt{\cos 4x}\right)'=\dfrac{1}{2}(\cos 4x)^{-\frac{1}{2}}(\cos 4x)'$;

Функция $\cos 4x$ опять является сложной: $(\cos 4x)'=(-\sin 4x)(4x)'=-4\sin 4x$;

Получим: $y'=\dfrac{1}{2}(\cos 4x)^{-\frac{1}{2}}(\cos 4x)'=\dfrac{-4\sin 4x}{2\sqrt{\cos 4x}}=\dfrac{-2\sin 4x}{\sqrt{\cos 4x}}=-2tg4x\sqrt{\cos 4x}$;

Ответ: $y'=-2tg4x\sqrt{\cos 4x}$.

Пример 6. Вычислить производную функции $y=x^x$.

Решение: Найдем натуральный логарифм от обеих частей равенства:

$$\ln y=\ln x^x;$$

Используя свойства логарифма, получим:

$$\ln y=x\ln x;$$

Вычислим производные от левой и правой частей, используя правила дифференцирования:

$$\frac{1}{y}y'=x'\ln x+x(\ln x)';$$

$$\frac{1}{y}y'=\ln x+1;$$

Выразим из полученного равенства производную y':

$$y'=y(\ln x+1);$$

Подставим в полученное равенство исходную функцию $y=x^x$:

Ответ: $y'=x^x(\ln x+1)$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. $y=6\cos\dfrac{x}{3}$;
2. $y=(1-5x)^4$;
3. $y=\dfrac{1}{\left(1-x^2\right)^5}$;
4. $y=x^{\sin x}$;
5. $y=\ln\operatorname{arctg}2x$;
6. $y=\cos\sqrt{x^2+3}$;
7. $y=\arcsin\ln 4x$;
8. $y=\sin^2(\cos 3x)$;
9. $y=(\sin x)^{5e^x}$;
10. $y=(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}$;

Пример 7. Найти производную второго порядка функции $y = \sin^2 x$.

Решение: Найдем сначала первую производную функции $y = \sin^2 x$:

$$y' = \left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x\left(\sin x\right)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

Вычислим вторую производную:

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(\sin 2x\right)' = \cos 2x\left(2x\right)' = 2\cos 2x.$$

Ответ: $y'' = 2\cos 2x$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти производную второго порядка функции $y = \sqrt{1+x^2}$;
2. Найти производную третьего порядка функции $y = x\sin x$;
3. Найти производную третьего порядка функции $s = te^{-t}$;
4. Найти производную n-го порядка функции:
   a. $e^{-\frac{x}{2}}$;
   b. $\ln x$;
   c. x^n;
   d. $\cos^2 x$.
5. Доказать, что
   a. $\left(uv\right)'' = u'' + 2u'v' + v''$;
   b. $\left(uv\right)''' = u''' + 3u''v' + 3u'v'' + v'''$.
6. Найти производную третьего порядка функции $y = e^{-x}\sin x$.
7. $f\left(x\right) = \arcsin\frac{1}{x}$; найти $f\left(2\right)$, $f'\left(2\right)$, $f''\left(2\right)$.

Пример 8. Написать уравнение касательной к кривой $y = \frac{x^3}{3}$ в точке $x = -1$.

Решение: Уравнение касательной в точке $M(x_0, y_0)$ на кривой $y = f(x)$ имеет вид:

$$y - y_0 = k\left(x - x_0\right), \text{ где } k = tg\alpha = f'(x).$$

Найдем производную функции: $y' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$; При $x = -1$ производная равна

$$f'(-1) = (-1)^2 = 1.$$

Из условия задачи $x_0 = -1$. Тогда $y_0 = \frac{\left(x_0\right)^3}{3} = -\frac{1}{3}$

Запишем теперь уравнение касательной: $y - \left(-\frac{1}{3}\right) = 1\left(x - \left(-1\right)\right)$,

Ответ: $y = x + \frac{2}{3}$.

Пример 9. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ с помощью производной.

Решение:

1) Область определения функции $D_f=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; Функция не является ни четной, ни нечетной. Функция непериодическая.

2) Определим промежутки монотонности. Найдем первую производную:

$$y'=\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right)'=\frac{2x(x-1)-\left(x^2+3\right)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2};$$

Решим уравнение: $\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0$; $x^2-2x-3=0$, находим точки подозрительные на экстремум: $x=-1$; $x=3$. Разобьем область определения полученными точками на интервалы и определим в них знак производной:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;3)$	3	$(3;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	Не сущ.	-	0	+
$f(x)$	□	max	□	Не сущ.	□	min	□

3) Найдем точки перегиба функции и промежутки вогнутости:

$$y''=\left(\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)\left(x^2-2x-3\right)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{2(x-1)\left((x-1)^2-\left(x^2-2x-3\right)\right)}{(x-1)^4}=\frac{8}{(x-1)^3};$$

Так как $y''\neq 0$, то график заданной функции не имеет точек перегиба. Определим направление вогнутости.

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f''(x)$	-	Не сущ.	+
$f(x)$	$\cap$	Не сущ.	$\cup$

4) Выясним наличие у графика наклонных асимптот:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{(x-1)x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3+x}{x-1}=1.$$

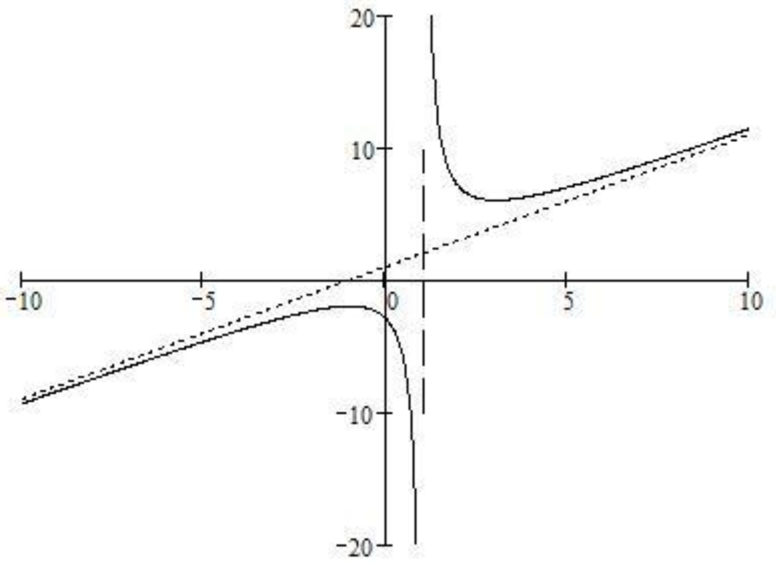
Таким образом, прямая $y = x + 1$ является наклонной асимптотой графика заданной функции. Функция $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ непрерывна всюду, кроме точки $x = 1$. Вычислим в этой точке односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty, \ \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty.$$

Таким образом, точка $x = 1$ является точкой разрыва 2 рода, а прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика функции.

5) Поскольку $y \neq 0$ для любой точки из области определения, то график не пересекает ось Ox. Найдем точку пересечения графика функции и оси Oy: Так как $f(0) = -3$, то искомая точка $(0;-3)$.

6) Построим график функции с учетом полученных результатов:



Задачи для самостоятельного решения.

1. Написать уравнения касательных к кривым, построить кривые и касательные:
   a. $y^2 = x^3$ в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$;
   b. $y = \dfrac{8}{4+x^2}$ в точке $x = 2$;
   c. $y = \sin x$ в точке $x = \pi$.
2. Под каким углом кривая $y = \sin x$ пересекает ось Ox?
3. В уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$ определить b и c, если парабола касается прямой $y = x$ в точке $x = 2$.
4. Написать уравнения касательных к гиперболе $xy = 4$ в точках $x_1 = 1$, $x_2 = -4$ и найти угол между касательными.
5. Под каким углом прямая $y = 0,5$ пересекает кривую $y = \cos x$?
6. В какой точке касательная к параболе $y = x^2 + 4x$ параллельна оси Ox?

7. Исследовать функцию с помощью производных, построить график, найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанном отрезке:
    a. $y = 2x^3 - 9x^2 - 12x - 5$, $(-1;3)$;
    b. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, $(-1;2)$;
    c. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$, $(2;4)$;
    d. $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$, $(-1;2)$;
    e. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$, $(0;4)$;
    f. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$, $(-2;3)$;
    g. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$, $(-3;0)$;
    h. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$, $(-3;1)$;
    i. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$, $(1;4)$;
    j. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$, $(-1;4)$;
8. Исследовать функцию с помощью производной, построить график:
    a. $y = \dfrac{x^2+1}{x}$;
    b. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$;
    c. $y = \dfrac{x^2-3}{x+2}$;
    d. $y = \dfrac{x^2-8}{x-3}$;
    e. $y = \dfrac{x^2+9}{x+4}$;
    f. $y = \dfrac{x^2+4}{x}$;
    g. $y = \dfrac{x^2+5}{x+2}$;
    h. $y = \dfrac{x^2-5}{x-3}$;
    i. $y = \dfrac{x^2-15}{x+4}$;
    j. $y = \dfrac{x^2+9}{x}$;

9. Каковы должны быть размеры прямоугольника наибольшей площади, если он вписан в круг радиуса 6 см?
10. Найти наибольший объем цилиндра, у которого полная площадь поверхности равна $S = 24\pi$ (м^2).
11. Найти наибольший объем конуса, образующая которого равна $t = \sqrt{3}$ (м).
12. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?
13. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма длин его катета и гипотенузы постоянна и равна 4(см).
14. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие. 22-е изд., перераб. – СПб.: Издательство «Профессия», 2001. – 432 с.
2. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд. – М. ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.:Высшая Школа, 1999. – Ч.1. – 416 с.
4. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. 8-е изд, стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2006. – 240 с.

Глава 4. Функции нескольких переменных

Введение в общую теорию. Следуя [1]-[2], напомним основные понятия данного раздела математического анализа. В первую очередь остановимся на случае функции двух переменных.

Пусть дано некоторое множество D упорядоченных пар чисел (x,y). Геометрически его можно изобразить как множество точек $P(x,y)$ декартовой плоскости Oxy: отождествляем понятия «упорядоченная пара чисел (x,y)» и «точка $P(x,y)$ плоскости».

Определение 4.1. Если каждой паре (x,y) значений двух независимых переменных x и y из некоторой области $D=\{(x,y)\}$ их изменения по некоторому правилу (закону) приводится в соответствие определённое значение z величины z, то говорят, что z есть *функция двух переменных* x и y; она обозначается символами $z = f(x,y), z = F(x,y),\ z = z(x,y)$ и т.д.

Величины x и y называются также *аргументами функции*, множество D – *областью* (*множеством*) *определения* или *областью задания* функции, а совокупность $Z = \{z\} = \{f(x,y)\}$ всех значений функции называется её *областью* (*множеством*) *изменения* или *областью значений.*

Удобными являются трактовка функции двух переменных как функции точек $P(x,y)$ плоскости и обозначение в форме $z = f(P)$: при этом используется терминология такая же, как и для функций одного переменного. Если функция задана аналитически, некоторой формулой $z = f(x,y)$, без оговорок об области задания, то за эту область принимают множество всех пар (x,y) (всех точек $P(x,y)$), для которых эта формула имеет смысл. Эту область задания называют областью существования или естественной областью определения.

<u>Примеры.</u> 1) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Область существования: $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, т.е. $x^2 + y^2 \leq 9$ – это круг с центром в точке $O(0,0)$ радиуса 3 (включая границу – окружность $x^2 + y^2 = 9$).

2) $z = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 3y$. Область существования – полуплоскость $x > 0$.

3) $z = 7\sqrt{x} + \dfrac{2}{y^2}$. Область определения $D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \neq 0\}$ – полуплоскость $x \geq 0$ без оси Ox.

Область *задания* функции, описывающей какой-либо процесс, может отличаться от естественной области определения. Например, формула площади прямоугольника $S = xy$ употребима лишь для $x > 0$ и $y > 0$, хотя сама функция определена во всей плоскости. Аналогично обстоит дело с функцией полезности, производственной функцией и т.д.

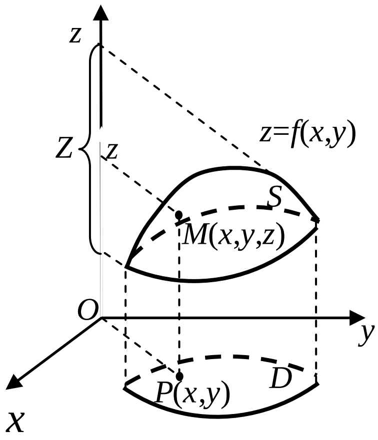


Рис. 4.1. Поверхность.

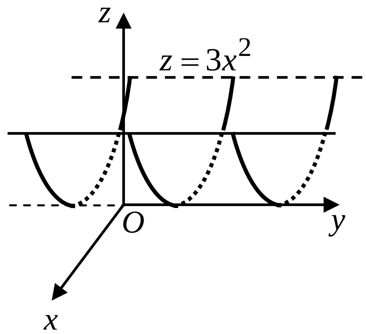


Рис. 4.2. $z=3x^2$

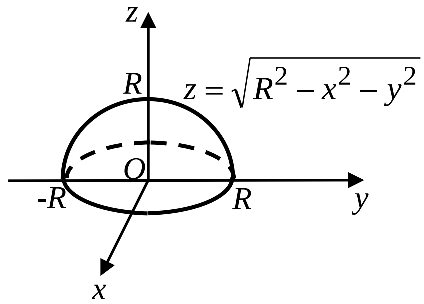


Рис. 4.3 . $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

Геометрическое изображение функции двух переменных. Рассмотрим в пространстве декартову систему координат $Oxyz$, и пусть функция $z=f(x,y)\equiv f(P)$ определена на некотором «куске» D плоскости Oxy. Из точки $P(x,y)\in D$ восстановим перпендикуляр к плоскости Oxy и на нём отложим отрезок, равный $z=f(x,y)$ (вверх – при $z>0$, вниз – при $z<0$). В пространстве получим точку $M(x,y,z)$. Когда точка $P(x,y)$ пробегает множество D, соответствующая точка M опишет в пространстве некоторое геометрическое место точек S, которое называется *поверхностью* (рис. 4.1). Эта поверхность S и служит геометрическим изображением функции $z=f(x,y)$, её *графиком*. Говорят, что поверхность S *задана* уравнением $z=f(x,y)$. Так как функция однозначна, то каждая вертикаль пересекает поверхность S не более чем в одной точке. Говорят ещё, что функция двух переменных *отображает*, переводит плоскую область D в «искривлённую» поверхность S. Область изменения $Z=\{z\}=\{f(x,y)\}$ изобразится на оси Oz.

<u>Примеры</u>. 5) $z=3x^2$ – параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oy; направляющая – парабола $z=3x^2$ в плоскости Oxz (рис. 4.2).

6) $z=x^2+y^2$ – параболоид вращения.

7) $z=xy$ – гиперболический параболоид (седло).

8) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ – верхняя часть конуса $x^2+y^2-z^2=0$.

9) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ – верхняя часть сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ (рис. 4.3).

<u>Понятие функции трёх и более переменных</u> – совершенно аналогично. Так, если значениями переменной u *управляют* тройки (x,y,z), то говорят о функции трёх переменных $u=f(x,y,z)$ - её удобно трактовать как функцию $u=f(P)$ от точек $P(x,y,z)$ пространства $Oxyz$. Здесь область определения обычно некоторое *тело*.

Понятие частных производных.

Пусть дана функция $z = f(x,y)$. Зафиксируем переменное *y*, то есть считаем $y = const$, тогда получим функцию одного переменного *x*. Её производная называется частной производной по *x* в данной точке (x,y) и обозначается символами $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $f'_x(x,y), z'_x(x,y)$. Аналогично, при условии $x = const$, определится частная производная по *y*. Она обозначается символами $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $z'_y(x,y)$, …. Таким образом, если

$$\Delta_x f(x,y) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \text{ и } \Delta_y f(x,y) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

есть *частные приращения* функции $f(x,y)$ в точке (x,y) соответственно по *x* и по *y*, то частные производные определятся как пределы

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} \text{ и } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y}.$$

Отметим, что $\frac{\partial f}{\partial x}$, как и $\frac{\partial f}{\partial y}$, есть *всегда единый, цельный, нераздельный символ – всегда не дробь.*

Поскольку определение частных производных такое же, как и для функций одного переменного, *то все правила дифференцирования сохраняются.*

Примеры. 1) $z = 3x^2 - xy$; $z'_x = 6x - y$, $z'_y = -x$.

2) $z = x^y$. Если $y = const$, то это есть степенная функция и $z'_x = y \cdot x^{y-1}$; а в случае $x = const$ – это показательная функция от y и $z'_y = x^y \cdot \ln x$.

3) $z = \ln(x^2 - y^2)$; $z'_x = \frac{2x}{x^2 - y^2}$, $z'_y = -\frac{2y}{x^2 - y^2}$.

Полное приращение функции. Дифференциал. Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $P(x,y)$. Дадим числам *x* и *y* некоторые *приращения* Δx и Δy, так, чтобы точка $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ (рис.4.4) принадлежала взятой окрестности точки $P(x,y)$. При переходе от точки P к точке P_1 функция изменится на величину

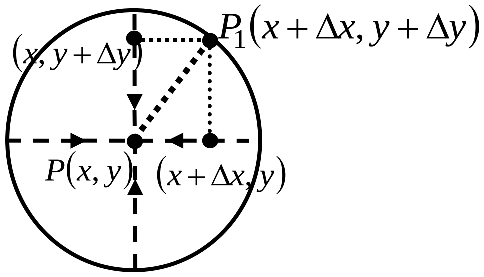


Рис. 4.4. Полное приращение

$$\Delta z = f(P_1) - f(P) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

– она называется *полным приращением* функции в точке (x,y), соответствующим приращениям Δx и Δy аргументов. *Это есть функция приращений Δx и Δy при фиксированных x и y.*

Для непрерывной функции её приращение $\Delta z \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Нельзя ли Δz при малых Δx *и* Δy заменить *приближённо* бесконечно малой более простого вида? Иногда это возможно.

Определение 2. Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $P(x, y)$, если её полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta y, \qquad (4.1)$$

где A и B не зависят от Δx *и* Δy, а $\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y)\to 0$ при $\Delta x,\ \Delta y\to 0$. При этом выражение $dz = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$ называется дифференциалом или полным дифференциалом функции в точке $P(x, y)$.

Можно убедиться, что сумма двух последних слагаемых в (1.6) может быть записана как $o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = PP_1$, и потому

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + o(\rho).$$ (Напомним, что $\frac{o(\rho)}{\rho}\to 0$ при $\rho\to 0$.)

Теорема 4.1 (необходимые условия дифференцируемости). *Если функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* $P(x, y)$*, то она 1) непрерывна и 2) имеет в этой точке частные производные, причём в (4.1)* $A = \frac{\partial z}{\partial x}$, $B = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Согласно теореме 1.2 полное приращение дифференцируемой в точке $P(x, y)$ функции запишется так:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta y,$$

причём выполняется требование $\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y)\to 0$ при $\Delta x,\ \Delta y\to 0$, и дифференциал имеет вид $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$. Таким образом, если $f'_x(x, y)\neq 0$ или $f'_y(x, y)\neq 0$, то дифференциал есть главная и линейная относительно Δx и Δy часть приращения функции.

Определение 4.2. Дифференциалами независимых переменных называют их приращения: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, и тогда дифференциал функции принимает вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (4.2)$$

Это есть формула для вычисления полного дифференциала функции; иногда его прямо так и определяют (если только функция дифференцируема).

Полагая $dy = 0$ или $dx = 0$, получим *частные дифференциалы*

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx \quad \text{и} \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$$

<u>Пример</u>. $z = 3xe^{2y}$; $dz = 3e^{2y}dx + 6xe^{2y}dy$.

Правила вычисления дифференциалов

Пусть u и v - дифференцируемые функции от x, y. Тогда

$1°$. $d(Cu) = C\,du$ ($C = const$). $2°$. $d(u+v) = du + dv$.

$3°$. $d(uv) = vdu + udv$. $4°$. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$, $v \neq 0$.

Эти правила доказываются с помощью формулы (1.9). Например,

$$d(Cu) = \frac{\partial(Cu)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial(Cv)}{\partial y} \cdot dy = C\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) = C \cdot du.$$

Рассмотрим условия, которые обеспечивают дифференцируемость функции в точке.

Теорема 4.2 (достаточные условия дифференцируемости). *Если функция* $z = f(x, y)$ *имеет частные производные в некоторой окрестности точки* $P(x, y)$ *и эти производные в самой точке непрерывны, то функция в точке* $P(x, y)$ *дифференцируема.*

Функции трёх переменных. Все предыдущие понятия, теоремы, факты имеют место и для функций любого числа n переменных. Часто приходится иметь дело, например, с функциями трёх переменных.

Рассмотрим функцию $w = f(x, y, z)$. Её область определения есть некоторое множество $E = \{(x, y, z)\}$ точек трёхмерного пространства $Oxyz$ и её удобно трактовать как функцию $w = f(P)$ точек $P(x, y, z) \in E$. Для такой функции определяются три частные производные $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \dfrac{\partial w}{\partial z}$, например,

$$\frac{\partial w(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \frac{dw(x, y_0, z_0)}{dx}\Big|_{x=x_0} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

Функция трёх переменных *является* дифференцируемой в точке $P(x, y, z)$, когда её приращение Δw в этой точке представимо в виде

$$\Delta w \equiv f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z,$$

где α, β, γ бесконечно малые функции от $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, именно: $\alpha, \beta, \gamma \to 0$ при $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$. Частные производные берутся в точке $P(x, y, z)$. (Так будет, в частности, когда они непрерывны). При этом выражение

$$dw \equiv df(x, y, z) = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

называется дифференциалом, или полным дифференциалом, функции. Под дифференциалами независимых переменных понимают, как и ранее их приращения: $dx \equiv \Delta x, dy \equiv \Delta y, dz \equiv \Delta z$.

Производная по направлению. Градиент

Пусть дана функция, например, трёх переменных $u = u(P) = u(x, y, z)$. Частные производные u'_x, u'_y, u'_z определяют «скорость изменения» функции по направлениям осей Ox, Oy, Oz. Как определить аналогичную величину по любому заданному направлению $\vec{l}$?

Рассмотрим точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Проведём из неё полупрямую (луч), зададим её вектором $\vec{l}$. На ней возьмём точку $P(x, y, z)$ (рис.4.5) и составим отношение $\dfrac{u(P)-u(P_0)}{P_0P}$ – это средняя скорость изменения функции на участке P_0P.

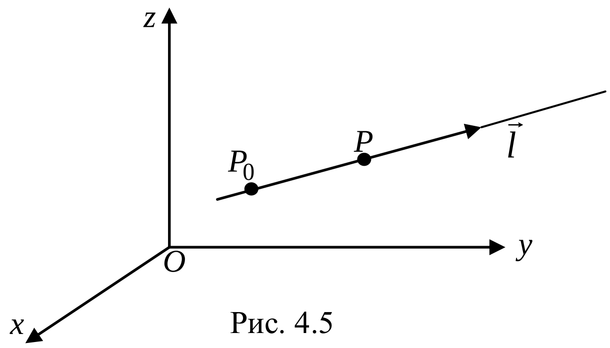


Рис. 4.5

Перейдём к пределу, когда $P \to P_0$ *вдоль луча*. Этот предел, если он существует, называется производной от функции u в точке P_0 по данному направлению и обозначается символом $\dfrac{\partial u}{\partial l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{P\to P_0} \frac{u(P)-u(P_0)}{P_0P} = \lim_{P\to P_0} \frac{u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)}{P_0P}. \tag{4.3}$$

Это и есть *скорость изменения функции в точке* P_0 *по направлению* $\vec{l}$. По самому определению этот предел не зависит от выбора системы координат.

Найдём формулу для вычисления $\dfrac{\partial u}{\partial l}$. Предполагаем, что функция $u(x, y, z)$ дифференцируема в точке P_0. Обозначим α, β, γ углы, образуемые вектором $\vec{l}$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно; и пусть $\vec{l}$ – единичный вектор; тогда координаты его суть направляющие косинусы, т.е. $\vec{l} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$.

Обозначим расстояние $P_0P = t$. Вектор $\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{l}$; с другой стороны $\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$. Из равенства координат находим:

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\ y = y_0 + t\cos\beta,\ z = z_0 + t\cos\gamma.$$

Если t менять в пределах $0 \le t < \infty$, то это будут параметрические уравнения полупрямой P_0P. В точках этой полупрямой имеем

$$u(P) = u(x,y,z) = u(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) \equiv F(t).$$

И предел (4.3) запишется так: $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{F(t)-F(0)}{t-0} = F'(0)$ – это есть производная функции $F(t)$ по переменному t в точке $t = 0$. Раскрывая её по правилу дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{4.4}$$

Здесь производные берутся в исходной точке P_0 (полагали $t=0$).

<u>Вывод</u>. Если функция $u(P)$ дифференцируема в точке P_0, то она имеет в этой точке производные по всем направлениям, и эти производные вычисляются по формуле (4.4).

Пусть, в частности, $\vec{l}$ совпадает с положительным направлением оси Ox, так что $\alpha=0, \beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$, $P(x,y_0,z_0)$ (изменяется только первая координата) и $P_0P=x-x_0=\Delta x>0$. Тогда, как из формулы (4.4) получаем $\frac{\partial u}{\partial \vec{i}}=\frac{\partial u}{\partial x}$; так же $\frac{\partial u}{\partial \vec{j}}=\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial \vec{k}}=\frac{\partial u}{\partial z}$. Таким образом, частные производные суть частные случаи производной по направлению.

Заметим, что производная по направлению $\vec{l}_1=-\vec{l}$, обратному $\vec{l}$, отличается знаком: углы вектора $\vec{l}_1$ с осями координат есть $\alpha_1=\pi+\alpha$, $\beta_1=\pi+\beta$, $\gamma_1=\pi+\gamma$, и тогда по формуле (1.24) найдём $\frac{\partial u}{\partial l_1}=-\frac{\partial u}{\partial l}$.

<u>Градиент.</u> Пусть дана функция $u=u(P)=u(x,y,z)$, дифференцируемая в точке $P(x,y,z)$. Поставим функции u в соответствие вектор

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \tag{4.5}$$

Он называется *градиентом функции* u в данной точке P.

В точке P зададим направление

$$\vec{l}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k}.$$

Используя градиент, формулу для вычисления производной по направлению $\vec{l}$ можно записать в виде скалярного произведения $\frac{\partial u}{\partial l}=(\operatorname{grad} u,\vec{l})$. Если φ - угол между $\vec{l}$ и $\operatorname{grad} u$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l}=(\operatorname{grad} u,\vec{l})=|\operatorname{grad} u|\cdot|\vec{l}|\cos\varphi=|\operatorname{grad} u|\cdot\cos\varphi=\text{пр}_{\vec{l}}\operatorname{grad} u. \tag{4.6}$$

Итак, *производная* $\frac{\partial u}{\partial l}$ *функции* u *по направлению* $\vec{l}$ *равна проекции градиента на это направление*. В силу (4.6), наибольшее значение $\frac{\partial u}{\partial l}$ имеет, когда $\cos\varphi=1$, т. е. $\varphi=0$.

Таким образом, ***производная по направлению принимает наибольшее значение в направлении градиента, и оно равно модулю градиента:***

$$\max\frac{\partial u(P)}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial \operatorname{grad} u}=|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \tag{4.7}$$

Из (4.6) и (4.7) следует, что градиент функции u есть вектор, который направлен в сторону ***быстрейшего возрастания*** этой функции, причём, его модель равен ***значению производной*** (т.е. ***скорости возрастания***) величины u ***в указанном направлении***.

<u>Пример</u>. $u=-3x^2y+yz$, $P(0,-1,4)$ и $P_1(1,1,2)$. Найти $\dfrac{\partial u(P)}{\partial PP_1}$. Имеем:

$$\operatorname{grad} u=-6xy\vec{i}+(-3x^2+z)\vec{j}+y\vec{k}\,,\ \operatorname{grad} u\Big|_P=4\vec{j}-\vec{k}\,.$$

Этот вектор перпендикулярен оси Ox. $\overrightarrow{PP_1}\,\{1,2,-2\}$, $\left|\overrightarrow{PP_1}\right|=3$, $\vec{l}=\overrightarrow{PP_1}^{\circ}=\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right\}$. Тогда $\dfrac{\partial u(P)}{\partial l}=(\operatorname{grad} u\cdot\vec{l})=4\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{10}{3}<\left|\operatorname{grad} u\right|=\sqrt{17}$.

Производная по направлению и градиент функции двух переменных. Линии уровня. Рассмотрим функцию двух переменных $u=u(P)=u(x,y)$. Для неё остаются в силе определения, свойства и формулы для функции трех переменных; надо лишь положить $\dfrac{\partial u}{\partial z}\equiv 0$ и $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$. Только теперь точки $P(x,y)$, направление $\vec{l}$, кривая C и градиент лежат в плоскости Oxy. Итак, имеем

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}\,.$$

Из точки $P(x,y)$ проводим единичный вектор $\vec{l}$. Пусть он образует с осями координат углы α и β; поскольку $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ (рис. 4.6), имеем $\vec{l}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}=\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}$.

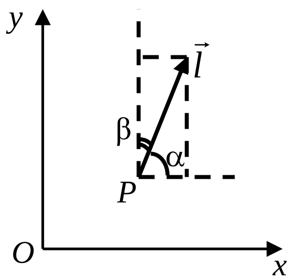


Рис. 4.6

Из (4.4) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha=(\operatorname{grad} u,\vec{l}\,)\,.$$

Геометрическое место точек (x,y), в которых $u(x,y)=C$, образует так называемую *линию уровня* (уровня C) функции $u=u(x,y)$; $\operatorname{grad} u$ направлен по нормали к линии уровня в сторону возрастания u, т.е. в сторону увеличения C. Часто, особенно в географии (поверхность – гора, высота над уровнем моря и т.п.), под линиями уровня понимают кривые, лежащие на поверхности $u=u(x,y)$ на заданной высоте C. Направление градиента на плоскости Oxy даёт направление наибольшего подъёма поверхности, а противоположное – наибыстрейшего спуска.

На рисунке 4.7 стрелки указывают направление градиента. В точке $P_0(x_0,y_0)$, в которой $\dfrac{\partial u}{\partial x_0}=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y_0}=0$ т.е. $\operatorname{grad} u(P_0)=0$, направление градиента не определено; на поверхности соответствующая точка A – седловина, точка

y

перевала.

Известно, что линии уровня функции полезности, зависящей от двух благ, в экономической теории называются кривыми безразличия; линии уровня двухфакторной производственной функции – изоквантами. Задачи оптимизации, рассматриваемые в экономике, широко используют понятия градиента и антиградиента.

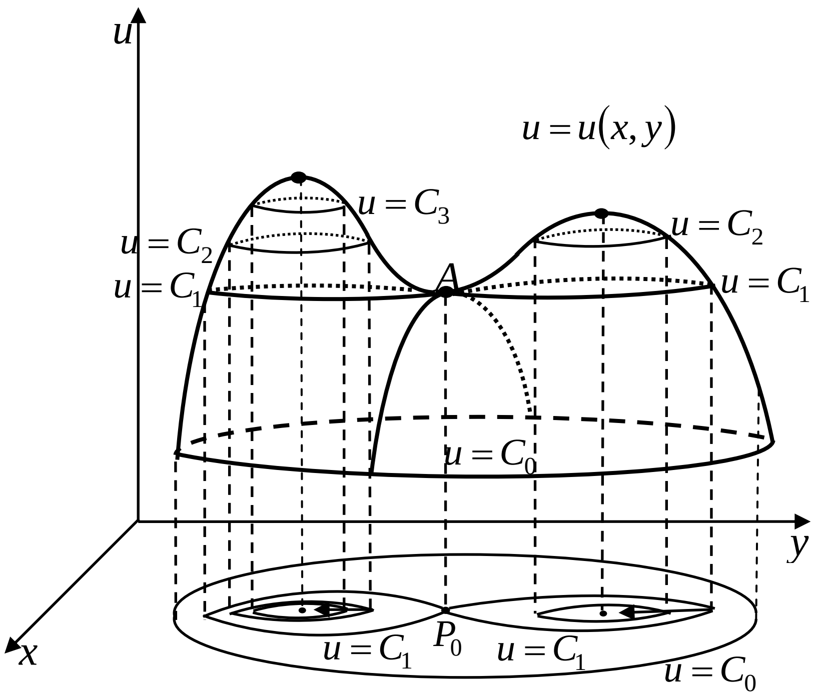


Рис. 4.7

По той же схеме, что и для функции одного переменного $y = f(x)$, можем установить *геометрический смысл производной по направлению* для функции $u = u(x, y)$ двух переменных. На плоскости Oxy берём точку $P(x, y)$, из неё проводим направление $\vec{l}$. Поверхность $u = u(x, y)$ рассечём плоскостью, проходящей через направление $\vec{l}$ перпендикулярно плоскости Oxy. В сечении получим некоторую кривую. Угол наклона касательной к ней с направлением $\vec{l}$ в соответствующей точке $Q(x,y,u)$ поверхности обозначим через φ. Тогда $\frac{\partial u}{\partial l} = \mathrm{tg}\varphi$. Это равенство выражает собою геометрический смысл производной по направлению, в том числе и частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ – когда направление $\vec{l}$ совпадает с направлением соответствующей оси.

Производные и дифференциалы высших порядков

1. Пусть дана, для простоты, функция двух переменных $z = f(x, y)$, и пусть она имеет *частные производные* $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$. Их будем называть производными *первого* порядка. Они, в свою очередь, также есть функции двух переменных. И можно рассматривать вопрос об их производных.

Определение 4.3. Частные производные от производных первого порядка называются частными производными *второго порядка* и т.д.

Дифференцируя функции $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, получаем четыре частные производные второго порядка. Приняты обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=f''_{x^2}=z''_{xx},$$ [1]

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

Производные, берущиеся по разным переменным, называются *смешанными*. Таких производных второго порядка для функции двух переменных всего две.

Пример. $z=2x^3y-xy^2+5x$, $\frac{\partial z}{\partial x}=6x^2y-y^2+5$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3-2xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2-2y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2-2y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x$. Замечаем, что здесь $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. Этот факт не случайный – справедлива теорема:

Теорема 4.3 (о равенстве смешанных производных). *Если функция $z=f(x,y)$ имеет в точке $P(x,y)$ непрерывные вторые смешанные производные, то они в этой точке равны: $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.*

Дифференциалы высших порядков. Для краткости выкладок снова возьмём функцию двух переменных $z=f(x,y)$. Её *первый* дифференциал $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ при постоянных dx и dy есть тоже функция двух переменных x и y. Дифференциал $d(dz)$ называется дифференциалом второго порядка и обозначается d^2z. Вообще, индуктивно, дифференциалом n-ого порядка (или n-ым дифференциалом) d^nz называется дифференциал от дифференциала $(n-1)-$ого порядка: $d^nz=d(d^{n-1}z)$.

Выразим его через частные производные функции z. Считая dx и dy постоянными, находим:

$$d^2z=d(dz)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right)+d\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

(как обычно, $dx^2=(dx)^2$, $dy^2=(dy)^2$). Результат по форме напоминает квадрат суммы. Аналогично, d^3z похож на куб суммы, и d^nz – на разложение бинома Ньютона.

Экстремумы функций двух переменных

Говорят, что функция $z=f(P)=f(x,y)$, непрерывная в точке $P_0(x_0,y_0)$,

---

[1] Примечание. Символ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ читается: де два икс по де икс квадрат.

имеет в этой точке максимум, равный $f(P_0)$, если существует окрестность точки P_0 такая, что для всех точек P этой окрестности выполняется неравенство $f(P) \leq f(P_0)$, и имеет минимум, равный $f(P_0)$, если $f(P) \geq f(P_0)$. Если при $P \neq P_0$ имеют место строгие неравенства, то в точке P_0 имеется строгий (собственный) максимум или минимум. Максимум и минимум объединяет общий термин – экстремум (см. рис. 4.8, 4.9.) Понятие экстремума носит локальный характер, ибо берутся лишь точки P, достаточно близкие к точке P_0.

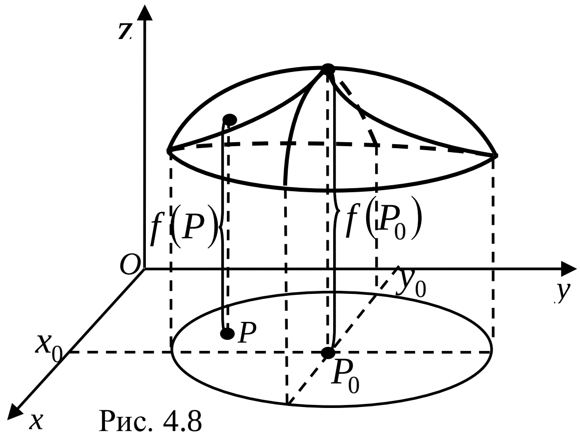


Рис. 4.8

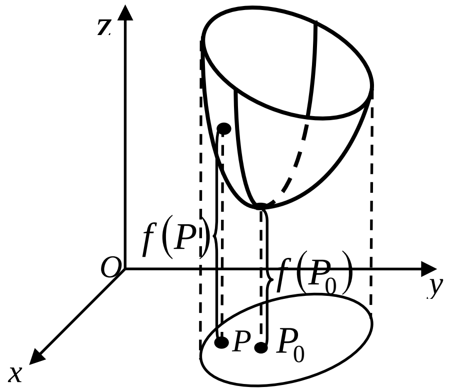


Рис. 4.9

Теорема 4.4. (Необходимые условия экстремума). *Пусть* $P_0(x_0, y_0)$ – *точка экстремума функции* $z = f(x, y)$. *Тогда в этой точке каждая из частных производных* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *в отдельности либо обращается в нуль, либо не существует.*

Геометрический смысл теоремы отражен на рис. 4.8.

Точки $P_0(x_0, y_0)$, в которых каждая из производных $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ равна нулю или не существует, называются критическими или точками подозрительными на экстремум. Экстремум может быть только в таких точках – по теореме 4.4. В частности, точки, в которых обе производные равны нулю: $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$, называются также стационарными. В этом случае, согласно геометрическому смыслу частных производных, касательные к кривым, полученным в сечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $y = y_0$ и $x = x_0$, горизонтальны (параллельны плоскости Oxy, именно, осям Ox и Oy). Кроме того, замечаем, что дифференциал функции $f(x, y)$ в стационарной точке $P_0(x_0, y_0)$ тождественно (при любых dx, dy) равен нулю: $dz\big|_{P_0} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0} \cdot dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0} \cdot dy \equiv 0$.

<u>Примечание</u>. В отличие от функции одного переменного, здесь термин «критическая точка» употребляем в общепринятом смысле.

Согласно теореме 4.4, как и в соответствующей ситуации, для функции одного переменного, экстремум *может быть* только в критических точках. Однако не в каждой критической точке экстремум существует. Например, для функции $z = xy$ точка $O(0,0)$ критическая (именно, стационарная) и $z(0,0) = 0$, но она не является точкой экстремума, так как в любой окрестности (какой бы малой она ни была) всегда есть точки, в которых $z > 0$ и в которых $z < 0$.

Достаточные условия экстремума функции двух переменных.

Теорема 4.5. *Пусть функция* $f(x, y)$ *в некоторой окрестности стационарной точки* $P_0(x_0, y_0)$ *имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим их (обозначения Монжа):* $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. *Пусть, соответственно,* p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 *– значения частных производных в точке* P_0. *Тогда:*

1) Если определитель $\begin{vmatrix} r_0 & s_0 \\ s_0 & t_0 \end{vmatrix} = r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, *то в точке* P_0 *имеется экстремум, именно: максимум, если* $r_0 < 0$, *и минимум, если* $r_0 > 0$;

2) если $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$, *то экстремума нет;*

3) случай $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ *является сомнительным.*

Примеры. 1) $z = (x-1)^2 + y^2 + 5$ – параболоид вращения. Исследуем на экстремум. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$. Точка подозрительная на экстремум одна – это стационарная точка $P_0(1,0)$. Находим $r = 2,\ s = 0,\ t = 2$, $r_0 t_0 - s_0^2 = 4 > 0$, т.е. экстремум есть и P_0 точка минимума, т.к. $r_0 > 0$; $z_{\min} = z(1,0) = 5$. Это можно утверждать, исходя из вида самой функции.

2) $z = x^2 - y^2$ - гиперболический параболоид (седло). Здесь $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0$ в точке O(0,0), $r = 2, s = 0, t = -2$ и $r_0 t_0 - s_0^2 = -4 < 0$. Экстремума нет.

Относительный (или условный, неабсолютный) экстремум

Ранее мы рассматривали экстремумы функции $z = f(x, y)$ считая, что x и y никакими условиями не связаны, т.е. являются независимыми переменными; сравнивали экстремальные значения $f(P_0)$ со *всеми* значениями $f(P)$ в точках P из некоторой *полной* окрестности точки P_0. В таких случаях экстремум называется *абсолютным* или *безусловным*.

Пусть теперь требуется найти экстремумы функции при условии, что переменные x и y связаны некоторым равенством $\varphi(x, y) = 0$ – оно называется *уравнением связи*. Такие экстремумы *называются относительными* или *услов-*

ными. Геометрически это означает, что сравниваются между собой значения функции $f(x,y)$ лишь в точках линии $\varphi(x,y)=0$. На рис. 1.26 точка P_1 - точка абсолютного, а точка P_0 - условного максимума.

Итак, говорят, что функция $f(P)$ от n переменных имеет в точке P_0 условный максимум (минимум) при условии $\varphi(P)=0$, если для всех точек P, удовлетворяющих, вместе с P_0, уравнению связи $\varphi(P)=0$ и *достаточно близких* к P_0, будет выполняться неравенство $f(P)\le f(P_0)$ (неравенство $f(P)\ge f(P_0)$). Как и ранее, при выполнении строгого неравенства, при $P\ne P_0$, получаем строгий условный максимум (минимум). (Если $n\ge 3$, то уравнений связи может быть несколько).

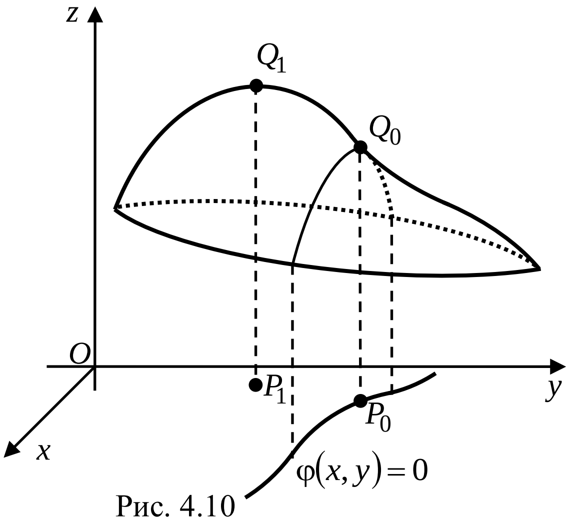


Рис. 4.10

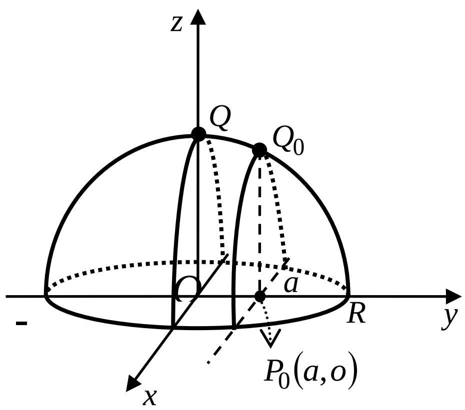


Рис. 4.11

Например, безусловный максимум функции $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ достигается в точке $O(0,0)$ и его значение $z\big|_{(0,0)}=R$; ему соответствует точка Q (см. рис. 4.11). Если же дано условие $y=a,\ |a|<R$, то $z=\sqrt{R^2-x^2-a^2}$ и относительный экстремум будет при $x=0$, т.е. в точке $P_0(0,a)$, и равен $z\big|_{P_0}=\sqrt{R^2-a^2}<R$; на поверхности ему соответствует точка Q_0.

Как найти точки условного экстремума функции $z=f(x,y)$? Есть два способа.

Допустим, что уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ можно разрешить в виде $y=y(x)$. Тогда в точках $P(x,y)$, удовлетворяющих уравнению связи, функция z принимает значения $z=f(x,y(x))\equiv F(x)$. В таком случае задача отыскания условного экстремума сводится к отысканию абсолютного экстремума сложной функции $F(x)$ одного переменного x. С такой задачей мы встречались при отыскании наибольшего и наименьшего значений функции на границе области. Однако на практике этот метод не всегда удобен, ибо он требует фактического решения уравнения $\varphi(x,y)=0$ относительно какой-либо из переменных x или

y, а это не всегда возможно, к тому же решение может быть многозначным. Лагранж предложил другой метод – он даёт необходимые условия относительного экстремума.

2. Метод неопределённых множителей Лагранжа.

Пусть дана функция

$$z = f(x, y) \tag{4.8}$$

и дано уравнение связи

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{4.9}$$

и пусть функция $f(x, y)$ имеет условный экстремум в точке $P_0(x_0, y_0)$,

$$\varphi(x_0, y_0) = 0. \tag{4.10}$$

Найдём уравнения, которым удовлетворяют координаты точки P_0.

Будем предполагать, что *функции* $f(x, y)$ *и* $\varphi(x, y)$ *в окрестности точки* P_0 *имеют непрерывные частные производные и точка* P_0 *не является особой для кривой* (4.9), т.е. $\operatorname{grad}\varphi(P_0) \neq 0$, например, пусть

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{P_0} \neq 0. \tag{4.11}$$

Тогда в некоторой окрестности точки P_0 уравнение (4.9) определяет однозначную дифференцируемую функцию $y = y(x)$. Будем считать, что её подставили в (4.8) и (4.9). При этом уравнение (4.9) становится тождеством (по x), а z – сложной функций от x, которая по условию имеет абсолютный экстремум в точке x_0. Тогда дифференциал этой функции в точке P_0 тождественно равен нулю $\forall dx$ и значит, в силу инвариантности формы дифференциала, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y_0} \cdot dy \equiv 0. \tag{4.12}$$

И также из тождества (4.12) находим в частности

$$d\varphi(x, y(x)) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} \cdot dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y_0} \cdot dy \equiv 0. \tag{4.13}$$

Умножим равенство (4.13) на некоторое число λ и сложим с (4.12):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_0} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)dy \equiv 0. \tag{4.14}$$

Выберем λ так, чтобы

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y_0} = 0; \tag{4.15}$$

такое число λ существует в силу условия (4.11). Но тогда, поскольку dx произвольное (т.к. x – независимое переменное) при таком λ получим

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = 0. \tag{4.16}$$

Эти же равенства получим, предполагая $\varphi'_x(P_0) \neq 0$.

Равенства (4.10), (4.15) и (4.16) означают, что точка (x_0, y_0, λ) является обязательно стационарной точкой функции трёх переменных

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \text{ –} \qquad (4.17)$$

она называется *функцией Лагранжа*.

Итак, получили

<u>Правило 1</u>. Чтобы найти точки $P_0(x_0, y_0)$, в которых только и возможен условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$, надо

1) Составить функцию Лагранжа (4.17).

2) Найти её стационарные точки (x_0, y_0, λ), т.е. решить систему

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv \varphi(x, y) = 0.$$

3) Полученные точки (x_0, y_0) будут точками подозрительными на относительный экстремум.

Множитель λ отбрасывается – он играет вспомогательную роль.

Относительный экстремум возможен ещё и в точках, в которых заявленные выше условия не выполняются, например, в особых точках кривой (4.9), в её *угловых* точках.

<u>Замечание</u>. Достаточные условия сложны, их не рассматриваем – на практике о существовании условного экстремума в найденных стационарных точках часто догадываются из условий задачи геометрического, физического и т.п. характера. Однако можно воспользоваться следующими соображениями (без пространных рассуждений).

<u>Пример</u>. Найти условный экстремум функции $z = xy$ при условии $x + y = 1$. Конечно, эта задача может быть решена и без использования метода Лагранжа. Для этого выражаем одну из переменных, например, y, из уравнения связи, подставляем в функцию $z = xy$. Полученную функцию одной переменной $z = x(1 - x)$ исследуем на абсолютный экстремум: $z'_x = 1 - 2x = 0$, $z'' = -2 < 0$, откуда $x = \frac{1}{2}$ - точка максимума, а для исходной функции таковой является точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, при этом $z_{\max} = \frac{1}{4}$. Теперь проиллюстрируем на этом простом примере метод Лагранжа, воспользовавшись сделанным замечанием о достаточном условии относительного экстремума.

Составим функцию Лагранжа: $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$. Система для определения координат стационарной точки имеет вид $\begin{cases} F'_x = y + \lambda = 0 \\ F'_y = x + \lambda = 0 \\ F'_\lambda = x + y - 1 = 0 \end{cases}$, откуда $x = y = \frac{1}{2}$ - это координаты стационарной точки (при этом $\lambda = -\frac{1}{2}$).

Находим $d^2F = 2dxdy$. Из уравнения связи: $dy = -dx$, откуда следует, что второй дифференциал $d^2F = -2dx^2 < 0$, значит и $\Delta F < 0$, т.е. полученная точка есть точка относительного максимума функции $z = xy$ при условии $x + y = 1$, и $z_{\max} = \frac{1}{4}$. Как уже было сказано, наличие условных максимумов и минимумов иногда можно определить исходя из условий задачи. В данном случае это видно из геометрической интерпретации. А именно: в сечении поверхности $z = xy$ плоскостью $x + y = 1$ получаем параболу $z = x(1 - x) = x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$, ветви которой направлены вниз; координаты вершины $x = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{4}$ и при этом $y = \frac{1}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения [3].

1. Найти область определения функций: 1) $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$; 2) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$; 3) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$; 4) $z = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 9}\right)$.

2. Найти линии уровня функции двух переменных:
1) $z = y - x$; 2) $u = \sqrt[4]{y - x}$; 3) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; 4) $z = \ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$.

3. Найти частные производные первого порядка следующих функций:
1) $z = x^3 + y^3 - 3xy$; 2) $z = \dfrac{x(y - x)}{y^2}$; 3) $z = \sin x - x^2 y$;

4) $z = \sin\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{x}{y}$; 5) $z = e^x(\cos y + x\sin y)$.

4. Вычислить частные производные первого порядка функции f в данной точке: 1) $f = \dfrac{x}{y^2}$, $(1;1)$; 2) $f = \ln\left(x + \dfrac{x}{y}\right)$, $(1,2)$.

5. Найти частные производные первого порядка следующих функций:
1) $f = xy + yz + xz$; 2) $f = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; 3) $f = \dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{y}$.

6. Найти дифференциал функции $f(x, y)$, если: 1) $f = 2x^4 - 3x^2y^2 + x^3y$;
2) $f = \left(y^3 + 2x^2y + 3\right)^4$; 3) $f = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$; 4) $f = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $f = 2^{-\frac{y}{x}}$.

7. Найти дифференциал функции $f(x, y)$ в данной точке, если:

$f = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, а) $(1,1)$, б) $(0,1)$.

8. Найти производную функции f по направлению вектора $\vec{a}$ в точке M, если:

1) $f = 3x^2 + 5x^2$. $\vec{a} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M(1;1)$;

2) $f = x\sin(x+y)$, $\vec{a} = (-1, 0)$, $M\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) $f = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$, $\vec{a} = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, $M(3, 3, 1)$.

9. Найти градиент функции f в точке M, если:

1) $f = 1 + x^2y^3$, $M(-1, 1)$; 2) $f = yx^y$, $M(2, 1)$;

3) $f = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $M(1, 2, 3)$.

10. Решить уравнение $\operatorname{grad} f = 0$, если $f = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

11. Найти производную функции $f = 5x + 10x^2y + y^5$ в точке $M_0(1, 2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M}$, где $M(5, -1)$.

12. Найти производную функции $f = 3x^4 + y^3 + xy$ в точке $M(1, 2)$ по направлению луча, образующего с осью Ox угол $135°$.

13. Найти угол между градиентами функции f в точках A и B, если:

1) $f = \ln\left|\dfrac{y}{x}\right|$, $A\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$, $B(1, -1)$; 2) $f = \arcsin\left(\dfrac{x}{x+y}\right)$, $A(1, 1)$, $B(3, 4)$.

14. Найти угол между градиентами функций f_1 и f_2 в точке M, если $f_1 = \sqrt{x^2 - y^2}$, $f_2 = x^3 + y^3 - 3xy$, $M(4, 3)$.

15. Найти в указанной точке частные производные функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением:

1) $z^3 + 3xyz + 1 = 0$, $(0, 1)$; 2) $e^z - xyz - 2 = 0$, $(1, 0)$;

3) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$, $\left(1, 1, \dfrac{1}{3}\right)$;

4) $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$ $(0, 1, 0)$.

16. Найти частные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$, если: 1) $z = xy(x^3 + y^3 - 4)$; 2) $z = e^{xy}$; 3) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$; 4) $z = x^y$.

17. Вычислить частные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$

в заданной точке: 1) $z=\frac{x}{x+2y}$, $(1,0)$; 2) $z=y^3(1-2e^x)$, $(0,1)$.

18. Вычислить частную производную $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ функции $u=f(x,y,z)$, если:

1) $u=\sqrt{xy^3z^5}$; 2) $u=x^4\sin x+y^4\sin z+z^4\sin x$; 3) $u=e^{xyz}$.

19. Найти второй дифференциал функции $z=f(x,y)$ в указанной точке:

1) $z=e^{xy}$, $(1,-1)$; 2) $z=e^{\frac{x^2}{y}}$, $(1,1)$; 3) $z=\frac{x}{y}e^{x^2}$, $(0,1)$.

20. Исследовать функцию $z=f(x,y)$ на экстремум:

1) $z=x^2+xy+y^2-12x-3y$; 2) $z=-x^2+xy-y^2+2x-y+4$;

3) $z=-x^2-xy+y^2+3x+6y-2$ 4) $z=3x^2+3y^2-x^3+4y$;

5) $z=3x^2y+y^3-12x-15y+1$.

21. Исследовать функцию $u=f(x,y,z)$ на экстремум:

1) $u=x^2-xy+y^2+(z+1)^2+x$; 2) $u=-x^2-y^2-z^2-6x+4y-2z+3$.

22. Найти условные экстремумы функции $z=f(x,y)$ относительно заданного уравнения связи:

1) $z=xy,\ x+y-1=0$; 2) $z=x^2+y^2,\ 3x+2y-6=0$;

3) $z=x^2-y^2,\ 2x-y-3=0$; 4) $z=xy^2,\ x+2y-1=0$;

5) $z=5-3x-4y,\ x^2+y^2=25$; 6) $z=1-4x-8y,\ x^2-8y^2=8$.

23. Найти условные экстремумы функции $u=f(x,y,z)$ при заданном уравнении связи:

1) $u=2x^2+3y^2+4z^2,\ x+y+z-13=0$;

2) $u=xy^2z^3,\ x+y+z-12=0,\ x>0,\ y>0,\ z>0$.

24. Найти наименьшее m и наибольшее M значения функции z на заданном множестве:

1) $z=xy+x+y,\ -2\le x\le 2,\ -2\le y\le 4$; 2) $z=x^2-xy+y,\ |x|\le 2,\ |y|\le 3$;

3) $z+2+3y,\ x+y\le 6,\ x+4y\ge 4,\ y\le 2$;

4) $z=x^2-2y+3,\ y-x\le 1,\ x\le 0,\ y\ge 0$;

5) $z=3+2xy,\ x^2+y^2\le 1$; 6) $z=3+2xy,\ 4\le x^2+y^2\le 9$.

Литература.

1. Солдатов М.А., Круглова С.С., Круглов Е.В. Математический анализ функций нескольких переменных. Часть 1. Дифференциальное исчисление

функций нескольких переменных. Учебное пособие. 66 с. – №792.14.06, сайт http://www.unn.ru/rus/books/table.html .

2. Солдатов М.А., Круглова С.С., Круглов Е.В. Математический анализ функций нескольких переменных: Учебное пособие. Под общей редакцией Солдатова М.А. Нижний Новгород; Изд-во Нижегородского университета, 2014. – 227 с.

3. Сборник задач по математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменных: Учеб. Пособие. Авторы: Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – 2-е изд., перераб. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 472 с.

Глава 5. Интегральное исчисление функции одного переменного

5.1. Неопределенный интеграл

Первообразная.

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке *X*, если для любого $x \in X$ функция $F(x)$ дифференцируема и выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Задача отыскания по заданной функции $f(x)$ ее первообразной не однозначна: если $F(x)$ первообразная, то и функция $F(x)+C$, где C – произвольное постоянное число, также первообразная для функции $f(x)$, так как $(F(x)+C)' = f(x)$.

Определение. Совокупность всех первообразных функций для $f(x)$ на промежутке X называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

В этом обозначении знак $\int$ называется *знаком интеграла*; $f(x)$ - *подынтегральной функцией*; $f(x)dx$ - *подынтегральным выражением*, а переменная x – *переменной интегрирования*.

Операция нахождения первообразной по ее производной или неопределенного интеграла по данной функции называется *интегрированием* этой функции.

Свойства неопределенного интеграла.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x)+C;$
4. $\int \alpha f(x)dx = \alpha\int f(x)dx,$ где $\alpha \in R;$
5. $\int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

Таблица основных интегралов.

1. $\int 0 \cdot dx = C$

10. $\int 1 \cdot dx = x + C$

2. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1$

3. $\int \alpha^{x}dx = \dfrac{\alpha^{x}}{\ln\alpha} + C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

5. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

6. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

7. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \alpha^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm \alpha^2}\right| + C$

9. $\int 1 \cdot dx = x + C$

11. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

12. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$

13. $\int \cos xdx = \sin x + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{\alpha} + C$

17. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$

18. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$

Методы интегрирования.

Непосредственное интегрирование. Этот метод основан на вычислении интегралов с помощью таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределенных интегралов.

Пример 1. Вычислить интеграл:

$$\int\left(2\cos 2x + 2 - 4x^3 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right)dx.$$

Решение: Применяя свойства 4 и 5, получим

$$\int\left(2\cos 2x + 2 - 4x^3 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right)dx = 2\int\cos 2xdx + 2\int dx - 4\int x^3dx + \int\frac{dx}{x} - 4\int\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \sin 2x + 2x - x^4 + \ln|x| - 4\,\mathrm{arctg}\,x + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \dfrac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx.$

Решение: Так как $1 + 2x^2 = (1+x^2) + x^2$, то

$$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int\frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}dx + \int\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}dx =$$

$$= \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + arctgx + C.$$

Замена переменной в неопределённом интеграле. Пусть функция $x = \varphi(t)$ монотонна и имеет непрерывную производную на некотором промежутке изменения переменной *t*, функция *f(x)* непрерывна на интервале, принадлежащем области значений функции $x=\varphi(t)$, так что определена сложная функция $f(\varphi(t))$. Тогда справедливо равенство,

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

Часто используются следующие варианты замены переменной:

1. $\int x^k f(x^{k+1})dx \qquad \left(\text{замена } x^{k+1}=t; \quad x^k dx = \dfrac{dt}{k+1}\right) \quad (k \neq -1).$

$$\int x^k f(x^{k+1})dx = \frac{1}{k+1}\int f(t)dt$$

2. $\int \sin x\, f(\cos x)dx = -\int f(t)dt \quad \left(\text{замена } \cos x = t; \quad -\sin x\, dx = dt\right)$
3. $\int e^x f(e^x)dx = \int f(t)dt \quad \left(\text{замена } e^x = t; \quad e^x dx = dt\right)$
4. $\int \dfrac{f(\ln x)dx}{x} = \int f(t)dt \quad \left(\text{замена } \ln x = t; \quad \dfrac{dx}{x} = dt\right)$
5. $\int f\left(\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{dx}{x^2} = -\int f(t)dt \quad \left(\text{замена } \dfrac{1}{x} = t; \quad -\dfrac{dx}{x^2} = dt\right)$
6. $\int \dfrac{f(\mathrm{arctg}x)}{1+x^2}dx = \int f(t)dt \quad \left(\text{замена } \mathrm{arctg}x = t; \quad \dfrac{dx}{1+x^2} = dt\right)$

Пример 3. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{3x-2}$.

Решение. Обозначим $3x-2=t$. Дифференцируя обе части этого выражения, найдём, чему тогда равно *dx*: $d(3x-2)=dt \Leftrightarrow 3dx=dt \Leftrightarrow dx=\dfrac{dt}{3}$. Тогда

$$\int \frac{dx}{3x-2} = \int \frac{dt}{3t} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|3x-2| + C .$$

Пример 4. Вычислить интеграл: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Решение: Имеем $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} .= \int \frac{dx}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3 + \left(\sqrt[6]{x}\right)^2}$. Положим $t=\sqrt[6]{x}$, тогда $x=t^6, \quad dx=6t^5dt$. Находим $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^2 + \left(\sqrt[6]{x}\right)^3} = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt$. Выделяя делением целую часть дроби, получаем

$$6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int \left[\left(t^2 - t + 1\right) - \frac{1}{t+1}\right]dt = 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right] + C.$$

Окончательно $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right) + C.$

Пример 5. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Решение: Преобразуем выражение $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2\left(1-{}^1\!/_{x^2}\right)}} = \frac{1}{x^2\operatorname{sgn} x\sqrt{1-{}^1\!/_{x^2}}}$. В результате получим $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^2\operatorname{sgn} x\sqrt{1-{}^1\!/_{x^2}}}$. Сделаем замену переменной ${}^1\!/_x = t$, тогда - $\frac{dx}{x^2} = dt$, откуда $\frac{dx}{x^2} = -dt$. В итоге имеем:

$$\int \frac{dx}{x^2\operatorname{sgn} x\sqrt{1-{}^1\!/_{x^2}}} = -\operatorname{sgn} x\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\operatorname{sgn} x\cdot \arcsin\frac{1}{x} + C$$

Метод интегрирования по частям.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедлива формула:

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du\,.$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям.*

В интегралах типа $\int P_n(x)\cos(\alpha x)dx,\quad \int P_n(x)\sin(\alpha x)dx,\quad \int P_n(x)e^x dx$, где $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, полагаем функцию $u(x)=P_n(x)$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения берем за dv и находим функцию v.

Если подынтегральное выражение содержит функции ln$x$, arccos$x$, arcsin$x$, arctg$x$, arcctg$x$, то именно эти функции берем за функцию u. Иногда до применения формулы интегрирования по частям необходимо сделать замену переменной.

Пример 6. $\int xe^x dx = [u = x, dv = e^x dx; du = dx, v = \int e^x dx = e^x] = xe^x - e^x + C$. Отметим, что если за u обозначить другую функцию, то решение не состоится: $u = e^x, dv = xdx; du = e^x dx, v = \frac{x^2}{2}$; тогда $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx$; получили более сложный интеграл.

Пример 7. $\int \ln x dx = [u = \ln x, dv = dx; du = \frac{1}{x}dx, v = x] = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$.

Пример 8. Вычислить интеграл $\int e^x\cdot\cos x dx$.

Решение: Положим $u = e^x$, $dv = \cos x dx$. Тогда $du = e^x dx$, $v = \int \cos x dx$ $v = \sin x$ (одна из первообразных); имеем $\int e^x\cdot\cos x dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x dx$ (*). Интеграл $\int e^x\cdot\sin x dx$ снова вычисляем по частям, положив $u = e^x$, $dv = \sin x dx$.

Тогда $\int e^x \cdot \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$. Подставляя значение полученного интеграла в (*) находим

$$\int e^x \cdot \cos x dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

Перенося интеграл из правой части равенства в левую, получаем $2\int e^x \cdot \cos x dx = e^x(\sin x + \cos x) + C$, откуда окончательно имеем $\int e^x \cdot \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$

5.2. Определенный интеграл

Формула Ньютона-Лейбница.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и функция $F(x)$ является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то справедлива *формула Ньютона-Лейбница:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Свойства определенного интеграла.

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
3. Для любых чисел ***a***, ***b*** и ***c*** имеет место равенство $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
4. Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла: $\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.
5. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Далее будем полагать, что $a<b$.

6. Если функция $f(x) \geq 0$ всюду на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

7. Если $f(x) \le g(x)$ всюду на отрезке $[a,\, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)$.

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,\, b]$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

9. Если $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{m}$– соответственно, максимум и минимум функции $f(x)$ на $[a,\, b]$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Методы интегрирования.

Замена переменной.

Пусть: 1) $f(x)$ - непрерывная функция на отрезке $[a,\, b]$;

2) функция $\varphi(t)$ - дифференцируема на $[\alpha,\, \beta]$, причем $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha,\, \beta]$ и множеством значений функции $\varphi(t)$ является отрезок $[a,\, b]$;

3) $\varphi(\alpha) = a, \qquad \varphi(\beta) = b$.

Тогда справедлива формула: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

Заметим, что при подстановке следует сначала найти новые пределы интегрирования и выполнить необходимые преобразования подынтегрального выражения.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$.

Решение: Сделаем замену: $t = 1 + x^2$. Тогда $dt = 2xdx$. Пределы интегрирования: при $x = 0, \quad t = 1$ и при $x = 1, \quad t = 2$.

Получаем: $\int\limits_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \int\limits_1^2 \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

Интегрирование по частям.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,\, b]$. Тогда справедлива формула: $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

Пример 10. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x \cdot e^{-x}dx$.

Решение: Пусть $u = x, \quad dv = e^{-x}dx$; тогда $v = -e^{-x}$; по формуле получим

$$\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx = -x\cdot e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

Площадь плоской фигуры.

Пусть $y = f(x)$ неотрицательная и непрерывная функция на отрезке $[a,\ b]$ На плоскости *0xy* рассматривается фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, отрезком $[a,\ b]$ и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$. Эта фигура называется *криволинейной трапецией.* Площадь криволинейной трапеции равна определенному интегралу от функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Если фигура ограничена сверху и снизу функциями $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, непрерывными на отрезке $[a,\ b]$, причем $f(x) \geq g(x)$, то площадь $\boldsymbol{S}$ криволинейной фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций, ограниченных сверху графиками $f(x)$ и $g(x)$:

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Пример 11. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}, \quad y = x^3$.

Решение: Вычислим абсциссы точек пересечения указанных кривых, для чего приравняем правые части этих уравнений: $\sqrt{x} = x^3$. Корни уравнения $x_1 = 0, \quad x_2 = 1$. Следовательно, площадь фигуры вычисляетсякак определенный интеграл на отрезке $[0,\ 1]$: $S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right)dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{12}.$

5.3. Несобственные интегралы

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, \xi] \subset [a, +\infty)$. Интеграл вида $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ - называется несобственным интегралом 1-го рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$.

Определение. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, если существует конечный предел вида $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\int\limits_a^{\xi} f(x)dx$. В противном случае этот несобственный интеграл называется расходящимся.

Сходящийся несобственный интеграл 1-го рода определяется равенством

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\xi\to+\infty}\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Аналогично интегралу $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ определяются следующие интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{\xi\to-\infty}\int\limits_{\xi}^{a} f(x)dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int\limits_{b}^{+\infty} f(x)dx,\ b\in R.$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a,b)$, интегрируема на любом отрезке $[a,\xi]\subset[a,b)$. Интеграл вида $\int\limits_a^b f(x)dx$ - называется несобственным интегралом 2-го рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a,b)$.

Определение. Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx \quad (a<b<+\infty)$ называется сходящимся, если существует конечный предел вида $\lim\limits_{\xi\to b-0}\int\limits_a^{\xi} f(x)dx$, в противном случае этот интеграл называется расходящимся.

Сходящийся несобственный интеграл 2-го рода определяется равенством

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\xi\to b-0}\int\limits_a^{\xi} f(x)dx.$$

Пример 12 Используя определение, вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость, $\qquad I=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^3}dx.$

Решение. Интеграл I является несобственным интегралом 1-го рода. Поэтому

$$I=\lim_{\xi\to+\infty}\int_1^{\xi}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^3}dx=\lim_{\xi\to+\infty}I(\xi)$$

Для вычисления интеграла $I(\xi)$ применяем формулу интегрирования по частям:

$$I(\xi)=-\frac{1}{2x^2}\operatorname{arctg}x\Big|_1^{\xi}+\frac{1}{2}\int_1^{\xi}\frac{dx}{x^2(1+x^2)}=-\frac{1}{2\xi^2}\operatorname{arctg}\xi+\frac{\pi}{8}+$$
$$+\frac{1}{2}\int_1^{\xi}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2\xi^2}\operatorname{arctg}\xi+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x\right)\Big|_1^{\xi}=\frac{\pi}{8}-$$
$$-\frac{1}{2\xi^2}\operatorname{arctg}\xi-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}+\operatorname{arctg}\xi-1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\xi-\frac{1}{2\xi}-$$
$$-\frac{1}{2\xi^2}\operatorname{arctg}\xi.$$

Таким образом, $\quad I=\lim\limits_{\xi\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\xi-\frac{1}{2\xi}-\frac{1}{2\xi^2}\operatorname{arctg}\xi\right)=\frac{1}{2}.$

Пример 13. Используя определение, вычислить интеграл или установить его расходимость, $\quad I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx$.

Решение. Интеграл I является несобственным интегралом 2-го рода, особая точка $x=0$ - находится внутри отрезка интегрирования. Тогда

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx+\int_0^1\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx\equiv I_1+I_2.$$

Для сходимости интеграла I необходимо и достаточно, чтобы сходились оба интеграла I_1 и I_2.

Рассмотрим интеграл I_1. Имеем

$$I_1=\lim_{\xi\to-0}\int_{-1}^{\xi}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx=\lim_{\xi\to-0}\int_{-1}^{\xi}\left(x^{-2/3}-x^{-5/3}\right)dx=\lim_{\xi\to-0}\left(3x^{1/3}+\frac{3}{2}x^{-2/3}\right)\Big|_{-1}^{\xi}=$$
$$=\lim_{\xi\to-0}\left(3\xi^{1/3}+\frac{3}{2}\xi^{-2/3}+3-\frac{3}{2}\right)=+\infty.$$

Отсюда получаем, что интеграл I_1 расходится. Итак, независимо от поведения интеграла I_2 интеграл I расходится.

Пример 14. Используя определение, вычислить интеграл или установить его расходимость, $\quad I=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

Решение. В интеграле I область интегрирования - бесконечный промежуток $(1,+\infty)$; кроме того, подынтегральная функция имеет особую точку $x=1$. Поэтому интеграл I разбиваем на сумму несобственных интегралов 1-го и 2-го рода:

$$I=\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}+\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}\equiv I_1+I_2 .$$

Имеем

$$\int_a^b \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=2\int_a^b \frac{d\left(\sqrt{x-1}\right)}{x}=2\int_a^b \frac{d\left(\sqrt{x-1}\right)}{1+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}= \\ =2arctg\sqrt{x-1}\,|_a^b=2\left(arctg\sqrt{b-1}-arctg\sqrt{a-1}\right).$$

Таким образом, используя полученный интеграл:

$$I_1=\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\lim_{\xi\to 1+0}\int_\xi^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\lim_{\xi\to 1+0}2\left(\frac{\pi}{4}-arctg\sqrt{\xi-1}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

$$I_2=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\lim_{\xi\to +\infty}\int_2^\xi \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\lim_{\xi\to +\infty}2\left(arctg\sqrt{\xi-1}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, получим, что $I=I_1+I_2=\pi$.

5.4. Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Используя свойства и таблицу, вычислить интегралы:

1	$\int\left(x^2+3x^3-x+6\right)dx$	**2**	$\int\left(x^4+\sqrt[5]{x}-3\sqrt{2x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$
3	$\int\left(\frac{4}{5x^4}+7x^{0,6}-2e^{3x}-4\cos\frac{x}{2}\right)dx$	**4**	$\int e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$
5	$\int\left(\frac{1}{x^2-25}+\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)dx$	**6**	$\int\left(\frac{2}{1+x^4}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$
7	$\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$	**8**	$\int\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$
9	$\int\frac{x^5-x+1}{x^2+1}dx$	**10**	$\int\frac{3tg^2x+4}{\sin^2 x}dx$
11	$\int\frac{3-2ctg^2x}{\cos^2 x}dx$		

Задание 2. Применяя метод замены переменной, вычислить интегралы:

1	$\int \sin(3x+5)dx$	**2**	$\int \frac{dx}{\sin^2 x/3}$	**3**	$\int \frac{e^{4x}}{e^x-1}dx$
4	$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$	**5**	$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$	**6**	$\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}}dx$
7	$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$	**8**	$\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$	**9**	$\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$
10	$\int e^{-x^3} \cdot x^2 dx$	**11**	$\int e^{\cos x} \cdot \sin x dx$	**12**	$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$
13	$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$	**14**	$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$	**15**	$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$
16	$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$	**17**	$\int \frac{(arctgx)^{100}}{1+x^2}dx$	**18**	$\int \frac{3^{1/x}}{x^2}dx$
19	$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$	**20**	$\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	**21**	$\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}dx$

Задание 3. Методом интегрирования по частям вычислить интегралы:

1	$\int x \cdot \mathrm{arctg} x dx$	**2**	$\int x \cdot \ln x dx$	**3**	$\int (2x^2+x) \cdot \ln x dx$
4	$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$	**5**	$\int x \cdot e^{-x}dx$	**6**	$\int x \cdot e^{5x}dx$
7	$\int x \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{5x-1}dx$	**8**	$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$	**9**	$\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
10	$\int \ln^2 x dx$	**11**	$\int \ln(x^2+1)dx$	**12**	$\int e^{\sqrt{x}}dx$
13	$\int e^x \sin\frac{x}{2}dx$	**14**	$\int (x^3+1)\cos x dx$	**15**	$\int \cos(\ln x)dx$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл:

1	$\int_0^2 (3x^2-1)dx$	**2**	$\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx$	**3**	$\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6}$

4	$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	**5**	$\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x(x-1)}dx$	**6**	$\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$
7	$\int_{2\pi}^{3\pi} x\cdot\sin x dx$	**8**	$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$	**9**	$\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$
10	$\int_0^{\sqrt{3}} arctgx\cdot dx$	**11**	$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2 dx$	**12**	$\int_1^4 \frac{x^2 16}{\sqrt{x}+2}dx$
13	$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$	**14**	$\int_0^{\sqrt{3}} x\,arctg\,x\,dx$	**15**	$\int_0^1 x\left(4-x^2\right)^{12}dx$
16	$\int_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$	**17**	$\int_0^{\pi/2} \sin x\sin 3x\,dx$	**18**	$\int_0^{\pi/3} \sin^3 x\,dx$
19	$\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$	**20**	$\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+2x+2}$	**21**	$\int_0^1 x^2\sqrt[3]{1-x^3}dx$
22	$\int_0^{\pi/4} \sin 4x\cdot dx$	**23**	$\int_0^{\ln\pi/3} e^x\cos e^x\,dx$	**24**	$\int_0^{\pi/6} \cos^3 x\,dx$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

1	$y=\frac{8}{x^2}; y=10-x^2$	**2**	$y^2=2x^3; y=8x^2$
3	$y=\sin x$; $y=\cos x; 0\le x\le\frac{\pi}{4}$	**4**	$y=e^{2x}; y=2e^{-x}; x=1$
5	$y^2=x+4$; $y=x-2$	**6**	$y=x;\ y=\frac{\pi}{2}\sin x;\ x\ge 0$
7	$y^2=2x; x+y=4; x=8$	**8**	$y=\sqrt{1-x^2}; y=x+1; x=1$
9	$2y=x^2$; $y^2=2x$	**10**	$y=x-x^2\sqrt{x};\quad y=0$
11	$y=x-x^2$; $y=x\sqrt{1-x}$	**12**	$y=-x^2$; $y=x^2-2x-4$
13	$y=\ln(x+2); y=2\ln x; y=0; x>0$	**14**	$y=\frac{6}{x+5}$; $y=\lvert x\rvert; x\ge -2$

15	$y=x; y=\frac{2}{x}; y=\frac{8}{3}-x; x\geq 1$	**16**	$y^2+8x=16$; $y^2-24x=48$
17	$y=\frac{x^2}{2}; \quad y=\frac{1}{1+x^2}$	**18**	$y=e^x$; $y=e^{-x}$; $y=e$
19	$y=\sqrt{x}; \ y=x-2; \quad x=0$	**20**	$y=\frac{x^2}{2}$; $y=2-\frac{3}{2}x$

Задание 6. Используя определение, вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

1	$I=\int\limits_3^{+\infty}\frac{\ln x}{2x}dx$	**2**	$I=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$
3	$I=\int\limits_0^{+\infty}e^{-2x}\cos 3x dx$	**4**	$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)^2}$
5	$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+16)^2}$	**6**	$\int\limits_0^{3/2}\frac{dx}{(x-2)(2x-3)}$
7	$\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+8x+15}$	**8**	$\int\limits_{0,5}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$
9	$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$	**10**	$\int\limits_2^4\frac{xdx}{(x^2+1)(x^2-4)}$
11	$\int\limits_0^{25}\frac{dx}{\sqrt{x}+x}$	**12**	$\int\limits_1^2\frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx$
13	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2-16)^2}$	**14**	$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt[3]{\arcsin x}}$
15	$\int\limits_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$	**16**	$\int\limits_{-1}^1\frac{x^4dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$

Глава 6. Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, искомую функцию этих переменных и производные различных порядков данной функции. Вместо производных могут входить дифференциалы.

Если неизвестная функция y зависит от одного независимого переменного x, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. Если y является функцией нескольких независимых переменных, то уравнение называется *дифференциальным уравнением с частными производными*. В данной главе будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей из производных, входящих в это уравнение.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x, y) \tag{6.1}$$

называется *уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной* y'.

Основная задача теории дифференциальных уравнений – нахождение всех решений данного дифференциального уравнения. В простейших случаях эта задача сводится к вычислению интеграла, поэтому процесс разыскания всех решений называют *интегрированием* дифференциального уравнения.

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество. Если эта функция задана в неявном виде, то решение называют *интегралом*. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Для дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{6.2}$$

общее решение имеет вид:

$$y = \varphi(x, C), \tag{6.3}$$

где C – произвольная постоянная, а общий интеграл записывается в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{6.4}$$

Геометрически общее решение (6.3) и общий интеграл (5.4) представляют собой семейство интегральных кривых на плоскости, зависящее от одного параметра C.

Частным решением дифференциального уравнения (6.2) называется решение, полученное из общего решения при фиксированном значении C:

$$y = \varphi(x, C_0), \tag{6.5}$$

где C_0 – число. Аналогично определяется частный интеграл:

$$\Phi(x, y, C_0) = 0. \tag{6.6}$$

Задача Коши. Найти решение $y = f(x)$ дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$. Это означает, что нужно найти интегральную кривую, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$.

6.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Рассмотрим различные типы дифференциальных уравнений первого порядка.

6.1.1. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Определение. Дифференциальное уравнение типа

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{6.7}$$

где коэффициент M зависит только от x, а коэффициент N – только от y, называется *уравнением с разделенными переменными*.

Общий интеграл уравнения (5.8) имеет вид:

$$\int M(x)dx + \int N(x)dx = C, \tag{6.8}$$

где C – произвольная постоянная.

Пример 6.1. Решить уравнение с разделенными переменными:

$$xdx + ydy = 0.$$

Решение: Интегрируем это уравнение, получим общий интеграл $\int xdx + \int ydy = C_1$ или $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$. Так как левая часть неотрицательна, то правая часть тоже неотрицательна. Обозначим $2C_1 = C^2$, будем иметь общий интеграл в виде:

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Геометрически общий интеграл – это семейство концентрических окружностей на плоскости с центром $O(0, 0)$ и радиусом C.

6.1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Уравнение вида

$$M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_{21}(x) \cdot N_2(y)dx = 0 \tag{6.9}$$

называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

При $N_2(y) \neq 0$ и $M_2(y) \neq 0$ разделив обе части уравнения (5.9) на $[N_1(y) \cdot M_2(x)]$, получаем уравнение с разделенными переменными

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(x)}{N_1(x)} = 0. \tag{6.10}$$

Пример 6.2. Решить уравнение с разделяющимися переменными:

$$(1+x)ydx+(1-y)xdy=0.$$

Решение: Здесь $M_1(x) = 1+x$, $N_1(y) = y$, $M_2(x) = x$, $N_2(y) = 1-y$. Разделив обе части уравнения на xy, получаем уравнение с разделенными переменными:

$$\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0,$$

общий интеграл которого равен $\ln|x|+x+\ln|y|-y=C$ или $\ln|xy|+x-y=C$.

6.1.3. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Определение. Уравнение

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \qquad (6.11)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – непрерывные дифференцируемые функции, которые удовлетворяют условию

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad (6.12)$$

причем $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области. В этом случае левая часть уравнения (6.11) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. Общий интеграл уравнения (6.11) будет:

$$u(x, y) = C. \qquad (6.13)$$

Пример 6.3. Решить дифференциальное уравнение [10]:

$$\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0.$$

Решение: Обозначим $P=\frac{2x}{y^3}$, $Q=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$. Тогда $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{6x}{y^4}$. Условие (6.12) при $y \neq 0$ выполняется, находим неизвестную функцию $u(x, y)$. Поскольку $\frac{\partial u}{\partial x}=P=\frac{2x}{y^3}$, имеем: $u=\int\frac{2x}{y^3}dx=\frac{x^2}{y^3}dy+\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – не определенная пока функция от y. Дифференцируем последнее соотношение по y, учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial y}=Q=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$. получаем: $-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$, $\varphi''(y)=\frac{1}{y^2}$, $\varphi(y)=-\frac{1}{y}+C_1$, $u(x,y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+C_1$. Таким образом, общий интеграл исходного уравнения равен: $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C$.

6.1.4. Линейные дифференциальные уравнения и уравнения Бернулли

Определение. *Линейным уравнением первого порядка* называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной:

$$\frac{\partial y}{\partial x}+P(x)y=Q(x), \qquad (6.14)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – заданные непрерывные функции от x.

Один из методов решения уравнения (6.14) – так называемый метод Бернулли, когда решение линейного уравнения ищется в виде произведения двух функций:

$$y=u(x)v(x). \qquad (6.15)$$

Одна из этих функций выбирается специальным образом, а другая определяется на основании уравнения (6.14). Покажем решение уравнения на примере.

Пример 6.4. Решить линейное дифференциальное уравнение ***методом Бернулли***:

$$y'-\frac{2x}{x^2+1}y=x^2+1.$$

Решение: Решение будем искать в виде (6.15). Поскольку $y=uv$, а $y'=u'v+uv'$, то уравнение запишется в виде:

$$u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v\right)+v\frac{du}{dx}=x^2+1. \qquad (6.16)$$

Выбираем функцию v такой, чтобы она обращала в нуль коэффициент при u. Тогда второй множитель u «подстроится» таким образом, чтобы функция y являлась решением исходного уравнения. Тогда имеем уравнение относительно функции v:

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v=0.$$

Разделив переменные v и x, получим $\frac{dv}{v}=\frac{2xdx}{x^2+1}$, откуда $v=C(x^2+1)$. Нам требуется какая-нибудь одна функция v, удовлетворяющая указанному условию, поэтому полагаем $C=1$, тогда $v=x^2+1$. Подставим эту функцию в уравнение (6.16), получим $v\frac{du}{dx}=x^2+1$. Решив это уравнение, найдём $u=x+C$. Общее решение исходного дифференциального уравнения будет $y=(x+C)(x^2+1)$.

Определение. *Уравнением Бернулли* называется дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial y}{\partial x}+P(x)y=Q(x)y^n,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – непрерывные функции от x (или постоянные); n в общем случае действительное число, $n \neq 0$ и $n \neq 1$ (в противном случае получаем линейное уравнение и уравнение с разделяющимися переменными соответственно).

Уравнение Бернулли также может быть решено методом Бернулли.

6.2. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Определение. Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка называется *линейным*, если оно имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \tag{6.17}$$

Коэффициенты уравнения a_0, a_1, … , a_n в общем случае являются функциями, зависящими от x. Мы будем рассматривать только случай, когда a_0, a_1, … , a_n некоторые действительные числа, а $f(x)$ – заданная функция от x.

Пусть $f(x) \neq 0$. Тогда уравнение (6.17) будет называться *линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением n-ого порядка с постоянными коэффициентами.* Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \tag{6.18}$$

и называется *линейным однородным обыкновенным дифференциальным уравнением n-ого порядка с постоянными коэффициентами.*

В дальнейшем будем предполагать, что $a_0 = 1$.

6.2.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{6.19}$$

где p и q – постоянные действительные числа.

Определение. Два частных решения y_1 и y_2 уравнения (6.19) называются *линейно независимыми* на отрезке $[a, b]$, если их отношение на этом отрезке не является постоянным, т.е. если $\dfrac{y_1}{y_2} \neq const$. В противном случае решения называются *линейно зависимыми* на отрезке $[a, b]$.

Теорема 1. Если y_1 и y_2 – два линейно независимых решения уравнения (5.19), то

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, есть его *общее* решение.

Будем искать частные решения в виде:

$$y = e^{kx}, \text{ где } k = \text{const}.$$

Подставляя y, $y' = ke^{kx}$, $y' = k^2 e^{kx}$ в уравнение (5.19) и учитывая, что $e^{kx} \neq 0$, получаем уравнение:

$$k^2 + pk + q = 0, \qquad (6.20)$$

которое называется *характеристическим уравнением* по отношению к уравнению (6.19).

Возможны следующие три случая для корней характеристического уравнения $k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Случай 1. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$. Корни k_1 и k_2 действительные, причем $k_1 \neq k_2$.

Частные решения уравнения (5.19): $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ являются линейно независимыми. Общим решением будет $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Случай 2. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$. Характеристическое уравнение (6.20) имеет два равных действительных корня $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$. Общее решение уравнения (6.19) имеет вид $y = C_1 e^{-\frac{p}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{p}{2}x}$.

Случай 3. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$. Характеристическое уравнение (6.20) имеет комплексно сопряжённые корни: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, где $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Общим решением дифференциального уравнения (5.19) будет $y = C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta x$.

Пример 6.5. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 10 = 0$ имеет корни: $k_{1,2} = -1 \pm 3i$. Следовательно, общее решение есть $y = C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x$.

6.2.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид:

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{6.21}$$
где p и q – постоянные действительные числа, $f(x) \neq 0$ – непрерывная функция.

Теорема 2. Общее решение неоднородного уравнения (6.21) представляется как сумма какого-нибудь частного решения этого уравнения $y_ч$ и общего решения $y_о$ соответствующего однородного уравнения:
$$y'' + py' + qy = 0. \tag{6.22}$$

Согласно теореме 2, общее решение уравнения (6.21) находится следующим образом:

I. Решается соответствующее однородное дифференциальное уравнение (5.22) и находим его общее решение $y_о$ (см. раздел 6.2.1).

II. Находится частное решение уравнения (6.21).
Для отыскания частного решения рассмотрим несколько возможностей, когда можно найти $y_ч$, не прибегая к интегрированию.

1. Функция $f(x)$ имеет вид: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени. Возможны следующие частные случаи:

а) если α *не является корнем* характеристического уравнения
$$k^2 + pk + q = 0, \tag{6.23}$$
то $y_ч$ нужно искать в виде: $y_ч = Q_n(x)e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$ – некоторый многочлен той же степени n с неопределёнными коэффициентами.

б) если α *является корнем* характеристического уравнения (6.23) кратности μ (μ=1 либо μ=2), то $y_ч$ следует искать в виде $y_ч = x^{\mu}Q_n(x)e^{\alpha x}$.

Замечание 1. Если $P_n(x)$ является постоянной величиной (многочленом нулевой степени), то $Q_n(x)$ тоже постоянная величина.

Замечание 2. Если $f(x)$ – многочлен, то есть α=0, то $y_ч$ тоже многочлен.

2. Функция $f(x)$ имеет вид:
$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$
где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ многочлены.

а) Пусть $\alpha \pm i\beta$ *не являются корнями* характеристического уравнения (6.23).
Тогда $y_ч$ следует искать в виде:
$$y_ч = U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$
где $U(x)$, $V(x)$ многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P_n(x)$, $Q_m(x)$.

б) Пусть $\alpha \pm \beta i$ *являются корнями* характеристического уравнения (6.23) кратности 1. Тогда $y_ч$ следует искать в виде:
$$y_ч = x\left(U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right).$$

3. Пусть в обозначениях предыдущего пункта $\alpha = 0$, тогда функция $f(x)$ имеет вид:
$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

а) Пусть $\pm\beta i$ *не являются корнями* характеристического уравнения (6.23) Тогда $y_ч$ следует искать в виде: $y_ч = U(x)\cos\beta x + V(x)\sin\beta x$.

б) Пусть $\pm\beta i$ *являются корнями* характеристического уравнения (6.23) Тогда $y_ч$ следует искать в виде: $y_ч = x(U(x)\cos\beta x + V(x)\sin\beta x)$.

Пример 6.6. Найти общее решение уравнения [2]: $y'' + y = 4x\sin x$.

Решение: Здесь $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_n(x) \equiv 0$, $Q_m(x) = 4x$. Решаем однородное уравнение $y'' + y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2+1 = 0$ имеет комплексно сопряжённые корни $k_{1,2} = \pm i$. Таким образом, общее решение однородного уравнения есть $y_о = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Комплексные корни $\alpha \pm \beta i = \pm i$ являются корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_ч = x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)$. Подставляя $y_ч$ в неоднородное уравнение, получаем систему алгебраических уравнений, которая дает: $A = -1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y = y_о + y_ч = C_1\cos x + C_2\sin x + x(-x\cos x + \sin x).$$

4. Функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Тогда частное решение уравнения (6.21) ищется в виде суммы частных решений уравнений:

$$y'' + py' + qy = f_1(x),\ y'' + py' + qy = f_2(x).$$

Пример 6.7. Дано уравнение [11] $y'' - 2y' + 2y = e^x + x\cos x$. Найти общее решение.

Решение: Однородное уравнение $y'' - 2y' + 2y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 2 = 0$ имеет корни: $k_{1,2} = 1 \pm i$. Общее решение однородного уравнения: $y_о = C_1 e^x\cos x + C_2 e^x\sin x$.

Частное решение уравнения $y'' - 2y' + 2y = e^x$ ищем в виде $y_{ч1} = Ae^x$. Частное решение уравнения $y'' - 2y' + 2y = x\cos x$ ищем в виде

$$y_{ч2} = (Bx + C)\cos x + (Dx + E)\sin\beta x.$$

Непосредственной подстановкой в соответствующие уравнения определяются коэффициенты $A, B.C, D, E$. Общее решение неоднородного уравнения запишется как сумма $y_о$, $y_{ч1} = Ae^x$ и $y_{ч2}$.

6.3. Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения с разделяющимися переменными.

1. $\sqrt{1 - x^2}\,dy + \sqrt{1 - y^2}\,dx = 0$.
2. $x\sqrt{2 - y^2}\,dx + 2y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$.
5. $2x\sqrt{2 - 5y^2}\,dx + 5y\sqrt{1 - 5x^2}\,dy = 0$.
6. $(5x - xy^2)dx + (4y - yx^2)dy = 0$.

3. $3x\sqrt{2-2y^2}\,dx+2y\sqrt{1-2x^2}\,dy=0$.

4. $x\sqrt{6-y^2}\,dx+y\sqrt{6-x^2}\,dy=0$.

7. $\left(5x^2y-x^2\right)dx+\left(4-x^2\right)dy=0$.

Найти общий интеграл уравнений в полных дифференциалах.

1. $(x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin y)dy=0$.
2. $(x+2\sin y)dx+2(x\cos y+3\sin y)dy=0$.
3. $(3x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin 2y)dy=0$.
4. $(x+\sin 3y)dx+(3x\cos 3y+\sin y)dy=0$.
5. $(7x+2\sin y)dx+(2x\cos y+\sin 7y)dy=0$.
6. $3x^2y^2dy+2xy^3dx=0$.
7. $3x\cos 3y dy+\sin 3y=0$.

Проинтегрировать линейные уравнения первого порядка.

1. $y'+xy=x^3$.
2. $y'-\dfrac{3y}{x}=x$.
3. $\left(1+x^2\right)y'+xy=1$.
4. $(2x+1)y'+y=x$.
5. $yy'=2y-x$.

Проинтегрировать уравнения Бернулли.

1. $y'-\dfrac{y}{x-1}=\dfrac{y^2}{x-1}$.
2. $y'-\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.
3. $y'+\dfrac{y}{x}=x^2y^4$.
4. $y'-\dfrac{2xy}{1+x^2}=\dfrac{4\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg}x$.
5. $xy'=y+xy^2$.

Найти общие решения однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. $y''+2y'+y=0$.
2. $y''+y'+3y=0$.
3. $y''-5y'+9y=0$.
4. $y''-8y'-7y=0$.
5. $y''-6y'+4y=0$.
6. $y''+4y'+4y=0$.
7. $y''+6y=0$.

Составить общие решения неоднородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. $y''+4y'-y=3x+2$
2. $y''-3y'+2y=e^x(3-4x)$.
3. $y''+2y'-3y=e^x\left(x^2-3x+2\right)$.
4. $y''-6y'+8y=3x^2+2x+1$.
5. $y''+8y'+7y=e^x(3x+7)$.
6. $y''-4y'=\cos 6x+8$.
7. $y''+6y=\sin 8x+x-6$.
8. $y''+5y'6+y=\sin 4x+3x$.
9. $y''+8y'+12y=e^{4x}+2$.
10. $y''-5y=\sin x+\cos 2x$.

Литература

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – М.: Изд-во «Наука», 1966. – 736 с.
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1975. – 872 с.
3. Высшая математика для экономистов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер и др.; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 479 с.
4. Высшая математика для экономических специальностей: Учебник и пратикум (части I и II) / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера – М.: Высшее образование, 2008. – 893 с.
5. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 640 с.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.II: Учебное пособие для студентов втузов. – М.: Высшая школа, 1980. – 365 с.
7. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Краткий курс высшей математики для экономических вызов. Часть 1. Основы высшей математики: Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 1982. – 272 с.
8. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – Изд-во «Наука», 1969. – 640 с.
9. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Под ред. проф. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 656 с.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962. – 856 с.
11. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: РХД, 2000. – 176 с.
12. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. – Киев: Наукова Думка, 1974. – 744 с.
13. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. ГИТТЛ, 1955. – 488 с.

Глава 7. Ряды

Объявленную тему рассмотрим, следуя [1] (соответствующее электронное издание [2]). Задачи рекомендуется брать из [3].

7.1. Числовые ряды

Рассмотрим бесконечную последовательность чисел

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots. \tag{7.1}$$

Соединим их знаком +; полученное символическое выражение

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots. \tag{7.2}$$

называется *числовым рядом*. Числа (7.1) называются *членами ряда*: u_1 – первый член, u_2 – второй,…, u_n – n – ый или общий член ряда ($n = 1,2,\ldots$). Что понимать под символом (7.2), т.е. под «бесконечной суммой» чисел? Составим сумму n первых членов ряда

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \tag{7.3}$$

– она называется частичной или частной суммой ряда порядка n. Получили числовую последовательность $\{S_n\}$ ($n = 1,2,\ldots$).

Если существует (конечный) предел последовательности частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \equiv S$, то ряд называется *сходящимся*, а сам предел, т.е. число S, называется *суммой ряда*, и пишут

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \tag{7.4}$$

Если же конечного предела частичных сумм не существует, то ряд называется расходящимся, он суммы (конечной) не имеет. Однако, если $S_n \to +\infty$ (или $S_n \to -\infty$), то говорят, что ряд расходится к сумме $S = +\infty$ (или $S = -\infty$). Нумерацию членов ряда иногда удобнее начинать не с 1, а с некоторого целого числа m: $u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{m+n} + \ldots$.

Рассмотрение числовых рядов есть новая форма исследования числовых последовательностей, ибо: 1) каждому ряду (7.2) однозначно соответствует последовательность (7.3) (его частичных сумм) и 2) каждой заданной последовательности $\{S_n\}$ однозначно соответствует ряд

$$S_1 + (S_2 - S_1) + \ldots + (S_n - S_{n-1}) + \ldots$$

с частичной суммой S_n.

Ряд геометрической прогрессии. Рядом бесконечной геометрической прогрессии $a, aq, aq^2, \ldots, aq^n, \ldots$ называется ряд

$$a + aq + \ldots + aq^{n-1} + aq^n + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} aq^n . \tag{7.5}$$

Частичная сумма порядка n при $q \neq 1$ есть

$$S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^{n-1} \cdot q}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n. \qquad (7.6)$$

1) Пусть $|q| < 1$ (в этом случае соответствующая геометрическая прогрессия называется убывающей). Тогда $q^n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, значит, ряд сходится и имеет сумму $S = \dfrac{a}{1-q}$.

2) Пусть $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$: конечного предела нет – ряд расходится.

3) При $q = 1$ формулой (7.6) суммы пользоваться нельзя. В этом случае имеем ряд $\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n\,\text{раз}} + \ldots$ с частной суммой $S_n = na \to \infty$ при $n \to \infty$ (если $a \neq 0$), ряд расходится.

4) При $q = -1$ ряд (7.5) имеет вид $a - a + a - \ldots + (-1)^{n-1} a + \ldots$. У него $S_n = \begin{cases} a, \textit{если } n \textit{ нечётное}, \\ 0, \textit{если } n \textit{ чётное}, \end{cases}$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует (если $a \neq 0$).

Таким образом, доказана

Теорема 7.1. *Ряд геометрической прогрессии (7.5) 1) в случае* $|q| < 1$ *сходится и имеет сумму* $\dfrac{a}{1-q}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \equiv a + aq + \ldots + aq^n + \ldots = \frac{a}{1-q}, \; |q| < 1; \qquad (7.7)$$

2) а при $|q| \geq 1$ *расходится (если* $a \neq 0$*).*

(Например, для $a = 1$ и $|x| < 1$, имеем $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$. Этот результат можно получить формально делением «уголком» 1 на $(1 - x)$.)

Теорема 7.2. *Отбрасывание, добавление или изменение конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость или расходимость (а только на его сумму).*

Доказательство. Это следует из того, что при достаточно больших n частичная сумма нового ряда отличается от соответствующей частичной суммы исходного ряда (7.2) на некоторое постоянное число A, поэтому эти частичные суммы одновременно имеют или нет предел при $n \to \infty$. Например, отбросим k первых членов ряда (7.2). Получим ряд

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{k+n} + \ldots. \qquad (7.8)$$

Его частичную сумму порядка n обозначим σ_n. Очевидно

$$S_{k+n} = S_k + \sigma_n. \qquad (7.9)$$

Поскольку $A \equiv S_k$ - фиксированное число, то последовательность S_m, где $m = n + k$, и σ_n одновременно имеют предел при $n \to \infty$ или нет. Доказательство окончено.

Ряд (7.8) называется *k-ым остатком* ряда (7.2) или остатком ряда после *k*-ого члена. Допустим, что ряд (7.2) сходится, то ряд (7.8) тоже сходится, и сумму его обозначим r_k - она зависит от *k*. Из равенства (7.9) при $n \to \infty$ получим

$$S = S_k + r_k. \tag{7.10}$$

Этот факт естественно записывать так

$$S = \underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_k}_{S_k} + \underbrace{u_{k+1} + \ldots}_{r_k}.$$

Из (7.10) при $k \to \infty$: $r_k = S - S_k \to S - S = 0$, т.е. *если ряд (7.2) сходится, то сумма* r_k *его остатка после k-ого члена стремится к нулю при* $k \to \infty$: $\lim\limits_{k \to \infty} r_k = 0$.

В этом – значение рядов для приближённых вычислений: сумму *S* находят примерно как S_k.

<u>Арифметические действия над рядами</u>. Сходящиеся ряды во многом ведут себя как конечные суммы чисел.

Теорема 7.3. *Если ряд (7.2) сходится и имеет сумму S, то при всяком* $C = const$ *сходится также ряд*

$$Cu_1 + Cu_2 + \ldots + Cu_n + \ldots \tag{7.11}$$

и его сумма равна $C \cdot S$.

Теорема 7.4. *Если ряды (7.2) и*

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{7.12}$$

сходятся и имеют суммы S и σ соответственно, то сходятся также ряды

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots, \tag{7.13}$$

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \ldots + (u_n - v_n) + \ldots \tag{7.14}$$

и их суммы соответственно равны $S + \sigma$ *и* $S - \sigma$ *(т.е. сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать).*

Подчеркнём, что для расходящихся рядов сказанное теряет смысл. Например, рассмотрим символы $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$, $\sigma = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n + \ldots = 2\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots) = 2S$. Казалось бы, что $\sigma < S$, а с другой стороны $\sigma > S$ в два раза.

Понятно, что одна из первых и главных задач – установить признаки сходимости (и расходимости) рядов.

Теорема 7.5. (Необходимое условие сходимости ряда.) *Если ряд (7.2) сходится, то его общий член стремится к нулю при* $n \to \infty$: $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

<u>Следствие</u>. Если общий член ряда *не стремится* к нулю, то ряд расходится.

Это следствие позволяет доказывать *расходимость* ряда - когда u_n *к нулю не стремится*. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ расходится, т.к. $u_n = \frac{n}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0$.

Согласно теореме 7.5, для сходимости ряда необходимо, обязательно выполнение условия $u_n \to 0$. Однако, одного этого требования *не достаточно* для сходимости: в случае, когда $u_n \to 0$ есть ряды сходящиеся (например, ряд (7.5) при $|q|<1$) и есть расходящиеся. Подтвердим последнее на двух примерах.

1) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$; $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Оценим частичную сумму S_n снизу, заменив все n слагаемых наименьшим – это $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Имеем: $S_n > \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot n = \sqrt{n} \to \infty$ (при $n \to \infty$), ряд расходится.

2) Возьмём так называемый «*гармонический ряд*»:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots. \tag{7.15}$$

Здесь тоже $u_n = \frac{1}{n} \to 0$, и докажем, что *ряд расходится*. Из графических представлений очевидно, что $x > \ln(1+x)$, $x>0$, то есть

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} > \ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\ldots+\ln(1+\frac{1}{n}) = \ln[2\cdot(1+\frac{1}{2})\ldots(1+\frac{1}{n})] = \ln(n+1)\to\infty,$$

следовательно, ряд расходится.

<u>Ряды с положительными членами (положительные ряды)</u>.

Будем рассматривать ряды, члены которых неотрицательны:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \geq 0, \tag{7.16}$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} v_n,\ v_n \geq 0. \tag{7.17}$$

Теорема 7.6. 1. *Пусть члены ряда (7.16) не превосходят соответствующих членов ряда (7.17), т.е.* $u_n \leq v_n$ ($n=1,2,\ldots$). *Тогда*

1) если сходится ряд (7.17), то ряд (7.16) тем более сходится, причём $S \leq \sigma$, *где S и* σ *– суммы рядов (7.16) и (7.17) соответственно.*

2) если расходится ряд (7.16), то расходится и ряд (7.17).

2. (Предельная форма теоремы сравнения). *Если существует конечный или бесконечный предел* $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = K$, $0 \leq K \leq \infty$ ($v_n \neq 0, \forall n > n_0$), *то:*

1) при $0 \leq K < +\infty$ *из сходимости ряда (7.17) следует сходимость ряда (7.16);*
2) при $0 < K \leq \infty$ *из расходимости ряда (7.17) вытекает расходимость ряда*

(7.16). Таким образом, если $0 < K < +\infty$, *т.е. когда* $u_n \sim K \cdot v_n$ *при* $n \to \infty$, *оба ряда сходятся или расходятся одновременно.*

Пример. $1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} + \ldots$. Поскольку $\frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} \le \frac{1}{2^{n-1}}$, то члены этого ряда не превосходят соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ – а это есть ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$, он сходится. Поэтому и первый ряд сходится.

Признак Даламбера. *Пусть для ряда (7.16) существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L,\ 0 \le L \le +\infty\ (u_n > 0, \forall n \ge n_0).$$

Тогда:

1) если $L < 1$, *то ряд сходится;*

2) если $L > 1$ *– ряд расходится;*

3) в случае $L = 1$ *признак ответа не даёт: здесь существуют ряды как сходящиеся, так и расходящиеся.* (Это «сомнительный случай».)

Примеры. 1) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ x > 0$.

$u_n = \frac{x^n}{n!}$, $u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = L < 1$ – ряд сходится $\forall x > 0$.

(Позднее покажем, что сумма этого ряда равна e^x.)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{2n}}{\sqrt{n}}$. Очевидно, при $x = 0$ ряд сходится. Пусть $x \ne 0$. $u_n = \frac{(3x)^{2n}}{\sqrt{n}}$,

$u_{n+1} = \frac{(3x)^{2n+2}}{\sqrt{n+1}}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(3x)^2 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} (3x)^2 = L$. Отсюда:

- если $(3x)^2 < 1$, т.е. $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, то ряд сходится;
- если $(3x)^2 > 1$, т.е. $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$, то ряд расходится;
- в случае $L = (3x)^2 = 1$ (т.е. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$) ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ – он расходится.

Признак Даламбера, как наиболее простой, при исследовании рядов на сходимость и расходимость употребляется чаще всего.

Признак Коши (радикальный). *Пусть для ряда (7.16) существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=L,\ (0\le L\le\infty).$$

Тогда:
1) если $L<1$*, то ряд сходится;*
2) если $L>1$ *– ряд расходится;*
3) в случае $L=1$ *исследуемый ряд может оказаться сходящимся или расходящимся* (это сомнительный случай).

Интегральный признак Маклорена-Коши. *Если члены ряда (7.16) представляют собой значения в целых точках* $x=n$ *некоторой положительной и убывающей функции* $f(x)$*:* $u_n=f(n)$*, то:*
1) если несобственный интеграл

$$\int_1^\infty f(x)dx \tag{7.18}$$

сходится, то и ряд (7.16) тоже сходится;
2) если же этот интеграл (7.18) расходится, то и ряд (7.16) тоже расходится,

Пример – *обобщённый гармонический ряд*:

$$S(p)=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\frac{1}{(n+1)^p}+\ldots\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ (p>0). \tag{7.19}$$

Здесь $u_n=f(n)=\dfrac{1}{n^p}$, и можем взять $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ – это непрерывная положительная убывающая при $x\ge1$ функция. Известно, что

$$\int_1^\infty\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}\text{при } p>1 \text{ сходится}\\ \text{при } p\le1 \text{ расходится.}\end{cases}$$

Поэтому *ряд* (7.19) *при* $p>1$ *сходится, а при* $p\le1$ *расходится*. Ранее было показано, что для сходимости ряда (7.2) одного требования $u_n\to0$ не достаточно. Из приведённого примера следует, что если $u_n\to0$ медленно, то ряд может расходиться (случай $0<p\le1$), если же $u_n\to0$ достаточно быстро, то сходимость может иметь место (случай $p>1$).

Для ряда (7.19) признаки Даламбера и Коши бессильны: легко проверить, что $L=1$. Интегральный признак является универсальным, однако здесь возникает проблема исследования сходимости интеграла (7.18) .

Оценим n-ый остаток ряда (7.19):

$$\int_{n+1}^{\infty}\frac{1}{x^p}dx<r_n<\int_{n}^{\infty}\frac{1}{x^p}dx\Rightarrow\frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}}<r_n<\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

В частности, при $p=2$: $\dfrac{1}{n+1}<r_n<\dfrac{1}{n}$; поэтому полагая $S(2)\approx1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}$,

делаем ошибку $r_4<\dfrac{1}{4}$. А если надо найти $S(2)$ с точностью 0,01, то должны взять сумму 100 членов. Понятно, что обобщённый гармонический ряд медленно сходящийся (при $p>1$), однако, наряду с рядом геометрической прогрессии, он часто используется для доказательства сходимости или расходимости других рядов. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+5)}$ сходится, ибо члены его меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ ($p=3>1$). Отметим, что гармонический ряд (7.15) есть частный случай ряда (7.19): при $p=1$.

Знакочередующиеся ряды. Так называются ряды, знаки членов которого чередуются. Их удобно записывать в виде

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\,, \tag{7.20}$$

где $u_1\geq 0,\, u_2\geq 0,\ldots,u_n\geq 0,\ldots$. Сами члены ряда имеют вид $\pm u_n$, а u_n – их абсолютные величины.

Признак Лейбница (сходимости знакочередующихся рядов). *Пусть в знакочередующемся ряде (7.20): 1) абсолютные величины членов убывают, т.е.* $u_1\geq u_2\geq u_3\geq\ldots$ *и 2)* $\lim_{n\to\infty}u_n=0$. *Тогда ряд сходится, его сумма положительна и меньше первого члена:* $0<S<u_1$.

Пример. *Ряд Лейбница*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots\equiv\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \tag{7.21}$$

сходится – по признаку Лейбница. Пусть S – его сумма (позже установим, что $S=\ln 2$). Если взять $S\approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, то ошибка этого равенства будет $|r_n|<\frac{1}{n+1}$.

В знакочередующихся рядах первый член не обязательно должен быть положительным: их можно записывать в виде

$$\pm(u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots),\; u_n\geq 0\;\; (n=1,2,\ldots).$$

Ряды с произвольными членами («произвольные» или знакопеременные ряды). Абсолютная сходимость.

Рассмотрим ряды, члены которых могут иметь любой знак. В них количество как положительных, так и отрицательных членов можно считать бесконечным. Исследуем вопрос о сходимости таких рядов.

Теорема 7.7 (Коши). *Если знакопеременный ряд*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{7.22}$$

таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots \tag{7.23}$$

сходится, то и данный ряд тоже сходится. При этом, если S *– сумма ряда*

(7.22), а σ – сумма ряда (7.23), то $|S| \le \sigma$.

Определение 1. Ряд (7.22) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов – т.е. ряд (7.23).

Пользуясь этим определением, теорему 7.8 можно сформулировать так: *абсолютно сходящийся ряд сходится,* или: *если ряд сходится абсолютно, то он тем более и просто сходится*.

Определение 2. Если ряд (7.22) сходится, а ряд (7.23) расходится, то данный ряд (7.22) называется *неабсолютно или условно сходящимся*.

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ при $p>1$ сходится абсолютно, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, и при $0<p\le 1$ тоже сходится (по признаку Лейбница), но не абсолютно (т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $0<p\le 1$ расходится). В частности, ряд Лейбница (7.21) (случай $p=1$) – условно сходящийся.

Между абсолютно и условно сходящимися рядами существует глубокая разница: абсолютно сходящиеся ряды ведут себя как конечные суммы чисел, а условно сходящиеся – нет. Абсолютно сходящиеся ряды сходятся благодаря достаточно высокой скорости стремления к нулю их членов, а условно сходящиеся – за счёт взаимного погашения членов ряда. Ещё глубже указанную разницу выявляют следующие теоремы Дирихле и Римана.

Теорема Дирихле (переместительное свойство абсолютно сходящегося ряда). *Для абсолютно сходящегося ряда характер сходимости и его сумма не меняются при любой перестановке его членов.*

Теорема Римана (для условно сходящихся рядов). *Если ряд сходится условно, то каково бы ни было число А (включая* $A=\pm\infty$*), можно так переставить члены ряда, что сумма нового ряда будет в точности равна А.* (Без доказательства.)

Признаки Даламбера и Коши для произвольных рядов.

Пусть для ряда (7.22) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L \;\; \text{или} \;\; \lim\sqrt[n]{|u_n|} = L, \;\; (0 \le L \le +\infty).$$

Тогда:

1) если $L<1$*, то ряд сходится и притом абсолютно, так как при этом сходится ряд (7.23);*

2) если $L>1$*, то ряд (7.22) расходится, так как при* $L>1$ *у ряда (7.23)* $|u_n| \not\to 0$ *и потому* $u_n \not\to 0$*;*

3) случай $L=1$ *остаётся сомнительным, ибо он сомнительный уже для положительных рядов.*

Примеры. 1) $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$; $u_n=\frac{x^n}{n!}$, $u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$,

$L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0<1$, следовательно, данный ряд сходится абсолютно при любых $x\in(-\infty,+\infty)$.

2) $x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$; $u_n=\frac{x^n}{n}$, $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|\cdot n}{n+1}=|x|$.

При $|x|<1$, т.е. $-1<x<1$, ряд сходится абсолютно; при $|x|>1$ расходится.

В сомнительном случае $L=|x|=1$: при $x=1$ ряд имеет вид $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ - это гармонический ряд, он расходится; при $x=-1$ имеем ряд $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots$ – это ряд Лейбница (с точностью до знака), он сходится условно. Ответ: данный ряд сходится при $-1\le x<1$.

7.7. Функциональные ряды

Пусть все функции $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ определены на одном и том же множестве E. Тогда на этом множестве определён, имеет смысл, *функциональный* ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots. \tag{7.24}$$

Придавая x различные конкретные числовые значения, будем получать разные числовые ряды. Одни из них могут сходиться, другие расходиться.

Определение 3. Множество E_1 всех значений x, для которых ряд (7.24) сходится, называется *областью сходимости* этого функционального ряда (понятно, что $E_1\subset E$).

Примеры. 1) Ряд бесконечной геометрической прогрессии $1,x,x^2,\ldots$ сходится только при $|x|<1$ и имеет сумму $S(x)=\frac{1}{1-x}$:

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x},\ -1<x<1.$$

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ имеет область сходимости $-1\le x<1$.

3) Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ сходится на всей оси: $-\infty<x<\infty$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$; $u_n=\dfrac{x^n}{n^2}$, $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|\cdot n^2}{(n+1)^2}=|x|$. Поэтому: при $|x|<1$ ряд сходится абсолютно, при $|x|>1$ – расходится. Если $|x|=1$, то $|u_n|=\dfrac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится. Итак, область сходимости $E_1=\{-1\le x\le 1\}$.

7.3 Степенные ряды. Ряды Тейлора

Важным и простейшим примером функциональных рядов являются *степенные ряды*, именно, ряды вида

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n+\ldots\equiv\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \qquad (7.25)$$

– это ряд по степеням $(x-a)$; точка $x=a$ называется центром ряда, в ней ряд всегда сходится. Имея это в виду, в дальнейшем при исследовании ряда в случае необходимости будем считать, что $x\ne a$, не оговаривая этого специально каждый раз.

В частности, при $a=0$ имеем ряд по степеням x:

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots\equiv\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\,. \qquad (7.26)$$

Числа $c_0,c_1,..c_n,...$ называются коэффициентами степенного ряда. Ряд (7.25) сводится к ряду (7.26) заменой $x-a$ на x, поэтому будем заниматься, для простоты, рядом (7.26). Выясним вопрос об области его сходимости.

Первая лемма Абеля. *Если ряд* (7.26) *сходится в точке* $x_1\ne 0$, *то он сходится, и притом абсолютно, при всех x, удовлетворяющих условию* $|x|<|x_1|$, *т.е. в открытом интервале* $-|x_1|<x<|x_1|$.

Следствие. Если ряд (7.26) расходится в точке x_2, то он расходится во всех точках x, для которых $|x|>|x_2|$.

Теперь можно определить вид области сходимости степенного ряда. Возможны три случая.

I. Имеются точки $x_1\ne 0$, в которых ряд (7.26) сходится (точки сходимости) и точки x_2, в которых ряд расходится (точки расходимости); понятно, что $|x_1|\le|x_2|$. Определим число R как границу между множеством точек $|x_1|$, в которых ряд сходится, и множеством точек $|x_2|$, в которых ряд расходится. Используя первую лемму Абеля, нетрудно установить, что ряд сходится абсолютно в каждой точке x с $|x|<R$ и расходится в каждой точке x с $|x|>R$. Интервал $-R<x<R$ называется *интервалом сходимости степенного ряда* (7.26), а чис-

ло R – *радиусом сходимости*. Что касается концов $x=-R$ и $x=R$ интервала, то в них может быть всё, что угодно: расходимость, сходимость абсолютная или условная.

II. Ряд всюду сходится; тогда считают $R=\infty$. Например, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $-\infty<x<\infty$.

III. Ряд сходится только в своём центре $x=0$, то считают $R=0$. Например, $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$; $u_n=n!x^n$, $L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot|x|=\infty$, *при* $x\neq 0$.

Итак, справедлива

Теорема 7.8 (об области сходимости степенного ряда). *Для всякого степенного ряда (7.26) существует число R,* $0\le R\le\infty$*, такое, что в интервале* $|x|<R$ *(при* $R>0$*) ряд сходится абсолютно, а вне его, когда* $|x|>R$ *(при* $R<\infty$*), расходится.* (В концах $x=\pm R$ может быть всё, что угодно.)

<u>Вычисление радиуса сходимости в частных случаях</u>. Пусть в ряде (7.26) все $c_n\neq 0$, начиная хотя бы с некоторого номера $n=n_0$ (ряд без пропусков, при $n\ge n_0$). *Допустим*, что существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=A,\ 0\le A\le\infty. \tag{7.27}$$

Тогда существует предел ($u_n=c_nx^n$)

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_nx^n}\right|=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=A\cdot|x|.$$

Следовательно, по признаку Даламбера, 1) если $|x|<\frac{1}{A}$, т.е. $L<1$, то ряд сходится абсолютно, 2) если $|x|>\frac{1}{A}$, т.е. $L>1$, то ряд расходится. Отсюда $R=\frac{1}{A}$.

Аналогично, по признаку Коши, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=A, \tag{7.28}$$

то $R=\frac{1}{A}$.

<u>Вывод</u>. Если существует предел (7.27) или (7.28), то радиус сходимости $R=\frac{1}{A}$. (Считается $R=0$ при $A=\infty$ и $R=\infty$ при $A=0$.) Здесь фактически доказали теорему (7.8) в частных случаях: когда существует предел (7.27) или (7.28).

<u>Следствие</u>. Если оба указанных предела существуют, то они равны:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|.$$

Примеры. 1) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$. Это ряд с пропусками, формула (7.27) непосредственно не применима. Применим непосредственно признак Даламбера. Здесь

$$u_n=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{x^2(2n+1)!}{(2n+3)!}=\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}\xrightarrow[(n\to\infty)]{}0=L<1.$$

Ряд сходится для всех x, $R=\infty$. (Сумма этого ряда равна $\sin x$).

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n\cdot 3^{2n}}$ – тоже ряд с пропусками; $u_n=(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 3^{2n}}$, $\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\left(\frac{x}{3}\right)^2\xrightarrow[(n\to\infty)]{}\left(\frac{x}{3}\right)^2=L$. При $\left(\frac{x}{3}\right)^2<1$, т.е. $|x|<3$, ряд сходится, при $\left(\frac{x}{3}\right)^2>1$, т.е. $|x|>3$, ряд расходится. Отсюда $R=3$, интервал сходимости $-3<x<3$. В обоих концах $x=\pm 3$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, он сходится (причём условно). Область сходимости $-3\le x\le 3$.

Функциональные свойства степенных рядов.

Все члены $f_n(x)=c_n x^n$ ($n=0,1,2,\ldots$) степенного ряда (7.26) непрерывны и имеют непрерывные производные любого порядка на всей оси, тем более в любом интервале $(-R,R)$. Справедливы следующие свойства степенных рядов (с радиусом сходимости R, $R>0$):

1°. *Сумма $f(x)$ степенного ряда (7.26) есть функция непрерывная во всём интервале сходимости* $(-R,R)$ - так как $f(x)$ непрерывна на любом отрезке $[a,b]\subset(-R,R)$ (из-за равномерной сходимости ряда на $[a,b]\subset(-R,R)$), а любую точку $x\in(-R,R)$ можно поместить внутрь соответственно подобранного отрезка $[a,b]\subset(-R,R)$.

2°. *Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому промежутку $[a,b]$, лежащему в интервале сходимости* (однако, нельзя, вообще говоря, по всему интервалу $(-R,R)$, или $[0,R)$).

3°. *Степенной ряд можно почленно дифференцировать в любом промежутке $[a,b]$, лежащем в интервале сходимости, и, следовательно, можно почленно дифференцировать во всём интервале сходимости, причём, сколь угодно раз, так что сумма степенного ряда имеет непрерывные производные любого порядка (бесконечно дифференцируема) в интервале сходимости.*

Можно сказать, что степенные ряды являются естественным обобщением многочленов (полиномов) и наиболее близки к ним по свойствам – в пределах интервала сходимости.

Ряды по степеням (x–a). Пусть функция $f(x)$ *задана* как сумма степенного ряда (7.25):

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n . \qquad (7.29)$$

Заменив $(x-a)$ на x, получим ряд (7.26). Тогда все предыдущие результаты вместо интервала $|x| < R$ справедливы для ряда (7.29) в интервале $|x-a| < R$, т.е. $a-R < x < a+R$ с центром в точке $x = a$ (полагаем, что радиус сходимости $R > 0$).

Найдём формулы, связывающие коэффициенты с суммой ряда. По свойству 3° ряд (7.29) можно почленно дифференцировать в интервале сходимости $(a-R, a+R)$ любое число раз. Имеем

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1} + \ldots,$$

$$f''(x) = 2\cdot 1c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + \ldots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = n!c_n + (n+1)\cdot n\cdot\ldots\cdot 2c_{n+1}(x-a) + \ldots,$$

Здесь и в (7.29) положим $x = a$, тогда справа все слагаемые, кроме первого (свободного члена), обратятся в нуль и получим равенства:

$f(a) = c_0$, $f'(a) = c_1$, $f''(a) = 2!c_2, \ldots, f^{(n)}(a) = n!c_n, \ldots$ Отсюда

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n = 0,1,2,\ldots). \qquad (7.30)$$

Итак, справедлива

Теорема 7.9. *Если функция* $f(x)$ *представляет собой сумму степенного ряда (7.29) с радиусом сходимости* $R > 0$*, то его коэффициенты* c_n *однозначно определяются через сумму по формулам (7.30).*

Теорема 7.10 (о единственности разложения функции в степенной ряд). *Существуют не более одного ряда по степеням* $(x-a)$*, имеющего своей суммой данную функцию* $f(x)$.

Ряды Тейлора. Пусть $f(x)$ *некоторая* заданная функция, *имеющая в точке* $x = a$ *производные любого порядка*. Тогда ей можно поставить в соответствие бесконечную последовательность чисел c_n, определяемых формулами (7.30), и степенной ряд (соответствие отмечается знаком ~):

$$f(x) \sim f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots.$$

Коэффициенты c_n называют *коэффициентами Тейлора* функции $f(x)$ в точке $x=a$, а ряд – *рядом Тейлора* функции $f(x)$ по степеням $(x-a)$, или в окрестности точки a (или в точке a).

Согласно теореме 7.9, *любой степенной ряд с радиусом сходимости* $R>0$ *является рядом Тейлора для своей суммы. В этом смысле степенные ряды и ряды Тейлора можно не различать* (если $R>0$).

Говорят, что функция $f(x)$ *представима* рядом Тейлора или *разлагается* в ряд Тейлора в области D, содержащей точку a, если знак соответствия можно заменить знаком равенства:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots,\ x\in D. \quad (7.31)$$

Замечание. Поскольку степенной ряд (7.31) сходится в некотором интервале $(a-R,a+R)$ (считаем $R>0$), то можно полагать, что $D=\{x: a-R<x<a+R\}$, и функцию $f(x)$ обычно отождествляют с суммой её сходящегося ряда Тейлора (в интервале D).

Определение 4. Функция $f(x)$, которая в некотором интервале может быть представлена *своим* сходящимся рядом Тейлора, называется аналитической функцией в этом интервале.

Разложение в ряд Тейлора с центром $a=0$ функций e^x, $\sin x$, $\cos x$. Наиболее употребительный случай, – когда $a=0$, т.е. когда ряд Тейлора имеет вид

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots,\ -R<x<R. \quad (7.32)$$

Такой ряд называют также рядом Маклорена.

1) $f(x)=e^x$ разлагается в ряд Тейлора на всей оси. Поскольку $f^{(n)}(x)=e^x$ и $f^{(n)}(0)=e^0=1$, $(n=0,1,2,\ldots)$, то

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ -\infty<x<\infty. \quad (7.33)$$

2) $f(x)=\sin x$ также разлагается в ряд Тейлора на всей оси. Имеем: $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{IV}(x)=\sin x,\ldots$; далее производные повторяются. Вычисляем при $x=0$: $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{IV}(0)=0,\ldots$ – закономерность: все чётные производные равны нулю, а нечётные, чередуясь, $+1$ или -1. Итак,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\equiv\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},-\infty<x<\infty. \quad (7.34)$$

3) Разложение для $\cos x$ можно получить аналогично или дифференцируя почленно ряд (7.34):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ -\infty < x < \infty.$$

Замечание. Пусть функция $f(x)$ представима степенным рядом (7.32) с $R > 0$. Доказать: 1) если $f(x)$ чётная функция, т.е. $f(-x) = f(x)$, то она разлагается в ряд только по чётным степеням x, 2) если $f(x)$ нечётная функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$ (здесь автоматически $f(0) = 0$) – то только по нечётным степеням x.

Биномиальный ряд. Если m натуральное число, то по формуле бинома Ньютона

$$(1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)..2 \cdot 1}{m!} x^m \qquad (7.35)$$

– это есть разложение в ряд Тейлора функции $(1+x)^m$.

Теперь возьмём функцию $f(x) = (1+x)^{\mu}$, где μ - любое число, отличное от $0,1,2,\ldots$. Находим все производные: $f'(x) = \mu(1+x)^{\mu-1}$, $f''(x) = \mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2}$, …, $f^{(n)}(x) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}$, $f^{(n+1)}(x) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)(1+x)^{\mu-n-1}, \ldots$ Вычислим их при $x = 0$, и получим ряд Тейлора для данной функции:

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu \cdot x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!} x^n + \ldots. \qquad (7.36)$$

Данное разложение справедливо в интервале $-1 < x < 1$.

Коэффициент при x^n обозначается $\begin{pmatrix} \mu \\ n \end{pmatrix}$. В случае $\mu = m = 0,1,2,\ldots$, т.е. когда $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \equiv C_n^m$ $(m \le n)$ есть число сочетаний из n элементов по m, ряд (7.36) обрывается и становится конечной суммой (7.35). Можно доказать, что равенство (7.36) сохраняется в точке $x = 1$ при $\mu > -1$ и в точке $x = -1$ при $\mu > 0$.

Разложение в ряд Тейлора других элементарных функций.

Правило. Если каким-то образом найдено разложение функции в степенной ряд, то это и есть её ряд Тейлора.

При отыскании этих разложений широко используются действия над рядами, ранее найденные разложения, почленное интегрирование и дифференцирование.

Примеры. 1) Ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q = -x$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots,\ -1 < x < 1. \qquad (7.37)$$

Дифференцируя этот ряд, найдём:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} n x^{n-1} + (-1)^n (n+1) x^n + \ldots,\ -1 < x < 1.$$

(Перепишите его, заменяя x на $(-x)$.)

2) В интервале $(-1;1)$ берём любую точку x и ряд (7.37) почленно проинтегрируем по промежутку $[0,x]$. Замечая, что $\int\limits_0^x \frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)$, *получим логарифмический ряд*:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,\ -1 < x \le 1.$$

Этот ряд сходится и в точке $x=1$, и можно доказать, что равенство в таком случае сохранится, – так получим сумму ряда Лейбница:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots.$$

Приближённые вычисления с помощью рядов. Рядами удобно пользоваться для приближённого вычисления значений функций, интегралов, решения всевозможных функциональных уравнений и т.д. На практике обычно используются ряды по степеням x

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + c_{n+1}x^{n+1} + \ldots = T_n(x) + r_n(x),\ -R < x < R;$$

$$T_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n,\ r_n(x) = c_{n+1}x^{n+1} + c_{n+2}x^{n+2} + \ldots.$$

Пример. Найдём $\sin 10°$. Перейдём к радианной мере: $\left.\begin{array}{l} 180° \sim \pi \\ 10° \sim x \end{array}\right| \Rightarrow x = \frac{\pi}{18}$.

По формуле (7.34): $\sin 10° \equiv \sin\frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \ldots$. Обрывая получившийся числовой ряд на любом месте, получаем значение $\sin 10°$ с той или иной точностью.

2) Иногда удаётся найти разложение неэлементарных функций, заданных с помощью интеграла.

а) Заменим в ряде (7.33) x на $(-x^2)$, затем проинтегрируем почленно по промежутку $[0,x]$. Получим

$$\mathrm{Erf}(x) \equiv \int\limits_0^x e^{-x^2}dx = \int\limits_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n x^{2n}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1},\ -\infty < x < \infty.$$

б) $F(x) = e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{t^2}dt$. Легко проверить, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению $F'(x) + 2xF(x) = 1$ и $F(0) = 0$; тогда $F'(0) = 1$. Используя метод неопределённых коэффициентов, решение уравнения ищем формально в виде ряда пока с неизвестными коэффициентами c_n:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \text{ где } c_0 = 0,\ c_1 = 1.$$

Подставляя в уравнение, найдём для определения c_n рекуррентное соотношение $(n+2)c_{n+2}+2c_n=0$ (относится к разряду так называемых разностных уравнений). Так как $c_0=0$, то отсюда следует, что все чётные коэффициенты равны нулю: $c_{2k}=0$, а поскольку $c_1=1$, найдём нечётные коэффициенты c_{2k+1} $(k=0,1,2,\ldots)$. Получим для $F(x)$ ряд:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!},\ -\infty<x<\infty.$$

в) Пользуясь разложением (7.34), найдём $\frac{\sin t}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$ (включая $t=0$) и $\mathrm{si}(x)\equiv\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)},\ -\infty<x<\infty.$

3) <u>Решение дифференциальных уравнений</u>.

а) Решим задачу Коши: $y''+y^2-x=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$. Решение ищем в виде ряда $y=c_2x^2+c_3x^3+\ldots$, т.к. здесь $c_0=y(0)=0$ и $c_1=y'(0)=0$. Подставляем в уравнение:

$$(2c_2+6c_3x+4\cdot 3c_4x^2+\ldots)+(c_2x^2+c_3x^3+\ldots)^2-x=0.$$

Отсюда $2c_2=0$, $6c_3-1=0\Rightarrow c_3=\frac{1}{6}$, $c_4=c_5=0$; $6\cdot 5c_6+c_2^2=0\Rightarrow c_6=0$, $7\cdot 6c_7+2c_2c_3=0\Rightarrow c_7=0$, $8\cdot 7c_8+c_3^2+2c_2c_4=0\Rightarrow c_8=-\frac{1}{6^2\cdot 7\cdot 8}$. Тогда $y=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2016}x^8+\ldots$. Данное уравнение нелинейное и вопрос об области сходимости ряда открыт.

б) Применение метода неопределённых коэффициентов особенно удобно для линейных уравнений. Например, найдём решение задачи Коши

$$y''=2xy'+4y,\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \qquad (7.39)$$

Учитывая начальные условия, полагаем $y=x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots$. Подставляя в уравнение (7.39) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, можно найти $c_2=0$, $c_3=1$, $c_4=0$, и, вообще, при степени x^n имеем: $n(n-1)c_n=(n-2)2c_{n-2}+4c_{n-2}$, откуда $c_n=\frac{2c_{n-2}}{n-1}$, и получим $c_{2k}=0$,

$c_5=\frac{2\cdot 1}{4}=\frac{1}{2!}$, $c_7=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{6}=\frac{1}{3!}$, $c_9=\frac{1}{4!}$, …, $c_{2k+1}=\frac{2\cdot\frac{1}{(k-1)!}}{2k}=\frac{1}{k!}$. Таким образом, $y=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k+1}x^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{k!}=xe^{x^2}$, $-\infty<x<\infty$.

7.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать на сходимость числовые знакоположительные ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^4+5}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{3n^3+3n-2}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{4^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^{2n+1}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n-1}{2n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi^2}{3^n}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+9}{n^2+3n-9}$.

2. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующиеся ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n};\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{\sqrt{n}};\quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(4n-1)^2};$$

$$4)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 4^n};\ 5)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}};\quad 6)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{8n}{4n-1}.$$

3. Найти интервал сходимости степенного ряда:

$$17)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\quad 18)\ \sum_{n=1}^{\infty}n!\cdot x^n;\quad 19)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}};\quad 20)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n};$$

$$21)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\cdot 3^n};\quad 22)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)};\quad 23)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}.$$

4. Дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n x^n}{b^n\sqrt[3]{n+1}}$. При заданных значениях a и b написать три первых члена ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

1) a =2, b=3. 2) a = 3, b= 5. 3) a =4, b=7 4) a = 5, b= 9.

5. Получить числовой ряд в качестве ответа на вопрос о вычислении интеграла:

$$\text{а)}\int_0^1\cos\sqrt{x}\,dx;\quad \text{б)}\ \int_0^{\frac{1}{9}}\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}dx.$$

6. Разложите в степенной ряд функцию $y=\operatorname{arctg}x$. Как можно разложить эту-функцию в ряд Маклорена, пользуясь биномиальным разложением?

7. Пользуясь известными разложениями, разложить в степенной ряд функцию $y=x+\ln(1-x)$. Найти область сходимости этого ряда.

8. Найти два первых (отличных от нуля) члена разложения в степенной ряд решения уравнения $y'=x+3y^2$, $y(0)=0$;

9. Найти четыре первых (отличных от нуля) члена разложения в степенной ряд решения уравнения $y''-2xy^2=0\ -\ xy^2=0,\ y(0)=y'(0)=1$.

Литература

1. Солдатов М.А., Круглова С.С., Круглов Е.В. Интегралы несобственные и зависящие от параметра. Ряды.- Нижний Новгород; Изд-во Нижегородского университета, 2014.- 184 с.
2. http://www.unn.ru/rus/books/table.html 796.14.07 Солдатов М.А., Круглова С.С., Круглов Е.В. Несобственные интегралы и ряды. Часть 2. Числовые и функциональные ряды. Учебное пособие. 44 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие. 22-е изд., перераб. – СПб.: Издательство «Профессия», 2001. – 432 с.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ: ПРОГРАММА, ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ, ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ И ЭКЗАМЕНУ

Авторы:

Вадим Кадирович Вильданов,
Евгений Валентинович Круглов,
Алла Александровна Отделкина,
Валентина Ивановна Перова,
Анна Юрьевна Умилина

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603095, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.