МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

А.Г. Коротченко
Е.А. Кумагина
В.М. Сморякова

ВВЕДЕНИЕ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНУЮ ОПТИМИЗАЦИЮ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
09.03.03 «Прикладная информатика» и
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2017

УДК 004.02(075.8)
ББК 22.1я-73
К 68

А.Г. Коротченко, Е.А. Кумагина, В.М. Сморякова ВВЕДЕНИЕ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНУЮ ОПТИМИЗАЦИЮ. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 55 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент К.А. Баркалов

В данном учебно-методическом пособии излагаются основные понятия, теоремы и методы решения задач многокритериальной оптимизации.

Пособие предназначено для магистров направления подготовки «Прикладная информатика», также пособие может быть использовано для подготовки бакалавров направления подготовки «Прикладная математика и информатика».

УДК 004.02(075.8)
ББК 22.1я-73
К 68

Оглавление

1. Задачи многокритериальной оптимизации как задачи принятия решений

Реальный мир таков, что при принятии решения о выборе или конструировании объекта в той или иной предметной области невозможно одним критерием охватить все предъявленные к нему требования. Так, например, выбирая куртку на зиму, мы хотим, чтобы она была теплой, красивой, удобной, практичной и недорогой. Другим примером является построение вычислительного кластера, при этом необходимо одновременно учитывать несколько критериев, отражающих различные характеристики: производительность системы, временные затраты на пересылку данных между вычислительными элементами, энергопотребление, стоимость системы. Хотелось бы, чтобы окончательный вариант вычислительного кластера удовлетворял условию оптимальности по каждому из частных критериев. Однако, оптимизация по каждому из них в отдельности приводит к решениям, которые отличаются друг от друга. Данные различия связаны с тем, что рассматриваемые критерии являются противоречивыми. Так попытка увеличить производительность системы добавлением новых вычислительных элементов приводит к увеличению стоимости системы.

Таким образом, описание требований, предъявляемых к выбираемому или конструируемому объекту, по существу носит множественный характер. Естественным является описание задачи выбора набором критериев, каждый из которых имеет свою физическую интерпретацию, определяемую соответствующей предметной областью. Так, например, о природе многокритериальности в задачах оптимального проектирования можно прочитать в [2].

Задачи оптимальности, в которых при принятии решения учитываются несколько критериев, принято называть многокритериальными задачами оптимизации.

1.1. Используемые обозначения

Сделаем несколько замечаний по поводу используемых в дальнейшем обозначений. Векторы будем обозначать заглавными буквами, а их компоненты – строчными с нижним индексом: $X=(x_1,x_2,...,x_n)$.

Через $Q'(X)$ будем обозначать градиент функции $Q(X)$ в точке X :

$$Q'(X)=\left(\frac{\partial Q(X)}{\partial x_1},...,\frac{\partial Q(X)}{\partial x_n}\right).$$

Для нас будет несущественно, как записывается вектор: в виде строки или столбца. Соответствующая трактовка будет следовать из контекста. С помощью знака «0» мы будем обозначать как вектор с нулевыми компонентами $0=(0,0,...,0)$, так и число ноль. Смысл соответствующей записи также будет следовать из контекста. Так, например, если требуется записать условие обращения в ноль градиента функции $Q(X)$ в точке X, то будем писать

$Q'(X)=0$, понимая под этим, что $\dfrac{\partial Q(X)}{\partial x_j}=0,\ j=1,...,n.$ Через $<X,Y>$ будем обозначать скалярное произведение векторов $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ и $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$, а через $\|X\|$ – норму вектора X: $<X,Y>=\sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$, $\|X\|=<X,X>^{1/2}$.

1.2. Определение понятия решения многокритериальных задач

Одной из основных проблем, связанных с многокритериальными задачами, является проблема определения самого решения.

Частным случаем задач многокритериальной оптимизации являются оптимизационные задачи с одним критерием, в которых понятие решения формулируется естественным образом.

Приведём формальную постановку однокритериальной задачи оптимизации:

$$Q(X)\Rightarrow \min, \qquad (1.1)$$

$X\in D,\ D\subseteq R^n$, где R^n – n-мерное евклидово пространство.

В дальнейшем будем предполагать, что $D\neq\varnothing$.

Точка $X^*\in D$ называется глобальным решением задачи (1.1), если $Q(X^*)\le Q(X)$ при всех $X\in D$.

Точка $X^*\in D$ называется локальным решением задачи (1.1), если существует число $\varepsilon>0$ такое, что $Q(X^*)\le Q(X)$ при всех $X\in U_\varepsilon(X^*)\cap D$, где $U_\varepsilon(X^*)=\{X\in R^N : \|X-X^*\|\le\varepsilon\}$.

Если в задаче (1.1) требуется найти максимум функции $Q(X)$ на множестве D, то в соответствующих определениях знаки неравенств нужно поменять на противоположные.

Заметим, что принцип выбора решения однокритериальной задачи оптимизации условно можно назвать принципом экстремума.

Приведём теперь формальную постановку многокритериальной задачи оптимизации:

$$Q_1(X)\Rightarrow \min,...,Q_m(X)\Rightarrow \min, \qquad (1.2)$$

$X\in D,\ D\subseteq R^n$.

Задачу (1.2) мы будем называть задачей на минимум.

Задача на максимум записывается следующим образом:

$$Q_1(X)\Rightarrow \max,...,Q_m(X)\Rightarrow \max, \qquad (1.3)$$

$X\in D,\ D\subseteq R^n$.

В реальной постановке задачи могут оказаться критерии, которые требуется как минимизировать, так и максимизировать, но такие задачи всегда можно привести к виду (1.2) или (1.3). В основном мы будем рассматривать многокритериальные задачи в постановке (1.2).

Будем также считать, что в задаче (1.2) все критерии приведены к безразмерному виду и к единой шкале изменения их значений.

Дадим определения решений многокритериальной задачи оптимизации в постановке (1.2).

Допустимые точки $X \in D$ мы будем также называть стратегиями.

Определение 1.1.

Стратегия (точка) $X' \in D$ безусловно лучше стратегии (точки) $X \in D$, если существует такое q ($1 \le q \le m$), что справедлива следующая система неравенств:

$$Q_j(X') \le Q_j(X),\ j=1,...,m,\ j \ne q, \tag{1.4}$$

$$Q_q(X') < Q_q(X).$$

При этом стратегия (точка) X безусловно хуже стратегии (точки) X'.

Если о двух стратегиях $X, X' \in D$ нельзя сказать, что одна из них безусловно лучше другой, то будем говорить, что они несравнимы.

Определение 1.2.

Стратегия $X^* \in D$ называется эффективной (оптимальной по Парето), если в множестве D не существует точек, которые были бы безусловно лучше X^*.

Множество всех эффективных стратегий многокритериальной задачи (1.2) обозначим через $P(D)$.

Определение 1.3.

Стратегия $X^0 \in D$ называется слабоэффективной (оптимальной по Слейтеру), если в множестве D не существует точек, для которых была бы выполнена следующая система неравенств:

$$Q_j(X) < Q_j(X^0),\ j=1,...,m. \tag{1.5}$$

Множество всех слабоэффективных стратегий многокритериальной задачи (1.2) обозначим через $S(D)$.

Если рассматривается задача на максимум, то в соответствующих определениях следует поменять знаки неравенств на противоположные.

Для задач (1.2) и (1.3) рассмотрим вектор-функцию $\mathrm{Q}(X) = (Q_1(X),...,Q_m(X))$, $X \in D$. Образ множества D, определяемый вектор-функцией $Q(X)$, обозначим через W.

Таким образом,

$$W = \{U = (u_1,...,u_m) \in R^m \mid \exists\ \ X \in D,\ u_j = Q_j(X),\ \ j=1,...,m\}.$$

Через $P(W)$ обозначим образ множества эффективных стратегий $P(D)$, а через $S(W)$ – образ множества слабоэффективных стратегий $S(D)$, при отображении определяемом функцией $\mathrm{Q}(X)$. Элементы множества $P(W)$

будем называть эффективными векторами, а элементы множества $S(W)$ – слабоэффективными векторами.

Под решением многокритериальной задачи мы будем понимать множество эффективных стратегий $P(D)$ или множество слабоэффективных стратегий $S(D)$, а сам принцип выбора решения многокритериальной задачи будем называть принципом эффективности.

Заметим, что во многих задачах многокритериальной оптимизации наряду с построением множества эффективных (слабоэффективных) стратегий, мы будем находить и множество эффективных (слабоэффективных) векторов. Кроме того, в силу сложности построения всего множества $P(D)$ $(P(W))$ под решением многокритериальной задачи оптимизации часто понимают их некоторые представительные, в том или ином смысле, подмножества.

Понятия эффективного и слабоэффективного вектора можно вводить и для произвольного множества W, что позволяет изучать структуру множеств $P(W)$, $S(W)$, не связывая их с конкретной задачей многокритериальной оптимизации. Отождествим множество D с множеством W, а в качестве функций Q_j, $j=1,...,m$, примем u_j, $j=1,...,m$. Тогда, повторяя определения 1.1, 1.2, 1.3, в которых термин «стратегия» следует заменить на термин «вектор», получим определения эффективного и слабоэффективного вектора для произвольного множества W. При рассмотрении множеств $P(W)$ и $S(W)$ будем использовать термин «лучше», означающий «меньше», если в определениях 1.1, 1.2, 1.3 используются знаки неравенств «$\le$», и «больше», если в определениях 1.1, 1.2, 1.3 используются знаки «$\ge$».

Теорема 1.1.

Любой эффективный вектор является слабоэффективным. Любая эффективная стратегия является слабоэффективной.

Доказательство. Доказательство будем проводить методом от противного. Предположим, что эффективный вектор U^* не является слабоэффективным. Тогда для него найдется вектор $U' \in W$ такой, что

$$u'_j < u^*_j,\ j=1,...,m.$$

Мы нашли вектор U', который безусловно лучше вектора U^*, что противоречит его эффективности.

Доказательство второго утверждения теоремы проводится аналогично. ■

2. Свойства эффективных векторов и стратегий

После того, как мы определились с понятием решения многокритериальной задачи, возникает естественный вопрос о существовании решения задачи (1.2) и структуре её множества решений. Далее будут приведены соответствующие теоремы. При их доказательстве нам потребуется известный результат из курса математического анализа: так называемая теорема Вейерштрасса.

Напомним, что множество точек $D \subseteq R^n$ называется ограниченным, если существует такая константа $c > 0$, для которой выполняется условие $\| X \| \le c$ для всех $X \in D$.

Замыканием множества $D \subseteq R^n$ называется множество $\overline{D} = \{X \in R^n \mid D \cap U_\varepsilon(X) \ne \varnothing, \forall \varepsilon > 0\}$. Множество D называется замкнутым, если $D = \overline{D}$. Другими словами, замкнутое множество – это такое множество, которое содержит все свои предельные точки.

Множество $\operatorname{int} D$ называется внутренностью множества $D \subseteq R^n$, если $\operatorname{int} D = \{X \in R^n \mid U_\varepsilon(X) \subseteq D \text{ при некотором } \varepsilon > 0\}$. Множество D называется открытым, если $D = \operatorname{int} D$.

Границей множества D называется множество $\partial D = \overline{D} \setminus \operatorname{int} D$.

Если множество D из R^n ограничено и замкнуто, то оно называется компактом.

Теорема 1.1 (Теорема Вейерштрасса).

Если множество D – компакт в R^n, а $Q(X)$ – непрерывная функция на множестве D, то точка глобального минимума функции $Q(X)$ на D (глобальное решение задачи (1.1)) существует.

2.1. Теорема о структуре множества эффективных векторов

Пусть $W \ne \varnothing$.

Теорема 2.2.

Если множество W компакт в R^m, то множество $P(W) \ne \varnothing$.

Доказательство. Обозначим $Q_j(U) = u_j$, $j = 1,...m$, $U = (u_1,...,u_m) \in W$.

Рассмотрим задачу

$$Q(U) \Rightarrow \min, \qquad (2.1)$$
$$U \in W,$$

где $Q(U) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(U)$.

Решение данной задачи, в силу теоремы Вейерштрасса, существует.

Пусть $U^* = \arg\min_{U \in W} Q(U) \in W$. Покажем, что U^* эффективный вектор. Доказательство будем проводить методом от противного.

Предположим, что U^* не является эффективным вектором множества W. Тогда должен существовать вектор $U' = (u'_1, u'_2, ..., u'_m) \in W$, для которого будет справедлива следующая система неравенств:

$u'_j \le u^*_j$, $j = 1,...,m$, $j \ne q$,

$u'_q < u^*_q$.

Просуммировав данные неравенства и воспользовавшись определением функции $Q(X)$, получаем $Q(U') < Q(U^*)$. Последнее неравенство противоречит тому, что U^* – решение задачи (2.1). Следовательно, U^* – эффективный вектор и $P(W) \ne \varnothing$. ■

2.2. Теоремы о существовании эффективных стратегий

Теорема 2.3.

Пусть в задаче (1.2) множество D – компакт в R^n, а функции $Q_j(X)$, $j = 1,...,m$, непрерывны на D, тогда в задаче (1.2) эффективные стратегии существуют.

Доказательство. Возьмём $\lambda_j > 0$, $j = 1,...,m$, такие, что $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$. Определим функцию

$$Q(X) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j Q_j(X) \qquad (2.2)$$

и рассмотрим задачу

$$Q(X) \Rightarrow \min, \qquad (2.3)$$

$$X \in D.$$

Функция $Q(X)$ непрерывна на множестве D, множество D – компакт, следовательно, по теореме Вейерштрасса решение задачи (2.3) существует. Пусть $X^* = \arg\min_{X \in D} Q(X) \in D$. Покажем, что $X^* \in P(D)$. Если это не так, то найдётся стратегия $X' \in D$ такая, что

$Q_j(X') \le Q_j(X^*)$, $j = 1,...,m$, $j \ne q$,

$Q_q(X') < Q_q(X^*)$.

Домножая данные неравенства на соответствующие λ_j, $j=1,...,m$, которые больше нуля, и складывая их, получим $Q(X') < Q(X^*)$, что противоречит тому, что $X^* = \arg\min_{X \in D} Q(X)$. Таким образом, $X^* \in P(D)$. ■

Рассмотрим снова многокритериальную задачу (1.2).

Будем считать, что множество D – компакт в R^n, а функции $Q_j(X),\ j=1,...,m,$ непрерывные функции на множестве D.

Пусть $D(0)=D$ и $D(j)= \underset{X \in D(j-1)}{Arg\min}\ Q_j(X),\ j=1,...,m$.

В силу условий, наложенных на множество D и функции $Q_j(X)$, множества $D(j) \neq \varnothing$, $j=1,...,m$, $D(m) \subseteq D(m-1) \subseteq ... \subseteq D(1) \subseteq D$, и каждая задача

$$
\begin{aligned}
&Q_j(X) \Rightarrow \min,\\
&X \in D(j-1),
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

где $j=1,...,m$, в силу теоремы Вейерштрасса, имеет решение.

Если задача (2.4) при $j=1$ имеет единственное решение, то назовём её 1-задачей. И, вообще, если задача (2.4) при $j=s$ имеет единственное решение, а решение каждой задачи (2.4) при $j=1,...,s-1$ не единственно, то такую задачу будем называть s-задачей, $s=2,...,m$.

Теорема 2.4.

Если задача (2.4) при $j=s$ является s-задачей, то её решение $X^*(s) \in P(D)$, $1 \le s \le m$.

Теорема 2.5.

Если задача (2.4) при $j=m$ не является m-задачей, то её множество решений $D(m) \subseteq P(D)$.

Пусть $m=2$, т.е. задача (1.2) принимает вид:

$$
\begin{aligned}
&Q_1(X) \Rightarrow \min,\\
&Q_2(X) \Rightarrow \min,\\
&X \in D \subseteq R^2.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Покажем, что если задача вида (2.4) при $j=1$ является 1-задачей, то её решение $X^*(1) \in P(D)$, где $P(D)$ – множество эффективных стратегий задачи (2.5).

Предположим, что $X^*(1) \notin P(D)$. Значит, существует такая стратегия $X \in D$, $X \neq X^*(1)$, что выполнены неравенства:

$$Q_1(X) \le Q_1(X^*(1)),$$
$$Q_2(X) \le Q_2(X^*(1)), \qquad (2.6)$$

причём одно из них должно выполняться как строгое.

Поскольку $X^*(1)$ – решение 1-задачи, то $Q_1(X) > Q_1(X^*(1))$, что противоречит первому из неравенств (2.6).

Пусть теперь задача вида (2.4) при $j=1$ не является 1-задачей, а при $j=2$ является 2-задачей. Покажем, что её решение $X^*(2) \in P(D)$.

Предположим, что это не так. Тогда найдётся такая стратегия $X \in D$, что

$$Q_1(X) \le Q_1(X^*(2)),$$
$$Q_2(X) \le Q_2(X^*(2)), \qquad (2.7)$$

причём одно из этих неравенств должно выполняться как строгое.

Если $X \in D(1)$, то $Q_1(X) = Q_1(X^*(2))$, так как $D(1) = Arg\min\limits_{X \in D} Q_1(X)$. Следовательно, второе из неравенств (2.7) должно выполняться как строгое. Но $X^*(2)$ единственное решение 2-задачи, поэтому $Q_2(X^*(2)) < Q_2(X)$. Получили противоречие, что доказывает эффективность стратегии $X^*(2)$.

Пусть $X \in D \setminus D(1)$. Так как $D(1)$ – это множество решений задачи (2.4) при $j=1$, а $X^*(2) \in D(1)$, то $Q_1(X) > Q_1(X^*(2))$, что противоречит первому из неравенств (2.7). Таким образом, и в этом случае $X^*(2) \in P(D)$.

Пусть теперь задача вида (2.4) при $j=2$ не является 2-задачей. Покажем тогда, что любая точка $X(2) \in D(2)$ является эффективной стратегией задачи (2.5). Итак, пусть $X(2) \in D(2)$, но $X(2) \notin P(D)$, тогда найдётся такая стратегия $X \in D$, что

$$Q_1(X) \le Q_1(X(2)),$$
$$Q_2(X) \le Q_2(X(2)), \qquad (2.8)$$

причём одно из этих неравенств будет выполняться как строгое.

Рассмотрим случай, когда $X \in D(2)$. Тогда $Q_2(X) = Q_2(X(2))$, в силу того, что $D(2) = Arg\min\limits_{X \in D_1} Q_2(X)$. Отсюда следует, что первое неравенство из (2.8) должно выполняться как строгое. Но $D(2) \subseteq D(1)$ и, следовательно, $X \in D(1)$, $X(2) \in D(1)$. Значит должно быть $Q_1(X) = Q_1(X(2))$. Получаем противоречие. Пусть теперь $X \in D(1) \setminus D(2)$. Тогда $Q_1(X) = Q_1(X(2))$ и второе неравенство из (2.8) должно выполняться как строгое, а это противоречит тому, что $X(2) \in D(2)$, $X \notin D(2)$ и, стало быть, имеем $Q_2(X(2)) < Q_2(X)$.

И, наконец, предполагая, что $X \in D \setminus D(1)$, получим $Q_1(X) > Q_1(X(2))$. А это противоречит первому из неравенств (2.8).

Таким образом, $X(2) \in P(D)$.

Рассмотрим теперь m однокритериальных задач:

$$
\begin{aligned}
&Q_j(X) \Rightarrow \min, \\
&X \in D \subseteq R^n, \qquad (2.9) \\
&j = 1, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Из теоремы 2.4. вытекает следующая теорема.

Теорема 2.6.

Если задача (2.9) при некоторых или всех j, $1 \le j \le m$, имеет единственное решение, то это решение есть эффективная стратегия задачи (1.2).

3. Теоремы о структуре множеств эффективных и слабоэффективных векторов

Теорема 3.1.

Пусть W – компакт в R^m. Тогда множество слабоэффективных векторов $S(W)$ также компакт в R^m.

Доказательство. В силу теорем 1.1 и 2.2 множество $S(W) \neq \varnothing$.

Так как $S(W) \subseteq W$, то $S(W)$ – ограничено.

Покажем, что $S(W)$ – замкнутое множество в R^m.

Возьмём произвольную последовательность точек $\{U^k\} \in S(W)$ такую, что $U^k = (u_1^k, u_2^k, ..., u_m^k) \Rightarrow U^0 = (u_1^0, u_2^0, ..., u_m^0)$ при $k \Rightarrow \infty$. Поскольку множество W – компакт в R^m, то точка $U^0 \in W$. Предположим, что точка $U^0 \notin S(W)$. Тогда существует вектор $U' = (u_1', ..., u_m') \in W$, для которого $u_j' < u_j^0$, $j = 1, ..., m$.

Последовательность $\{U^k\}$ сходится к точке U^0 при $k \Rightarrow \infty$, то есть найдётся такое значение $k = k^0$, что для $k \geq k_0$, $u_j' < u_j^k$, $j = 1, ..., m$. Таким образом, для любой точки последовательности $\{U^k\}$ при $k \geq k^0$, мы нашли безусловно лучшую точку U', но $U^k \in S(W)$ при $k \geq k^0$, т.е. получили противоречие.

Следовательно, $U^0 \in S(W)$.

Итак, множество $S(W)$ ограничено и замкнуто, то есть является компактом в R^m. ■

Компактность множества $P(W)$ при условии, что W компакт гарантируется при значительно более сильных предположениях о множестве W.

Теорема 3.2.

Пусть W – выпуклый компакт в R^2. Тогда множество эффективных векторов $P(W)$ также компакт в R^2.

Доказательство. Напомним, что непустое множество $W \subseteq R^m$ называется выпуклым, если $\lambda U^1 + (1-\lambda)U^2 \in W$ при всех $U^1, U^2 \in W$, $\lambda \in [0,1]$.

В силу теоремы 2.2. множество $P(W) \neq \varnothing$ и ограничено, так как $P(W) \subseteq W$.

Покажем, что множество $P(W)$ является замкнутым.

Возьмём произвольную последовательность точек $U^k = (u_1^k, u_2^k)$, $k = 1,2,...$, из множества $P(W)$, сходящуюся к точке $U^0 = (u_1^0, u_2^0)$, $U^k \Rightarrow U^0$, $k \Rightarrow \infty$. Вектор $U^0 \in W$, так как W по условию теоремы компакт.

Предположим, что $U^0 \notin P(W)$, тогда в множестве W найдется вектор $U' = (u_1', u_2')$ безусловно лучший вектора U^0, то есть будут выполнены неравенства $u_i' \le u_i^0, i=1,2$, причём одно из них должно быть строгим. Не уменьшая общности, будем считать, что это первое неравенство:

$u_1' < u_1^0$,

$u_2' \le u_2^0$.

Если теперь во втором неравенстве знак строгий, то это противоречит теореме 3.1, в силу которой $U^0 \notin S(W)$.

Таким образом, второе неравенство должно выполняться как равенство и мы получаем следующую систему:

$$u_1' < u_1^0, \tag{3.1}$$

$$u_2' = u_2^0. \tag{3.2}$$

Так как $U^k \Rightarrow U^0$, $k \Rightarrow \infty$, то найдётся такое значение $k = k_0$ и вектор $U^{k_0} = (u_1^{k_0}, u_2^{k_0})$ из множества $P(W)$, для которого справедливо неравенство

$$u_1' < u_1^{k_0}. \tag{3.3}$$

Поскольку вектор U^{k_0} эффективный, то для его второй компоненты обязательно должно выполняться неравенство:

$u_2' > u_2^{k_0}$. (3.4)

В силу того, что множество W выпукло, точка $U = \lambda U' + (1-\lambda)U^{k_0} \in W$, где $U' \in W$, $U^{k_0} \in W$, $0 \le \lambda \le 1$. Рассмотрим её первую компоненту $\tilde{u}_1 = \lambda u_1' + (1-\lambda)u_1^{k_0}$. Используя неравенство (3.1), получаем, что $\tilde{u}_1 = \lambda u_1' + (1-\lambda)u_1^{k_0} < u_1^0$ для значений λ достаточно близких к единице. Теперь рассмотрим вторую компоненту точки U: $\tilde{u}_2 = \lambda u_2' + (1-\lambda)u_2^{k_0}$. Используя условия (3.2) и (3.4), получаем, что $\tilde{u}_2 < u_2^0$. В результате вектор U^0, с одной стороны, по теореме 3.1 является слабоэффективным, а с другой стороны для него нашёлся вектор $U \in W$, для компонент которого выполнены неравенства $\tilde{u}_1 < u_1^0$, $\tilde{u}_2 < u_2^0$, из которых следует, что $U^0 \notin S(W)$.

Таким образом, предположение о том, что $U^0 \notin P(W)$, неверно, и U^0 эффективный вектор, а, следовательно, $P(W)$ – замкнутое множество.

Итак, $P(W)$ – есть компакт в R^2. ■

3.1. Примеры, показывающие существенность условий теоремы 3.2

В следующих примерах показана существенность обоих условий теоремы 3.2.

Пример 3.1 Нарушение выпуклости

Рассмотрим задачу:

$Q_1(x) \Rightarrow \min$,

$Q_2(x) \Rightarrow \min$,

$x \in D = [0,2]$.

$Q_1(x) = 2 - x$,

$$Q_2(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Построим множество эффективных векторов $P(W)$ этой задачи. Для этого изобразим графики функций $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ (рис. 3.1).

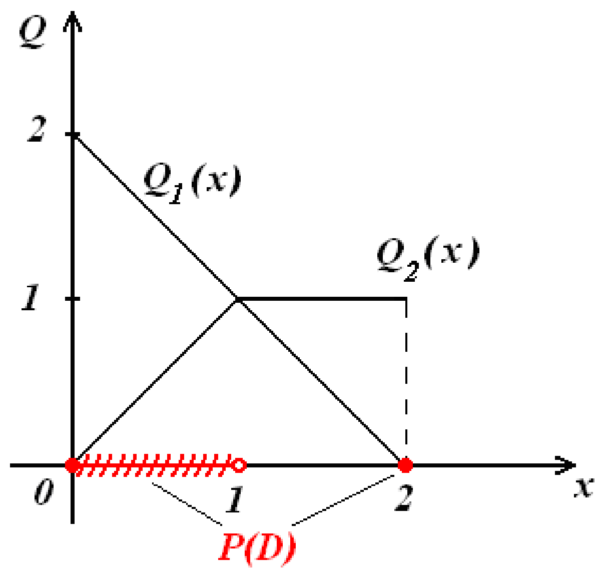


Рисунок 3.1.

Стратегия $x_1 = 0$ является эффективной, поскольку в множестве D не существует других точек, в которых функция $Q_2(x)$ принимала бы значения меньшие или равные $Q_2(x_1) = 0$. И, стало быть, стратегий безусловно лучших стратегии $x_1 = 0$ в множестве D не существует.

По той же причине стратегия $x_2 = 2$ также эффективна (здесь надо рассмотреть функцию $Q_1(X)$). Для любой точки (стратегии) $x \in [1,2)$ найдётся безусловно лучшая стратегия $x_2 = 2$. Для любой точки $x' \in (0,1)$, имеем: $Q_1(x') < Q_1(x)$, $Q_2(x') > Q_2(x)$ при $x \in [0, x')$ и $Q_1(x') > Q_1(x)$, $Q_2(x') < Q_2(x)$ при

$x \in (x', 2]$. И, стало быть, для любой стратегии $x' \in (0,1)$ в множестве D не существует безусловно лучшей стратегии.

Следовательно, множество эффективных стратегий $P(D) = [0,1) \cup \{2\}$.

Найдём образ W множества D при отображении, определяемом функциями $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, $x \in D$. Множество W будет иметь вид:

$W = W_1 \cup W_2$,

где $W_1 = \{(u_1, u_2) | \ 0 \le u_1 < 1, \ u_2 = 1\}$, а $W_2 = \{(u_1, u_2) \ | \ 1 \le u_1 \le 2, u_2 = 2 - u_1\}$.

Множество эффективных векторов есть образ множества $P(D)$ при том же отображении: $P(W) = \{(0,1)\} \cup \{(u_1, u_2) \in R^2 \ | 1 < u_1 \le 2, \ u_2 = 2 - u_1\}$.

Множество W не является выпуклым, а $P(W)$ не является компактом, поскольку $P(W)$ не замкнуто, так как точка (1,1) не принадлежит множеству $P(W)$, хотя является его предельной точкой.

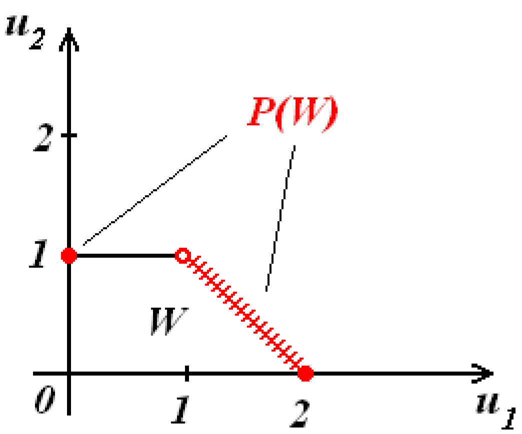


Рисунок 3.2.

Пример 3.2 Существенность условия двумерности задачи

Пусть множество $W \subset R^2$ задаётся следующим образом:

$W = \{U = (u_1, u_2) \in R^2 \ | \ u_1^2 + u_2^2 \le 1\}$, а «лучше» означает «больше».

Для данного множества в силу определения эффективного вектора множество эффективных векторов $P(W) = \{U = (u_1, u_2) \in W \ | \ u_1^2 + u_2^2 = 1\} \cap R_+^2$, где R_+^2 – неотрицательный квадрант плоскости R^2 (рис. 3.3).

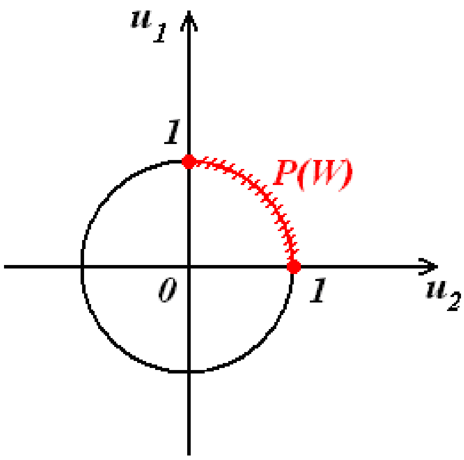


Рисунок 3.3.

Теперь построим множество $W \subset R^3$. Для этого введём в рассмотрение вспомогательные множества:

$W_1 = \{U \in R^3 \,|\, u_1^2 + u_2^2 \le 1,\, u_3 = 0\}$,

$W_2 = \{U \in R^3 \,|\, u_1 = u_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\, 0 \le u_3 \le 1\}$,

$W_3 = W_1 \cup W_2$.

Выберем в качестве множества W выпуклую оболочку множества W_3 (W=*conv* W_3).

Выпуклой оболочкой *conv* W произвольного множества W из R^n называется минимальное по включению выпуклое множество, содержащее W, то есть пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество W.

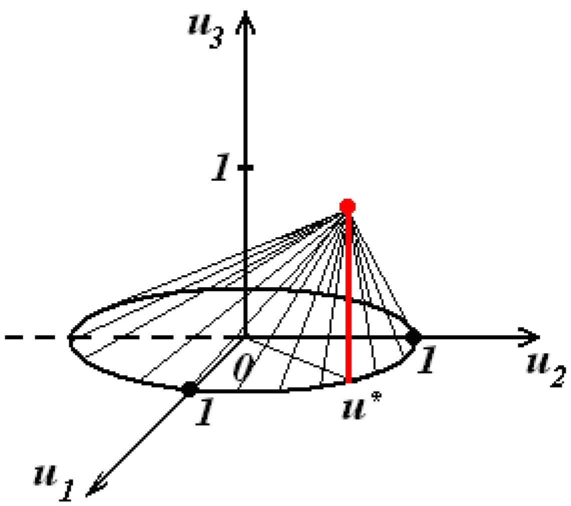


Рисунок 3.4.

Рассмотрим последовательность $U^k = (\cos t_k, \sin t_k, 0)$, где $t_k \Rightarrow \dfrac{\pi}{4}$, $k \Rightarrow \infty$.

Её предельной точкой является точка $U^* = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$.

Точки данной последовательности – эффективные векторы (см. рис. 3.3 и 3.4), однако U^* не является эффективным вектором, поскольку любая точка $U^0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, u_3 \right)$, $0 < u_3 \le 1$, безусловно лучше U^*(рис. 3.4).

Таким образом, множество эффективных векторов $P(W)$ не является компактом.

4. Необходимые условия эффективности

4.1. Необходимое условие эффективности

Пусть стратегия X^0 – эффективная стратегия задачи (1.2), а $b_j = Q_j(X^0)$, $j=1,\ldots,m$, тогда $b_q = \min\limits_{X \in D_q} Q_q(X)$, $1 \le q \le m$,

где $D_q = \{X \in D \mid Q_j(X) = b_j,\ j=1,\ldots,m,\ j \ne q\}$.

В справедливости данного утверждения предлагаем читателю убедиться самостоятельно.

Данное свойство является необходимым условием эффективности и называется минимальным свойством эффективных стратегий. Оно позволяет в ряде случаев построить множество *P(D)*. Отметим, что использование минимального свойства эффективных стратегий – это лишь первый этап в построении множества *P(D)*.

Пример 4.1.

Построим множество эффективных стратегий *P(D)* для задачи

$Q_1(X) = -2x_1 + x_2 \Rightarrow \min$,

$Q_2(X) = \dfrac{1}{2}x_1 - x_2 \Rightarrow \min$,

$X = (x_1, x_2)$,

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,

$x_1 \le 5$,

$x_2 - x_1 \le 2$,

$x_2 + \dfrac{1}{2}x_1 \le 5$,

$x_2 + 2x_1 \le 11$.

На рисунке 4.1 изображено множество D.

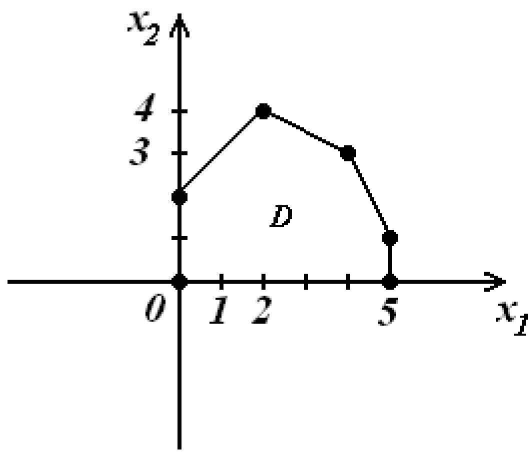


Рисунок 4.1.

Построим образ W множества D при отображении, определяемом функциями $Q_1(X)$ и $Q_2(X)$ (рис. 4.2).

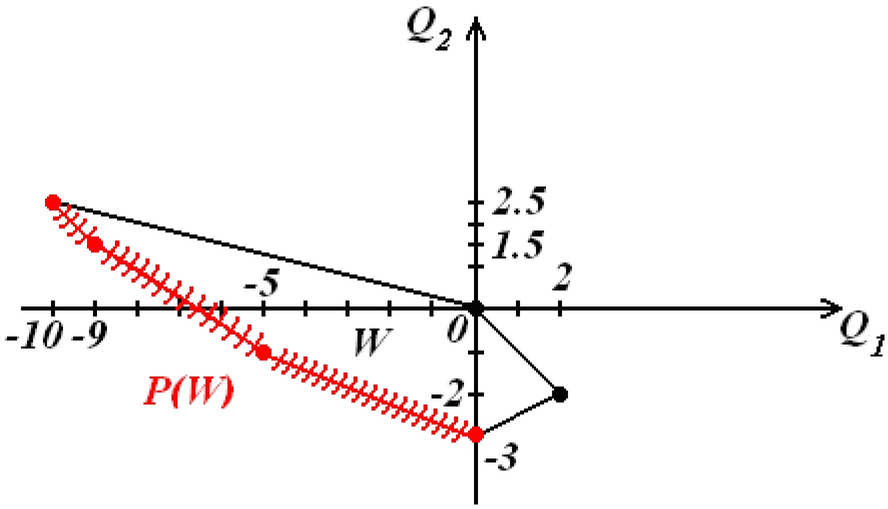


Рисунок 4.2.

Используя минимальное свойство эффективных стратегий, выделим в множестве W подмножество, вектора которого нам нужно будет проверить на эффективность.

Для каждого фиксированного значения Q_1 найдём минимальное значение $Q_2 = b_2$ при условии, что $(Q_1, Q_2) \in W$. Для найденного значения $Q_2 = b_2$ найдём минимальное значение $Q_1 = b_1$, при условии, что $(b_1, b_2) \in W$. Получим множество векторов $\tilde{P}(W)$, отмеченное штриховкой на рисунке 4.2. Множество $P(W) \subseteq \tilde{P}(W)$. Убедимся, что в данной задаче множество $\tilde{P}(W)$ совпадает с множеством эффективных векторов $P(W)$. Действительно, точки, принадлежащие множеству $\tilde{P}(W)$ попарно не сравнимы, так как при увеличении значения критерия Q_2, значение критерия Q_1 убывает. Таким образом, $\tilde{P}(W) = P(W)$. Построим множество $P(D)$, как прообраз множества $P(W)$, (рис. 4.3).

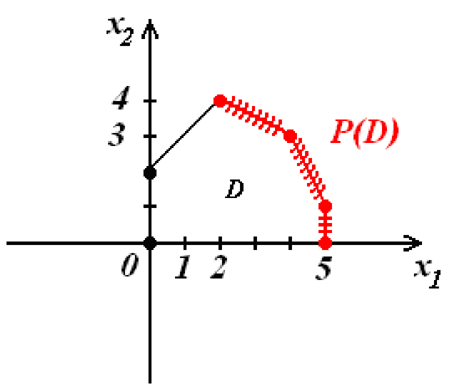


Рисунок 4.3.

4.2. Дифференциальное условие эффективности стратегий

Рассмотрим бикритериальную задачу:

$$Q_1(X) \Rightarrow \min,$$
$$Q_2(X) \Rightarrow \min, \qquad (4.1)$$
$$X \in D,\ D \subseteq R^n,$$

при условии дифференцируемости критериев $Q_1(X)$ и $Q_2(X)$ на допустимом множестве D.

Напомним, что ненулевой вектор $H = (h_1,...,h_n) \in R^n$ задаёт направление убывания функции $Q(X)$ в точке $X^* \in R^n$, если $Q(X^* + \alpha H) < Q(X^*)$ при всех достаточно малых $\alpha > 0$. Множество всех направлений убывания функции $Q(X)$ в точке $X^* \in R^n$ будем обозначать через $U(Q, X^*)$. Справедлива

Лемма 4.1.

Если $< Q'(X^*), H >< 0$, то вектор H является направлением убывания функции $Q(X)$ в точке $X^* \in R^n$.

Рассмотрим систему неравенств относительно переменных $h_1, h_2, ..., h_n$:

$$F_1(h_1, h_2,..., h_n) = < Q_1'(X^*), H >< 0,$$
$$F_2(h_1, h_2,..., h_n) = < Q_2'(X^*), H >< 0, \qquad (4.2)$$
$$H = (h_1, h_2,..., h_n) \in R^n, X^* \in D.$$

Утверждение 4.1.

Если $X^* \in \operatorname{int} D$ и является эффективной (слабоэффективной) стратегией задачи (4.1), то система (4.2) не может иметь решений на всем пространстве R^n.

Доказательство. Доказательство будем проводить методом от противного.

Пусть H^* – решение системы (4.2). Рассмотрим точку $\overline{X} = X^* + \alpha H^*$. Так как $X^* \in \operatorname{int} D$, то существует такое достаточно малое $\alpha > 0$, что, с одной стороны, $\overline{X} \in D$, а с другой стороны, силу леммы 4.1, $H^* \in U(Q_1, X^*) \cap U(Q_2, X^*)$, т.е.

$$Q_1(\overline{X}) < Q_1(X^*),$$
$$Q_2(\overline{X}) < Q_2(X^*).$$

Получили противоречие с тем, что $X^* \in P(D)(S(D))$. Следовательно, система уравнений (4.2) не может имеет решений на R^n. ■

Выведем необходимые условия эффективности (слабой эффективности) стратегии $X^* \in \operatorname{int} D$ в задаче (4.1) при условии дифференцируемости функций $Q_1(X)$ и $Q_2(X)$ на множестве D.

Функции $F_1(h_1, h_2, ..., h_n)$, $F_2(h_1, h_2, ..., h_n)$, определённые в (4.2), являются линейными, и, стало быть, они выпуклы на R^n. Тогда, учитывая утверждение 4.1 и теорему Фана, получаем, что найдутся числа $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, не равные нулю одновременно и такие, что выполняется следующее неравенство:

$$\lambda_1 F_1(h_1, h_2, ..., h_n) + \lambda_2 F_2(h_1, h_2, ..., h_n) \geq 0,$$

для любых $h_1, h_2, ..., h_n$ из R, которое в силу (4.2) может быть переписано в виде

$$< \lambda_1 Q_1'(X^*) + \lambda_2 Q_2'(X^*), H > \geq 0, \text{ для всех } H \in R^n. \tag{4.3}$$

Рассмотрим несколько случаев, определяемых соотношением между λ_1 и λ_2 в неравенстве (4.3).

Пусть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$. Тогда $< Q_2'(X^*), H > \geq 0$, для любого $H \in R^n$, откуда при $H = -Q_2'(X^*) \neq 0$ получаем

$$-\| Q_2'(X^*) \|^2 \geq 0.$$

Последнее неравенство означает, что $Q_2'(X^*) = 0$. Таким образом, при $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ имеем $Q_2'(X^*) = 0$.

Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, то аналогично убеждаемся в справедливости равенства $Q_1'(X^*) = 0$.

Рассмотрим случай, когда $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Если $Q_1'(X^*) \neq 0$, $Q_2'(X^*) \neq 0$, то, полагая $H = -\lambda_1 Q_1'(X^*) - \lambda_2 Q_2'(X^*)$, из (4.3) находим, что $-\| \lambda_1 Q_1'(X^*) + \lambda_2 Q_2'(X^*) \|^2 \geq 0$, откуда следует справедливость равенства

$$\lambda_1 Q_1'(X^*) + \lambda_2 Q_2'(X^*) = 0.$$

Положив $\lambda = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ приходим к соотношению:

$$Q_2'(X^*) = -\lambda Q_1'(X^*), \lambda > 0.$$

Таким образом, суммируя вышесказанное, получаем, что если точка $X^* \in \operatorname{int} D$ и является эффективной (слабоэффективной) стратегией для задачи (4.1), где функции $Q_1(X)$ и $Q_2(X)$ дифференцируемы на множестве D, то должно выполняться хотя бы одно из следующих условий:

1. $Q_1'(X^*) = 0$,
2. $Q_2'(X^*) = 0$,
3. $Q_2'(X^*) = -\lambda Q_1'(X^*)$, $\lambda > 0$.

Данный результат позволяет исключать из множества D заведомо неэффективные стратегии и тем самым, выделять для дальнейшего анализа подмножество $\tilde{D}$ множества D. Проиллюстрируем данный подход к построению эффективных стратегий на следующем примере.

Пример 4.2.

Найти множество эффективных стратегий $P(D)$, используя необходимые условия эффективности, в следующей задаче:

$Q_1(X) = x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow \min$,

$Q_2(X) = 2 - x_1 - x_2 \Rightarrow \min$,

$0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1.$

Во-первых, в силу теоремы 2.3 эффективные стратегии в задаче существуют.

Отметим сразу, что точки $X^1 = (0,0)$ и $X^2 = (1,1)$ являются эффективными в силу утверждения 3, так как в точке $X^1 = (0,0)$ достигается единственный минимум функции $Q_1(X)$, а в точке X^2 – единственный минимум функции $Q_2(X)$ на множестве D.

Исключим из множества D точки (стратегии), не удовлетворяющие необходимому условию эффективности. Для этого найдём градиенты функций $Q_1(X)$, $Q_2(X)$:

$$Q_1'(X) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix},\ Q_2'(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяем, что внутренние точки множества D, удовлетворяющие хотя бы одному из условий 1) – 3) (а именно условию 3) образуют множество

$$G_0 = \{X = (x_1, x_2) \in R^2 \mid 0 < x_1 < 1,\ x_2 = x_1\}.$$

Таким образом, множество $\tilde{D}$, которое следует подвергнуть дальнейшему анализу на предмет выделения эффективных стратегий, имеет вид:

$\tilde{D} = (G_0 \cup \partial D) \setminus \{X^1, X^2\}$,

где $\partial D = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$,

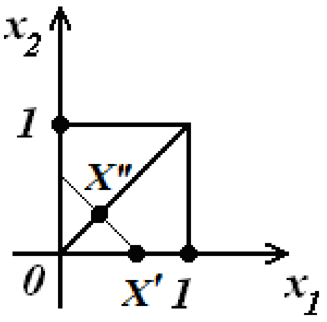
$G_1 = \{X = (x_1, x_2) \in R^2 \mid 0 \le x_1 \le 1, x_2 = 0\}$,

$G_2 = \{X = (x_1, x_2) \in R^2 \mid 0 \le x_1 \le 1, x_2 = 1\}$,

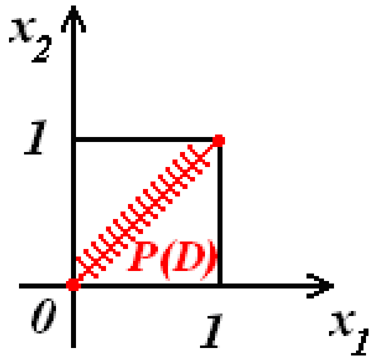
$G_3 = \{X = (x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 = 0,\ 0 \le x_2 \le 1\}$,

$G_4 = \{X = (x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 = 1,\ 0 \le x_2 \le 1\}$.

Рассмотрим на линии уровня функции $Q_2(X)$ точку $X' = (x, 0)$, $0 \le x \le 1$, принадлежащую множеству G_1 и точку $X'' = \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right)$, $0 \le x \le 1$, принадлежащую множеству G_0 (рис. 4.4а). Значения функции $Q_2(x)$ в этих точках равны $Q_2(X')=Q_2(X'')$. Вычисляя значения $Q_1(X)$ в точках X' и X'', получаем, что $Q_1(X'')<Q_1(X')$, откуда следует, что стратегия X'' безусловно лучше стратегии X'. Следовательно, точки множества G_1 не могут быть эффективными. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что точки множеств G_2, G_3 и G_4 также не могут быть эффективными.



а)



б)

Рисунок 4.4.

Таким образом, остаётся множество

$G=G_0\cup\{X^1,X^2\}=\{X=(x_1,x_2)\in R^2\,|\,0\le x_1\le 1,\ x_1=x_2\}$.

Рассмотрим функции $Q_1(X)$, $Q_2(X)$ на множестве G. Вводя обозначение $t=x_1=x_2$, представим их в виде $Q_1(X)=f_1(t)=2t^2$, $Q_2(X)=f_2(t)=2-2t$, $X\in G$, $t\in[0,1]$. Поскольку функция $f_1(t)$ строго монотонно возрастает, а функция $f_2(t)$ строго монотонно убывает при $t\in[0,1]$, то ни для одной стратегии $X\in G$ в этом множестве не существует безусловно лучшей стратегии. Следовательно, любые две стратегии из G несравнимы. Если теперь предположить, что для стратегии $X\in G$ существует безусловно лучшая стратегия $X'\in D\setminus G$, то выбирая, также как и выше, на линии уровня функции $Q_2(X)$ точки $X'=(x_1',\,x_2')$ и $X''=\left(\dfrac{x_1'+x_2'}{2},\dfrac{x_1'+x_2'}{2}\right)\in G$, получаем, что стратегия X'' безусловно лучше стратегии X' и, стало быть, X'' безусловно лучше X, но $X,X''\in G$ и они несравнимы. Следовательно, для любой стратегии $X\in G$ в множестве D не существует безусловно лучшей стратегии и $P(D)=G$ (рис. 4.4б).

5. Скаляризация векторного критерия

5.1. Метод уступок

В этом разделе мы рассмотрим подход к решению многокритериальной задачи оптимизации (1.2), при котором исходная задача сводится к решению однокритериальных задач. Такой подход называется скаляризацией векторного критерия.

В первом рассмотренном нами способе построения эффективных стратегий множество $D(j)$, для некоторого j $(1 \le j \le m)$ может оказаться состоящим лишь из одной точки, что означает, что последующие критерии уже не будут участвовать в формировании решения задачи. Данную проблему помогает избежать метод последовательных уступок.

Будем считать, что критерии задачи (1.2) упорядочены по важности, при этом первому по важности критерию присвоен первый номер, второму – второй и т.д.

Пусть $D_0 = D$ и Q_1^* – минимальное значение критерия $Q_1(X)$ для задачи:

$Q_1(X) \Rightarrow \min$,

$X \in D_0$, при условии, что решение данной задачи существует.

Пусть Q_j^* – минимальное значение критерия $Q_j(X)$ для задачи:

$$Q_j(X) \Rightarrow \min, \qquad (5.1)$$

$$X \in D_{j-1},$$

где $D_{j-1} = \{X \in D_{j-2} \mid Q_{j-1}(X) \le Q_{j-1}^* + \Delta Q_{j-1}\}$ при условии, что решение каждой задачи (5.1) при $j = 2,...,m$ существует. Здесь $\Delta Q_{j-1} > 0$ – уступка, т.е. величина допустимого увеличения значения критерия ($j-1$)-ой задачи, $j = 2,...,m$. Покажем, что если решение $X^*(m)$ последней из задач вида (5.1) единственно, то оно будет эффективной стратегией задачи (1.2).

Действительно, если предположить, что в множестве D существует стратегия $X(m)$ безусловно лучшая стратегия $X^*(m)$, то должна выполняться система неравенств:

$$Q_1(X(m)) \le Q_1(X^*(m)),$$

$$Q_2(X(m)) \le Q_2(X^*(m)),$$

$$...$$

$$Q_m(X(m)) \le Q_m(X^*(m)),$$

причём хотя бы одно из них должно быть строгим. Так как точка (стратегия) $X^*(m) \in D_{m-1}$, то $Q_j(X^*(m)) \le Q_j^* + \Delta Q_j$, $j = 1,...,m-1$, и, следовательно, точка $X(m)$ также принадлежит множеству D_{m-1}.

Если теперь $Q_m(X(m)) < Q_m(X^*(m))$, то данный факт противоречит тому, что $X^*(m)$ – решение задачи (5.1) при $j = m$, а если $Q_m(X(m)) = Q_m(X^*(m))$, то это противоречит единственности решения указанной задачи.

Таким образом, в случае единственности решения задачи (5.1) при $j = m$, получаем эффективную стратегию задачи (1.2).

Введение уступки по одному из критериев даёт возможность уменьшить значение другого критерия, а сама величина уступки показывает «цену» подключения следующего критерия, позволяя управлять ходом построения решения задачи (1.2).

5.2. Аддитивная функция скаляризации

Пусть для набора λ_j, $j = 1,...,m$, выполняются условия:

$$\lambda_j \geq 0,\ j = 1,...,m,$$
$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1. \tag{5.2}$$

В качестве скалярного критерия выберем аддитивную функцию

$$Q(X) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j Q_j(X), \tag{5.3}$$

и рассмотрим задачу

$$Q(X) \Rightarrow \min, \tag{5.4}$$
$$X \in D.$$

В дальнейших рассуждениях нам потребуется теорема Фана. Для её формулировки напомним следующие определения.

Функция $Q(X)$, определенная на выпуклом множестве $D \subseteq R^n$, называется выпуклой, если

$$Q(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) \leq \lambda Q(X^1) + (1-\lambda)Q(X^2) \tag{5.5}$$

при всех $X^1, X^2 \in D$, $\lambda \in [0,1]$. Если при всех $X^1, X^2 \in D$, $X^1 \neq X^2$, $\lambda \in (0,1)$, неравенство (5.5) выполняется как строгое, то функция $Q(X)$ называется строго выпуклой.

Функция $Q(X)$, определенная на выпуклом множестве $D \subseteq R^n$, называется сильно выпуклой с константой $\theta > 0$, если

$$Q(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) \leq \lambda Q(X^1) + (1-\lambda)Q(X^2) - \theta\lambda(1-\lambda)\| X^1 - X^2 \|^2$$

при всех $X^1, X^2 \in D$, $\lambda \in [0,1]$.

Если функция $F(X) = -Q(X)$, определённая на выпуклом множестве D, является выпуклой, то $Q(X)$ называется вогнутой функцией. Если функция $F(X) = -Q(X)$, строго (сильно) выпуклая функция на выпуклом множестве D, то $Q(X)$ строго (сильно) вогнутая функция на этом множестве.

Сильно выпуклая (вогнутая) функция является строго выпуклой (вогнутой).

Теорема 5.1. (Фана)

Пусть функции $Q_j(X)$, $j = 1,...,m$ – выпуклые функции, заданные на выпуклом множестве $D \subseteq R^n$. Если система неравенств

$$Q_j(X) < 0, \ j = 1,...,m \tag{5.6}$$

не имеет решения на множестве D, то существуют числа $y_j \geq 0$, $j = 1,...,m$, не обращающиеся в ноль одновременно, такие что

$$\sum_{j=1}^{m} y_j Q_j(X) \geq 0, \ \forall X \in D. \tag{5.7}$$

При доказательстве теоремы 2.3 мы установили, что решение задачи (5.4) с критерием определённым по формуле (5.3), где $\lambda_j > 0$, $j = 1,...,m$ и удовлетворяют второму из условий (5.2), является эффективной точкой. Рассмотрим обратную к ней теорему.

Теорема 5.2.

Пусть в задаче (1.2) функции $Q_j(X)$ – выпуклые функции, заданные на выпуклом множестве D, и стратегия X^0 – слабоэффективная. Тогда, найдётся такой набор чисел λ_j, удовлетворяющих условиям (5.2), что решение задачи (5.4) достигается в точке X^0.

Доказательство. Рассмотрим систему неравенств

$$Q_j(X) - Q_j(X^0) < 0, \ j = 1,...,m.$$

В силу того, что X^0 – слабоэффективная стратегия задачи (1.2) данная система не может иметь решений на множестве D. Следовательно, по теореме Фана найдётся такой набор $y_j \geq 0$, $j = 1,...,m$, не обращающихся в ноль одновременно, что

$$\sum_{j=1}^{m} y_j (Q_j(X) - Q_j(X^0)) \geq 0, \ \forall X \in D. \tag{5.8}$$

Обозначим $y = \sum_{j=1}^{m} y_j$. В силу того, что хотя бы одно из $y_j \neq 0$, получаем, что $y > 0$. Введём в рассмотрение величины $\lambda_j = \dfrac{y_j}{y}$, $j = 1,...,m$. Нетрудно видеть, что λ_j удовлетворяют условиям (5.2).

Поделив обе части неравенства (5.8) на y, получим

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j Q_j(X) \geq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j Q_j(X^0), \forall X \in D,$$

что с учётом (5.3) приводит к неравенству

$Q(X) \ge Q(X^0), \forall X \in D,$

означающему, что X^0 является решением задачи (5.4). ■

Теорема справедлива и для случая, когда $X^0 \in P(D)$, так как $P(D) \subseteq S(D)$.

Рассмотрим пример, в котором один из критериев не является выпуклой функцией, что не позволяет построить всё множество $P(D)$ с использованием процедуры скаляризации векторного критерия.

Пример 5.1.

Найти множество $P(D)$ задачи:

$$Q_1(x) = -x^2 + 2x + 3 \Rightarrow \min,$$

$$Q_2(x) = \frac{3}{2}x \Rightarrow \min, \tag{5.9}$$

$$x \in [0,3].$$

Для решения задачи (5.9) нам потребуются следующие сведения.

Точка X выпуклого множества D называется крайней, если её нельзя представить в виде $X = \lambda X^1 + (1-\lambda)X^2$, $X^1, X^2 \in D$, $X^1 \ne X^2$, $0 < \lambda < 1$.

Известно, что строго вогнутая функция может достигать своего минимального значения только в крайних точках выпуклого множества D, на котором она определена.

На рисунке 5.1 изображены графики функций $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$.

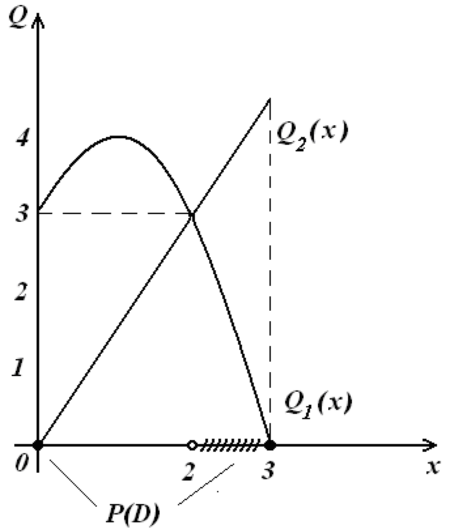


Рисунок 5.1.

Нетрудно видеть, что множество эффективных стратегий $P(D)=\{0\} \cup (2,3]$.

Действительно, точки $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ являются эффективными стратегиями рассматриваемой задачи в силу теоремы. Для каждой стратегии $x \in (0,2]$

стратегия x_1 является безусловно лучшей, а для любой стратегии $x_2 = (2,3)$ в множестве $[0,3]$ не существует безусловно лучшей стратегии.

Запишем скалярный критерий:

$$Q(x) = \lambda(-x^2 + 2x + 3) + \frac{3}{2}(1 - \lambda)x$$

и рассмотрим задачу

$$Q(X) \Rightarrow \min,$$

$$x \in [0,3].$$

При $\lambda = 0$ функция $Q(x)$ является линейной функцией и достигает своего минимума в точке x_1. При $\lambda \neq 0$ функция $Q(x)$ является строго вогнутой функцией, заданной на выпуклом множестве D, поскольку она является сильно вогнутой функцией. Следовательно, функция $Q(x)$ может достигать своего минимума только в крайних точках множества D, в нашей задаче это точки x_1 и x_2.

Таким образом, решение скалярной задачи, зависящее от λ, будет иметь вид

$$x(\lambda) = \begin{cases} 0, \ 0 \le \lambda < \dfrac{3}{5}, \\ 3, \ \dfrac{3}{5} \le \lambda \le 1, \end{cases}$$

и мы получаем только две точки из множества эффективных стратегий $P(D)$.

5.3. Скаляризация векторного критерия с использованием функции максимума

Рассмотрим ещё один способ скаляризации векторного критерия, в котором в качестве скалярной функции выбирается функция

$$Q(X) = \max_{j=1,\dots,m} \{\lambda_j Q_j(X)\}, \qquad (5.10)$$

где λ_j удовлетворяют условиям (5.2).

Теорема 5.3.

Если задача (5.4), где функция $Q(X)$ задаётся соотношением (5.10) при $\lambda_j > 0$, $j = 1,\dots,m$, удовлетворяющих второму из условий (5.2), имеет решение, то это решение – слабоэффективная стратегия. Если решение единственно, то стратегия – эффективная.

Доказательство. Пусть задача (5.4) имеет решение $X^0 = \arg\min_{X \in D} Q(X)$.

Покажем, что $X^0 \in S(D)$.

Доказательство будем проводить методом от противного.

Предположим, что $X^0 \notin S(D)$, то есть существует такое $X \in D$, что выполняются следующие неравенства:

$Q_j(X) < Q_j(X^0)$, $j = 1,...,m$.

Домножим каждое из этих неравенство на $\lambda_j > 0$, тогда

$$\max_{j=1,...,m} \lambda_j Q_j(X) < \max_{j=1,...,m} \lambda_j Q_j(X^0),$$

то есть $Q(X) < Q(X^0)$, что противоречит тому, что X^0 является решением задачи.

Таким образом, X^0 является слабоэффективной стратегией.

Пусть теперь X^0 – единственное решение задачи. Покажем, что $X^0 \in P(D)$.

Доказательство также будем проводить методом от противного. Пусть X^0 не является эффективной стратегией. Это означает, что существует стратегия $X \in D$ такая, что выполняются условия

$Q_j(X) \le Q_j(X^0)$, $j = 1,...,m$, $j \ne q$, где $1 \le q \le m$,

$Q_q(X) < Q_q(X^0)$.

Домножая каждое из этих неравенств на $\lambda_j > 0$, учитывая формулу (5.10), получим, что для точек X и X^0 возможны два случая:

1. $Q(X) < Q(X^0)$, что противоречит тому, что X^0 – решение задачи (5.4).
2. $Q(X) = Q(X^0)$, что противоречит единственности решения задачи (5.4).

Итак, X^0 – эффективная стратегия. ■

Рассмотрим обратную теорему (5.3).

Теорема 5.4.

Пусть для задачи (1.2) $X^0 \in S(D)$ и известно, что $Q_j(X^0) > 0$, $j = 1,...,m$. Тогда найдутся такие λ_j, $j = 1,...,m$, удовлетворяющие условиям (5.2), что решение задачи (5.4), где функция $Q(X)$ задаётся соотношением (5.10) достигается в точке X^0.

Доказательство. Выберем $y_j = \dfrac{1}{Q_j(X^0)}$, $j = 1,...,m$, и пусть $y = \sum_{j=1}^{m} y_j$. В силу условий теоремы $y > 0$.

Пусть $\lambda_j = \dfrac{y_j}{y}$, $j = 1,...,m$. Данный набор λ_j, $j = 1,...,m$, удовлетворяет условиям (5.2).

Значение функции $Q(X)$, задаваемой соотношением (5.10), в точке X^0 равно:

$$Q(X^0) = \max_{j=1,\dots,m} \left\{ \frac{1}{y} \right\} = \frac{1}{y}.$$

Возьмём теперь любую точку $X \in D$. Так как X^0 – слабоэффективная стратегия, то для точка X существует такое значение q, $1 \le q \le m$, что выполняется неравенство $Q_q(X) \ge Q_q(X^0)$. Таким образом $Q(X) = \max\limits_{j=1,\dots,m} \left\{ \frac{y_j}{y} Q_j(X) \right\} \ge \frac{1}{y}$, что доказывает, что в точке X^0 достигается минимальное значение функции $Q(X)$, задаваемой соотношением (5.10) на множестве D, т.е. X^0 является решением задачи (5.4). ■

Итак, мы рассмотрели наиболее распространённые способы скаляризации векторного критерия. Существуют и другие подходы сведения многокритериальной задачи к задаче с одним критерием.

6. Приближенное решение многокритериальных задач

6.1. Приближенно эффективные стратегии

Построение всего множества эффективных стратегий многокритериальной задачи является достаточно сложной проблемой. Поэтому на практике часто пытаются упростить исходную задачу, рассматривая вместо всего допустимого множества D некоторую его конечную аппроксимацию.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{gathered} Q_1(X) \Rightarrow \min, \\ \ldots \\ Q_m(X) \Rightarrow \min, \\ X \in D_N, \end{gathered} \tag{6.1}$$

$D_N \subset D$, где D_N – конечное множество, число элементов которого $|D_N| = N$.

Множества вида D_N будем называть аппроксимирующим множеством или сеткой. Также как и для задачи (1.2) введём понятие безусловно лучшей и эффективной стратегии для задачи (6.1).

Определение 6.1.

Стратегия $X \in D_N$ безусловно лучше стратегии $X' \in D_N$, если

$Q_j(X) \le Q_j(X')$, $j = 1,...,m$, $j \ne q$, $1 \le q \le m$,

$Q_q(X) < Q_q(X')$.

Определение 6.2.

Стратегия $X^* \in D_N$ называется эффективной стратегией задачи (6.1), если в множестве D_N не существует стратегии безусловно лучшей X^*.

Множество всех эффективных стратегий задачи (6.1) будем обозначать через $P(D_N)$.

Аналогично понятию эффективного вектора задачи (1.2) вводится понятие эффективного вектора задачи (6.1). Множество всех эффективных векторов задачи (6.1) обозначим через $P(W_N)$, где W_N – образ множества D_N при отображении, определяемом функциями $Q_j(X)$, $j = 1,...,m$.

Определение 6.3.

Приближенным решением задачи (1.2) будем называть множество $P(D_N)$ и (или) множество $P(W_N)$, т.е. множество эффективных стратегий и (или) множество эффективных векторов задачи (6.1).

При этом элементы множества $P(D_N)$ будем называть приближённо эффективными стратегиями задачи (1.2).

Подчеркнём здесь, что введённое нами понятие приближенного решения задачи (1.2) существенным образом зависит от структуры аппроксимирующего множества D_N.

Множество D_N можно задавать по-разному. Один из способов его задания состоит в том, что число N точек сетки фиксируется заранее, а сама сетка D_N формируется, тем или иным образом, из N точек, принадлежащих множеству D.

Мы рассмотрим одну из итерационных (динамических) процедур задания множества D_N. Число точек сетки j-ой итерации будет обозначать через N_j, а саму сетку – D_{N_j}, $j=1,2....$ При этом будем предполагать, что выполнено условие

$$D_{N_j} \subset D_{N_{j+1}},\ j=1,2,.... \tag{6.2}$$

Конкретная реализация описанной процедуры будет определяться числом точек первой итерации N_1, соотношением между числом точек j-той итерации N_j и числом точек $(j+1)$-ой итерации N_{j+1}, способом задания точек на каждой j-той итерации, $j=1,2,...$, и правилом завершения формирования сетки, т.е., по сути дела, определением числа точек N аппроксимирующего множества D_N.

Отметим, что число N элементов аппроксимирующего множества D_N напрямую зависит от тех требований, которые предъявляются к приближенному решению многокритериальной задачи (1.2). Мы будем считать, что $N=N_s$, где s – номер последней итерации динамической процедуры задания аппроксимирующего множества.

Пусть $P=\{X=(x_1,...,x_n)\in R^n \mid a_i \le x_i \le b_i,\ a_i<b_i, i=1,...,n\}$, $K=\{X=(x_1,...,x_n)\in R^n \mid 0\le x_i \le 1, i=1,...,n\}$ и будем считать, что $D=P$, где D допустимое множество задачи (1.2).

6.2. Способы задания аппроксимирующего множества

Приведём в качестве примеров задания аппроксимирующего множества, удовлетворяющего условию (6.2), две сетки. Данные сетки задаются на множестве K, а переход к множеству D осуществляется по известной формуле:

$$x_i = a_i + (b_i - a_i)x_i',\ i=1,...,n, \tag{6.3}$$

где $X=(x_1,x_2,...,x_n)\in D$, $X'=(x_1',x_2',...,x_n')\in K$.

Число точек на каждой j-той итерации первой сетки равно $N_j = M_j^n$, где $M_{j+1}=2M_j-1$, $j=1,2,...$, $N_1=M_1^n$, M_1 – заданное натуральное число. Точки j-той итерации (элементы множества D_{N_j}) имеют вид:

$$\left(\frac{i_1-1}{M_j-1},\frac{i_2-1}{M_j-1},...,\frac{i_n-1}{M_j-1}\right), \tag{6.4}$$

где $i_1, i_2, ..., i_n$ принимают независимо все значения $1, ..., M_j$.

На рисунке 6.1 показаны точки начальной итерации первой сетки (множества D_{N_1}) со значениями $M_1 = 5$ и $n = 2$.

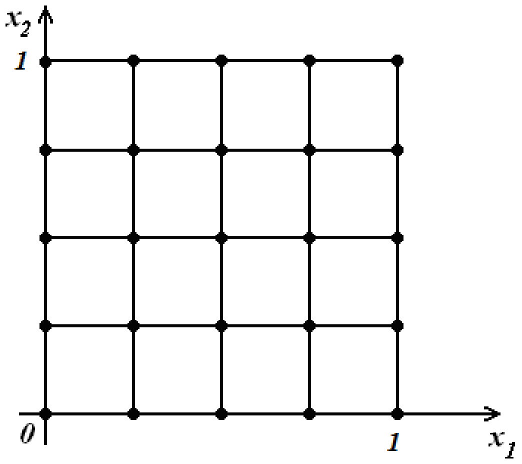


Рисунок 6.1.

Точки j-той итерации второй сетки задаются в виде:

$$\left(\frac{i_1 + 1/2}{M_j}, \frac{i_2 + 1/2}{M_j}, ..., \frac{i_n + 1/2}{M_j} \right), \tag{6.5}$$

где $i_1, i_2, ..., i_n$ принимают независимо все значения $0, 1, ..., M_j - 1$. Здесь число точек на каждой j-той итерации равно $N_j = M_j^n$, где $M_{j+1} = 3M_j$, $j = 1, 2, ...,$ $N_1 = M_1^n$, M_1 – заданное натуральное число.

На рисунке 6.2 приведены точки первой итерации второй сетки, где $M_1 = 4, n = 2$.

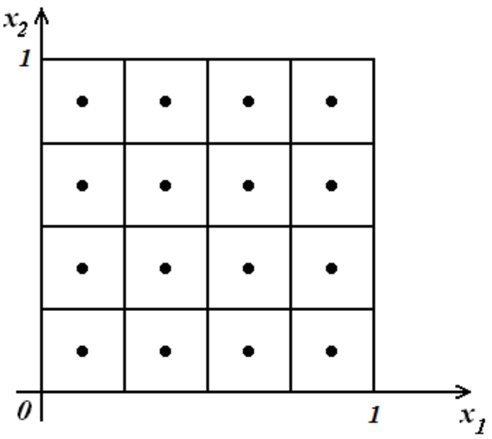


Рисунок 6.2.

Возможны и другие способы задания сеток. Один из них реализует следующую идею. Точки сетки в данном методе выбираются из того условия, что проекции этих точек на каждую координатную ось не совпадали (рис. 6.3). Такой способ задания сетки наиболее эффективен, когда один из критериев задачи существенно зависит только от одного из аргументов, тогда увеличения числа точек сетки не даёт новой информации о поведение критериев задачи.

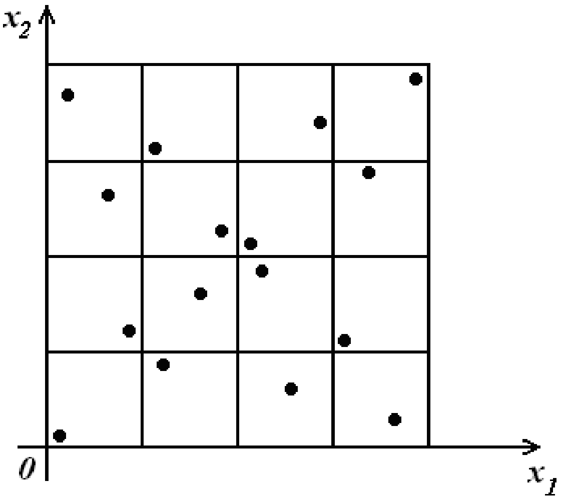


Рисунок 6.3.

Если допустимое множество D задачи (1.2) задаётся помимо ограничений, определяемых множеством P, дополнительно набором функциональных ограничений типа

$$g_k(X) \le 0,\ k = 1,...,m, \tag{6.6}$$

то при задании сетки D_{N_j}, $j = 1,2...$, требуется проверять данные ограничения на выполнимость. Если для точки X', принадлежащей сетке, задаваемой на множестве P, ограничения (6.6) выполняются, то мы включаем данную точку в множество D_{N_j}, в противном случае точка X' отбрасывается.

Пусть $\tilde{D}_{N_1} = D_{N_1}$, а $\tilde{D}_{N_{j+1}} = P(\tilde{D}_{N_j}) \cup (\tilde{D}_{N_{j+1}} \setminus \tilde{D}_{N_j})$, $j = 1,2,...$, где $P(\tilde{D}_{N_j})$ множество эффективных стратегий задачи (6.1), если в ней N заменить на N_j, а D_N на $\tilde{D}_N$.

Допустим теперь, что нам доступен алгоритм отыскания эффективных стратегий задачи вида (6.1), критерии которой заданы на конечном множестве. Если мы будем вести поиск эффективных стратегий на каждой итерации задания аппроксимирующего множества D_N с помощью данного алгоритма, то для его реализации, с учётом того, что $D_{N_j} = \tilde{D}_{N_j}$ и в силу условия (6.2), следует осуществлять указанный поиск на множестве $\tilde{D}_{N_j}$, $j = 1,...,s$, где $D_{N_s} = D_N$. Действительно, так как $\tilde{D}_{N_1} = D_{N_1}$, то на первой итерации мы найдём множество $P(D_{N_1})$, тем самым исключив из множества D_{N_1} все те стратегии, для которых в множестве D_{N_1} найдутся безусловно лучшие. В силу условия (6.2) $D_{N_1} \subset D_{N_2}$ и, следовательно, для любой стратегии $X \in D_{N_2} \setminus \tilde{D}_{N_2}$ в множестве D_{N_1} найдётся безусловно лучшая стратегия. Таким образом, на второй итерации задания аппроксимирующего множества поиск эффективных стратегий, действительно, следует осуществлять только на множестве $\widetilde{D}_{N_2}$. Повторяя проведённые рассуждения для $j = 2,...,s$ и, учитывая, что $D_{N_1} \subset D_{N_2} \subset ... \subset D_{N_s} = D_N$ мы найдём множество $P(D_N)$.

Ещё раз подчеркнём, что описанная процедура может быть реализована при наличии алгоритма, позволяющего построить множество эффективных стратегий задачи вида (6.1), когда её критерии заданы на конечном множестве.

6.3. Метод помеченных точек

Перейдём к описанию одного из таких алгоритмов: метода помеченных точек.

Данный метод позволяет определить множество приближённо эффективных стратегий $P(\widetilde{D}_{N_j})$ задачи (6.1), если в качестве N выбрать N_j, а в качестве D_N – $\widetilde{D}_{N_j}$, $1 \le j \le s$.

Пусть точки $\overline{X}$ и X' принадлежат $\widetilde{D}_{N_j}$. Будем отражать тот факт, что стратегия $\overline{X}$ безусловно лучше стратегии X' знаком «$\}$».

Метод помеченных точек основан на сравнии точек множества $\widetilde{D}_{N_j}$. На каждой итерации метода формируется множестнево P_i, $i = 1,...,k$, где k – число итераций метода, причём множество $P_1 = \widetilde{D}_{N_j}$.

На i-той итерации метода из множества P_i выбирается произвольная непомеченная точка $\overline{X}$ (в множестве P_1 все точки не помечены). Точка $\overline{X}$ поочерёдно сравнивается со всеми остальными точками множества P_i.

Пусть X' текущая точка множества P_i, подлежащая сравнению с точкой $\overline{X}$. В результате сравнения точек $\overline{X}$ и X' может возникнуть одна из трёх ситуаций.

Ситуация 1: $\overline{X}$ и X' не сравнимы.

Ситуация 2: $\overline{X} \} X'$.

Ситуация 3: $X' \} \overline{X}$.

Если сложилась ситуация 2, то точка X' удаляется из множества P_i.

В случае осуществления ситуации 3, точка $\overline{X}$ исключается из множества P_i, а в качестве новой точки $\overline{X}$ выбирается точка X'.

После реализации одной из ситуаций 1-3 осуществляется переход к сравнению точки $\overline{X}$ со следующей точкой множества P_i из множества точек не подвергавшихся сравнению.

Если все точки множества P_i уже были подвергнуты описанной операции сравнения, то точка $\overline{X}$, которая при этом образовалась, помечается, а все не удалённые точки этого множества образуют множество P_{i+1}, и мы переходим к $(i+1)$-ой итерации.

Отметим здесь, что в процессе реализации описанной процедуры i-ой итерации метода точка $\overline{X}$ может меняться в силу возникновения ситуации 3.

Так как множество P_1 конечно, то продолжая описанную процедуру, мы за конечное число шагов получим множество, которое содержит только помеченные точки. Указанное множество и обозначено через P_k. При этом выполняется включение:

$P_k \subseteq P_{k-1} \subseteq \ldots \subseteq P_1$.

Учитывая, что $\widetilde{D}_{N_j} = P_1$ и процедуру формирования помеченных точек, получаем, что множество эффективных стратегий задачи (6.1), где вместо N нужно выбрать N_j, а вместо D_N выбрать $\widetilde{D}_{N_j}$, совпадает с множеством P_k.

На рисунке 6.4 приведён псевдокод алгоритма построения множества приближенно эффективных стратегий задачи (1.2) при итерационном (динамическом) задании аппроксимирующего множества D_N, где в качестве ядра выступает метод помеченных точек. Символом «$\leftarrow$» обозначена операция присваивания.

Представленный алгоритм описывает только идею (глобальные шаги), поэтому в каждом конкретном случае непосредственная реализация алгоритма может отличаться от приведённой схемы.

Для метода помеченных точек можно также реализовать параллельную процедуру, используя принцип «разделяй и властвуй». Принцип заключается в том, что по исходной задаче строится набор подобных ей задач меньшего размера. Решения каждой из подзадач объединяют с помощью процедуры слияния, формируя решение исходной задачи.

Итак, исходное множество $\widetilde{D}_{N_j}$ разбивается на подмножества, тем самым порождая несколько независимых подзадач. Для каждого подмножества с помощью процедуры метода помеченных точек строится множество приближенно эффективных стратегий. Для объединения полученных множеств в единое множество применяется метод помеченных точек в качестве процедуры слияния.

$\widetilde{D}_{N_1} \leftarrow D_{N_1}$

для j ***от*** 1 ***до*** $s-1$

$P_1 \leftarrow \widetilde{D}_{N_j}$

$l \leftarrow 1$

пока *содержит непомеченные точки* ***выполнять***

$P_{l+1} \leftarrow P_l$

выбрать произвольную непомеченную точку X' *из* P_l

$\overline{X} \leftarrow X'$

пронумеровать точки множества P_l *за исключением* $\overline{X}$ *номерами от 1 до* $|P_l|-1$

для i ***от*** 1 ***до*** $|P_l|-1$

если $\overline{X} \} X(i)$ ***то***

$P_{l+1} \leftarrow P_{l+1} \setminus \{X(i)\}$

иначе если $X(i) \} \overline{X}$ ***то***

$P_{l+1} \leftarrow P_{l+1} \setminus \{\overline{X}\}$

$\overline{X} \leftarrow X(i)$

конец

если $\overline{X}$ *непомечена* ***то***

пометить $\overline{X}$

$l \leftarrow l+1$

конец

$k \leftarrow l$

конец

Рисунок 6.4.

Пример 6.1.

$$Q_1(x) = (x-9)^2 - 2 \Rightarrow \min,$$

$$Q_2(x) = 6 - \frac{1}{2}x \Rightarrow \min,$$

$$x \in D,\ D = [0,16].$$

Требуется построить множество $P(D_{N_2})$, где в качестве сетки D_{N_2} выступает сетка, задаваемая с помощью формулы (6.4), а $N_1 = 5$.

Предлагаем читателю убедиться, что множество эффективных стратегий в данной задаче $P(D) = [9,16]$ (рис. 6.5). На рис. 6.5 изображены фрагменты графиков функций $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, существенные для описания множества $P(D)$.

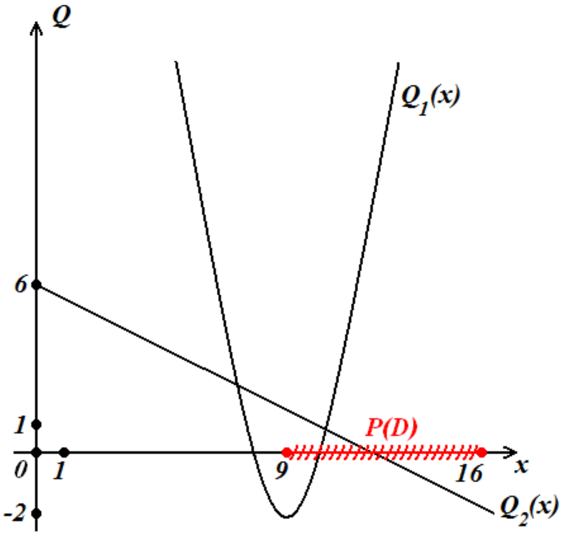


Рисунок 6.5.

Множество $D_{N_1} = \{x_1(1), x_1(2), x_1(3), x_1(4), x_1(5)\}$ (см. рис. 6.6а)), где $x_1(1) = 0$, $x_1(2) = 4$, $x_1(3) = 8$, $x_1(4) = 12$, $x_1(5) = 16$, а $\tilde{D}_{N_1} = D_{N_1}$.

В таблице 6.1 приведены значения функций $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ в точках множества D_{N_1}.

	$x_1(1)$	$x_1(2)$	$x_1(3)$	$x_1(4)$	$x_1(5)$
$Q_1(x)$	79	23	-1	7	47
$Q_2(x)$	6	4	2	0	-2

Таблица 6.1.

Множество $P(\tilde{D}_{N_1})$ будем строить методом помеченных точек.

Множество $P_1 = \tilde{D}_{N_1}$. Выберем произвольную непомеченную точку $\bar{x}$ из множества P_1: $\bar{x} = x_1(1)$. Сравним точки $\bar{x}$ и $x_1(2)$. Так как точка $x_1(2)$ безусловно лучше, чем $\bar{x}$, то в качестве точки $\bar{x}$ примем точку $x_1(2)$, а точку $x_1(1)$ удалим из множества P_1. Теперь сравним точку $\bar{x} = x_1(2)$ со следующей точкой $x_1(3)$ из множества P_1. Для данных точек снова складывается ситуация 3, т.е. $\bar{x}\{x_1(3)$. В этом случае нам следует заменить точку $\bar{x}$ на $x_1(3)$, а точку $x_1(2)$ исключить из множества P_1. Точка $\bar{x} = x_1(3)$ несравнима с точками $x_1(4)$ и $x_1(5)$. Так как в множестве P_1 не осталось непросмотренных точек, и точка $\bar{x} = x_1(3)$ непомечена, то помечаем точку $\bar{x} = x_1(3)$. Множество P_1 всё ещё содержит непомеченные точки, поэтому переходим к следующей итерации метода, где $P_2 = \{x_1(3), x_1(4), x_1(5)\}$. Повторяя процедуру сравнения для точек множества P_2, получим что точки $x_1(3)$ и $x_1(4)$ будут помечены, а точка $x_1(5)$ – нет. Выполним очередную итерацию метода для множества $P_3 = \{x_1(3), x_1(4), x_1(5)\}$. В результате применения процедуры метода получим, что в множестве P_3 все точки окажутся помеченными. Таким образом, множество $P(\widetilde{D}_{N_1}) = P_3$ (см. рис. 6.6б)).

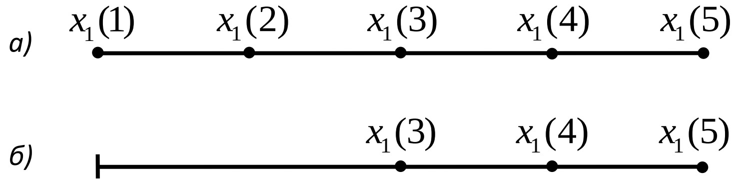


Рисунок 6.6

Перейдём к следующей итерации, для которой $j = 2$, где $N_2 = 9$.

Множество $D_{N_2} = D_{N_1} \cup \{x_2(2), x_2(4), x_2(6), x_2(8)\}$ и $x_2(2i-1) = x_1(i)$, $i = 1,2,3,4,5$, $x_2(2) = 2$, $x_2(4) = 6$, $x_2(6) = 10$, $x_2(8) = 14$. При этом естественно выполняется условие (6.2).

Множество $\widetilde{D}_{N_2}$, будет иметь вид (см. рис. 6.7а)):

$$\widetilde{D}_{N_2} = P(\widetilde{D}_{N_1}) \cup (D_{N_2} \setminus D_{N_1}) = \{x_2(2), x_2(4), x_2(5), x_2(6), x_2(7), x_2(8), x_2(9)\},$$

где $x_2(5) = x_1(3)$, $x_2(7) = x_1(4)$, $x_2(9) = x_1(5)$.

В таблице 6.2 приведены значения функций $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ в точках множества $\widetilde{D}_{N_2}$.

	$x_2(2)$	$x_2(4)$	$x_2(5)$	$x_2(6)$	$x_2(7)$	$x_2(8)$	$x_2(9)$
$Q_1(x)$	47	7	-1	-1	7	23	47
$Q_2(x)$	5	3	2	1	0	-1	-2

Таблица 6.2

Выполняя шаги метода помеченных точек для данного множества получим $P(\widetilde{D}_{N_2}) = \{x_2(6), x_2(7), x_2(8), x_2(9)\}$ (см. рис. 6.7б)). Предлагаем читателю убедиться в этом.

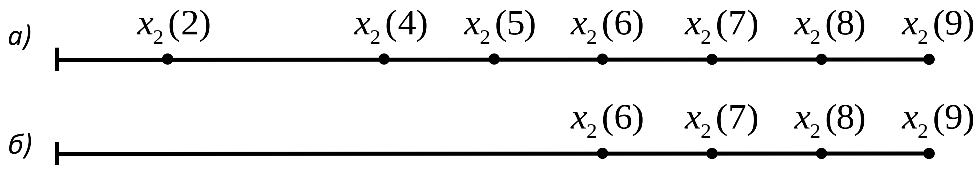


Рисунок 6.7.

7. Вопросы сходимости

Мы рассмотрели алгоритм отыскания приближённо-эффективных точек $P(D_N)$. Теперь естественно ответить на вопрос, будет ли данное множество $P(D_N)$ с ростом N стремиться к множеству эффективных стратегий $P(D)$ и при каких условиях? Данный вопрос является достаточно сложным, мы приведём один из возможных наборов такого рода условий.

Введём понятие специальной ε-окрестности эффективной точки X^0.

Определение 7.1.

Специальной ε-окрестностью эффективной точки $X^0 \in D$ называется множество

$$S(X^0,\varepsilon) = \left\{ X \in D \in R^n \mid Q_j(X) < Q_j(X^0) + \varepsilon, \quad j = 1,...,m, \quad \varepsilon > 0 \right\}. \qquad (7.1)$$

На рис. 7.1 изображены линии уровня функций $Q_i(X)$, где $Q_i(X) = b_i$ и $Q_i(X) = b_i + \varepsilon$, $i = 1,2$, $X = (x_1, x_2) \in R^2$, и множество $S(X^0,\varepsilon)$, $X^0 \in P(D)$, для бикритериальной задачи

$$\begin{aligned} &Q_1(X) \Rightarrow \min, \\ &Q_2(X) \Rightarrow \min, \qquad (7.2) \\ &X \in D = \{X = (x_1, x_2) \in R^2 \mid 0 \le x_i \le 1, \, i = 1,2\}. \end{aligned}$$

Тот факт, что X^0 является эффективной стратегией задачи (7.2) отражён характером расположения соответствующих линий уровня $Q_1(X)$, $Q_2(X)$. На рис. 7.1 знак «+» ставится с той стороны от данной линии уровня, где функция принимает значения большие, чем на этой линии уровня и знак «-» с другой стороны. Подобного рода интерпретация поведения функции будет использована и в дальнейшем.

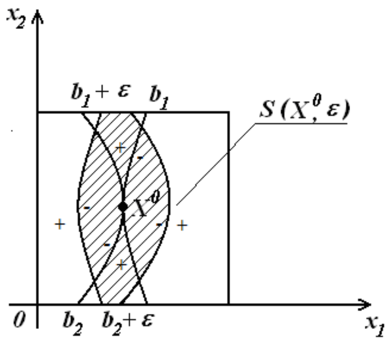


Рисунок 7.1.

Попытаемся теперь сформулировать условия, которые надо наложить на задачу многокритериальной оптимизации (1.2) и её аппроксимирующее множество (допустимое множество задачи (6.1)), задаваемое итерационным (динамическим) способом, чтобы для любых эффективных точек $X^1,...,X^r$ из множества $P(D)$ и заданного $\varepsilon > 0$ можно было бы найти такое N_k, что в каждую специальную $S(X^i,\varepsilon)$, $i=1,...,r$, попала хотя бы одна точка из множества $P(D_{N_k})$.

При этом естественно потребовать, чтобы при $\varepsilon \Rightarrow 0$ специальная ε-окрестность эффективной точки стягивалась в точку, т.е. чтобы она обладала свойством обычной окрестности.

Во-первых, множество $P(D)$ задачи (1.2) должно быть не пустым.

Во-вторых, будем предполагать, что в множестве $P(D)$ не существует двух таких точек, в которых значения всех критериев задачи (1.2) совпадают. Тогда специальная ε-окрестность любой точки $X^0 \in P(D)$ стягивается в точку при $\varepsilon \Rightarrow 0$.

Действительно, точка $X^0 \in S(X^0,\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, Предположим, что существует точка X' из D также принадлежащая $S(X^0,\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, т.е.

$$Q_j(X') < Q_j(X^0) + \varepsilon,\ j=1,...,m. \tag{7.3}$$

Переходя к пределу в (7.3) при $\varepsilon \Rightarrow 0$, получим

$$Q_j(X') \le Q_j(X^0),\ j=1,...,m. \tag{7.4}$$

Так как $X^0 \in P(D)$, то отсюда следует, что $Q_j(X') = Q_j(X^0)$, $j=1,...,m$ и, следовательно, $X' \in P(D)$. Получаем противоречие со сделанным предположением.

Отметим здесь, что если $X^0 \notin P(D)$, то определённая для неё специальная ε-окрестность может иметь весьма специфичный вид и не стягиваться в точку при $\varepsilon \Rightarrow 0$, см. рис. 7.2.

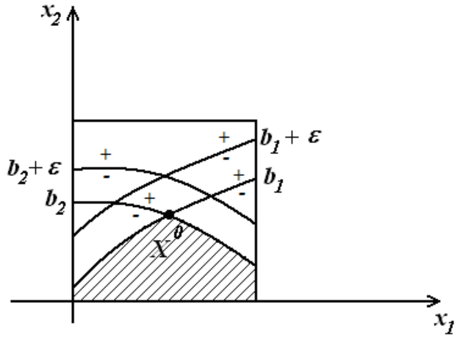


Рисунок 7.2.

Пусть точки множества D_{N_j}, $j=1,2,...$ – это элементы последовательности, которая обладает следующим свойством: для любого $\delta > 0$ существует N_k такое, что для каждой точки $X \in D$ в её δ-окрестности $U(X,\delta)$ найдётся хотя бы одна точка из D_{N_k}, где $U(X^0,\delta) = \{X \in R^n \mid \| X - X_0 \| < \delta\}$. Указанное свойство позволяет зондировать с требуемой точностью всё допустимое множество D задачи (1.2).

Отметим, что данным свойством обладают обе сетки, которые были описаны как примеры задания аппроксимирующего множества задачи (1.2) (допустимого множества задачи (6.1)), если D гиперпараллелепипед в R^n.

Будем считать, что функции $Q_j(X)$, $j=1,...,m$, непрерывны на множестве D, $\operatorname{int} D \neq \varnothing$, и пусть $X^0 \in P(D) \cap \operatorname{int} D$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что при $X \in U(X^0, \delta) \subset D$

$$S(X^i, \varepsilon),\ j=1,...,m, \text{ т.е.} \tag{7.5}$$

$$U(X^0, \delta) \subset S(X^0, \varepsilon), \tag{7.6}$$

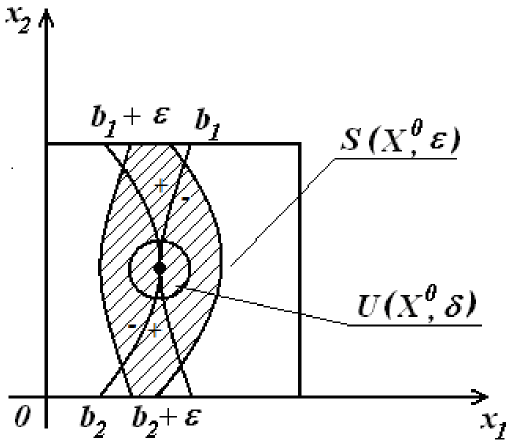


Рисунок 7.3.

Будем считать, что $D = \overline{\operatorname{int} D}$. Тогда, если $X^0 \in P(D) \cap \partial D$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$, что при $X \in U(X^0, \delta_1) \cap D$ будут выполняться соотношения (7.5). Выбирая теперь точку $X' \in U(X^0, \delta_1) \cap D$ и $\delta > 0$ такое, что $U(X', \delta) \subset U(X^0, \delta_1) \cap D$, получаем, что соотношения (7.5) будут выполнены для всех $X \in U(X', \delta)$, откуда следует справедливость включения

$$U(X', \delta) \subset S(X^0, \varepsilon). \tag{7.7}$$

Если выполняется соотношение (7.6) или (7.7), то будем говорить, что объём специальной ε-окрестности эффективной точки положителен, т.е. внутрь этой специальной ε-окрестности можно поместить окрестность достаточно малого радиуса.

Резюмируя вышесказанное, будем предполагать выполненными следующие условия.

Условие 7.1.

Допустимое множество D задачи (1.2) является компактом в R^n, а функции $Q_j(X)$ непрерывны на этом множестве D.

Условие 7.2.

В множестве $P(D)$ не существует двух таких точек, в которых значения всех критериев задачи (1.2) совпадают.

Условие 7.3.

Точки множества D_{N_j}, $j=1,2,...$, являются элементами последовательности, обладающей следующим свойством: для любого $\delta>0$ существует такое N_k, что для каждой точки $X\in D$ в её δ-окрестности, $U(X,\delta)$ найдётся хотя бы одна точка из множества D_{N_k}.

Условие 7.4.

$D=\overline{intD}$, $\operatorname{int} D\neq\varnothing$.

Лемма 7.1.

Если $X^0\in P(D)$, $S(X^0,\varepsilon)$ – её специальная ε-окрестность, $X\in S(X^0,\varepsilon)$ и точка X' из D безусловно лучше X, то $X'\in S(X^0,\varepsilon)$.

Доказательство. Из определения множества $S(X^0,\varepsilon)$ следует, что

$$Q_j(X)<Q_j(X^0)+\varepsilon,\ \varepsilon>0,\ j=1,...,m. \tag{7.8}$$

А так как $X'\}X$, то имеем

$$Q_j(X')\le Q_j(X),\ j=1,...,m, \tag{7.9}$$

где хотя бы одно из неравенств (7.9) выполняется как строгое. Стало быть из (7.8) и (7.9) получаем, что $Q_j(X')<Q_j(X^0)+\varepsilon$, $j=1,...,m$, и, следовательно, $X'\in S(X^0,\varepsilon)$.■

Теорема 7.1.

Пусть выполнены условия 7.1-7.4 и $X^1,...,X^r$ – эффективные точки задачи (1.2), а аппроксимирующее множество этой задачи (допустимое множество задачи (6.1)) задаётся итерационным способом. Тогда для заданного $\varepsilon>0$ найдётся такое N_k, что в каждую специальную ε-окрестность $S(X^i,\varepsilon)$, $i=1,...,r$, попадёт хотя бы одна точка из $P(\tilde{D}_{N_k})$.

Доказательство. Напомним, прежде всего, что $\tilde{D}_{N_k}$ – это множество, на котором происходит поиск эффективных стратегий задачи вида (6.1), где $N=N_k$, $k\ge1$(если $k=1$, то $\tilde{D}_{N_1}=D_{N_1}$) и при $k>1$ множество $\tilde{D}_{N_k}$ состоит из эффективных точек $(k-1)$-ой итерации и точек k-той итерации за исключением точек $(k-1)$-ой итерации.

Из условия 7.1 следует, что множество $P(D)$ задачи (1.2) не пусто.

Из условия 7.4 следует, что объём каждой специальной ε-окрестности $S(X^i,\varepsilon)$ эффективной точки X^i положителен, т.е. выполнено либо соотношение (7.6), либо (7.7). Тогда, в силу условий 7.3 и 7.4, по заданному $\varepsilon>0$ можно найти такое N_k, что в каждом множестве $S(X^i,\varepsilon)$ будет находиться хотя бы одна точка $X^i(N_k)$ множества D_{N_k}, $i=1,...,r$.

При $k=1$ точка $X^i(N_1)\in\widetilde{D}_{N_1}=D_{N_1}$. Положим $X^i_{N_1}=X^i(N_1)$. Если $X^i(N_k)\in\widetilde{D}_{N_k}$, при $k\geq 2$, то положим $X^i_{N_k}=X^i(N_k)$. В случае, когда $X^i(N_k)\notin\widetilde{D}_{N_k}$, в силу задания множества $\widetilde{D}_{N_{k-1}}$, имеем, во-первых, $P(\widetilde{D}_{N_{k-1}})=P(D_{N_{k-1}})$, а, во-вторых, $X^i(N_k)\in D_{N_{k-1}}\setminus P(D_{N_{k-1}})$, $k\geq 2$. Значит, для точки $X^i(N_k)$ в множестве $P(\widetilde{D}_{N_{k-1}})$ должна существовать безусловно лучшая точка $\widetilde{X}^i(N_k)$, принадлежащая $S(X^i,\varepsilon)$ согласно леммы 7.1. В силу задания множества $\widetilde{D}_{N_k}$ она будет принадлежать и этому множеству. В этом случае в качестве точки $X^i_{N_k}$ выберем точку $\widetilde{X}^i(N_k)$, $1\leq i\leq r$.

Итак, по заданному $\varepsilon>0$ найдётся такое N_k, что в каждом множестве $S(X^i,\varepsilon)$ будет находиться хотя бы одна точка $X^i_{N_k}$, $i=1,...,r$, множества $\widetilde{D}_{N_k}$.

Если точка $X^i_{N_k}$, для каких-то значений $i\in\{1,...,r\}$, принадлежит множеству $P(\widetilde{D}_{N_k})$, то для этих значений i теорема доказана.

Если $X^i_{N_k}\notin P(\widetilde{D}_{N_k})$, то для неё в множестве $\widetilde{D}_{N_k}$ должна существовать безусловно лучшая точка, которая в силу леммы 7.1 будет принадлежать $S(X^i,\varepsilon)$. И, если эта точка принадлежит множеству $P(\widetilde{D}_{N_k})$, то доказательство теоремы завершается. Если же это не так, то повторяя вышеприведённые рассуждения, с учётом конечности множества $\widetilde{D}_{N_k}$, находим точку из $P(\widetilde{D}_{N_k})$, принадлежащую $S(X^i,\varepsilon)$.■

Заметим, что если мы перейдём к следующей $(k+1)$-ой итерации при задании аппроксимирующего множества задачи (1.2), то найденная приближенно эффективная точка на -той итерации и принадлежащая специальной ε-окрестности $S(X^i,\varepsilon)$ эффективной точки X^i этой задачи может перестать быть таковой. Но это произойдёт только в том случае, если в множестве $\widetilde{D}_{N_{k+1}}$ найдётся безусловно лучшая точка, которая в силу леммы 7.1, будет принадлежать $S(X^i,\varepsilon)$. Рассуждая также как в конце доказательства теоремы 7.1, получим точку $P(\widetilde{D}_{N_{k+1}})$, принадлежащую $S(X^i,\varepsilon)$, $i\in\{1,2,...,r\}$.

Из сделанного замечания следует, что увеличивая число итераций при задании аппроксимирующего множества задачи (1.2) мы можем получать новые приближенно эффективные точки, лежащие в специальной ε-окрестности $S(X^i,\varepsilon)$ эффективной точки X^i задачи (1.2), $i=1,2,...,r$.

Мы показали, что при заданном значении $\varepsilon>0$ можно найти такую итерацию задания сетки, что в каждую специальную ε-окрестность $S(X^i,\varepsilon)$

эффективной точки X^i задачи (1.2), $i=1,...,r$, попадёт хотя бы одна точка из множества $P(\tilde{D}_{N_k})$.

В силу условия 7.2 специальная ε-окрестность эффективной точки стягивается в точку при $\varepsilon \Rightarrow 0$.

Если теперь мы устремим ε к нулю, т.е. будем задавать последовательность $\{\varepsilon_p\}$ такую, что $\varepsilon_{p+1} < \varepsilon_p$, $p=1,2,...$, то также как и выше может быть доказана

Теорема 7.2.

Пусть выполнены условия 7.1-7.4 и $X^1,...,X^r$ – эффективные точки задачи (1.2), а аппроксимирующее множество этой задачи (допустимое множество задачи (6.1)) задаётся итерационным способом. Тогда для каждого элемента последовательности $\{\varepsilon_p\}$, где $\varepsilon_{p+1} < \varepsilon_p$, $p=1,2,...$, найдётся такое $p_l = m$ и соответствующее N_m, что в множество $S(X^i, \varepsilon_p)$, $i=1,...,r$, попадёт хотя бы одна точка множества $P(\tilde{D}_{N_m})$.

Пример 7.1.

$Q_1(X) = x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow \min$,

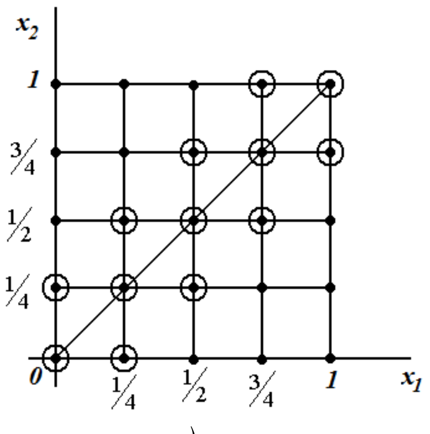
$Q_2(X) = 2 - x_1 - x_2 \Rightarrow \min$,

$0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1.$

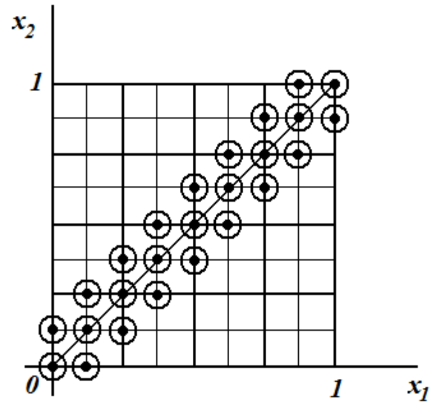
Построить множество приближенно эффективных стратегий $P(D_{N_2})$.

Множество эффективных стратегий данной задачи $P(D) = \{X = (x_1, x_2) \in R^2 \mid 0 \le x_1 \le 1,\ x_1 = x_2\}$ (см. пример 4.2).

Используя формулу (6.4), зададим сетку D_{N_1}, где $N_1 = 25$. На рис. 7.4а показано множество приближенно эффективных стратегий $P(D_{N_1})$, построенное с помощью метода помеченных точек (жирными точками обозначены точки сетки, кружками – приближенно эффективные стратегии).



а)



б)

Рисунок 7.4.

Переходим к следующей итерации $j = 2$, $N_2 = 81$. Применив метод помеченных точек, мы получили множество $P(D_{N_2})$, изображенное на рис. 7.4б.

На рис. 7.5 показано множество $P(D_{N_4})$, $N_4 = 1089$.

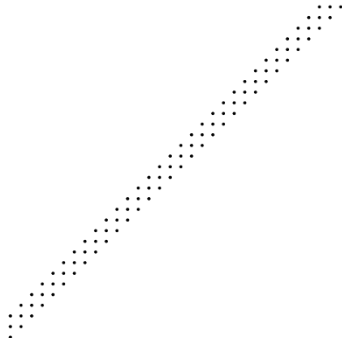


Рисунок 7.5.

8. Бикритериальная задача о ранце

Рассмотрим бикритериальную задачу, в которой допустимое множество альтернатив (стратегий) изначально является конечным, и для построения множества эффективных векторов которой используется метод динамического программирования. Существуют различные классы задач такого рода. Мы остановимся на рассмотрении бикритериальной задачи о ранце в следующей постановке:

$$Q_1(X) = Q_1(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j^1 x_j \Rightarrow \max,$$

$$Q_2(X) = Q_2(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j^2 x_j \Rightarrow \min, \tag{8.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, x_j \in \{0,1\}, j = 1,\dots,n.$$

Будем считать, что величины c_j^1, c_j^2, a_j, $j = 1,\dots,n$ и b являются целыми положительными числами. Отметим, что при рассмотрении задачи (8.1) «лучше» означает «больше».

Задачу (8.1) мы будем интерпретировать следующим образом. Пусть имеется n предметов, каждый из которых обладает весом a_j и «стоимостями» c_j^1, c_j^2, $j = 1,\dots,n$. Имеется также ранец (контейнер, платформа или т.п.), в который можно поместить груз с суммарным весом не более b. Функции $Q_1(X)$, $Q_2(X)$ оценивают качество загрузки предметов. Требуется определить, какие предметы следует поместить в ранец, чтобы их суммарные «стоимости» были наибольшими. Переменные $x_1,\dots,x_n$ интерпретируются здесь следующим образом:

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{если предмет помещается в ранец;} \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через $D(n,b)$ допустимое множество задачи (8.1) и пусть $W(n,b)$ – образ множества $D(n,b)$ при отображении, определяемом функциями $Q_1(X)$, $Q_2(X)$. Через $P(D(n,b))$ будем обозначать множество эффективных стратегий задачи (8.1), а через $P(W(n,b))$ – множество эффективных векторов этой задачи.

Поэтому образ эффективной стратегии есть эффективный вектор задачи (8.1), а всякий прообраз эффективного вектора есть эффективная стратегия этой задачи.

Рассматриваемая проблема заключается в построении для задачи (8.1) множества $P(W(n,b))$ и конструировании алгоритма, позволяющего по любому вектору из множества $P(W(n,b))$ найти реализующую его стратегию из множества $P(D(n,b))$.

По исходным данным (8.1) построим семейство задач $z(k,p)$:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j^1 x_j \Rightarrow \max, \sum_{j=1}^{k} c_j^2 x_j \Rightarrow \max,$$
$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_j \le p, x_j \in \{0,1\}, j = 1,...,k. \qquad (8.2)$$

Здесь $k \in \{1,2,...,\mathrm{n}\}$, $p \in \{0,1,2,...,b\}$.

Допустимое множество задачи (8.2) при фиксированных k, p обозначим через $D(k,p)$, множество её эффективных стратегий – через $P(D(k,p))$, а множество эффективных векторов – через $P(W(k,p))$. Здесь $W(k,p)$ образ множества $D(k,p)$ при отображении, определяемом функциями-критериями задачи (8.2) при фиксированных k и p.

Очевидно, что задача $z(n,b)$ совпадает с исходной задачей (8.1).

Частная задача $z(k,p)$ отображает следующую ситуацию:

1. в ранец можно загрузить предметы только с первого по k-ый номер включительно;
2. суммарный вес предметов в ранце не должен превышать значение p.

Введём следующие обозначения, облегчающие дальнейшее изложение.

Пусть $U = (u_1,...,u_l)$ – вектор размерности l, а G – множество векторов той же размерности. Тогда через $U \Delta G$ мы будем обозначать совокупность всех векторов, представимых в виде $U + V = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_l + v_l)$, где $V \in G$. Таким образом, символ Δ обозначает суммирование вектора U с каждым из векторов множества G.

Пусть G – произвольное множество l-мерных векторов. Через $[G]^*$ будем обозначать максимальное по включению подмножество эффективных векторов множества G, то есть $[G]^* = P(G)$.

Вернёмся к рассмотрению задач семейства (8.2). Нетрудно видеть, что для задачи $z(1,p)$ множество $P(W(1,p))$ следующее:

$$P(W(1,p)) = \begin{cases} \{(0,0)\}, 0 \le p \le a_1 (\text{в ранец можно положить только} \\ \qquad \text{первый предмет, но вес этого} \\ \qquad \text{предмета превышает величину } p), \\ \{(c_1^1, c_1^2)\}, a_1 \le p \le b. \end{cases} \qquad (8.3)$$

Пользуясь идеей динамического программирования построим рекуррентное соотношение, связывающее множества $P(W(k+1,p))$ и $P(W(k,p))$. Пусть для любого $p = 0,1,...,b$ множество $P(W(k,p))$ уже построено. Ситуация, возникающая при построении множества $P(W(k+1,p))$ отличается от ситуации, которая имела место при конструировании $P(W(k,p))$ лишь тем, что мы получаем дополнительную возможность загрузить в ранец $(k+1)$-ый предмет. Этой возможностью мы можем либо не воспользоваться, либо воспользоваться. В случае, когда $(k+1)$-ый предмет в ранец не загружается мы остаёмся в рамках множества $P(W(k,p))$. В случае, когда $(k+1)$-ый предмет в ранец загружается в пространстве критериев оказываются реализуемыми векторами множества

$$\left\{C^{k+1}\Delta P(W(k,p-a_{k+1}))\right\},$$

где $C^{k+1}=\left(c_{k+1}^1,c_{k+1}^2\right)$.

Действительно, включаемый в ранец $(k+1)$-ый предмет обеспечивает в пространстве критериев вектор C^{k+1} и из предельно допустимого веса ранца p вычитается вес это предмета, а относительно предметов с номерами от первого до k-го мы оказываемся в условиях задачи $z(k,p-a_{k+1})$. отметим, что в задаче $z(k+1,p)$ поместить в ранец $(k+1)$-ый предмет можно только при условии $p\geq a_{k+1}$. В итоге получаем, что

$$P(W(k+1,p))=\begin{cases}P(W(k,p)),0\leq p<a_{k+1},\\ [P(W(k,p))\bigcup\left\{C^{k+1}\Delta P(W(k,p-a_{k+1}))\right\}]^*,a_{k+1}\leq p\leq b.\end{cases} \quad (8.4)$$

Рекуррентное соотношение (8.3) – (8.4) являются аналогом уравнений динамического программирования. Они дают возможность последовательного построения множеств $P(W(k,p))$ вплоть до определения множества $P(W(n,b))$, то есть множества эффективных векторов исходной задачи (8.1).

Рассмотрим теперь вопрос об определении по любому вектору $Q^0=\left(q_1^0,q_2^0\right)\in P(W(n,b))$, обеспечивающей его эффективной стратегии $X^0\in P(D(n,b))$.

Для этого в процессе построения множеств $P(W(k,p))$, начиная с $P(W(1,0))$, $P(W(1,1))$, ..., $P(W(1,b))$ и, заканчивая $P(W(n,b))$, будем последовательно заполнять строки таблицы T, при этом каждая строка σ^t этой таблицы имеет следующую структуру:

1. σ_1^t – двумерный вектор-критерий;
2. σ_2^t – значение параметра k;
3. σ_3^t – значение параметра p.

Каждую строку таблицы σ^t будем трактовать так: записанный в первой позиции ненулевой вектор-критерий при значениях параметров k и p, не меньших, чем указанные во второй и третьей позициях, соответственно принадлежат множеству $P(W(k,p))$.

При определении для вектора $Q^0 = (q_1^0, q_2^0) \in P(W(n,b))$, реализующей его стратегии $X^0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in P(D(n,b))$, поступаем следующим образом:

1. Полагаем $Q = Q^0$, то есть $q_1 = q_1^0$, $q_2 = q_2^0$, где $Q = (q_1, q_2)$.
2. В таблице T находим строку с записью (Q, ξ', η'), где $\xi' \le \xi$, $\eta' \le \eta$.
3. Полагаем $x_{\xi'}^0 = 1$.
4. Изменяем вектор Q: $Q = Q - C^{\xi'}$, $C^{\xi'} = \left(C_1^{\xi'}, C_2^{\xi'}\right)$, то есть $q_1 = q_1 - c_1^{\xi'}$, $q_2 = q_2 - c_2^{\xi'}$.
5. Полагаем $\xi = \xi' - 1, \eta = \eta' - a_{\xi'}$.
6. Если $Q = (0,0)$, то переходим к п.7, в противном случае – к п.2.
7. Все не определённые до настоящего момента координаты вектора X^0 полагаем равными нулю. Алгоритм заканчивает свою работу. Построенный вектор X^0 является искомым.

Пример 8.1.

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \Rightarrow \max,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \Rightarrow \max,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 12,$$
$$x_j \in \{0,1\},\ j = 1,2,3,4.$$

Вычисления выполняем по формулам (8.1) – (8.4).

$P(W(1,j)) = \{(0,0)\}$, $j = 0,1$; $P(W(1,j)) = \{(2,3)\}$, $j = 2,3,...,12$.

В таблицу T заносим запись $\sigma^1 = <(2,3),1,2>$.

$P(W(2,j)) = \{(0,0)\}$, $j = 0,1$; $P(W(2,2)) = P(W(1,2)) = \{(2,3)\}$.

При нахождении множества $P(W(2,3))$ при условии того, что второй предмет не загружается в ранец получаем вектор $(2,3)$, а если он загружается, то вектор $(3,2)$. Ни один их этих векторов не является безусловно лучшим, чем другой и поэтому

$$P(W(2,3)) = \{(2,3),(3,2)\}^* = \{(2,3),(3,2)\}.$$

В таблицу T заносим запись $\sigma^2 = <(3,2),2,3>$.

Как легко видеть , $P(W(2,5)) = \{(2,3),(5,5)\}^* = \{(5,5)\}$ и $\sigma^3 = <(5,5),2,5>$.

Дальнейшие вычисления дают:

1. $P(W(3,0)) = P(W(3,1)) = \{(0,0)\}$,
2. $P(W(3,2)) = \{(2,3)\}$,
3. $P(W(3,3)) = \{(2,3),(3,2)\}$,
4. $P(W(3,4)) = \{(2,3),(3,2),(4,1)\}^* = \{(2,3),(3,2),(4,1)\}$,
5. $\sigma^4 =< (4,1),3,4 >$,
6. $P(W(3,5)) = \{(5,5)\}$,
7. $P(W(3,6)) = \{(5,5),(6,4)\}^* = \{(5,5),(6,4)\}$,
8. $\sigma^5 =< (6,4),3,6 >$,
9. $P(W(3,7)) = \{(5,5),(6,4),(7,3)\}^* = \{(5,5),(6,4),(7,3)\}$,
10. $\sigma^6 =< (7,3),3,7 >$,
11. $P(W(3,8)) = \{(5,5),(6,4),(7,3)\}$,
12. $P(W(3,9)) = \{(5,5),(9,6)\}^* = \{(9,6)\}$,
13. $\sigma^7 =< (9,6),3,9 >$,
14. $P(W(3,10)) = P(W(3,11)) = P(W(3,12)) = \{(9,6)\}$.
15. $P(W(4,0)) = P(W(4,1)) = \{(0,0)\}$,
16. $P(W(4,2)) = \{(2,3)\}$,
17. $P(W(4,3)) = \{(2,3),(3,2)\}$,
18. $P(W(4,4)) = \{(2,3),(3,2),(4,1)\}$,
19. $P(W(4,5)) = \{(5,5),(1,3)\}^* = \{(5,5)\}$,
20. $P(W(4,6)) = \{(5,5),(6,4),(1,3)\}^* = \{(5,5),(6,4)\}$,
21. $P(W(4,7)) = \{(5,5),(6,4),(7,3),(3,6)\}^* = \{(5,5),(6,4),(7,3),(3,6)\}$,
22. $\sigma^8 =< (3,6),4,7 >$,
23. $P(W(4,8)) = \{(5,5),(6,4),(7,3),(3,6)\}^* = \{(5,5),(6,4),(7,3),(3,6)\}$,
24. $P(W(4,9)) = \{(9,6),(3,6),(4,5),(5,4)\}^* = \{(9,6)\}$,
25. $P(W(4,10)) = \{(9,6),(6,8)\}$,
26. $\sigma^9 =< (7,7),4,10 >$,
27. $P(W(4,11)) = \{(9,6),(6,8),(7,7)\}$,
28. $\sigma^{10} =< (7,7),4,11 >$,

29. $P(W(4,12)) = \{(9,6),(6,8),(7,7),(8,6)\}^* = \{(9,6),(6,8),(7,7)\}$.

Итак, множество эффективных векторов в рассматриваемом примере имеет вид:

$\{(9,6),(6,8),(7,7)\}$

Найдём для вектора $Q^0 = (7,7)$, реализующую его эффективную стратегию, используя описанный выше алгоритм:

1. $Q = Q^0 = (7,7)$, $\xi = 4$, $\eta = 12$.
2. $\xi' = 4$, $\eta' = 11$.
3. $x_4^0 = 1$.
4. $Q = (7-1, 7-3) = (6,4)$.
5. $\xi = 3$, $\eta = 6$.
6. $Q \neq (0,0)$.
7. $\xi' = 3$, $\eta' = 6$.
8. $x_3^0 = 1$.
9. $Q = (6-4, 4-1) = (2,3)$.
10. $\xi = 2$, $\eta = 2$.
11. $Q \neq (0,0)$.
12. $\xi' = 1$, $\eta' = 2$.
13. $x_1^0 = 1$.
14. $Q = (0,0)$, $x_2^0 = 0$.

Таким образом $X^0 = (1,0,1,1)$.

Для вектора $(9,6)$ получаем эффективную стратегию $(1,1,1,0)$, а для вектора $(6,8)$ – $(1,1,0,1)$.

Нетрудно видеть, что для построения множества $P(W(n,b))$ требуется знание множеств $P(W(n-1,b))$ и $P(W(n-1,b-a_n))$, а для определения каждого из этих множеств необходимо знать также только два соответствующих множества и т.д. Поэтому до начала решения задачи $z(n,b)$ можно определить необходимые для отыскания $P(W(n,b))$ множества и находить в процессе реализации рекуррентной схемы (8.3) – (8.4) только эти множества, что значительно сокращает объём требуемых вычислений.

Литература

1. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981, 487 с.
2. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования. М.: Радио и связь, 1984, 248 с.
3. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1986, 290 с.
4. Батищев Д.И., Коган Д.И. Вычислительная сложность экстремальных задач переборного типа. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1994, 114 с.
5. Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Дрофа, 2006, 175 с.

Анатолий Григорьевич **Коротченко**

Елена Александровна **Кумагина**

Валентина Михайловна **Сморякова**

ВВЕДЕНИЕ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНУЮ ОПТИМИЗАЦИЮ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.