МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

В. И. Сумин

НАЧАЛА ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА
Часть 1
Выпуклые множества

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Прикладная математика и информатика», «Механика и математическое моделирование»

Нижний Новгород
2015

УДК 519.6
ББК 22.193
С-89

С-89 Сумин В.И. НАЧАЛА ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА. Часть 1. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет, 2015. – 32 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор **М.А. Федоткин**

Учебно-методическое пособие по общему курсу «Методы оптимизации» для студентов бакалавриата ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Прикладная математика и информатика», «Механика и математическое моделирование». Пособие содержит материал нескольких первых аудиторных занятий по теме «Элементарный выпуклый анализ», а также материал для самостоятельного изучения.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
механико-математического факультета ННГУ,
к.ф.-м.н., доцент **Н.А. Денисова**

УДК 519.6
ББК 22.193

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 4

1. Основные обозначения 5
2. Определение и простейшие свойства выпуклых множеств 5
3. Граничные точки выпуклых множеств 7
4. Проекция точки на множество 8
5. Комбинации точек и оболочки множеств 12
6. Отделимость 17
7. Теоремы отделимости выпуклых множеств 19
8. Крайние (угловые) точки выпуклого множества 22
9. Выпуклые многогранные множества 24
10. Сопряженный конус. Теорема Фаркаша 26
11. Системы линейных уравнений и неравенств 27
12. Одномерные сечения 28
13. Возможные (допустимые) направления 28

Цитированная литература 31

Предисловие

Выпуклый анализ – раздел математики, в котором изучаются выпуклые множества и выпуклые функции. Именно со знакомства с выпуклым анализом имеет смысл начинать изучение математического программирования – дисциплины, посвященной теории и методам решения задач конечномерной оптимизации [1]. Дело в том, что, во-первых, в самых различных областях естествознания, техники, экономики часто возникают задачи нахождения экстремумов именно выпуклых функций. Поэтому важной составной частью математического программирования является выпуклое программирование, изучающее такие задачи.

Во-вторых, что не менее важно, обычно выпуклость так или иначе присутствует и в не относящихся к выпуклому программированию задачах на экстремум. Приведем простой пример. Пусть требуется отыскать точки локального минимума некоторой дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(.) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. В каждой такой точке $\overline{x}$ выполняются условия $f'(\overline{x}) = 0$, $f''(\overline{x}) \geq 0$. Если же, как это часто бывает, $f''(\overline{x}) > 0$ ($\overline{x}$ – невырожденная точка минимума), то вторая производная $f''(.)$ по непрерывности положительна в некоторой окрестности $\overline{x}$ и, следовательно, в этой окрестности функция $f(.)$ выпукла. Неявное присутствие выпуклого объекта (функции, множества) в задаче на экстремум часто не так очевидно, как в данном случае. Тем не менее, выпуклость – "внутреннее свойство" большинства задач оптимизации. Поэтому конструкции выпуклого анализа – важнейшие инструменты математического программирования. Причем при доказательстве многих базовых утверждений математического программирования можно обойтись элементарными средствами выпуклого анализа. Данное пособие содержит некоторый минимум сведений из выпуклого анализа, необходимых для первоначального знакомства с математическим программированием [2].

Это пособие – заново отредактированный вариант учебно-методического пособия [3], успешно использующегося на мех-мате ННГУ в учебном процессе. Пособие [3] создано на основе методической разработки [4], которая была издана еще тогда, когда рукописи печатались на пишущей машинке, формулы в напечатанный текст вставлялись шариковой ручкой, а рисунки – с помощью циркуля, линейки и лекала. Автор благодарен А.В.Чернову, создавшему TEX-овскую версию разработки [4], позволившую, в частности, точно воспроизвести в [3] все многочисленные рисунки [4].

Данное пособие состоит из двух частей. Первая посвящена выпуклым множествам, вторая – выпуклым функциям. Нумерация разделов (пунктов) в каждой части своя. Нумерация теорем, лемм, рисунков, примеров и упражнений в пособии одинарная и сквозная. Нумерация формул двойная; например, третья по порядку формула первой части имеет номер (1.3).

---

[1] То есть задач нахождения экстремумов функций на множествах конечномерных пространств.

[2] С более сложными конструкциями выпуклого анализа, используемыми в математическом программировании, можно познакомиться, например, по [1], [2]. См. также список дополнительной литературы.

1. Основные обозначения. Будем использовать стандартные обозначения: $\mathbf{R}^n$ – n-мерное действительное пространство векторов-столбцов[3]

$$x = \mathrm{col}\{x^1, \ldots, x^n\} \equiv \{x^1, \ldots, x^n\}^T \equiv \begin{Bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{Bmatrix}$$

со скалярным произведением $(x, y) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} x^i y^i$, нормой $\|x\| \equiv \sqrt{(x,x)}$ и метрикой $\rho(x, y) \equiv \|x - y\|$; $0_n \equiv \mathrm{col}\{0, \ldots, 0\}$ – нуль в $\mathbf{R}^n$; если $X \subset \mathbf{R}^n$, то $\overset{\circ}{X} \equiv intX$ – внутренность множества X, $\overline{X}$ – замыкание X, ∂X – граница X, $\lambda X \equiv \{y : y = \lambda x, x \in X\}$ $\forall \lambda \in \mathbf{R}$; $X \pm Y \equiv \{z : z = x \pm y,\ x \in X,\ y \in Y\}$ – алгебраические сумма и разность множеств $X \subset \mathbf{R}^n$, $Y \subset \mathbf{R}^n$; $U_\varepsilon(x_0) \equiv \{x : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ – ε-окрестность точки x_0 в $\mathbf{R}^n$, $\varepsilon > 0$; $[x_0, x_1]$ – отрезок прямой, соединяющий точки x_0 и x_1 в $\mathbf{R}^n$,

$$[x_0, x_1] \equiv \{x : \quad x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_0, \quad 0 \le \lambda \le 1\}.$$

Примем также *специальные обозначения*: $x_\lambda \equiv \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_0$ $(x_0 \in \mathbf{R}^n,\ \ x_1 \in \mathbf{R}^n,\ \ 0 \le \lambda \le 1)$; $\Gamma_{c,\alpha} \equiv \{x : (c, x) = \alpha\}$ – гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$ $(\alpha \in \mathbf{R},\ c \in \mathbf{R}^n,\ c \ne 0_n)$; $\Gamma^-_{c,\alpha} \equiv \{x : (c, x) < \alpha\}$, $\Gamma^+_{c,\alpha} \equiv \{x : (c, x) > \alpha\}$ – открытые полупространства, определяемые в $\mathbf{R}^n$ гиперплоскостью $\Gamma_{c,\alpha}$.

Векторное неравенство $x \le y$ для $x, y \in \mathbf{R}^n$ означает: $x^i \le y^i$, $i = \overline{1, n}$; аналогично понимается неравенство $x \ge y$. $\mathbf{R}^n_+ \equiv \{x \in \mathbf{R}^n : x \ge 0_n\}$ – неотрицательный ортант в $\mathbf{R}^n$.

2. Определение и простейшие свойства выпуклых множеств. Непустое множество $X \subset \mathbf{R}^n$ называется *выпуклым*, если оно содержит всякий отрезок, соединяющий точки этого множества. Пустое множество $\varnothing$ считается выпуклым.

Упражнение 1. 1) Докажите выпуклость следующих множеств пространства $\mathbf{R}^n$: одноточечное множество $\{x_0\}$; гиперплоскость $\Gamma_{c,\alpha}$; полупространства $\Gamma^-_{c,\alpha}$, $\Gamma^+_{c,\alpha}$, $\overline{\Gamma^-_{c,\alpha}}$, $\overline{\Gamma^+_{c,\alpha}}$; окрестность $U_\varepsilon(x_0)$ и ее замыкание $\overline{U_\varepsilon(x_0)}$. 2) Докажите, что всякий треугольник[4] является выпуклым множеством (см. рис. 8а). 3) Докажите, что класс всех выпуклых множеств действительной прямой $\mathbf{R}$ совпадает с классом всех промежутков[5].

[3]Здесь и далее используются следующие значки сокращенной записи: $\equiv$ – "тождественно равно"или "равно по определению"; $\forall$ – "для любого", "для каждого" или "для всех"; $\exists$ – "существует"; $\in$ – "принадлежит", "принадлежащий", "принадлежащие"; $\notin$ – "не принадлежит"; $\subset$ – "вложено в", "содержится в".

[4]Здесь и ниже треугольником называется компактное плоское множество, являющееся объединением линии, состоящей из трех соединяющих вершины треугольника отрезков прямых (сторон треугольника), и части плоскости, ограниченной этой линией.

[5]К промежуткам относим отрезки, интервалы и полуинтервалы, в том числе бесконечной длины, а также пустое множество.

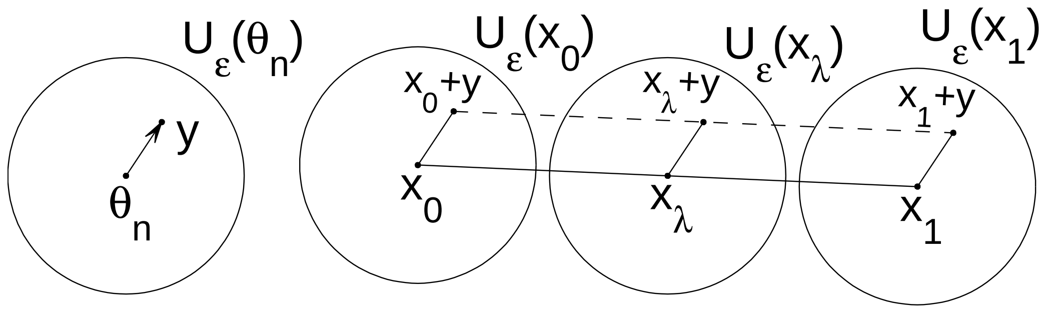


Рис. 1

Лемма 1. *Пересечение любого числа выпуклых множеств выпукло.*

Упражнение 2. Докажите лемму 1.

Лемма 2. *Если X выпукло, то $\overline{X}$ выпукло.*

□[6] Если $X = \varnothing$, то $\overline{X} = \varnothing$. Пусть $X \neq \varnothing$. Фиксируем две любые точки $x_0, x_1 \in \overline{X}$ [7]. Покажем, что $[x_0, x_1] \subset \overline{X}$. Для этого выберем произвольно некоторую точку x_λ отрезка $[x_0, x_1]$ и докажем, что $x_\lambda \in \overline{X}$. Пусть $\{x_{0,k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{x_{1,k}\}_{k=1}^{\infty}$ – такие последовательности точек множества X, что $x_{0,k} \to x_0$, $x_{1,k} \to x_1$ при $k \to \infty$. В силу выпуклости X любой из отрезков $[x_{0,k}, x_{1,k}]$ содержится в X, $k = 1, 2, \ldots$. Значит и любая точка $x_{\lambda,k} = \lambda x_{1,k} + (1-\lambda)x_{0,k}$, $k = 1, 2, \ldots$ принадлежит X. Но $x_{\lambda,k} \to x_\lambda$ при $k \to \infty$ и потому $x_\lambda \in \overline{X}$. ⊠

Лемма 3. *Если X выпукло, то $\overset{\circ}{X}$ выпукло.*

□ Случай $\overset{\circ}{X} = \varnothing$ тривиален. Пусть $\overset{\circ}{X} \neq \varnothing$. Фиксируем любые точки x_0, $x_1 \in \overset{\circ}{X}$. Покажем, что $[x_0, x_1] \subset \overset{\circ}{X}$. Для этого выберем произвольно некоторую точку x_λ отрезка $[x_0, x_1]$ и докажем, что $x_\lambda \in \overset{\circ}{X}$, то есть существует окрестность точки x_λ, лежащая в X. Так как x_0, x_1 – внутренние точки X, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x_0) \subset X$, $U_\varepsilon(x_1) \subset X$. Покажем, что $U_\varepsilon(x_\lambda)$ и есть искомая окрестность x_λ. Возьмем любую точку $x \in U_\varepsilon(x_\lambda)$. Так как $U_\varepsilon(x_\lambda) = \{x_\lambda\} + U_\varepsilon(0_n)$, то существует точка $y \in U_\varepsilon(0_n)$ такая, что $x = x_\lambda + y$. Очевидно, что $(x_0 + y) \in U_\varepsilon(x_0)$, $(x_1 + y) \in U_\varepsilon(x_1)$ и потому, в силу выпуклости X, весь отрезок $[x_0 + y, x_1 + y]$ принадлежит X (см. рис. 1). Но точка $\lambda(x_1 + y) + (1 - \lambda)(x_0 + y)$ этого отрезка совпадает с $x_\lambda + y = x$. Значит, $x \in X$. Таким образом, $U_\varepsilon(x_\lambda) \subset X$. ⊠

Упражнение 3. Покажите, что: 1) из выпуклости X следует выпуклость λX, каково бы ни было $\lambda \in \mathbf{R}$; 2) из выпуклости X и Y следует выпуклость алгебраической суммы $X + Y$ и разности $X - Y$.

Множество $K \subset \mathbf{R}^n$ назовем *конусом* (*с вершиной* 0_n), если $\forall x_0 \in K$ и

[6] Значок □ открывает доказательство, значок ⊠ означает, что оно закончено.

[7] То есть две любые точки x_0, x_1, принадлежащие $\overline{X}$.

$\forall \lambda > 0$ выполняется условие $\lambda x_0 \in K$. Иначе говоря, конус (с вершиной 0_n) – это множество, которое вместе с любой своей точкой x_0 содержит и весь луч $\{x : x = \lambda x_0, \lambda > 0\}$, выходящий из 0_n и проходящий через x_0 [8] [9]. Конус может содержать свою вершину, а может и не содержать ее.

Лемма 4. *Конус K является выпуклым тогда и только тогда, когда для любых $x_0, x_1 \in K$ имеем $(x_0 + x_1) \in K$.*

□ *Необходимость*. Пусть K – выпуклый конус. Фиксируем x_0, $x_1 \in K$. В силу выпуклости K отрезок $[x_0, x_1] \subset K$.Точка $x_{1/2} = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1$ – середина отрезка $[x_0, x_1]$ и потому $x_{1/2} \in K$. Так как K – конус, то $(2 \cdot x_{1/2}) \in K$. Но $2 \cdot x_{1/2} = x_0 + x_1$. Значит, $x_0 + x_1 \in K$.

Достаточность. Пусть K – конус и при всех $x_0, x_1 \in K$ имеем $(x_0 + x_1) \in K$. Фиксируем любые точки $x_0, x_1 \in K$ и покажем, что $[x_0, x_1] \subset K$. Для этого выберем произвольно некоторую точку $x_\lambda \equiv \lambda x_1 + (1-\lambda)x_0$ из $[x_0, x_1]$, $0 < \lambda < 1$, и докажем, что $x_\lambda \in K$. Так как K – конус, то $\lambda x_1 \in K$ и $(1-\lambda)x_0 \in K$. Следовательно, по предположению, и $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_0) \in K$. ⊠

Упражнение 4. Проиллюстрируйте доказательство леммы 4 рисунками, взяв $n = 2$.

3. Граничные точки выпуклых множеств. Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$. Точка $x_0 \in \mathbf{R}^n$ называется *граничной точкой* для множества X в $\mathbf{R}^n$, если в любой окрестности точки x_0 имеются как точки, принадлежащие X, так и точки, не принадлежащие X. *Границей* множества X в $\mathbf{R}^n$ называется множество ∂X всех граничных для X точек. Легко доказать, что всегда

$$\partial \overline{X} \subset \partial X. \tag{1.1}$$

Упражнение 5. Докажите формулу (1.1).

В случае, когда X выпуклое множество, справедливо следующее более сильное утверждение.

Лемма 5. *Если $X \subset \mathbf{R}^n$ – выпуклое множество, то*

$$\partial \overline{X} = \partial X. \tag{1.2}$$

□ Ограничимся доказательством для $n = 2$. В силу (1.1) достаточно показать, что для выпуклого X справедливо вложение $\partial X \subset \partial \overline{X}$.Если $X = \varnothing$, то $\overline{X} = \varnothing$ и $\partial \overline{X} = \varnothing = \partial X$. Пусть $X \neq \varnothing$ и x_0 – некоторая точка ∂X. Покажем, что $x_0 \in \partial \overline{X}$. Предположим противное: $x_0 \notin \partial \overline{X}$. Так как в любой окрестности точки x_0 имеются точки из X ($x_0 \in \partial X$), а $X \subset \overline{X}$, то условие $x_0 \notin \partial \overline{X}$ означает, что существует окрестность $U_\varepsilon(x_0)$, в которой нет

[8] Если $x_0 = 0_n$, то луч $\{x : x = \lambda x_0, \lambda > 0\} = \{0_n\}$.

[9] Далее рассматриваются только конусы с вершиной 0_n.

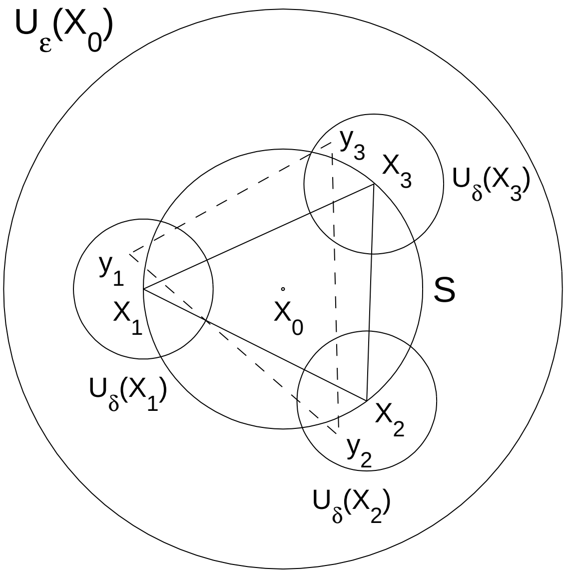


Рис. 2

точек, не принадлежащих $\overline{X}$. То есть, $U_\varepsilon(x_0) \subset \overline{X}$. Пусть x_1, x_2, x_3 – вершины некоторого равностороннего треугольника, лежащие на окружности $S \equiv \{x : \|x - x_0\| = \varepsilon/2\}$. Выберем число $\delta \in (0, \varepsilon/2)$ настолько малым, что для любых трех точек $y_i \in U_\delta(x_i)$, $i = 1, 2, 3$, треугольник с вершинами y_1, y_2, y_3 содержит точку x_0 строго внутри себя (см. рис. 2). В каждой из окрестностей $U_\delta(x_i)$ выберем точку $y_i \in X$ (такие точки найдутся, так как $x_i \in \overline{X}$, $i = 1, 2, 3$). Так как X выпукло, то треугольник с вершинами y_1, y_2, y_3 принадлежит множеству X.Точка x_0 лежит строго внутри этого треугольника и, следовательно, является точкой множества $\overset{\circ}{X}$. Последнее противоречит тому, что $x_0 \in \partial X$. ⊠

Упражнение 6. Докажите лемму 5 для $n = 3$. Продумайте доказательство этой леммы для произвольного n.

Упражнение 7. Приведите пример, показывающий, что для невыпуклого множества X формула (1.2), вообще говоря, несправедлива.

4. Проекция точки на множество. Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$, $z \in \mathbf{R}^n$. Точку $x_0 \in X$ назовем *проекцией точки z на множество X*, если

$$\rho(x_0, z) = \min_{x \in X} \rho(x, z).$$

Все *множество проекций точки z на X* будем обозначать $P_X(z)$. В случае, когда множество проекций $P_X(z)$ состоит из одной точки, эту точку-проекцию также будем обозначать $P_X(z)$. Очевидно, если $z \in X$, то проекция точки z на множество X единственна и равна z, то есть в этом случае $P_X(z) = \{z\}$ и можно писать $z = P_X(z)$. Рассмотрим другие примеры.

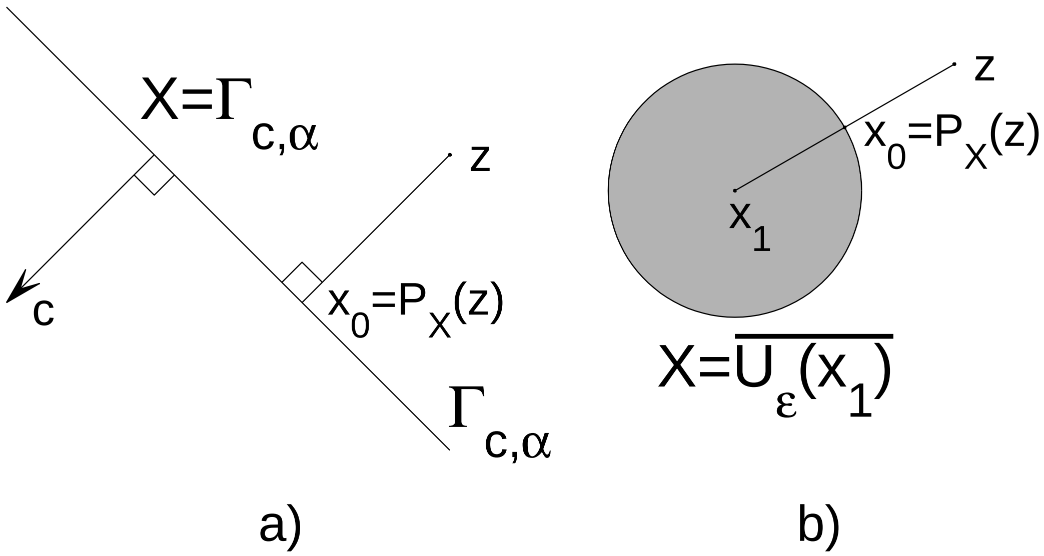


Рис. 3

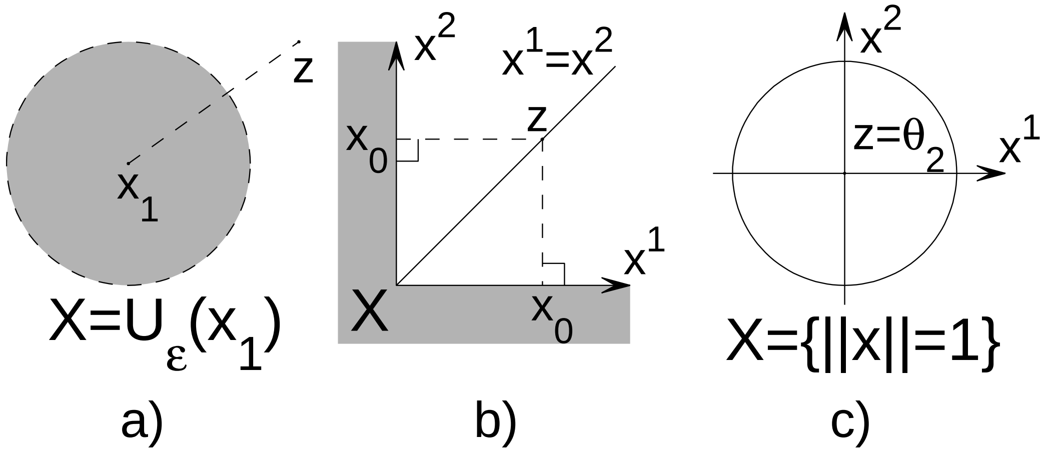


Рис. 4

Пример 1. $X = \Gamma_{c,\alpha}$ – гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$. При любом $z \in \mathbf{R}^n$ проекция z на X, очевидно, единственна и совпадает с ортогональной проекцией z на X (см. рис. 3a). Таким образом, введенное определение проекции обобщает известное из аналитической геометрии понятие ортогональной проекции.

Пример 2. $X = \overline{U_\varepsilon(x_1)}$ – замкнутый шар в $\mathbf{R}^n$. При любом $z \in \mathbf{R}^n$ проекция z на X единственна. Если $z \notin X$, то она задается формулой $x_1 + \varepsilon(z - x_1)/\|z - x_1\|$ (см. рис. 3b).

Легко построить примеры, в которых проекция либо не существует, либо не единственна.

Пример 3. $X = U_\varepsilon(x_1)$ – открытый шар в $\mathbf{R}^n$. При любом $z \notin X$ проекции z на X не существует, $P_X(z) = \varnothing$ (см. рис. 4a).

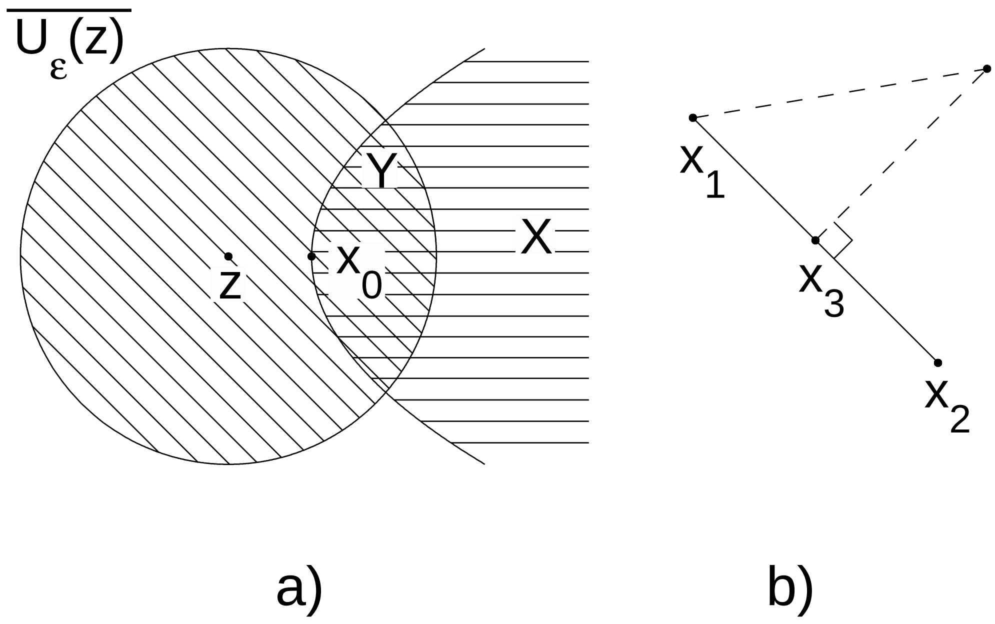


Рис. 5

Пример 4. $X = \mathbf{R}^2 \setminus \{x \in \mathbf{R}^2 : x^1 > 0, \quad x^2 > 0\}$. Если $z^1 = z^2 > 0$, то существуют ровно две проекции z на X (см. рис. 4b).

Пример 5. $X = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$. Если $z = 0_n$, то любая точка $x \in X$ есть проекция z на X и $P_X(z) = X$ (см. рис. 4c).

Сформулируем простые достаточные условия существования и единственности проекции.

Лемма 6 *(о существовании проекции). Если множество $X \subset \mathbf{R}^n$ непусто и замкнуто, то для любой точки $z \in \mathbf{R}^n$ существует проекция на X.*

□ Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ такое, что замкнутый шар $\overline{U_\varepsilon(z)}$ имеет непустое пересечение с X (см. рис. 5a). Множество $Y \equiv X \cap \overline{U_\varepsilon(z)}$ есть компакт. По известной теореме Вейерштрасса, непрерывная функция $g(x) \equiv \rho(x, z)$, $x \in \mathbf{R}^n$ достигает на компакте Y своего минимального значения, то есть существует $x_0 \in Y$ такое, что $\rho(x_0, z) = \min\limits_{x \in Y} \rho(x, z)$. Очевидно, что $\rho(x, z) > \varepsilon \geq \rho(z, x_0)\ \forall x \in X \setminus Y$. Таким образом, $\rho(x_0, z) = \min\limits_{x \in X} \rho(x, z)$, то есть $x_0 \in P_X(z)$. ⊠

Лемма 7 *(о единственности проекции). Пусть множество $X \subset \mathbf{R}^n$ выпукло. Тогда любая точка $z \in \mathbf{R}^n$ не может иметь более одной проекции на X.*

□ Достаточно рассмотреть случай, когда множество X непусто и состоит более, чем из одной точки. Предположим, что некоторая точка z имеет две разных проекции на X – точки x_1 и x_2. Так как X выпукло, то отрезок $[x_1, x_2]$

принадлежит X. Пусть x_3 – середина этого отрезка, $x_3 = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$. Векторы $(x_3 - z)$ и $(x_2 - x_1)$ ортогональны (проверьте, что $(x_3 - z, x_2 - x_1) = 0$). По теореме Пифагора (рис. $5b$):

$$\rho^2(x_3, z) + \rho^2(x_3, x_1) = \rho^2(x_1, z). \tag{1.3}$$

Так как $\rho(x_3, x_1) = \frac{1}{2}\rho(x_2, x_1) > 0$, то из (1.3) следует неравенство $\rho(x_3, z) < \rho(x_1, z)$, противоречащее тому, что $x_1 \in P_X(z)$. ⊠

Объединим леммы 6 и 7.

Лемма 8 *(о существовании и единственности проекции). Если множество $X \subset \mathbf{R}^n$ непусто, замкнуто и выпукло, то любая точка $z \in \mathbf{R}^n$ имеет ровно одну проекцию на X.*

Часто бывает нужно определить, является ли данная точка x_0 некоторого множества $X \subset \mathbf{R}^n$ проекцией на X фиксированной точки $z \in \mathbf{R}^n$. В случае выпуклых множеств справедлив следующий критерий проекции.

Лемма 9 *(критерий проекции на выпуклое множество). Пусть множество $X \subset \mathbf{R}^n$ непусто и выпукло. Точка $x_0 \in X$ является проекцией на X точки $z \in \mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда*

$$(z - x_0, \quad x - x_0) \le 0 \quad \forall x \in X. \tag{1.4}$$

☐ *Необходимость.* Пусть $x_0 \in P_X(z)$. В случае одноточечного множества X неравенство (1.4), очевидно, выполняется. Предположим, X состоит более чем из одной точки. Достаточно показать, что (1.4) выполняется при $x \neq x_0$. Фиксируем произвольно в X точку $x_1 \neq x_0$. Так как X выпукло, то для любого $\lambda \in [0, 1]$ точка $x_\lambda \equiv \lambda x_1 + (1-\lambda)x_0$ принадлежит X. Таким образом, имеем $\rho(x_\lambda, z) \ge \rho(x_0, z)$ $\forall \lambda \in [0, 1]$. Последнее неравенство нам удобнее переписать в эквивалентной форме

$$\rho^2(x_\lambda, z) \ge \rho^2(x_0, z), \quad \lambda \in [0, 1]$$

или, что одно и то же, в форме

$$\|x_\lambda - z\|^2 \ge \|x_0 - z\|^2, \quad \lambda \in [0, 1]. \tag{1.5}$$

Но

$$\|x_\lambda - z\|^2 = (x_\lambda - z, x_\lambda - z) = \lambda^2\|x_1 - x_0\|^2 + 2\lambda(x_1 - x_0, x_0 - z) + \|x_0 - z\|^2$$

и из (1.5) следует

$$\lambda^2\|x_1 - x_0\|^2 + 2\lambda(x_1 - x_0, x_0 - z) \ge 0, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Отсюда при $\lambda \in (0, 1]$ получаем

$$\lambda\|x_1 - x_0\|^2 + 2(x_1 - x_0, x_0 - z) \ge 0. \tag{1.6}$$

Неравенство (1.6) после перехода к пределу при $\lambda \to 0$ превращается в неравенство $(x_1 - x_0, x_0 - z) \geq 0$,что эквивалентно $(x_1 - x_0, z - x_0) \leq 0$.

Достаточность. Пусть $x_0 \in X$ и выполняется (1.4). Для $x \in X$

$$\rho^2(x, z) = \|x - x_0 + x_0 - z\|^2 = \|x - x_0\|^2 + 2(x - x_0, x_0 - z) + \|x_0 - z\|^2. \quad (1.7)$$

Так как в силу (1.4) имеем $(x - x_0, x_0 - z) \geq 0$, то из (1.7) получаем

$$\rho^2(x, z) \geq \|x_0 - z\|^2 \equiv \rho^2(x_0, z),$$

то есть $\rho(x, z) \geq \rho(x_0, z)$ $\forall x \in X$ и, следовательно, $x_0 \in P_X(z)$. ⊠

Упражнение 8. Пусть множество $X \subset \mathbf{R}^n$ выпукло и замкнуто. Покажите, что: 1) $\rho(x, P_X(z)) \leq \rho(x, z)$ $\forall x \in X,\ \forall z \in \mathbf{R}^n$; 2) $\rho(P_X(y), P_X(z)) \leq \rho(y, z)$ $\forall y \in \mathbf{R}^n, \forall z \in \mathbf{R}^n$.

5. Комбинации точек и оболочки множеств. Линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ точек $x_1, \ldots, x_m$ пространства $\mathbf{R}^n$ ($\lambda_i,\ i = \overline{1, m}$ – действительные числа) называется *неотрицательной комбинацией* точек $x_1, \ldots, x_m$, если все числа $\lambda_i,\ i = \overline{1, m}$ неотрицательны. Неотрицательная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ называется *выпуклой комбинацией* точек $x_1, \ldots, x_m$, если $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Пример 6. Любая точка x_0 неотрицательного квадранта $\mathbf{R}^2_+$ есть неотрицательная комбинация точек $x_1 = \mathrm{col}\{1, 0\}$ и $x_2 = \mathrm{col}\{0, 1\}$: $x_0 = x_0^1 x_1 + x_0^2 x_2$ (см. рис. 6*a*). Наоборот, неотрицательная комбинация $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ указанных точек есть точка $x = \mathrm{col}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ из $\mathbf{R}^2_+$.

Пример 7. Пусть $x_0, x_1 \in \mathbf{R}^2$, $x_0 \neq x_1$, $x_0 \neq 0_2$, $x_1 \neq 0_2$. Множество всех точек пространства $\mathbf{R}^2$, представимых неотрицательными комбинациями $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1$, есть выпуклый замкнутый конус (см. рис. 6*b*).

Пример 8. Любая точка отрезка $[x_0, x_1]$ есть выпуклая комбинация его концов: $x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_0$. Наоборот, любая выпуклая комбинация $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1$ точек $x_0, x_1 \in \mathbf{R}^n$ совпадает с некоторой точкой отрезка $[x_0, x_1]$, так как $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$ и $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 = (1 - \lambda_1) x_0 + \lambda_1 x_1$, где $0 \leq \lambda_1 \leq 1$.

Лемма 10. *Выпуклое множество (выпуклый конус) содержит всевозможные выпуклые (*соотв.*, неотрицательные) комбинации своих точек.*

□ [10] Докажем утверждение леммы для выпуклого множества (доказательство утверждения для выпуклого конуса оставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения). Пусть X – непустое выпуклое множество (случай $X = \varnothing$ тривиален). Требуется доказать справедливость следующего

[10]Доказательства утверждений этого пункта взяты из п.2 §1 главы 3 книги [2].

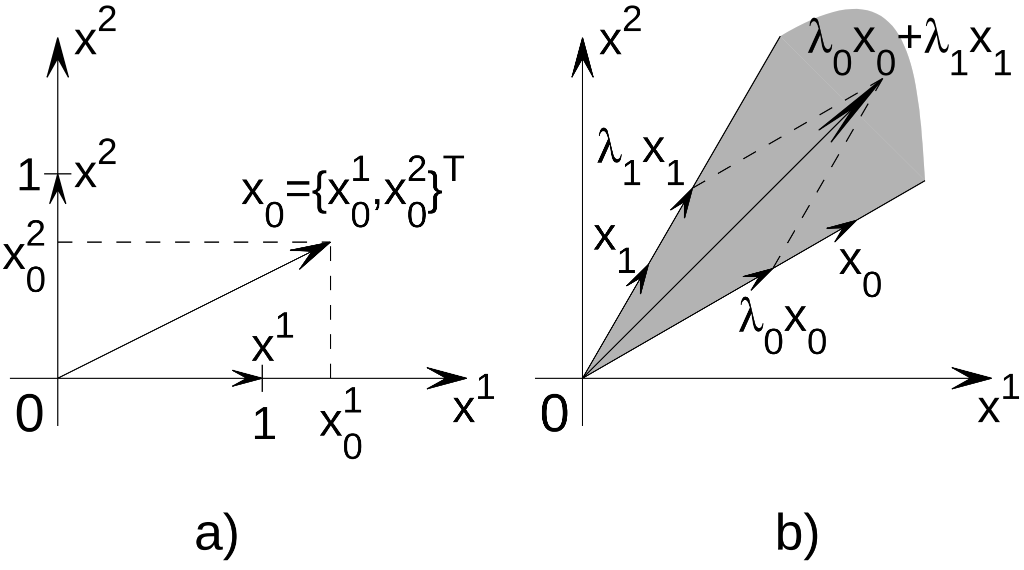


Рис. 6

высказывания: для любого $m = 1, 2, \ldots$ из условий

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i; \quad x_i \in X, \quad \lambda_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1, m}\right); \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \tag{1.8}$$

следует $x \in X$. Проведем индукцию по m. При $m = 1$ высказывание тривиально. Предположим, что оно уже доказано для $m = k$. Пусть (1.8) выполняется при $m = k + 1$. Если $\lambda_{k+1} = 1$, то $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ и, значит, $x = x_{k+1} \in X$. Если же $\lambda_{k+1} < 1$, то мы можем записать

$$x = (1 - \lambda_{k+1})\overline{x} + \lambda_{k+1} x_{k+1}, \quad \text{где} \quad \overline{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} x_i. \tag{1.9}$$

Так как $\overline{x}$ – выпуклая комбинация точек $x_1, \ldots, x_k$, то, по индукционному предположению, $\overline{x} \in X$. Поэтому из (1.9), с учетом выпуклости X, следует, что $x \in X$. Утверждение леммы 10 для выпуклого множества доказано. ⊠

Упражнение 9. Докажите утверждение леммы 10 для выпуклого конуса.

Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$. Пересечение всех выпуклых множеств (выпуклых конусов) из $\mathbf{R}^n$, содержащих X, называется *выпуклой* (соотв., *конической*) *оболочкой множества* X и обозначается $\mathrm{conv}X$ (соотв., $\mathrm{cone}X$) (см. рис. 7). Если $X = \varnothing$, то, очевидно, $\mathrm{conv}X = \varnothing$ и $\mathrm{cone}X = \varnothing$. В силу леммы 1 выпуклая оболочка любого множества выпукла. При этом, если множество Y выпукло и содержит X, то по определению, $\mathrm{conv}X \subset Y$. Иначе говоря, $\mathrm{conv}X$ есть наименьшее по вложению выпуклое множество, содержащее X.

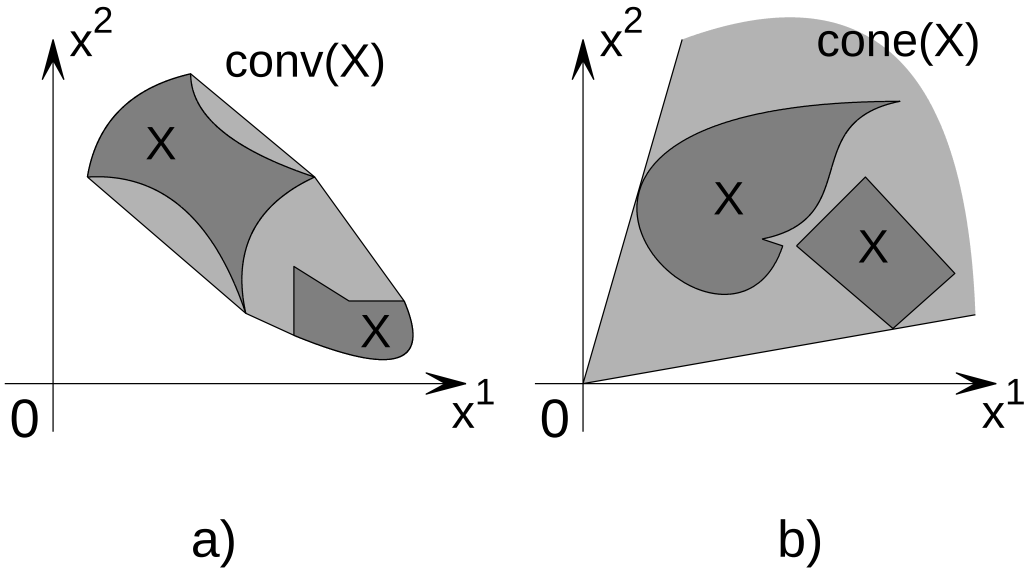


Рис. 7

Так как $X \subset \mathrm{conv}X$, то ясно, что X выпукло тогда и только тогда, когда $\mathrm{conv}X = X$.

Упражнение 10. Докажите, что: 1) $\mathrm{cone}X$ есть выпуклый конус; 2) $\mathrm{cone}X$ – наименьший по вложению выпуклый конус, содержащий X.

Укажем следующие эквивалентные введенным определения выпуклой и конической оболочек: *выпуклой* (*конической*) *оболочкой множества* X называется совокупность всевозможных выпуклых (соотв., неотрицательных) комбинаций точек из X. Действительно, справедливо такая лемма.

Лемма 11. *Выпуклая (коническая) оболочка произвольного множества X совпадает с множеством всевозможных выпуклых (*соотв., *неотрицательных) комбинаций точек из X.*

☐ Рассмотрим лишь случай выпуклой оболочки (для конической оболочки рассуждения аналогичны). Пусть Z – множество всевозможных выпуклых комбинаций точек из X. Требуется показать, что $\mathrm{conv}X = Z$. Проверим, что Z выпукло. Пусть $x_0, x_1 \in Z$. По определению Z имеем:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i, \text{ где } x_i \in X, \mu_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1;$$

$$x_1 = \sum_{i=1}^{s} \eta_i y_i, \text{ где } y_i \in X, \eta_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, s}), \quad \sum_{i=1}^{s} \eta_i = 1.$$

При этом точка $x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_0$, $0 \leq \lambda \leq 1$ является линейной комбинацией точек $y_1, \ldots, y_s, x_1, \ldots, x_m$ с неотрицательными коэффициентами

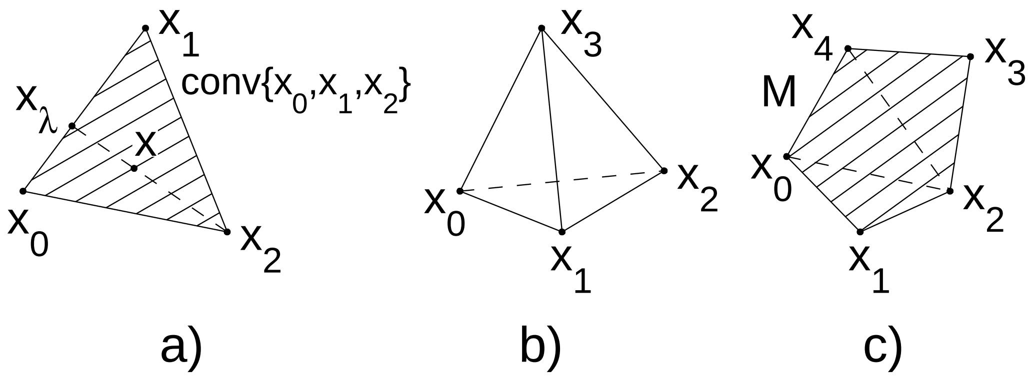


Рис. 8

$\lambda\eta_1, \ldots, \lambda\eta_s$, $(1-\lambda)\mu_1, \ldots, (1-\lambda)\mu_m$, в сумме равными единице. Иначе говоря, x_λ – выпуклая комбинация указанных точек из X и, значит, $x_\lambda \in Z$. Следовательно, Z выпукло. А так как $X \subset Z$, то и $\mathrm{conv}X \subset Z$. В то же время, в силу леммы 10, любое выпуклое множество Y, содержащее X, содержит и Z. Поэтому и пересечение всех таких Y, то есть $\mathrm{conv}X$, содержит Z. Таким образом, $\mathrm{conv}X \supset Z$ и, значит, $\mathrm{conv}X = Z$. ⊠

Упражнение 11. Докажите утверждение леммы 11 в случае конической оболочки.

Пример 9. Пусть $x_0, x_1 \in \mathbf{R}^n$. По лемме 11 $\mathrm{conv}\{x_0, x_1\} = [x_0, x_1]$ (см. пример 8).

Упражнение 12. Пусть x_0, x_1, x_2 – не лежащие на одной прямой точки плоскости $\mathbf{R}^2$. Докажите, что $\mathrm{conv}\{x_0, x_1, x_2\}$ есть треугольник с вершинами x_0, x_1, x_2 (см. рис. 8*a*).

Упражнение 13. Пусть x_0, x_1, x_2, x_3 – не лежащие в одной плоскости точки пространства $\mathbf{R}^3$. Докажите, что $\mathrm{conv}\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ есть тетраэдр с вершинами x_0, x_1, x_2, x_3 (см. рис. 8*b*).

Лемма 11 утверждает, что любая точка из $\mathrm{conv}X$ представима в виде выпуклой комбинации конечного числа точек из X. Оказывается, что для $X \subset \mathbf{R}^n$ это число всегда можно ограничить величиной $(n+1)$. Этот факт, известный как теорема Каратеодори (см. ниже теорему 1), играет в конечномерном выпуклом анализе важную роль. Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующее утверждение, представляющее и самостоятельный интерес.

Лемма 12. *Если точка x является неотрицательной комбинацией точек $x_1, \ldots, x_m$, хотя бы одна из которых не равна нулю, то x можно представить в виде неотрицательной комбинации линейно независимой подсистемы системы $x_1, \ldots, x_m$.*

☐ По условию $x = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ при некоторых $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$. Можно считать, что $x_1 \neq 0_n, \ldots, x_m \neq 0_n$ (в противном случае нулевые точки надо исключить из рассмотрения). Если точки $x_1, \ldots, x_m$ линейно независимы, то они и составят искомую линейно независимую подсистему системы $x_1, \ldots, x_m$. Если же они линейно зависимы, то, по определению, найдутся числа $\mu_1, \ldots, \mu_m$, не равные нулю одновременно и такие, что $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i x_i = 0_n$. Будем считать, что среди этих чисел есть положительные (иначе заменим их на числа $-\mu_1, \ldots, -\mu_m$). Введем $\alpha \equiv \min\limits_{i:\mu_i>0}(\lambda_i/\mu_i)$. Пусть этот минимум достигается на индексе s. Тогда $\gamma_i \equiv \lambda_i - \alpha\mu_i \geq 0$ $\forall i = \overline{1,m}$ и $\gamma_s = 0$. При этом

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i - \alpha \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq s)}}^{m} \gamma_i x_i.$$

Таким образом, мы представили x в виде неотрицательной комбинации не более чем $(m-1)$ точек из числа исходных. Если они линейно независимы, то они и составят искомую линейно независимую подсистему системы $x_1, \ldots, x_m$. В противном случае следует повторить описанную процедуру исключения точек нужное число раз. В "худшем"варианте останется одна точка из числа исходных. Она, будучи ненулевой, составит простейшую линейно независимую систему. ☒

Непосредственно из лемм 11 и 12 получаем такое утверждение.

Лемма 13. *Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$. Любую точку из* cone$X$ *можно представить в виде неотрицательной комбинации не более n точек из X.*

Теперь легко доказать теорему Каратеодори.

Теорема 1 (*теорема Каратеодори*). *Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$. Любую точку из* conv$X$ *можно представить в виде выпуклой комбинации не более $(n+1)$ точек из X.*

☐ Пусть $x \in \mathrm{conv}X$. Точка x представима в виде выпуклой комбинации:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \text{ где } \quad x_i \in X, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}), \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1. \tag{1.10}$$

Используя множество $A \equiv X \times \{1\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$, перепишем представление (1.10) в эквивалентном виде

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ 1 \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left\{ \begin{array}{c} x_i \\ 1 \end{array} \right\}, \quad \text{где} \quad \left\{ \begin{array}{c} x_i \\ 1 \end{array} \right\} \in A, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}). \tag{1.11}$$

Формула (1.11) означает, что точка $\left\{ \begin{matrix} x \\ 1 \end{matrix} \right\}$ лежит в cone$A$. По лемме 13 существует такое представление (1.11) этой точки, в котором число слагаемых m не превосходит $n+1$. То же число слагаемых имеет и соответствующее представление (1.10) точки x. ⊠

Пример 10. Заштрихованный на рис. 8c выпуклый многоугольник M является выпуклой оболочкой своих вершин $x_0, x_1, \ldots, x_4$. Любая точка M есть выпуклая комбинация либо x_0, x_1, x_2, либо x_0, x_2, x_4, либо x_2, x_3, x_4.

Упражнение 14. Проверьте, что любая точка трехмерного куба есть выпуклая комбинация не более чем четырех его вершин.

6. Отделимость. Пусть X, Y – множества из $\mathbf{R}^n$. Говорят, что *множества* X *и* Y *отделяются*, или *разделяются*, в $\mathbf{R}^n$ *гиперплоскостью* $\Gamma_{c,\alpha}$, если X принадлежит одному из замкнутых полупространств $\overline{\Gamma^-_{c,\alpha}}$, $\overline{\Gamma^+_{c,\alpha}}$, а Y – другому. Если при этом хотя бы одно из множеств X, Y не пересекается с $\Gamma_{c,\alpha}$, то принято говорить, что X и Y *строго отделяются гиперплоскостью* $\Gamma_{c,\alpha}$. Если для пары множеств X, Y существует гиперплоскость $\Gamma_{c,\alpha}$, которой X и Y отделяются (строго отделяются) в $\mathbf{R}^n$, то говорят, что X и Y *отделимы* (соотв. *строго отделимы*), а гиперплоскость $\Gamma_{c,\alpha}$ называют *отделяющей* (соотв. *строго отделяющей*) *гиперплоскостью.* Тот факт, что множества X и Y отделяются в $\mathbf{R}^n$ гиперплоскостью $\Gamma_{c,\alpha}$, означает, что либо

$$(c, x) \leq \alpha \leq (c, y), \quad x \in X, \quad y \in Y$$

(это соответствует случаю $X \subset \overline{\Gamma^-_{c,\alpha}}$, $Y \subset \overline{\Gamma^+_{c,\alpha}}$), либо

$$(c, x) \geq \alpha \geq (c, y), \quad x \in X, \quad y \in Y$$

(случай, когда $X \subset \overline{\Gamma^+_{c,\alpha}}$, $Y \subset \overline{\Gamma^-_{c,\alpha}}$). Соответственно при строгой отделимости X и Y гиперплоскостью $\Gamma_{c,\alpha}$ будет либо

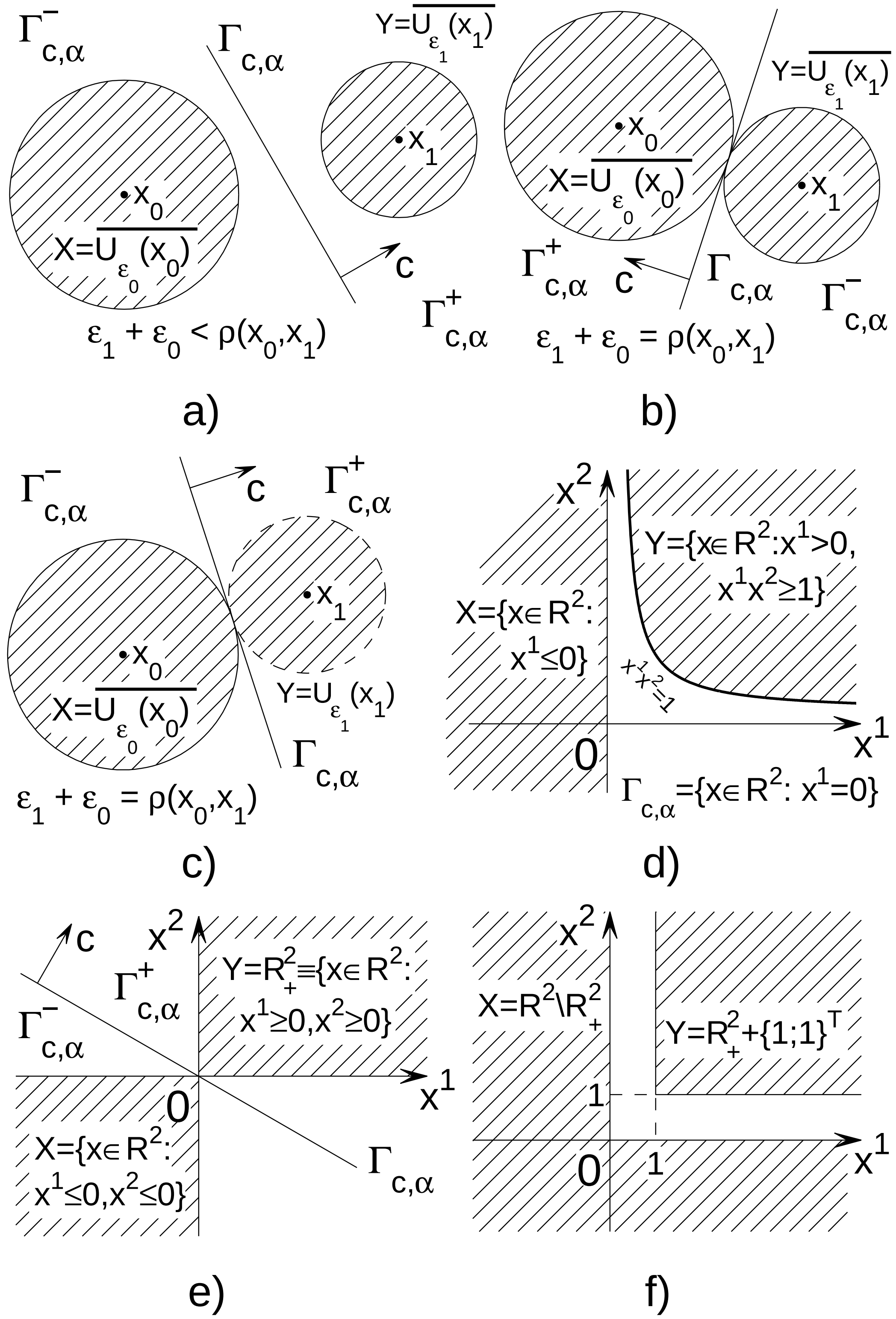
$$(c, x) < (c, y), \quad x \in X, \quad y \in Y$$

(случай, когда $X \subset \Gamma^-_{c,\alpha}$ или $Y \subset \Gamma^+_{c,\alpha}$), либо

$$(c, x) > (c, y), \quad x \in X, \quad y \in Y$$

(случай, когда $X \subset \Gamma^+_{c,\alpha}$ или $Y \subset \Gamma^-_{c,\alpha}$).

Определение отделимости проиллюстрировано на рис. 9. В случаях, представленных на рис. 9a – 9e, множества X и Y отделимы, а на рис. 9a, 9c, 9d – кроме того, и строго отделимы; в случае рис. 9f – неотделимы. При внимательном рассмотрении рис. 9 можно предположить, что для отделимости выпуклых множеств, видимо, достаточно условия их непересечения. Так оно и есть на самом деле (см. теорему 4 в п.7).



$\Gamma^-_{c,\alpha}$
$\Gamma_{c,\alpha}$
$Y=\overline{U_{\varepsilon_1}(x_1)}$
x_1
x_0
$X=\overline{U_{\varepsilon_0}(x_0)}$
c
$\Gamma^+_{c,\alpha}$
$\varepsilon_1 + \varepsilon_0 < \rho(x_0,x_1)$
a)
$Y=\overline{U_{\varepsilon_1}(x_1)}$
x_0
$X=\overline{U_{\varepsilon_0}(x_0)}$
x_1
$\Gamma^+_{c,\alpha}$
c
$\Gamma_{c,\alpha}$
$\Gamma^-_{c,\alpha}$
$\varepsilon_1 + \varepsilon_0 = \rho(x_0,x_1)$
b)
$\Gamma^-_{c,\alpha}$
c
$\Gamma^+_{c,\alpha}$
x_1
x_0
$X=\overline{U_{\varepsilon_0}(x_0)}$
$Y=U_{\varepsilon_1}(x_1)$
$\Gamma_{c,\alpha}$
$\varepsilon_1 + \varepsilon_0 = \rho(x_0,x_1)$
c)
x^2
$Y=\{x\in R^2: x^1>0, x^1x^2\geq 1\}$
$X=\{x\in R^2: x^1\leq 0\}$
$x^1x^2=1$
x^1
0
$\Gamma_{c,\alpha}=\{x\in R^2: x^1=0\}$
d)
c
x^2
$\Gamma^+_{c,\alpha}$
$Y=R^2_+\equiv\{x\in R^2: x^1\geq 0, x^2\geq 0\}$
$\Gamma^-_{c,\alpha}$
x^1
0
$X=\{x\in R^2: x^1\leq 0, x^2\leq 0\}$
$\Gamma_{c,\alpha}$
e)
x^2
$X=R^2\backslash R^2_+$
$Y=R^2_+ + \{1;1\}^T$
1
0
1
x^1
f)

Рис. 9

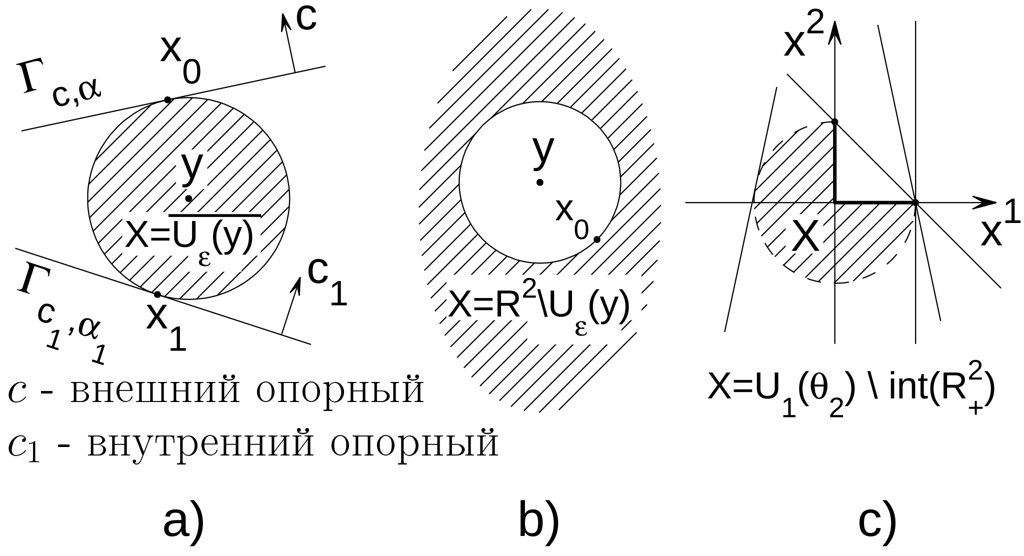


Рис. 10

Важным частным случаем отделяющих гиперплоскостей являются так называемые *опорные гиперплоскости.* Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$, $x_0 \in \partial X$. Гиперплоскость $\Gamma_{c,\alpha}$ называется опорной к множеству X в точке x_0, если точка $x_0 \in \Gamma_{c,\alpha}$, а множество X принадлежит либо $\overline{\Gamma^-_{c,\alpha}}$, либо $\overline{\Gamma^+_{c,\alpha}}$. Если $X \subset \overline{\Gamma^-_{c,\alpha}}$ ($X \subset \overline{\Gamma^+_{c,\alpha}}$), то вектор c называется *внешним* (соотв. *внутренним*) *опорным вектором к множеству X в точке x_0*.Приведенное определение проиллюстрировано на рис. 10. В случае, когда граница ∂X есть гладкое многообразие, опорная к X в точке x_0 гиперплоскость (если она существует) совпадает с касательной гиперплоскостью к ∂X в точке x_0 (см. рис. $10a$). В то же время касательная гиперплоскость может существовать, а опорная – нет (см. рис. $10b$). На рис. $10c$ показано множество X, в некоторых граничных точках которого существует единственная опорная гиперплоскость к X ("пунктирная часть"границы), в некоторых опорная гиперплоскость не существует ("сплошная часть"границы), а в двух отмеченных точках границы существует бесконечное число опорных гиперплоскостей.

Упражнение 15. Докажите, что: 1) всякая опорная к X в точке x_0 гиперплоскость является опорной и к замыканию $\overline{X}$ в точке x_0; 2) множество внешних опорных векторов к данному множеству в данной точке есть выпуклый конус; 3) если множества X и Y отделимы и имеют общую граничную точку x_0, то любая гиперплоскость, отделяющая X от Y, содержит x_0.

7. Теоремы отделимости выпуклых множеств. Теоремами отделимости называются теоремы о достаточных условиях отделимости множеств. В теории задач на экстремум исключительную роль играют теоремы отделимости выпуклых множеств. В этом пункте будет сформулирована и до-

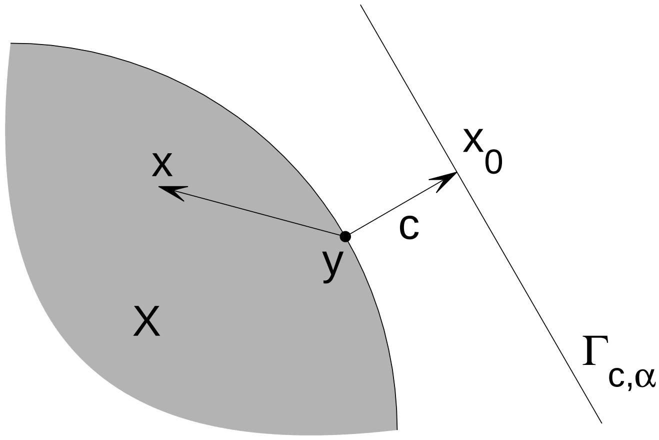


Рис. 11

казана общая теорема об отделимости выпуклых множеств. Это теорема 4. Но сначала мы рассмотрим два ее частных случая, которые представляют и самостоятельный интерес, – теоремы 2 и 3. В теоремах 2 и 3 идет речь об отделимости выпуклых множеств от одноточечных. Напомним, что множество проекций $P_X(x_0)$ точки x_0 на непустое выпуклое замкнутое множество X состоит ровно из одной точки (лемма 8).

Теорема 2 (*о строгой отделимости точки от множества*). *Пусть X – непустое выпуклое замкнутое множество в $\mathbf{R}^n$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$ – точка, не принадлежащая X. Тогда одноточечное множество $Y = \{x_0\}$ строго отделимо от множества X. Одной из строго отделяющих гиперплоскостей является гиперплоскость $\Gamma_{c,\alpha}$ с параметрами $c = x_0 - P_X(x_0)$* и $\alpha = (c, x_0)$, *проходящая через точку x_0.При этом $X \subset \Gamma^-_{c,\alpha}$.*

☐ Положим $y \equiv P_X(x_0)$, $c \equiv x_0 - y$, $\alpha \equiv (c, x_0)$ (см. рис. 11). Очевидно, $x_0 \in \Gamma_{c,\alpha}$. Покажем, что $X \subset \Gamma^-_{c,\alpha}$. В силу леммы 9, критерия проекции, имеем $\forall x \in X : (x, c) - (y, c) = (x - y, c) \equiv (x - y, x_0 - y) \le 0$, то есть

$$\forall x \in X : \quad (x, c) \le (y, c). \tag{1.12}$$

С другой стороны, так как $x_0 \notin X$, то $y \neq x_0$, $c \equiv x_0 - y \neq 0_n$ и

$$(y, c) - \alpha \equiv (y, c) - (x_0, c) = (y - x_0, c) = -(c, c) < 0,$$

то есть

$$(y, c) < \alpha. \tag{1.13}$$

Из (1.12) и (1.13) получаем, что $\forall x \in X$: $(x, c) < \alpha$, то есть $X \subset \Gamma^-_{c,\alpha}$. ⊠

Теорема 3 (*о существовании опорной гиперплоскости*). *Пусть X – выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$. В любой граничной точке множества X существует опорная к X гиперплоскость.*

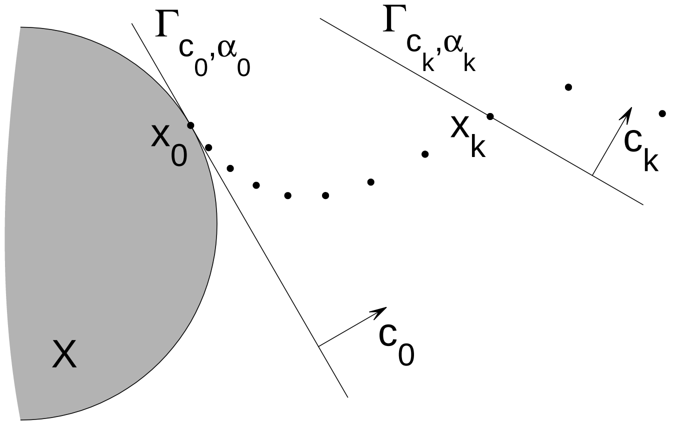


Рис. 12

☐ Пусть $x_0 \in \partial X$. Так как $\partial X = \partial \overline{X}$ (см. лемму 5), то $x_0 \in \partial \overline{X}$. Существует последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек, не принадлежащих $\overline{X}$, сходящаяся к x_0. По теореме 2 для каждой точки x_k существует гиперплоскость Γ_{c_k,α_k} такая, что $x_k \in \Gamma_{c_k,\alpha_k}$, $\overline{X} \subset \Gamma^-_{c_k,\alpha_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ (см. рис. 12). Без ограничения общности можно считать, что $\|c_k\| = 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Так как сфера – компактное множество в $\mathbf{R}^n$, то у последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, лежащей на единичной сфере, существует подпоследовательность $\{c_{k'}\}$, сходящаяся к некоторой точке c_0 той же сферы: $c_{k'} \to c_0$ при $k' \to \infty$, $\|c_0\| = 1$. Положим $\alpha_0 \equiv (c_0, x_0)$. Тогда $x_0 \in \Gamma_{c_0,\alpha_0}$. Гиперплоскость Γ_{c_0,α_0} является опорной к множеству X в точке x_0. Действительно, так как $\forall k'$ множество $X \subset \Gamma^-_{c_{k'},\alpha_{k'}}$, то

$$(x, c_{k'}) < \alpha_{k'}, \quad x \in X.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k' \to \infty$, получаем ($\alpha_{k'} \equiv (c_{k'}, x_{k'}) \to (c_0, x_0) \equiv \alpha_0$ при $k' \to \infty$) :

$$(x, c_0) \le \alpha_0, \quad x \in X,$$

то есть $X \subset \overline{\Gamma^-_{c_0,\alpha_0}}$. ⊠

Теорема 4 (*об отделимости выпуклых множеств*). *Пусть X и Y – непустые непересекающиеся выпуклые множества в $\mathbf{R}^n$. Тогда*:

1) *X отделимо от Y*; 2) *$\overline{X}$ отделимо от $\overline{Y}$*.

☐ Рассмотрим множество $A \equiv X - Y$. Так как $X \cap Y = \varnothing$, то $0_n \notin A$. Имеет место одно из двух:

$$\text{либо а) } 0_n \notin \partial A, \text{ либо б) } 0_n \in \partial A.$$

Так как A выпукло и, следовательно, $\partial \overline{A} = \partial A$ (см. лемму 5), то в случае а) точка $0_n \notin \overline{A}$, а в случае б) точка $0_n \in \overline{A}$. Таким образом, в любом случае существует гиперплоскость $\Gamma_{c,\alpha} \equiv \{x : (c,x) = \alpha\}$, отделяющая точку 0_n от множества A (в случае а) – по теореме 2, в случае б) – по теореме 3). Без ограничения общности будем считать, что $0_n \in \Gamma_{c,\alpha}$, $\overline{A} \subset \overline{\Gamma^-_{c,\alpha}}$. Так как $0_n \in \Gamma_{c,\alpha}$, то $\alpha = (c, 0_n) = 0$. То есть $(c,a) \leq 0 \ \ \forall a \in A$. Поэтому $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ имеем $(c,x) \leq (c,y)$. Значит, конечны величины $\alpha_1 \equiv \sup\limits_{x\in X}(c,x)$ и $\alpha_2 \equiv \inf\limits_{y\in Y}(c,y)$, причем $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Возьмем любое число α_0 из отрезка $[\alpha_1, \alpha_2]$. Ясно, что

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in Y : \quad (c,x) \leq \alpha_0 \leq (c,y),$$

то есть $X \subset \overline{\Gamma^-_{c,\alpha_0}}$, $Y \subset \overline{\Gamma^+_{c,\alpha_0}}$ и Γ_{c,α_0} – гиперплоскость, отделяющая X от Y.

Та же гиперплоскость Γ_{c,α_0} отделяет $\overline{X}$ от $\overline{Y}$. Действительно, докажем, что

$$\forall x \in \overline{X}, \quad \forall y \in \overline{Y} : \quad (c,x) \leq \alpha_0 \leq (c,y). \tag{1.14}$$

Фиксируем произвольно $x \in \overline{X}$, $y \in \overline{Y}$. Существуют последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Y$ такие, что $x_k \to x$, $y_k \to y$ при $k \to \infty$; имеем $(c,x_k) \leq \alpha_0 \leq (c,y_k)$ $\forall k = 1,2,\ldots$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем неравенство (1.14). ⊠

Упражнение 16. Пусть K – выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной 0_n, имеющий пустое пересечение с открытым *отрицательным ортантом* $\overset{\circ}{\mathbf{R}}{}^n_- \equiv \{x \in \mathbf{R}^n : x^i < 0, i = \overline{1,n}\}$. Докажите, что существует ненулевой вектор $c \in \mathbf{R}^n$ с неотрицательными компонентами такой, что $(c,x) \geq 0 \ \forall x \in K$.

8. Крайние (угловые) точки выпуклого множества. Точка x выпуклого множества X называется *крайней*, или *угловой*, *точкой* этого *множества*, если ее нельзя представить в виде $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_0$, где x_0, $x_1 \in X$, $x_0 \neq x_1$, $0 < \lambda < 1$. Совокупность всех крайних точек множества X обозначим $E(X)$.

Пример 11. Для $X = \overline{U_\varepsilon(y)}$ множество $E(X) = \partial X$; для $X = U_\varepsilon(y)$ множество $E(X) = \varnothing$.

Пример 12. Если X – плоский выпуклый многоугольник, то $E(X)$ есть множество его вершин (см. рис. 8*c*). То же самое справедливо для трехмерного выпуклого многогранника (см. рис. 8*b*).

Теорема 5 (*о представлении выпуклого компакта*). *Пусть X – выпуклый компакт в $\mathbf{R}^n$. Тогда $X = \operatorname{conv}E(X)$, то есть любая точка $x_0 \in X$ может быть представлена в виде выпуклой комбинации конечного числа крайних точек X.*

□ Доказательство проведем индукцией по размерности n (см. [6], С.28-29). Если $n = 1$, то X является отрезком, и утверждение теоремы очевидно. Предположим, что теорема справедлива для $n = k$. Пусть теперь $X \subset \mathbf{R}^{k+1}$.

Рассмотрим два случая: 1) $x_0 \in \partial X$, 2) $x_0 \in \overset{\circ}{X}$.

1) Случай $x_0 \in \partial X$. Построим гиперплоскость $\Gamma_{c,\alpha}$, опорную к X в точке x_0, $x_0 \in \Gamma_{c,\alpha}$, $X \subset \overline{\Gamma^-_{c,\alpha}}$. Множество $Y \equiv X \cap \Gamma_{c,\alpha}$ есть выпуклый компакт, принадлежащий гиперплоскости $\Gamma_{c,\alpha}$, имеющей размерность k. По предположению индукции для $x_0 \in Y$ найдутся точки $y_1, \ldots, y_m$ – крайние точки множества Y такие, что

$$x_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}), \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

Покажем, что $y_1, \ldots, y_m$ являются крайними точками и для X. Предположим противное, т.е. что для некоторой точки y_i найдутся x_1, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, и $\lambda \in (0,1)$ такие, что $y_i = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Так как $y_i \in Y \subset \Gamma_{c,\alpha}$, то $(c, y_i) = \alpha = (c, x_0)$ и поскольку $X \subset \overline{\Gamma^-_{c,\alpha}}$, то $(c, x_1) \leq \alpha$, $(c, x_2) \leq \alpha$. В силу того, что $\lambda \in (0,1)$, имеем

$$(c, x_1) = \frac{1}{\lambda}\left[(c, y_i) - (1-\lambda)(c, x_2)\right] \geq \frac{1}{\lambda}\left[(c, x_0) - (1-\lambda)(c, x_0)\right] = (c, x_0).$$

Таким образом, $(c, x_1) = (c, x_0) = \alpha$ и точка $x_1 \in \Gamma_{c,\alpha}$. Так как $x_1 \in X$, то $x_1 \in Y \equiv X \cap \Gamma_{c,\alpha}$. Аналогично доказывается, что $x_2 \in Y \equiv X \cap \Gamma_{c,\alpha}$. А тогда наше предположение противоречит тому, что y_i крайняя точка Y.

2) Случай $x_0 \in \overset{\circ}{X}$. Проведем через внутреннюю точку x_0 множества X прямую ℓ. Пересечение $\ell \cap X$ является отрезком с концами x_1, x_2, принадлежащими ∂X. Очевидно, существует $\lambda \in (0,1)$ такое, что $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Поскольку для граничных точек теорема верна, то она верна и для x_0. Действительно, для граничных точек x_1, x_2 имеют место представления

$$x_1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \quad y_i \in E(X) \quad (i = \overline{1,m});$$

$$x_2 = \sum_{i=1}^{s} \gamma_i z_i, \quad \gamma_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{s} \gamma_i = 1, \quad z_i \in E(X) \quad (i = \overline{1,s}).$$

Тогда $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda \lambda_i y_i + \sum\limits_{i=1}^{s} (1-\lambda)\gamma_i z_i$, откуда и следует утверждение теоремы. ⊠

Из теорем 1 и 5 непосредственно получаем

Следствие. *Любая точка выпуклого компакта $X \subset \mathbf{R}^n$ может быть представлена как выпуклая комбинация не более $(n+1)$ крайних точек X.*

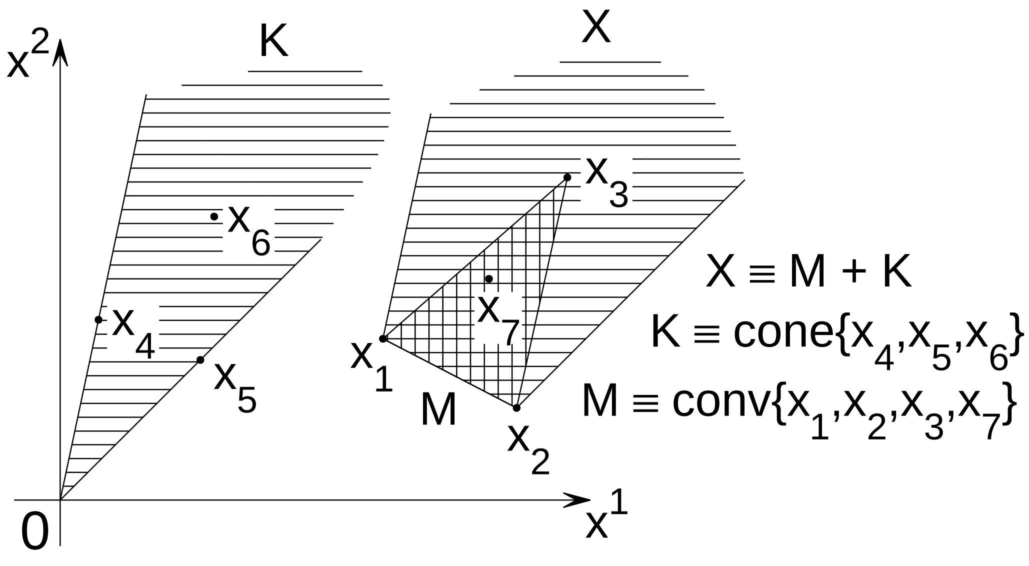


Рис. 13

Пример 13. Любая точка плоского выпуклого замкнутого многоугольника есть выпуклая комбинация трех его вершин (см. рис. $8c$).

9. Выпуклые многогранные множества. Выпуклая (коническая) оболочка множества, состоящего из конечного числа точек, называется *выпуклым многогранником* (соотв. *выпуклым многогранным конусом*). Более общим понятием является понятие *выпуклого многогранного множества.* Множество называется выпуклым многогранным, если оно является алгебраической суммой выпуклого многогранника и выпуклого многогранного конуса. Заметим, что так определенные выпуклый многогранник, выпуклый многогранный конус и выпуклое многогранное множество замкнуты. Ясно также, что выпуклый многогранник – ограниченное множество. Приведенные определения проиллюстрированы на рис. 13.

Рассмотрим связь введенного понятия выпуклого многогранного множества с известным из геометрии понятием *полиэдра.* Множество $X \subset \mathbf{R}^n$ называется *замкнутым полиэдром,* если оно является пересечением конечного числа замкнутых полупространств. В соответствии с этим определением каждый замкнутый полиэдр $X \subset \mathbf{R}^n$ может быть представлен в виде

$$X = \left\{x \in \mathbf{R}^n : x \in \overline{\Gamma^-_{c_i,\alpha_i}}, i = \overline{1,m}\right\},$$

то есть

$$X = \left\{x \in \mathbf{R}^n : (c_i, x) \leq \alpha_i, i = \overline{1,m}\right\}, \tag{1.15}$$

где $\{\Gamma_{c_i,\alpha_i}\}_{i=1}^m$ – полностью определяющая X система ограничивающих его гиперплоскостей (см. рис. $14a$).

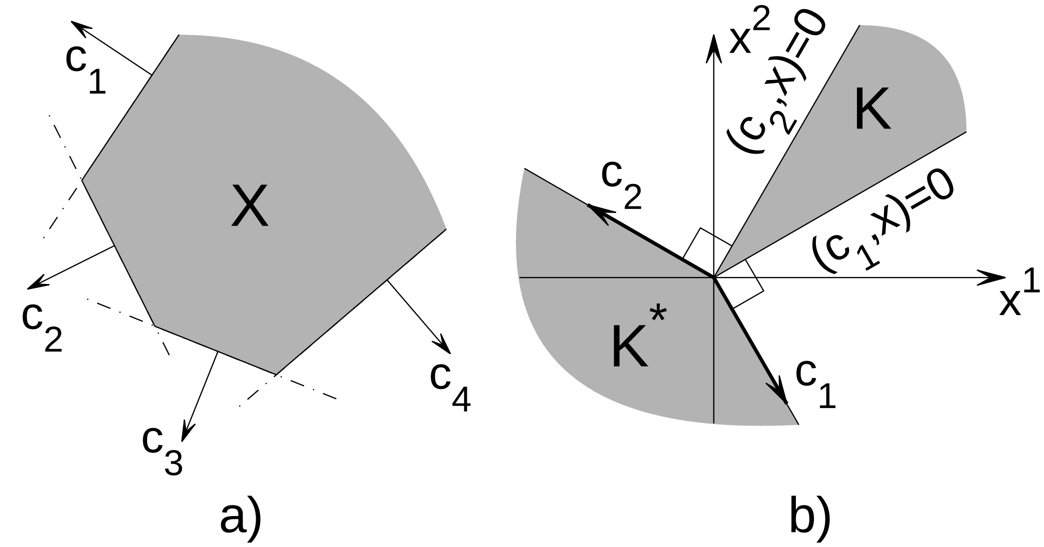


Рис. 14

Нетрудно понять, что приведенные на рис. 13 многогранные множества K, M, X являются замкнутыми полиэдрами в $\mathbf{R}^2$. Легко заподозрить, что класс замкнутых полиэдров совпадает с определенным ранее классом выпуклых многогранных множеств. Так и есть на самом деле, хотя аккуратное доказательство этого факта довольно громоздко (см. [2], С.81-83) и мы его опускаем. Отметим, что класс выпуклых многогранников совпадает с классом ограниченных замкнутых полиэдров, а класс выпуклых многогранных конусов – с классом так называемых *однородных замкнутых полиэдров*. Замкнутый полиэдр $X \subset \mathbf{R}^n$, имеющий представление (1.15), называется однородным, если все числа $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, m}$, то есть все ограничивающие X гиперплоскости проходят через точку 0_n.

Представление (1.15) для полиэдров удобно переписать с помощью векторного неравенства, введя вектор $a = \mathrm{col}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \in \mathbf{R}^m$ и $(m \times n)$-матрицу A, строками которой являются транспонированные векторы c_i :

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax \le a\}, \qquad A = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \ldots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \ldots & c_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_m^1 & c_m^2 & \ldots & c_m^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, всякий выпуклый многогранный конус K в $\mathbf{R}^n$ имеет представление

$$K = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax \le 0_m\}, \tag{1.16}$$

где A – некоторая $(m \times n)$-матрица. Наоборот, всякое множество $K \subset \mathbf{R}^n$ вида (1.16) есть выпуклый многогранный конус.

10. Сопряженный конус. Теорема Фаркаша. Пусть K – некоторый конус в $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим множество

$$K^* \equiv \{p \in \mathbf{R}^n : \quad (p, x) \leq 0 \quad \forall x \in K\}.$$

Упражнение 17. Докажите, что K^* – выпуклый замкнутый конус.

Конус K^* называется *сопряженным конусом* к конусу K.

Пример 14. Пусть c_1, c_2 – ненулевые векторы в $\mathbf{R}^2$. Рассмотрим конус $K = \{x \in \mathbf{R}^2 : (c_i, x) \leq 0, i = 1, 2\}$. Сопряженный конус $K^* = \mathrm{cone}\{c_1, c_2\}$ (см. рис. $14b$).

Пример 14 является иллюстрацией к следующей теореме о структуре конуса, сопряженного к многогранному выпуклому.

Теорема 6 (*теорема Фаркаша*). *Пусть*

$$K = \{x \in \mathbf{R}^n : \quad (c_i, x) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}\} \text{ –}$$

выпуклый многогранный конус в $\mathbf{R}^n$. *Тогда* $K^* = \mathrm{cone}\{c_1, \ldots, c_m\}$.

□ Пусть A – $(m \times n)$-матрица, строками которой являются транспонированные векторы c_i :

$$A = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \ldots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \ldots & c_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_m^1 & c_m^2 & \ldots & c_m^n \end{pmatrix}.$$

Коническую оболочку

$$Z \equiv \mathrm{cone}\{c_1, \ldots, c_m\} \equiv \left\{ x \in \mathbf{R}^n : x = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i c_i, \quad \lambda^i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}) \right\}$$

нам удобно записать в виде $Z = \{x \in \mathbf{R}^n : x = A^T \lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}^m_+\}$. Нужно показать, что $K^* = Z$. Очевидно, что $Z \subset K^*$. Действительно, если $v \in Z$, то существует $\lambda \in \mathbf{R}^m_+$ такое, что $v = A^T\lambda$ и $\forall x \in K$ в силу $Ax \leq 0_n$ имеем $(v, x) = (A^T\lambda, x) = (\lambda, Ax) \leq 0$. Это означает, что $v \in K^*$. Следовательно, $Z \subset K^*$.

Докажем теперь, что $K^* \subset Z$, действуя от противного. Пусть существует $v \in K^*$, $v \notin Z$. По теореме 2 точка v строго отделима от выпуклого замкнутого конуса Z. А именно, гиперплоскость $\Gamma_{c,\alpha}$, где $c = v - P_Z(v)$, $\alpha = (c, v)$, такова, что $v \in \Gamma_{c,\alpha}$, $Z \subset \Gamma^-_{c,\alpha}$ (см. теорему 2). Так как Z – конус, то из условия $Z \subset \Gamma^-_{c,\alpha}$ следует, что

$$\forall x \in Z: \quad (c, x) \le 0. \tag{1.17}$$

Действительно, предположим, что существует вектор $\tilde{x} \in Z$ такой, что $(c, \tilde{x}) = \beta > 0$. Возьмем число $\gamma > 0$ такое, что $\gamma\beta > \alpha$. Элемент $\gamma\tilde{x}$ принадлежит конусу Z. Однако $(c, \gamma\tilde{x}) = \gamma\beta > \alpha$ и $\gamma\tilde{x} \notin \Gamma^-_{c,\alpha}$, что противоречит условию $Z \subset \Gamma^-_{c,\alpha}$. Свойство (1.17) доказано.

Так как $c_i \in Z$, $i = \overline{1,m}$, то в силу (1.17) имеем $(c, c_i) \le 0$, $i = \overline{1,m}$, что означает

$$c \in K. \tag{1.18}$$

В то же время, так как $0_n \in Z \subset \Gamma^-_{c,\alpha}$, то $0 = (c, 0_n) < \alpha$ и $(c, v) > 0$. То есть $c \notin K$, что противоречит (1.18). Полученное противоречие показывает, что $K^* \subset Z$. ⊠

Сформулируем теорему 6 несколько иначе.

Следствие. *Если конус $K \subset \mathbf{R}^n$ имеет вид* (1.16), *то*

$$K^* = \{x \in \mathbf{R}^n : x = A^T\lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}^m_+\}.$$

11. Системы линейных уравнений и неравенств. Пусть A – некоторая $(m \times n)$-матрица, $K = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax \le 0_m\}$. В силу следствия теоремы Фаркаша справедливо утверждение:

$$\{p \in K^*\} \Leftrightarrow \{\exists \lambda \in \mathbf{R}^m : \lambda \ge 0_m, p = A^T\lambda\}. \tag{1.19}$$

По определению K^* соотношение $\{p \in \mathbf{R}^n, p \notin K^*\}$ означает, что

$$\{\exists x \in K : (p, x) > 0\} \Leftrightarrow \{\exists x \in \mathbf{R}^n : Ax \le 0_m, (p, x) > 0\}. \tag{1.20}$$

Из (1.19) и (1.20) получаем следующее утверждение.

Лемма 14. *Пусть даны $(m \times n)$-матрица A и вектор $p \in \mathbf{R}^n$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем*

$$Ax \le 0_m, \quad (p, x) > 0 \quad (x \in \mathbf{R}^n); \tag{1.21}$$

$$A^T\lambda = p, \quad \lambda \ge 0_m \quad (\lambda \in \mathbf{R}^m). \tag{1.22}$$

Придадим лемме 14 несколько иной вид.

Лемма 15. *Пусть даны $(m \times n)$-матрица A и вектор $b \in \mathbf{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем*:

$$Ax = b, \quad x \ge 0_n \quad (x \in \mathbf{R}^n); \tag{1.23}$$

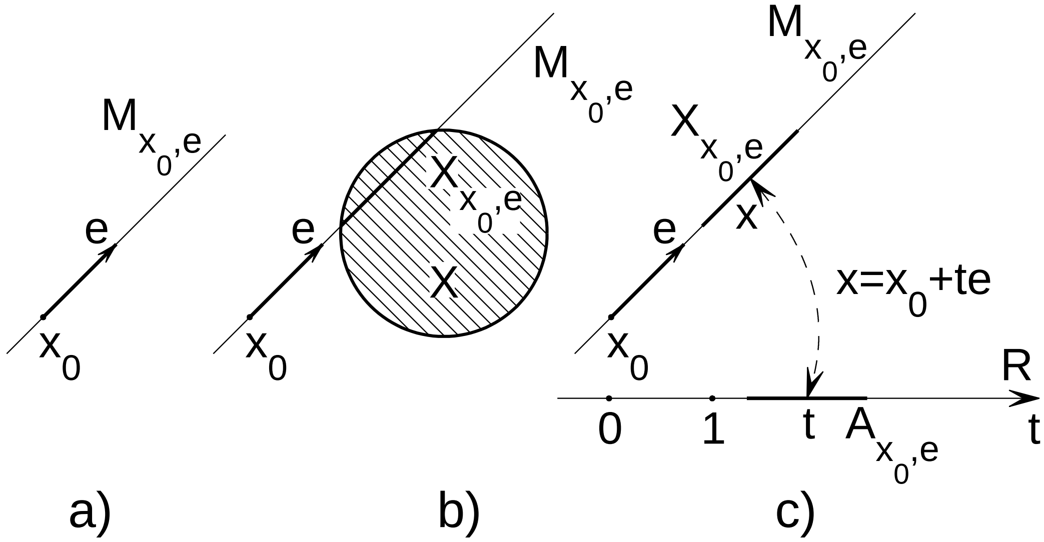


Рис. 15

$$A^T\lambda \leq 0_n, \quad (b,\lambda) > 0 \quad (\lambda \in \mathbf{R}^m). \tag{1.24}$$

☐ Применим лемму 14 к матрице A^T, поменяв местами m и n, x и λ, взяв вместо p вектор b. ☒

12. Одномерные сечения. Введем полезное для дальнейшего понятие. *Одномерным сечением множества* $X \subset \mathbf{R}^n$ назовем пересечение X с любой прямой M в $\mathbf{R}^n$. Пусть

$$M = M_{x_0,\ell} \equiv \{x \in \mathbf{R}^n : x = x_0 + t\ell, \quad t \in \mathbf{R}\} \text{ –}$$

прямая в $\mathbf{R}^n$, проходящая через точку x_0 в направлении ℓ, $\ell \neq 0_n$ (см. рис. 15a). Ее пересечение с X обозначим $X_{x_0,\ell}$ (см. рис. 15b). Формула параметризации $x = x_0 + t\ell$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между точками x одномерного сечения $X_{x_0,\ell}$ и точками t множества

$$A_{x_0,\ell} \equiv \{t \in \mathbf{R} : x_0 + t\ell \in X\}$$

(см. рис. 15c). Следующее утверждение почти очевидно.

Лемма 16. *Множество $X \subset \mathbf{R}^n$ выпукло тогда и только тогда, когда любое его одномерное сечение выпукло. В свою очередь, одномерное сечение $X_{x_0,\ell}$ выпукло тогда и только тогда, когда выпукло множество $A_{x_0,\ell} \subset \mathbf{R}$.*

Упражнение 18. Докажите лемму 16.

13. Возможные (допустимые) направления. Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ непусто и $x_0 \in X$. Вектор $\ell \in \mathbf{R}^n$ назовем *вектором возможного (допустимого) направления для множества* X *в точке* x_0, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $(x_0 + t\ell) \in X$ $\forall t \in [0, \varepsilon]$. Совокупность всех векторов возможных для

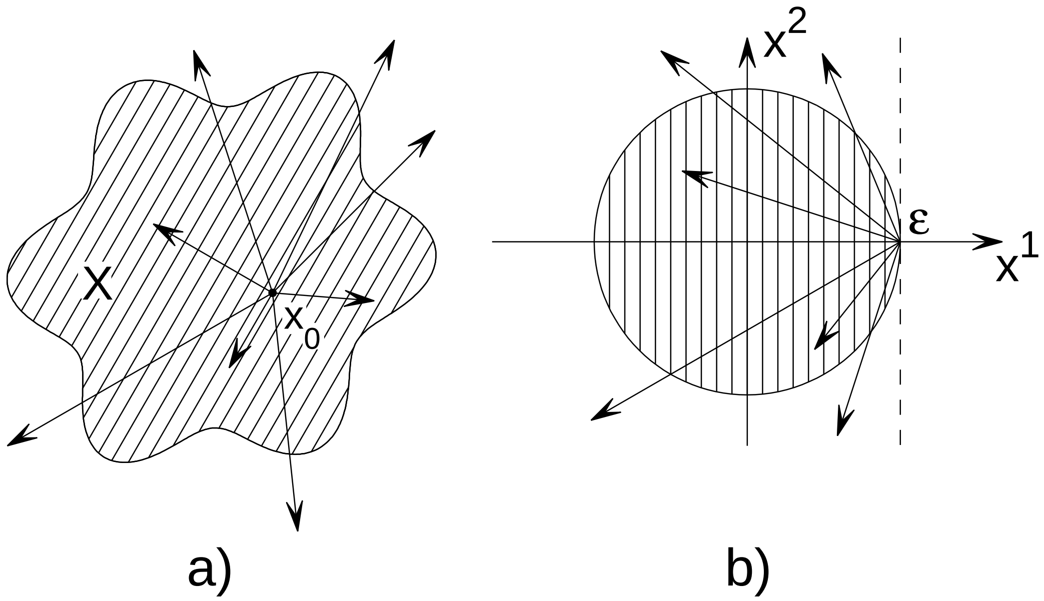


Рис. 16

множества X в точке x_0 направлений обозначим $K(x_0, X)$. Заметим, что 0_n принадлежит $K(x_0, X)$.

Пример 15. Если $x_0 \in \overset{\circ}{X}$, то $K(x_0, X) = \mathbf{R}^n$ (см. рис. 16*a*).

Пример 16. Пусть $n = 2$, $X = \overline{U_\varepsilon(0_2)}$, $x_0 = \mathrm{col}\{\boldsymbol{\varepsilon}, 0\}$, $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$. Тогда $K(x_0, X) = \{\ell \in \mathbf{R}^2 : \ell^1 < 0\} \cup \{0_2\}$ (см. рис. 16*b*).

Пример 17. Пусть $c \in \mathbf{R}^n$, $c \neq 0_n$, $X = \overline{\Gamma^+_{c,\alpha}}$. Если $x_0 \in \Gamma_{c,\alpha}$, то $K(x_0, X) = \{\ell \in \mathbf{R}^n : (\ell, c) \geq 0\}$ (см. рис. 17*a*).

Пример 18. Пусть $n = 2$, $X = \{x \in \mathbf{R}^2 : (x^1)^2 \leq x^2 \leq 2(x^1)^2, x^1 \geq 0\}$. В точке $x_0 = 0_2$ множество $K(x_0, X) = \{0_2\}$ (см. рис. 17*b*).

Упражнение 19. Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$, $x_0 \in X$. Докажите, что: 1) $K(x_0, X)$ – конус; 2) если X – выпуклое множество, то $K(x_0, X)$ – выпуклый конус.

Множество $K(x_0, X)$ будем называть *конусом векторов возможных направлений для множества X в точке x_0* или, более коротко, *конусом возможных направлений для множества X в точке x_0*.

Упражнение 20. Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ – выпуклое множество. Докажите, что: 1) если $\ell \in K(x_0, X), \ell \neq 0_n$, то $A_{x_0,\ell}$ (см. п.12) есть промежуток, содержащий некоторый отрезок $[0, \boldsymbol{\varepsilon}]$, $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$; 2) если $x_0 \in \overset{\circ}{X}$, то $\forall \ell \neq 0_n$ множество $A_{x_0,\ell}$ содержит отрезок вида $[-\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}]$, $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$; 3) точка x_0 является угловой для X тогда и только тогда, когда не существует ненулевого вектора $\ell \in K(x_0, X)$ такого, что и $(-\ell) \in K(x_0, X)$.

Упражнение 21. Пусть $\boldsymbol{\delta} > 0$, $H_\delta \equiv \{x \in \mathbf{R}^n : |x^i| \leq \boldsymbol{\delta}, i = \overline{1, n}\}$ – замкнутый куб с центром 0_n. Используя результат упражнения 20, покажите,

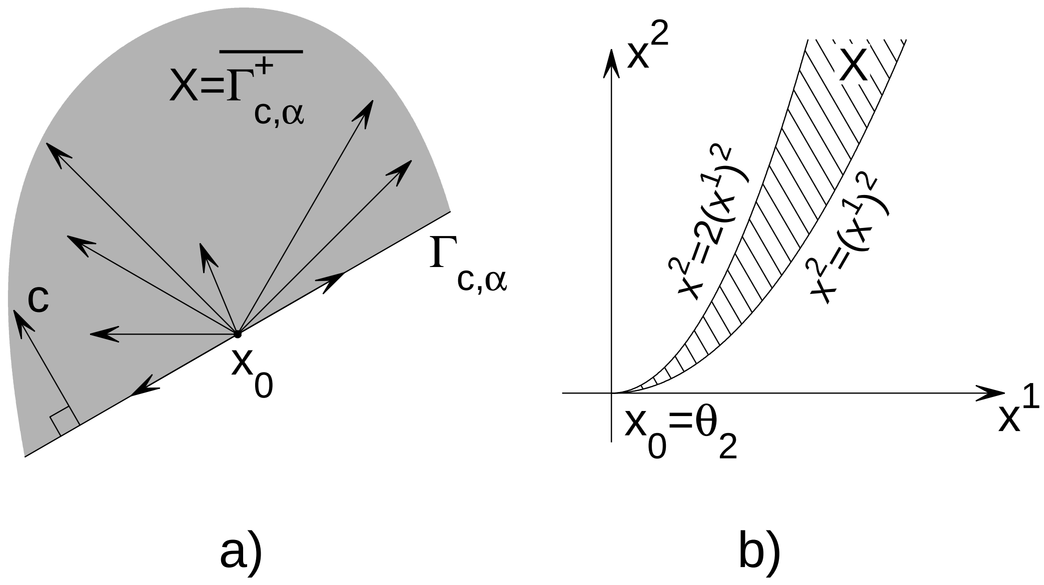


Рис. 17

что $E(H_\delta) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x^i| = \delta, i = \overline{1, n}\}$ (см. рис. 21).

Цитированная литература

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1980 (1-ое издание), 1988 (2-ое издание).

2. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. - М.: Наука, 1986.

3. Сумин В.И. Элементарный выпуклый анализ: Учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: ННГУ, 2007.

4. Элементарный выпуклый анализ. Методическая разработка для студентов механико-математического факультета. (Автор: Сумин В.И.).- Горьковский государственный университет. Горький. 1990.

5. Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. - М.: Наука, 1981.

6. Карманов В.Г. Математическое программирование. - М.: Наука, 1986.

7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1966.

8. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. - М.: Наука, 1979.

Владимир Иосифович **Сумин**

НАЧАЛА ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА.
Часть 1.
ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

Учебно-методическое пособие

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Механико-математический факультет

Кафедра математической физики