Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс
"Модели, методы и программные средства"

Основная образовательная программа
010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,
общий профиль, квалификация (степень) бакалавр
Учебно-методический комплекс по дисциплине
«Дискретная математика»

Основная образовательная программа
010400 «Прикладная математика и информатика»,
общий профиль, квалификация (степень) бакалавр
Учебно-методический комплекс по дисциплине
«Дискретная математика»

В.Е. Алексеев, Л.Г. Киселева, Т.Г. Смирнова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Электронное учебно-методическое пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Нижний Новгород
2012

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ. Алексеев В.Е., Киселева Л.Г., Смирнова Т.Г. Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 80 с.

В сборнике задач содержится краткий теоретический материал и предлагаются задачи различной степени сложности по основным разделам курса “Дискретная математика”: теории множеств, бинарным отношениям, комбинаторике, теории графов, алгебре логики и основам алфавитного кодирования. Раздел "Контрольные задания" представлен контрольными работами по теории множеств и комбинаторике.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса дневного и вечернего отделений факультета ВМК, обучающихся по направлениям подготовки 010400 «Прикладная математика и информатика» и 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии», изучающих курс «Дискретная математика».

1. Множества и операции над ними

Терминология и обозначения

$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – множество, состоящее из n элементов $a_1, a_2, ..., a_n$.

$\{x \mid P(x)\}$ – множество, состоящее из таких элементов x, которые обладают свойством P.

$x \in A$ – элемент x ***принадлежит*** множеству A.

$x \notin A$ – элемент x ***не принадлежит*** множеству A.

$\varnothing$ – ***пустое множество*** (не содержащее ни одного элемента).

U – ***универсальное множество*** (***универс***), т. е. множество всех элементов.

$A \subseteq B$ – множество A является ***подмножеством*** множества B (A ***включено*** в B, A ***содержится*** в B), это означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B.

$A \subset B$ означает, что $A \subseteq B$ и $A \neq B$, т.е. A является ***собственным подмножеством*** B.

$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$ — ***множество всех подмножеств*** A.

$\overline{A} = U - A$ — ***дополнение*** множества A.

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$ – ***объединение*** множеств A и B.

$A \cap B = AB = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$ – ***пересечение*** множеств A и B.

$A - B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$ – ***разность*** множеств A и B.

$A \otimes B = (A - B) \cup (B - A)$ – ***симметрическая разность*** множеств A и B.

Некоторые свойства операций над множествами

1. $A \cup \varnothing = A$; $\qquad A \cap \varnothing = \varnothing$;
2. $A \cup U = U$; $\qquad A \cap U = A$;
3. $A \cup A = A$; $\qquad AA = A$;
4. $A \cup \overline{A} = U$; $\qquad A\overline{A} = \varnothing$;
5. $\overline{\overline{A}} = A$;
6. ***коммутативные законы***:

   $A \cup B = B \cup A$; $\qquad AB = BA$;
7. ***ассоциативные законы***:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $\quad$ $A(BC) = (AB)C$;

8. ***дистрибутивные законы***:

$A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$; $\quad$ $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$;

9. ***законы де Моргана***:

$\overline{A \cup B} = \overline{A}\ \overline{B}$; $\quad$ $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

10. ***законы поглощения:***

$A \cup AB = A$; $\quad$ $A(A \cup B) = A$;

11. $A \cup \overline{A}B = A \cup B$; $\quad$ $A(\overline{A} \cup B) = AB$;

12. $A - B = A\overline{B}$.

13. $A \otimes B = A\overline{B} \cup \overline{A}B$.

Операцию пересечения считаем более сильной, чем другие. Это означает, что при отсутствии скобок она выполняется первой. Например, формула $(AB \cup C) \otimes CD$ эквивалентна $((A \cap B) \cup C) \otimes (C \cap D)$.

1.1. Какие из следующих утверждений верны:

1) $b \subset \{a, b\}$;
2) $b \in \{a, b\}$;
3) $\{b\} \subset \{a, b\}$;
4) $\{b\} \in \{a, b\}$;
5) $b \subset \{a, \{b\}\}$;
6) $b \in \{a, \{b\}\}$;
7) $\{b\} \subset \{a, \{b\}\}$;
8) $\{b\} \in \{a, \{b\}\}$;
9) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;
10) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$;
11) $\varnothing \in \varnothing$;
12) $\varnothing \subseteq \varnothing$?

1.2. Сколько элементов в каждом из множеств:

1) $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$;
2) $\{1, \{1\}, 2, \{1, \{2, 3\}\}, \varnothing\}$;
3) $\varnothing$;
4) $\{\varnothing\}$;
5) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;
6) $\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$?

1.3. Известно, что $A \subseteq B$ и $a \in A$. Какие из следующих утверждений верны:

1) $a \notin B$;
2) $a \in B$;
3) $A \in B$;
4) $a \in A \cup B$;
6) $a \in A - B$;
7) $a \in A \otimes B$;
8) $a \subseteq A$;
9) $\{a\} \subseteq A$;

5) $a \in A \cap B$; 10) $\{a\} \subseteq B$?

1.4. Известно, что $B \subseteq A \subseteq C$, $a \in A$ и $a \notin B$. Какие из следующих утверждений верны:

1) $a \notin C$;
2) $a \in C$;
3) $a \in A \cap B$;
4) $a \in A \cup B$;
5) $a \in A - B$;
6) $a \in B - A$;
7) $a \in A \otimes B$;
8) $\{a\} \subseteq A \cap C$;
9) $a \in A \cup C$;
10) $\{a\} \subseteq A - C$;
11) $\{a\} \subseteq A \otimes C$;
12) $a \in (A \cap B) \cup C$;
13) $\{a\} \subseteq A \cap (B \cup C)$;
14) $\{a\} \subseteq B \cup (C - A)$;
15) $\{a\} \subseteq A \cap (B - C)$;
16) $\{a\} \subseteq B \otimes (A - C)$?

1.5. Дан универс $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и его подмножества $A = \{x \mid 2 < x \le 6\}$, $B = \{x \mid x - \text{четно}\}$, $C = \{x \mid x \ge 4\}$, $D = \{1,2,4\}$. Найти множества $A \cup B$, CD, $B \otimes C$, $\overline{A}\,(\overline{BD})$, $(A - B) \cup (C - D)$, $\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}}$, $2^A \cap 2^B$, $2^D - 2^B$.

1.6. Дан универс $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и его подмножества $A = \{x \mid x - \text{четно}\}$, $B = \{x \mid x - \text{кратно четырем}\}$, $C = \{x \mid x - \text{простое}\}$, $D = \{1,3,5\}$. Найти множества $A \cup B$, CD, $A \otimes B$, $A(B \cup C \cup D)$, $C \otimes D$, $(A - B) \cup (C - D)$, $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$, $(C - A) \otimes D$, $2^A \cap 2^B$, $2^D - 2^C$.

1.7. Пусть M_2, M_3, M_5 обозначают подмножества универса N, состоящие соответственно из всех чисел, кратных 2, 3, 5. С помощью операций над множествами выразить через них множества всех чисел:

1) делящихся на 6;
2) делящихся на 30;
3) взаимно простых с 30;
4) делящихся на 10, но не делящихся на 3.

Используя теоретико-множественную символику, записать утверждения:

1) 45 делится на 15;

2) 42 делится на 6, но не делится на 10;

3) каждое число из множества {8, 9, 10} делится хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5, но не делится на 6.

1.8. Для каждого $i=1,2,...,n$ даны множества

$$A_i=\{(i,j)\mid j=1,2,...,n\} \text{ и } B_i=\{(j,i)\mid j=1,2,...,n\}.$$

Выразить через них с помощью операций $\cap$, $\cup$,– множества:

1) $\{(i,j)\mid 1\le i\le k, 1\le j\le k, k\le n\}$;

2) $\{(i,i)\mid i=1,2,...,n\}$;

3) $\{(i,j)\mid 1\le i\le j\le n\}$.

1.9. Выяснить, обладают ли операции – ,$\otimes$ свойствами коммутативности и ассоциативности.

1.10. Выяснить, какие из следующих дистрибутивных законов справедливы для любых множеств A,B,C:

1) $A-(B\cup C)=(A-B)\cup(A-C)$;

2) $A-(B\cap C)=(A-B)\cap(A-C)$;

3) $A\otimes(B\cup C)=(A\otimes B)\cup(A\otimes C)$;

4) $A\otimes BC=(A\otimes B)(A\otimes C)$;

5) $A-(B\otimes C)=(A-B)\otimes(A-C)$;

6) $A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$;

7) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$;

8) $A(B-C)=AB-AC$;

9) $A\cup(B\otimes C)=(A\cup B)\otimes(A\cup C)$;

10) $A(B\otimes C)=AB\otimes AC$;

11) $A\otimes(B-C)=(A\otimes B)-(A\otimes C)$?

1.11. Доказать тождества:

1) $A\cup AB=A$;

2) $A(A\cup B)=A$;

3) $A\cup\overline{A}B=A\cup B$;

4) $A(\overline{A}\cup B)=AB$;

5) $A-(A-B)=AB$;

10) $A\otimes B=A\overline{B}\cup\overline{A}B$;

11) $A\otimes(A\otimes B)=B$;

12) $A-B=A\otimes AB$;

13) $A\cup B=(A\otimes B)\cup AB$;

14) $\overline{A\otimes B}=\overline{A}\otimes B=A\otimes B\otimes U$;

6) $A-AB=A-B$;

7) $A(B-A)=\varnothing$;

8) $A\cup(B-A)=A\cup B$;

9) $AB\cup A\overline{B}=A$;

15) $\overline{A\otimes B}=AB\cup\overline{A}\,\overline{B}$;

16) $A\otimes\overline{B}=\overline{A}\otimes B=AB\cup(\overline{A\cup B})$;

17) $A\cup\overline{A}B=A\otimes\overline{A}B=B\otimes A\overline{B}$;

18) $A-(B\cup C)=(A-B)(A-C)$;

19) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)=A-(B\cup C)$;

20) $A-(B-C)=(A-B)\cup AC=(A-B)\cup(A-\overline{C})$;

21) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$;

22) $A\cup B\cup C=(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup ABC$;

23) $A-BC=(A-B)\cup(A-C)=ABC\otimes A$;

24) $A(B-C)=AB-C=ABC\otimes AB$;

25) $(AB\otimes A)\otimes(BC\otimes C)=(AB\otimes BC)\otimes(A\otimes C)$;

26) $(A\cup B)\otimes(B\cup C)=(A\otimes C)-B=(AB\otimes BC)\otimes(A\otimes C)$.

1.12. Выразить:

1) $\cup$ через $\otimes$, $\cap$;

2) $\cap$ через $\otimes$, $\cup$;

3) $\cup$ и $\cap$ через $\otimes$, $-$.

1.13. Доказать, что $A\subseteq B$ равносильно $A\overline{B}=\varnothing$.

1.14. Доказать, что $A=B$ равносильно $A\otimes B=\varnothing$.

1.15. Упростить систему условий:

1) $\begin{cases} A\subseteq BC\cup\overline{B}; \\ ABC\subseteq D; \\ AD\subseteq\overline{BC}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \overline{A}=B\overline{C}; \\ \overline{C}\subseteq D; \\ AD=\overline{B}CD; \\ B=CD. \end{cases}$

3) $\begin{cases} C\subseteq A\cup B; \\ A\cup D\subseteq B\cup C; \\ \overline{B}\subseteq D\subseteq\overline{C}; \\ BC\subseteq\overline{D}. \end{cases}$

1.16. Выяснить, равносильны ли следующие системы условий:

1) $\begin{cases} X \subseteq Z \subseteq \overline{W}, \\ Y \subseteq W, \\ X \cup Y = Z \cup W \end{cases}$ и $\begin{cases} X = Z, \\ Y = W. \end{cases}$

2) $\begin{cases} C \otimes D \subseteq A, \\ B \cup D \subseteq A \cup C, \\ A - D \subseteq C - B \end{cases}$ и $\begin{cases} \overline{A} \subseteq CD, \\ B - C \subseteq \overline{A}, \\ A \subseteq C \cup D. \end{cases}$

3) $\begin{cases} A \subseteq C \otimes B, \\ C \subseteq B \otimes D, \\ AC \subseteq B - D \end{cases}$ и $\begin{cases} B \subseteq \overline{CD}, \\ C - D \subseteq B, \\ AC \subseteq D, \\ A - B \subseteq BC. \end{cases}$

1.17. Решить уравнение:

1) $AX = B$;

2) $A \cup X = B$;

3) $A \otimes X = B$;

4) $A - X = B$;

5) $A \cup X = BX$;

6) $A \otimes X = BX$;

7) $A - X = X - B$;

8) $(A \cup X) \cup B = X \cup B$;

9) $AX = (X \cup B) - A$;

10) $\overline{XA} = (X - B) \cup A$;

11) $(A \cup X)\overline{B} = X - B$;

12) $(A - X) \cup B = B \otimes X$;

13) $(X - A) \cup B = \overline{AX}$;

14) $(X \otimes A) - B = BX$;

15) $AX \otimes B = B - X$;

16) $A - X = BX - A$;

17) $A \cap \overline{XB} = (X - A)B$;

18) $\overline{A \cup X} = \overline{BX}$;

19) $X - A = B \cup (X - A)$;

20) $(A \cup X) - B = B - XA$;

21) $XA = B(X \cup A)$;

22) $(A \otimes X)X = X - B$;

23) $AX \cup \overline{A} = (X - B)B$;

24) $(A \cup X)B = \overline{A} \cup BX$;

25) $A \otimes (X \cup B) = BX$;

26) $BX = (A - X)X$;

27) $AX \otimes B = X - A$;

28) $(X \cup B) - A = A \cup X$;

29) $AX \cup B = A - X$;

30) $X \cup A = (B - X) \otimes A$.

1.18. Найти множество X, удовлетворяющее системе уравнений, где A, B, C – данные множества, $B \subseteq A \subseteq C$:

1) $\begin{cases} A - X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$; 2) $\begin{cases} AX = B \\ A \cup X = C \end{cases}$.

1.19. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} (A \cup X)(B \cup X) = C \cup X \\ BX \cup C = \overline{AX} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} A \otimes B \otimes X = X \otimes C \\ AX \otimes B = AX \otimes C \end{cases}$;

3) $\begin{cases} AX = B \\ B\overline{X} = C \\ CX = A \cup B \end{cases}$; 4) $\begin{cases} A - X = \overline{B} \\ A \cup X = \overline{C} \end{cases}$;

5) $\begin{cases} AX \cup B\overline{X} = C \\ BX \cup A\overline{X} = C \end{cases}$; 6) $\begin{cases} A \cup X = BX \\ AX = C \cup X \end{cases}$.

2. Бинарные отношения

Терминология и обозначения

$A\times B=\{(a,b)|\ a\in A, b\in B\}$ – (множество всех упорядоченных пар) ***прямое (декартово) произведение*** множеств A и B.

Любое $R\subseteq A\times B$ называется ***бинарным отношением, определенным на паре множеств*** *A* и *B* (далее просто отношением).

$A^2=A\times A$ ***(декартов квадрат*** множества *A)*. Если $R\subseteq A^2$, то R называется ***отношением на множестве*** *A*.

xRy означает, что $(x,y)\in R$ *(* x и y ***находятся в отношении*** *R).*

$R^{-1}=\{(a,b)\,|\,(b,a)\in R\}$ – отношение, ***обратное*** к R.

$R_1\circ R_2$ – ***произведение отношений*** R_1 *и* R_2*:* если $R_1\subseteq A\times B$, $R_2\subseteq B\times C$, то $R=R_1\circ R_2\subseteq A\times C$ и $xRy\leftrightarrow$ существует такой $z\in B$, что xR_1z и zR_2y.

Важнейшие свойства отношений

Отношение R на множестве A называется

(1) ***рефлексивным***, если для любого $x\in A$ справедливо xRx;

(2) ***симметричным***, если из xRy следует yRx;

(3) ***антисимметричным***, если из xRy и yRx следует $x=y$;

(4) ***транзитивным***, если из xRy и yRz следует xRz.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется ***отношением эквивалентности*** (или просто эквивалентностью).

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется ***отношением порядка*** (или просто порядком). Порядок R на множестве A называют ***линейным***, если для любых $x,y\in A$ имеет место xRy или yRx.

2.1. Пусть $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{a,b\}$. Определите $A\times B, A\times A, B\times A, B\times B, A\times\varnothing, 2^A, 2^B, B\times 2^B$.

2.2. Пусть $A=\varnothing$, $B=\{\varnothing\}$ и $C=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$. Определите $A\times B, A\times C, B\times C, B\times B, C\times C, 2^A, 2^B, 2^C, B\times 2^B, B\times 2^C, C\times 2^B$.

2.3. Выясните, какие из следующих равенств справедливы для любых множеств A, B, C, D:

1) $A \times B = B \times A$;
2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
3) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;
4) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$;
5) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$?

2.4. Определите, какими из свойств (1) – (4) обладают следующие отношения на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

R_1: $aR_1b \leftrightarrow |a-b|=1$;

R_2: $aR_2b \leftrightarrow 0 < a-b < 3$;

R_3: $aR_3b \leftrightarrow a+b$ – четное число;

R_4: $aR_4b \leftrightarrow a \geq b^2$;

R_5: $aR_5b \leftrightarrow НОД(a,b)=1$.

Представьте графически отношения:

$R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, R_2^{-1}, $R_2 \circ R_4$, $R_4 \circ R_2$, $R_5 - R_4^{-1}$.

2.5. Выясните, какие из следующих утверждений верны:

1) всякое отношение на множестве либо симметрично, либо антисимметрично;
2) никакое отношение не может быть одновременно симметричным и антисимметричным;
3) для любого отношения R отношения $R \cup R^{-1}$ и $R \cap R^{-1}$ симметричны;
4) для любого отношения R отношение $R - (R \cap R^{-1})$ антисимметрично;
5) если отношение R обладает одним из свойств (1)–(4), то R^{-1} обладает тем же свойством;
6) для любого отношения R отношение $R \circ R^{-1}$ симметрично;
7) для любого отношения R отношение $R \circ R^{-1}$ рефлексивно;
8) если отношения R_1 и R_2 оба обладают одним из свойств (1)–(4), то $R_1 \circ R_2$ обладает тем же свойством;
9) если R_1 и R_2 отношения эквивалентности, то $R_1 \circ R_2$ отношение эквивалентности;

10) если R_1 и R_2 отношения эквивалентности, то $R_1 \cap R_2$ отношение эквивалентности;

11) если R_1 и R_2 отношения эквивалентности, то $R_1 \cup R_2$ отношение эквивалентности.

2.6. Какие из отношений, представленных диаграммами на рис.1, являются отношениями эквивалентности?

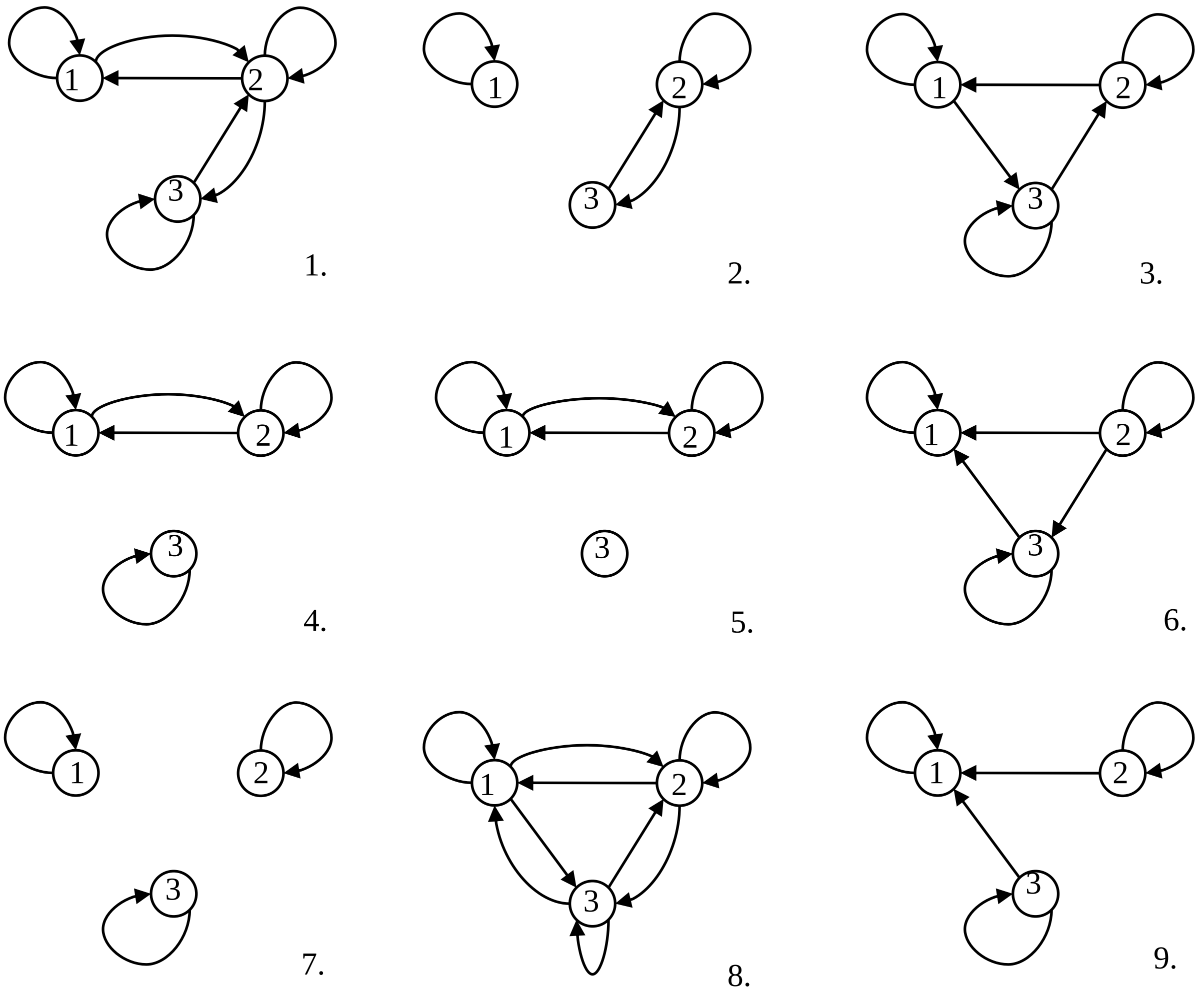


Рис.1. К задаче 2.6

2.7. Найдите все отношения на двухэлементном множестве $\{a,b\}$. Укажите среди них:

1) все рефлексивные;
2) все симметричные;
3) все антисимметричные;
4) все транзитивные;
5) все эквивалентности;
6) все отношения порядка.

2.8. Выясните, какие из следующих перечисленных отношений на множестве $\{0,1,\ldots,9\}$ являются отношениями эквивалентности. Найдите классы эквивалентности.

$R_1: \quad aR_1b \quad \leftrightarrow \quad a \equiv b \pmod 3;$

$R_2: \quad aR_2b \quad \leftrightarrow \quad a^2 \equiv b^2 \pmod{10};$

$R_3: \quad aR_3b \quad \leftrightarrow \quad ab \equiv 0 \pmod 2;$

$R_4: \quad aR_4b \quad \leftrightarrow \quad |2^a - 2^b| < 16;$

$R_5: \quad aR_5b \quad \leftrightarrow \quad |2^a - 2^b| \le 16;$

$R_6: \quad aR_6b \quad \leftrightarrow \quad НОД(a,b) = 1.$

2.9. Z – множество целых чисел. На множестве Z определено отношение $R: xRy \leftrightarrow x = y^2$. Является ли какое-нибудь из отношений $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$ эквивалентностью?

2.10. Определите, какие из следующих отношений на Z^2 являются отношениями эквивалентности:

$R_1: (x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 = x_2;$

$R_2: (x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2;$

$R_3: (x_1, y_1) R_3 (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2;$

$R_4: (x_1, y_1) R_4 (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 + y_2 = y_1 + x_2;$

$R_5: (x_1, y_1) R_5 (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 < x_2$ или $x_1 = x_2,\ y_1 \le y_2$?

Найдите для них классы эквивалентности.

2.11. Сколько различных отношений эквивалентности можно определить на множестве из n элементов при $n = 1, 2, 3, 4$?

2.12. Какие из диаграмм на рис.1 представляют отношения порядка?

2.13. Какие из следующих отношений на Z являются отношениями порядка:

$R_1: \quad xR_1y \quad \leftrightarrow \quad x \le y;$

$R_2: \quad xR_2y \quad \leftrightarrow \quad x \ge y;$

$R_3: \quad xR_3y \quad \leftrightarrow \quad x < y;$

$R_4: \quad xR_4y \quad \leftrightarrow \quad x^2 \le y^2;$

$R_5: \quad xR_5y \quad \leftrightarrow \quad x = y;$

$R_6: \quad xR_6y \quad \leftrightarrow \quad x$ делится на y;

$R_7: \quad xR_7y \quad \leftrightarrow \quad НОД(x,y)=1$?

2.14. Постройте диаграмму непосредственных предшествований отношения делимости на множестве $\{2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\}$.

2.15. На множестве Z^2 определено отношение $R:(x_1,y_1)R(x_2,y_2) \leftrightarrow x_1 \le x_2,\ y_1 \le y_2$. Докажите, что это отношение порядка.
Найдите все минимальные и максимальные относительно R элементы в множествах:

$A_1 = \{(x,y) \mid x \le 3, y \le 4\}$;

$A_2 = \{(x,y) \mid 2 \le x+y \le 4\}$;

$A_3 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$.

2.16. Дан конечный универс U. Выясните, какие из следующих отношений на 2^U являются отношениями эквивалентности или порядка:

1) $AR_1B \quad \leftrightarrow \quad A \cap B = \varnothing$;
2) $AR_2B \quad \leftrightarrow \quad A - B = \varnothing$;
3) $AR_3B \quad \leftrightarrow \quad A - B = B - A$;
4) $AR_4B \quad \leftrightarrow \quad |A| = |B|$?

2.17. Сколько различных отношений порядка можно определить на множестве из трех элементов? Сколько среди них линейных?

3. Элементы комбинаторики

Терминология и обозначения

Пусть A и B – множества, тогда отображение $f: A \to B$ есть:

1) ***инъекция***, если любые два различных элемента из A отображаются в различные элементы множества B;

2) ***сюръекция***, если для любого элемента $y \in B$ существует такой элемент $x \in A$, что $f(x) = y$;

3) ***биекция*** (***взаимно-однозначное отображение***), если оно инъективно и сюръективно.

$|A|$ – число элементов конечного множества A (***мощность*** множества).

Правило равенства: если между конечными множествами A и B существует взаимно-однозначное соответствие, то $|A| = |B|$.

Правило суммы: если A и B – непересекающиеся конечные множества, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Правило произведения: для любых конечных множеств A и B имеет место равенство $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. В более общем виде, если элемент a можно выбрать k способами, и после этого, независимо от того, какой элемент a был выбран, элемент b можно выбрать n способами, то упорядоченную пару (a, b) можно выбрать $k \cdot n$ способами.

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечное множество, набор элементов $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ из A называется (n, k)-***выборкой***. Выборка называется ***упорядоченной***, если в ней задан порядок следования элементов, в противном случае выборка называется ***неупорядоченной***.

Упорядоченная (n, k)-выборка с повторениями называется (n, k)-***перестановкой с повторениями***.

Число всех (n, k)***–перестановок с повторениями*** равно n^k.

Упорядоченная (n, k)-выборка без повторений называется (n, k)-***перестановкой***.

Число всех (n,k)***–перестановок*** $P_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

(n,n)-перестановка называется ***перестановкой из*** n ***элементов***.

Число всех перестановок из n ***элементов*** равно $n!$.

Неупорядоченная (n,k)-выборка без повторений называется (n,k)-***сочетанием***.

Число всех (n,k)***–сочетаний*** $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$.

Неупорядоченная (n,k)-выборка с повторениями называется (n,k)-***сочетанием с повторениями***.

Число всех (n,k)***–сочетаний с повторениями*** равно $\dbinom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$.

Бином Ньютона: $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}x^k y^{n-k}$.

Разбиением множества A называется семейство его подмножеств $A_1,\ldots,A_k$, если выполнены условия:

1) $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$; 2) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = A$.

Число упорядоченных разбиений множества мощности n на k подмножеств мощностей $n_1, n_2, \ldots, n_k$ равно $\dbinom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

Формула включений и исключений для n множеств:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}\left|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right|.$$

3.1. Имеется n_1 книг одного автора, n_2 – второго, n_3 – третьего. Каким числом способов можно выбрать

1) одну книгу;
2) две книги разных авторов;

3) три книги разных авторов.

3.2. Каким числом способов можно заполнить анкету, содержащую n вопросов, если на каждый вопрос можно ответить

1) \`да\` или \`нет\`;
2) \`да\`, \`нет\`, \`не знаю\`?

3.3. Сколько палиндромов (слов, читающихся одинаково слева направо и справа налево) длины n можно составить, если в алфавите k букв?

3.4. Сколько матриц с m строками и n столбцами можно составить из элементов 0 и 1?

3.5. Сколько бинарных отношений можно задать на множестве из n элементов? Сколько среди них:

1) рефлексивных?
2) симметричных?
3) антисимметричных?

3.6. Дано множество U из n элементов и в нем подмножество A из k элементов. Определите число подмножеств $B \subseteq U$, удовлетворяющих условию:

1) $B \subset A$;
2) $B \supset A$;
3) $A \cap B = \varnothing$;
4) $A \cap B \neq \varnothing$;
5) $|B \cap A| = 1$;
6) $|B \cap A| \geq 2$.

3.7. Дано множество U из n элементов и в нем подмножества A из k элементов и B из l элементов, причем $|A \cup B| = m$. Найти число подмножеств $X \subseteq U$, удовлетворяющих условию:

1) $X \supseteq A,\ X \supseteq B$;
2) $X \subseteq A,\ X \subseteq B$;
3) $A \cap B \subseteq X \subseteq A$;
4) $X \subseteq A \otimes B$.

3.8. Сколько раз в десятичной записи всех натуральных чисел, меньших 10^n, встречается цифра 9? Цифра 0?

3.9. Сколько делителей у числа 2048? 2310? 2880? Сколько делителей имеет число $p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$, где $p_1,\dots,p_s$–различные простые числа, $k_1,\dots,k_s$ – целые неотрицательные?

3.10. Сколько слов длины n в q–буквенном алфавите, в которых любые две соседние буквы различны?

3.11. Каким числом способов можно на обычной шахматной доске разместить белую и черную ладьи так, чтобы они не атаковали друг друга?

3.12. Каким числом способов можно на шахматной доске поместить черного и белого королей так, чтобы они не атаковали друг друга?

3.13. Сколько матриц с n столбцами и m попарно различными строками можно составить из элементов 0 и 1?

3.14. Сколько имеется перестановок из элементов $1, 2, \dots, n$, в которых

1) 1 стоит раньше 2?
2) 1 и 2 не стоят рядом?
3) между 1 и 2 расположены k других элементов?
4) 1 стоит не на первом месте, 2 – не на втором?

3.15. Сколькими способами можно расставить восемь ладей на обычной шахматной доске так, чтобы они не угрожали друг другу, т.е. чтобы никакие две из них не стояли на одной вертикали или горизонтали?

3.16. Сколько имеется пятизначных десятичных чисел, у которых

1) все цифры различны;
2) есть одинаковые цифры;
3) все цифры различны, причем последняя – не 0;
4) все цифры различны, причем первая – не 9, а последняя – не 0;
5) две первых цифры различны, а две последних –одинаковы;
6) сумма цифр четна ?

3.17. Сколько отношений линейного порядка можно определить на множестве из n элементов?

3.18. Каким числом способов можно разместить n различных предметов по k различным ящикам? Сколько таких размещений, если в каждый ящик укладывается не более одного предмета?

3.19. Сколько существует отображений множества A в множество B, если $|A|=n$, $|B|=m$? Сколько среди них инъективных? Биективных?

3.20. Сколько имеется вариантов выбора трех призеров среди n участников конкурса

1) с указанием занимаемых ими мест?
2) без указания мест?

3.21. Имеется n_1 разных книг одного автора, n_2 – второго и n_3 – третьего. Каким числом способов можно выбрать

1) две книги одного автора;
2) три книги одного автора;
3) одну книгу первого автора, две – второго и три – третьего?

3.22. Каким числом способов можно разделить 10 юношей на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой?

3.23. На плоскости расположены n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?

3.24. На одной из двух параллельных прямых зафиксировано n точек, а на другой – m точек. Сколько имеется треугольников (четырехугольников) с вершинами в данных точках?

3.25. Дано множество U из n элементов и в нем подмножество A из k элементов. Определите число подмножеств $B \subseteq U$, удовлетворяющих условию:
1) $|B \cap A|=2$; 2) $|B-A|=3, |A-B|=4$; 3) $|A \otimes B|=1$.

3.26. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Сколькими способами это можно сделать? В скольких случаях среди этих карт окажется:

1) хотя бы один туз;
2) ровно один туз;
3) ровно четыре туза;
4) не менее двух тузов;

5) ровно два туза?

3.27. Имеется колода из $4n$ карт четырех мастей, по n карт каждой масти, занумерованных числами $1,2,\ldots,n$. Каким числом способов можно выбрать пять карт так, чтобы среди них оказались:

1) пять карт одной масти с последовательными номерами;
2) четыре карты с одинаковыми номерами;
3) три карты с одним номером и две карты с другим;
4) пять карт одной масти;
5) пять карт с последовательными номерами;
6) три карты с одинаковыми номерами;
7) две карты с одинаковыми, остальные с разными номерами.

3.28. Сколько имеется пятизначных десятичных чисел, у которых

1) цифры идут слева направо в возрастающем порядке;
2) ровно три цифры четные;
3) не менее двух четных цифр?

3.29. Каким числом способов из 10 человек можно выбрать три комиссии, если в первой и во второй комиссиях должно быть по 3 человека, а в третьей – 5 человек, и ни один из членов первой комиссии не должен входить во вторую и третью?

3.30. Каким числом способов можно расположить n нулей и k единиц в последовательность так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

3.31. Каким числом способов можно распределить n одинаковых монет между k лицами так, что каждый получает

1) не более одной монеты;
2) не менее одной монеты?

3.32. Каким числом способов можно рассадить n мужчин и m женщин вдоль одной стороны прямоугольного стола так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом?

3.33. Траекторией назовем ломаную линию на плоскости, состоящую из отрезков, параллельных координатным осям, причем длины отрезков – целые числа, а при движении вдоль ломаной от начальной точки каждый вертикальный отрезок проходится снизу вверх, а горизонтальный – слева направо. Найдите число траекторий, начинающихся в точке $(0,0)$, а оканчивающихся

1) в точке (m,n);
2) на прямой $x+y=n$.

3.34. Сколько диагоналей у выпуклого n-угольника? Найдите число точек пересечения этих диагоналей (не считая вершин), если известно, что в каждой из этих точек пересекаются только две диагонали?

3.35. В множестве U из n элементов найдите число пар подмножеств (A,B), удовлетворяющих условиям:

1) $B \subset A$;
2) $A \cap B = \varnothing$;
3) $|A \cap B| = k$;
4) $|A \cup B| = m$, $|A \cap B| = k$;
5) $|A - B| = |B - A| = k$;
6) $|A \otimes B| = 1$.

3.36. Сколькими способами можно выбрать 6 карт из колоды, содержащей 52 карты, так, чтобы среди них были карты каждой масти?

3.37. Каким числом способов можно составить букет из n цветов трех видов, если все цветы одного вида одинаковы и имеется неограниченный запас цветов каждого вида?

3.38. Сколько имеется пятизначных десятичных чисел, у которых цифры идут слева направо в неубывающем порядке?

3.39. Определите число целых положительных (целых неотрицательных) решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$.

3.40. Каким числом способов можно распределить n одинаковых монет между k лицами?

3.41. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове “математика”?

3.42. Каким числом способов можно разместить 7 студентов в трех комнатах общежития, если

1) в одной комнате имеется одно, в другой – два, в третьей – четыре свободных места;

2) в одной комнате имеется два, в другой – три, в третьей – четыре свободных места ?

3.43. Код замка состоит из пяти десятичных цифр. Известно, что среди них один раз встречается цифра 0 и дважды – цифра 3. Сколько комбинаций нужно перебрать, чтобы наверняка открыть замок?

3.44. Каким числом способов можно разбить 14 человек на 7 пар?

3.45. Чему равен коэффициент при $x^4 y^8$ в разложении $(1+x+y)^{20}$?

3.46. Каким числом способов можно kn различных предметов разложить по n одинаковым (неразличимым) ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось ровно k предметов?

3.47. Среди сотрудников фирмы семнадцать человек знают английский язык, десять – немецкий, семеро – французский. Три человека знают английский и французский, два – немецкий и французский, четверо – английский и немецкий.

1) Сколько человек работает в фирме, если каждый знает хотя бы один язык, а два человека знают все три языка?

2) Сколько сотрудников, не знающих ни одного иностранного языка, если в фирме работает тридцать человек и никто из них не знает всех трех языков?

3.48. На одной из кафедр университета работают тринадцать человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский, семеро – немецкий, шестеро – французский. Пятеро знают английский и немецкий, четверо – английский и французский, трое – немецкий и французский.

1) Сколько человек знают все три языка?
2) Сколько человек знают ровно два языка?
3) Сколько человек знают только английский язык?

3.49. Сколько имеется натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые

1) делятся на 3 или на 5;
2) не делятся ни на одно из чисел 2, 3, 5?

3.50. Из 100 опрошенных студентов 50 программируют на алгоритмическом языке Си++, 53 − на Паскале, 42 − на Бейсике, 15 студентов могут программировать на Си++ и на Бейсике, 20 студентов − на Паскале и Бейсике, 25 − на Си++ и Паскале, а 5 студентов программируют на всех трех языках.

1) Сколько студентов не могут программировать ни на одном из перечисленных языков?

2) Сколько студентов программируют хотя бы на одном из перечисленных языков?

3) Сколько студентов программируют только на Паскале?

4) Сколько студентов не программируют ни на Си++, ни на Паскале?

3.51. Дано множество U из n элементов. Каким числом способов в нем можно выбрать три подмножества A, B, C так, чтобы выполнялись заданные условия:

1) $n=7,\ |(A-B)\cup C|=6,\ |C-(A\cap B)|=2;$
2) $n=6,\ |A\cup B|=5,\ |A-(B\cap C)|=1;$
3) $n=7,\ |(A\cap B)-C|=4,\quad |C\cap(A\cup B)|=1;$
4) $n=6,\ |(A-B)\cup C|=4,\ |A\cap B\cap C|=1;$
5) $n=8,\ |A\cup B\cup C|=4,\ |A\cap B|=1.$

3.52. Рассматриваются слова в алфавите $\{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$. Через n_i обозначается число вхождений буквы a_i в слово. Требуется подсчитать число слов длины n, удовлетворяющих данным условиям:

1) $q=5,\ n=8,\ n_1+n_2+n_3=2;$
2) $q=4,\ n=8,\ n_2=n_1+2;$
3) $q=3,\ n=9,\ n_1+n_2<n_3;$
4) $q=3,\ n=9,\ 2n_1 \le n_2+n_3;$
5) $q=5,\ n=7,\ n_1+n_2+n_3=2,\ n_4 \ge 3.$

3.53. Сколькими способами можно переставить буквы слова:

1) «периметр», чтобы «е» шла непосредственно после «р»;
2) «поговорка», чтобы согласные шли в алфавитном порядке;
3) «профессор», чтобы не менялся порядок гласных букв;
4) «корректор», чтобы три буквы «р» не шли подряд.

4. Теория графов

Терминология и обозначения

Граф $G=(V,E)$ задается непустым множеством вершин V и множеством ребер E, состоящим из пар элементов V. Если рассматриваются неупорядоченные пары, граф называется ***неориентированным***, если упорядоченные – ***ориентированным***. Если ребро (a,b) принадлежит графу, то вершины a и b называют ***смежными***. Ребро вида (a,a) называется ***петлей***. Неориентированный граф без петель называют ***обыкновенным***. Во всех задачах этого раздела, где термин "граф" употребляется без уточнения, имеются в виду обыкновенные графы.

Графы $G_1=(V_1,E_1)$ и $G_2=(V_2,E_2)$ называют ***изоморфными***, если существует биекция $f: V_1 \to V_2$, такая, что для любых $a,b \in V_1$ $(a,b) \in E_1$ тогда и только тогда, когда $(f(a), f(b)) \in E_2$. Эта биекция f называется ***изоморфизмом*** графа G_1 на граф G_2. Если графы G_1 и G_2 изоморфны, то пишем, что $G_1 \cong G_2$. Отношение изоморфизма графов есть отношение эквивалентности, так как оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Следовательно, множество всех графов разбивается на классы так, что графы из одного класса попарно изоморфны, а графы из разных классов не изоморфны.

Степень вершины a – количество смежных с ней вершин, обозначается через $d(a)$. ***Набор степеней*** графа – упорядоченная по неубыванию последовательность степеней вершин.

Для графа $G=(V,E)$ справедливо соотношение $\sum\limits_{a \in V} d(a) = 2m$, где m – число ребер графа.

Дополнительный граф к графу $G=(V,E)$ – такой граф $\overline{G}=(V',E')$, у которого $V'=V$, а $(a,b) \in E'$ тогда и только тогда, когда $(a,b) \notin E$.

Подграф графа $G=(V,E)$ – такой граф $G'=(V',E')$, что $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

Остовный подграф графа $G=(V,E)$ – такой граф $G'=(V',E')$, у которого $V'=V$, $E' \subseteq E$, т.е. остовный подграф получается из исходного графа удалением только ребер без удаления вершин.

Порожденный подграф графа $G=(V,E)$ – такой граф $G'=(V',E')$, у которого $V'\subseteq V$, $E'=\{(a,b)\in E \mid a,b\in V'\}$, т.е. порожденный подграф получается из исходного графа удалением вершин и всех ребер, инцидентных удаленным вершинам.

Последовательность вершин $a_1, a_2, \ldots, a_k$, такая, что $(a_i, a_{i+1}) \in E$ для всех $i=1,\ldots,k-1$, называется ***маршрутом,*** соединяющим вершины a_1 и a_k. ***Длина маршрута*** – число ребер $k-1$.

Путь − это маршрут, в котором все ребра различны. ***Простой путь*** – путь, в котором все вершины различны.

Цикл – это замкнутый путь, в котором $a_1 = a_k$ и все ребра различны. ***Простой цикл*** – цикл, в котором вершины $a_1, \ldots, a_{k-1}$ различны.

Связный граф – такой граф, в котором для любых двух вершин имеется маршрут, соединяющий эти вершины.

Компонента связности графа – связный подграф, не содержащийся в большем связном подграфе.

Перешеек – ребро, при удалении которого увеличивается число компонент связности.

Расстояние между вершинами связного графа – длина кратчайшего простого пути, соединяющего эти вершины. ***Эксцентриситет*** вершины – расстояние от этой вершины до наиболее удаленной от нее.

Диаметр графа – максимальный среди всех эксцентриситетов вершин.

Радиус графа – минимальный среди всех эксцентриситетов вершин.

Центральная вершина – вершина, эксцентриситет которой равен радиусу графа. ***Центр*** графа – множество всех центральных вершин.

Эйлеров цикл – цикл, проходящий через все ребра графа. Граф, который имеет эйлеров цикл, называется ***эйлеровым графом***.

Критерий эйлеровости графа. Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.

Гамильтонов цикл – простой цикл, проходящий через все вершины графа. Граф, который имеет гамильтонов цикл, называется ***гамильтоновым графом***.

Двудольный граф – граф, множество вершин которого можно разбить на две части (доли) так, что концы каждого ребра лежат в разных частях.

Критерий двудольности Кенига. Для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы он не содержал циклов нечетной длины.

Дерево – связный граф, не имеющий циклов. ***Лес*** – граф, не имеющий циклов. ***Лист*** в дереве – вершина степени 1.

Пусть T − дерево с n вершинами. Будем считать, что его вершинами являются натуральные числа 1, 2,…, n. Пусть a_1 — наименьший лист в T, а b_1 — смежная с ним вершина. Удалив из T вершину a_1 и ребро $e_1 = (a_1, b_1)$, получим дерево T_1, к которому также применим описанную процедуру. Повторяем ее до тех пор, пока после удаления вершины a_{n-2} и ребра $e_{n-2} = (a_{n-2}, b_{n-2})$ не получим дерево T_{n-2}, состоящее из одного ребра $e_{n-1} = (a_{n-1}, b_{n-1})$. Дереву T ставим в соответствие упорядоченный набор чисел $p(T) = \left(b_1, \ldots, b_{n-2}\right)$, который называется ***кодом Прюфера.***

Пусть $V = \left\{1, 2, \ldots, n\right\}$, $n \geq 3$. Опишем процедуру восстановления по коду Прюфера $p(T) = (b_1, \ldots, b_{n-2})$, где $b_i \in V$ для всех $i = 1, \ldots, n-2$, дерева *T*, вершинами которого являются элементы множества *V*. Находим наименьший элемент a_1 множества *V*, не содержащийся среди элементов последовательности $p(T)$, и восстанавливаем ребро (a_1, b_1) дерева. Далее удаляем a_1 из V и первую компоненту b_1 из последовательности $p(T)$. Продолжаем процедуру для оставшихся чисел, пока не будут удалены все компоненты последовательности $p(T)$. Два оставшихся элемента множества *V* − есть последнее ребро дерева *T*.

Корневое дерево − дерево с выделенной вершиной, которая называется корнем дерева.

K_n – ***полный граф*** с n вершинами, т.е. граф, в котором любые две вершины смежны. O_n – ***пустой граф*** с n вершинами, т.е. граф, в котором никакие две вершины не смежны.

$K_{p,q}$ – ***полный двудольный граф***. В нем множество вершин можно разбить на две части V_1 и V_2, причем $|V_1| = p$, $|V_2| = q$, и две вершины смежны тогда и только тогда, когда они принадлежат разным долям.

Q_n –***n-мерный куб.*** Вершинами этого графа являются все двоичные наборы длины n и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие наборы отличаются ровно в одной позиции.

P_n − ***простой путь*** с n вершинами.

C_n − ***простой цикл*** с n вершинами.

Плоский граф – граф, вершинами которого являются точки плоскости, а ребрам соответствуют непрерывные линии, соединяющие смежные вершины, причем эти линии пересекаются только в концевых точках, т. е. в вершинах. ***Планарный граф*** – граф, изоморфный плоскому.

Гранью плоского графа называется максимальное по включению множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена простой кривой, не пересекающей ребра графа.

Для связного плоского графа $G=(V,E)$ с n вершинами и m ребрами имеет место ***формула Эйлера*** $n+f=m+2$, где f − общее число граней графа.

Во всяком связном планарном графе с n $(n\geq 3)$ вершинами и m ребрами имеет место неравенство $m\leq 3\cdot(n-2)$.

Во всяком связном планарном графе с n $(n\geq 3)$ вершинами и m ребрами, не содержащем циклов длины три, имеет место неравенство $m\leq 2\cdot(n-2)$.

Во всяком связном планарном графе с n $(n\geq 3)$ вершинами и m ребрами, не содержащем циклов длины меньше $k\,(k\geq 3)$, имеет место неравенство $m\leq \dfrac{k}{k-2}(n-2)$.

Операция подразбиения ребра (a,b) в графе $G=(V,E)$ состоит в удалении ребра (a,b) и добавлении двух новых ребер $(a,c),(c,b)$, где c − новая вершина. Графы G и G' называются ***гомеоморфными***, если оба они могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер.

Критерий планарности Понтрягина-Куратовского. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных графам K_5 или $K_{3,3}$.

Операция стягивания ребра (a,b) в графе $G=(V,E)$ состоит в отождествлении (слиянии) смежных вершин a и b. Граф G называется ***стягиваемым к графу*** G', если G' получается из G в результате некоторой последовательности стягиваний ребер.

Критерий планарности Вагнера. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к графам K_5 или $K_{3,3}$.

4.1. Построить граф пересечений граней куба. Написать матрицу смежности полученного графа.

4.2. В графе n вершин и m ребер. Сколько у него

1) остовных подграфов;
2) порожденных подграфов?

4.3. Определить число графов с n вершинами, в которых допускаются ребра следующих типов:

1) неориентированные и петли;
2) ориентированные и петли;
3) ориентированные, но не петли.

4.4. Определить число ориентированных графов с n вершинами, в которых каждая пара различных вершин соединена:

1) не более чем одним ребром;
2) точно одним ребром.

4.5. Выяснить, существуют ли графы с набором степеней:

1) (0,2,2,3,3); 2) (2,2,2,3,3);
3) (2,2,3,3,3); 4) (0,1,2,3,4).

4.6. Определить число ребер в каждом из графов K_n, $K_{p,q}$, Q_n.

4.7. Граф перестановок порядка k строится следующим образом. Его вершины соответствуют всевозможным перестановкам элементов $1, 2, \ldots, k$. Две вершины смежны тогда и только тогда, когда одна из соответствующих перестановок может быть получена из другой перестановки одной транспозицией. Определите число ребер в этом графе.

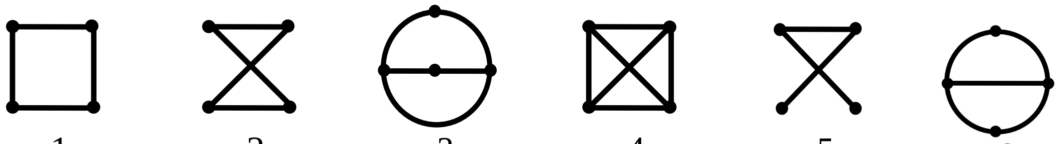
4.8. При каких n существуют графы с n вершинами, каждая из которых имеет степень 3? степень 4?

4.9. Вершина степени 0 называется *изолированной*. Определите число графов с n вершинами, в которых

1) данные k вершин являются изолированными;

2) нет изолированных вершин (примените метод включения и исключения).

4.10. Графы, изображенные на рис. 2, разбить на классы попарно неизоморфных графов.



1 2 3 4 5 6

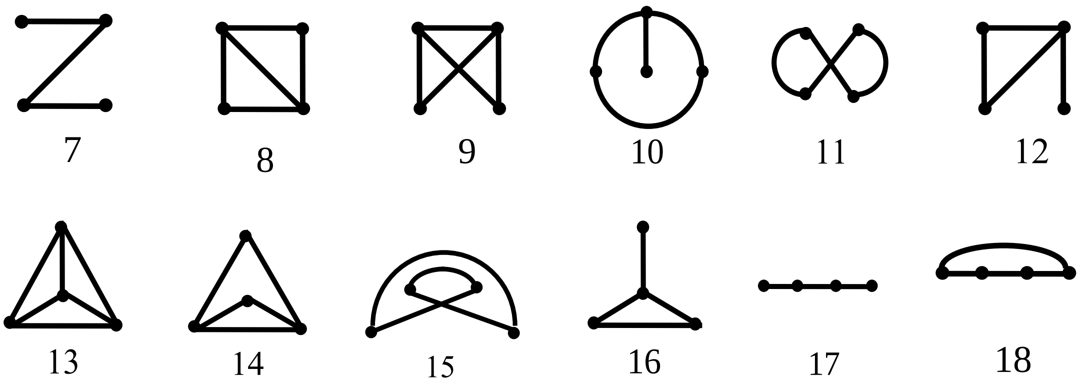


Рис. 2. К задаче 4.10

4.11. Перечислить все попарно неизоморфные графы:

1) с 4 вершинами;
2) с 6 вершинами и 3 ребрами;
3) с 6 вершинами и 13 ребрами.

4.12. Перечислите все попарно неизоморфные ориентированные графы без петель с тремя вершинами и тремя ребрами.

4.13. Графы, изображенные на рис. 3, разбить на классы попарно неизоморфных графов.

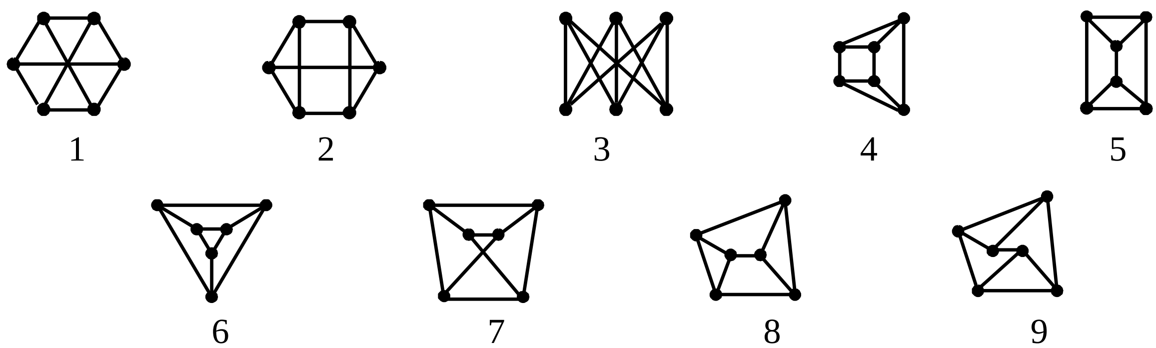


Рис. 3. К задаче 4.13

4.14. Графы, изображенные на рис. 4, разбить на классы попарно неизоморфных графов.

Рис. 4. К задаче 4.14

4.15. Графы, изображенные на рис. 5, разбить на классы попарно неизоморфных графов.

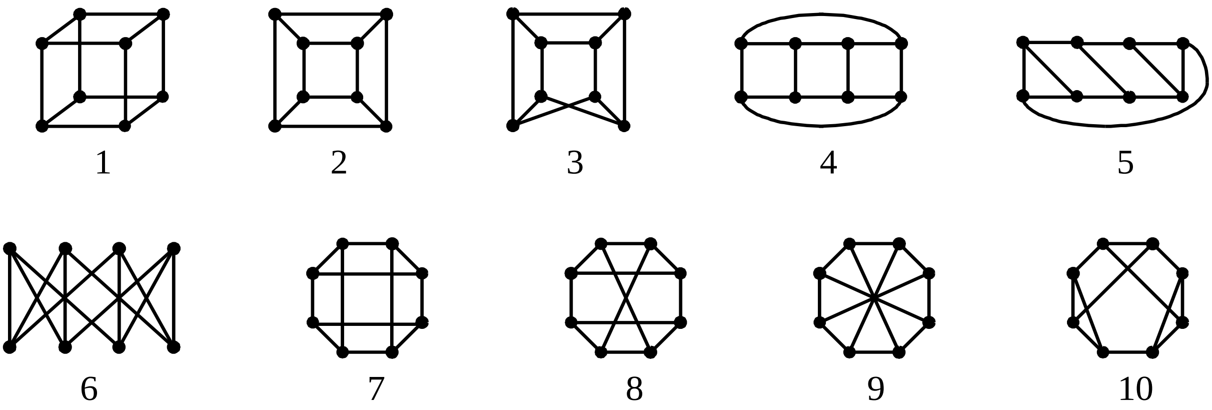


Рис. 5. К задачам 4.15 и 4.33

4.16. Графы, изображенные на рис. 6, разбить на классы попарно неизоморфных графов.

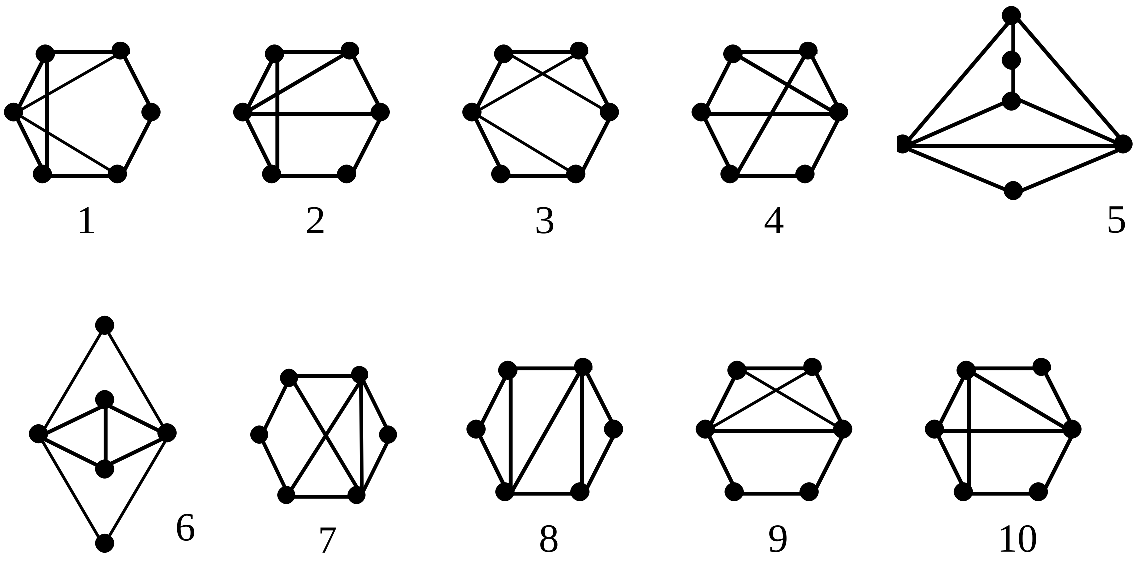


Рис. 6. К задаче 4.16

4.17. Граф G называется самодополнительным, если $G \cong \overline{G}$. Найти все самодополнительные графы с числом вершин, не превосходящим 6.

4.18. Определите число простых путей и простых циклов длины k в графах K_n и $K_{p,q}$.

4.19. В графе Q_n найдите число простых путей длины n, соединяющих вершины (0,0,...,0) и (1,1,...,1).

4.20. Доказать, что в каждом графе с не менее чем двумя вершинами найдутся две вершины с одинаковыми степенями.

4.21. Найти радиус и диаметр каждого из графов $P_n, C_n, Q_n,\ K_{p,q}$.

4.22. Найти радиус, диаметр, центр графа, заданного матрицей смежности:

$$1)\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&1&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix};\quad 2)\begin{pmatrix} 0&1&1&0&1&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&0&1&0&0&1\\ 1&1&1&0&1&1&1&0 \end{pmatrix};\quad 3)\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1&1&0\\ 0&1&0&1&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&1&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Определить, является ли граф эйлеровым. В случае положительного ответа построить в нем эйлеров цикл.

4.23. Построить граф, центр которого:

1) состоит ровно из одной вершины;
2) состоит из двух вершин;
3) состоит из трех вершин и не совпадает с множеством всех вершин;
4) совпадает с множеством всех вершин.

4.24. **Н**айти радиус, диаметр, центр графа, заданного матрицей смежности:

$$1)\begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0 \end{pmatrix};\quad 2)\begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&0 \end{pmatrix};\quad 3)\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Определить, является ли граф гамильтоновым. В случае положительного ответа построить в нем гамильтонов цикл.

4.25. Какое наименьшее число ребер может быть в связном графе с n вершинами?

4.26. Могут ли графы G и $\overline{G}$ оба быть несвязными?

4.27. Найти граф G с минимальным числом вершин $n > 1$, такой, что G и $\overline{G}$ оба связны.

4.28. Какое наибольшее число ребер может быть в несвязном графе с n вершинами?

4.29. При каких p и q в графе $K_{p,q}$ есть эйлеров цикл? Эйлеров путь? Гамильтонов цикл? При каких n в графе Q_n есть эйлеров цикл?

4.30. Доказать, что в графе Q_n при любом $n \geq 2$ имеется гамильтонов цикл.

4.31. Найти граф с шестью вершинами, который имеет эйлеров цикл, но не имеет гамильтонова цикла.

4.32. Найти граф с шестью вершинами, который имеет гамильтонов цикл, но не имеет эйлерова цикла.

4.33. Какие из графов, изображенных на рис. 5, являются двудольными?

4.34. Каково наибольшее число ребер в двудольном графе с n вершинами?

4.35. Двудольный граф имеет k компонент связности. Каким числом способов его можно разбить на две доли?

4.36. Перечислить все попарно неизоморфные деревья с числом вершин, не превышающим 6.

4.37. Найти два неизоморфных дерева с одинаковыми наборами степеней.

4.38. Сколько ребер в лесе с n вершинами и k компонентами связности?

4.39. Сколько ребер в связном графе с n вершинами, если в нем имеется единственный цикл?

4.40. В дереве с n вершинами степень каждой вершины равна 1 или k. Сколько листьев в таком дереве?

4.41. Найти число корневых деревьев с множеством вершин $(1,\ldots,n)$.

4.42. Построить код Прюфера для деревьев, изображенных на рис.7.

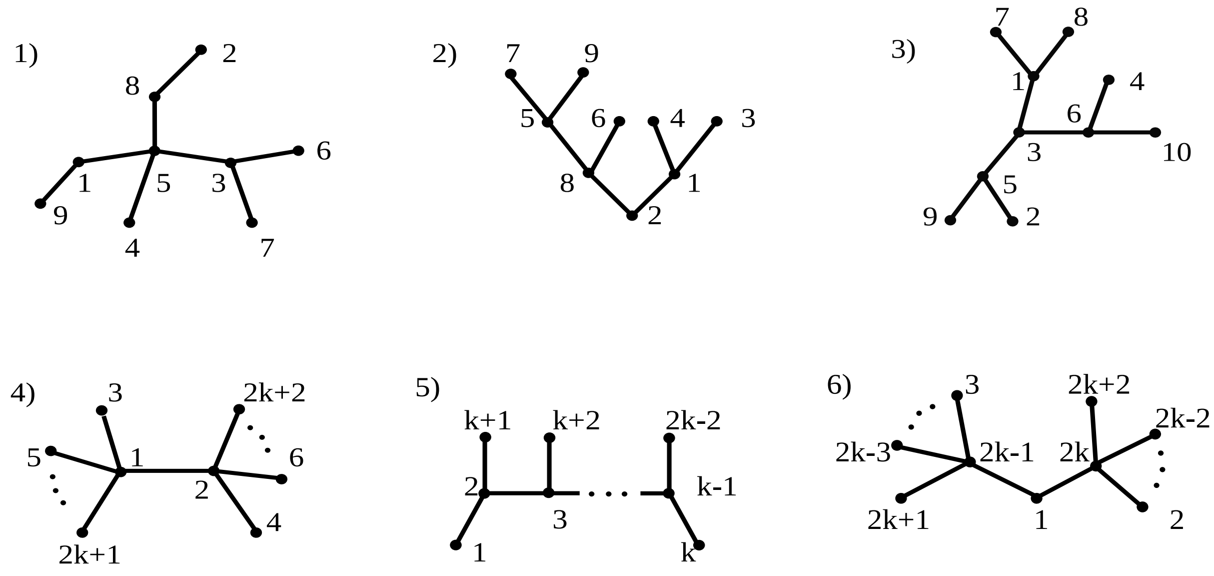


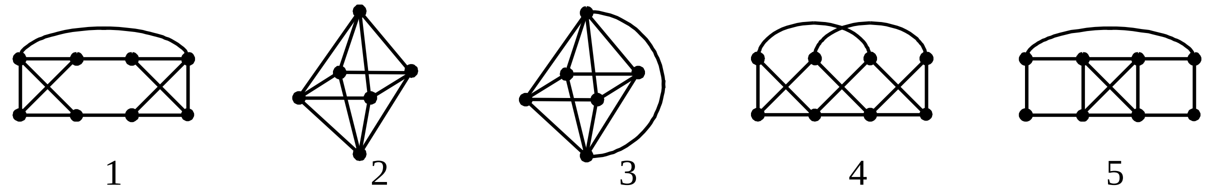
Рис. 7. К задаче 4.42

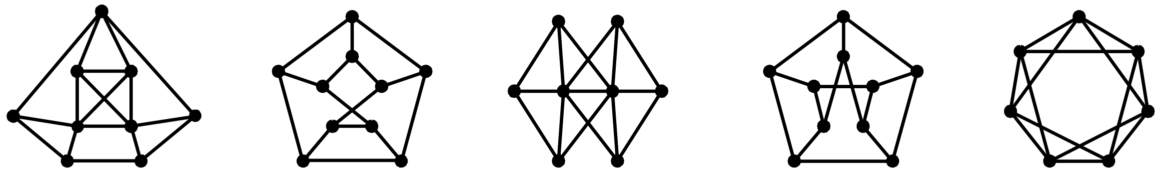
4.43. По заданному коду Прюфера $p(T)$ восстановить дерево. Найти центральные вершины восстановленного дерева.

1) $P(T) = (4,1,6,2,2,2,7)$;
2) $P(T) = (4,2,3,4,2,3,1,1)$;
3) $P(T) = (5,2,5,3,5,4,9,6)$;
4) $P(T) = (\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n-2})$;
5) $P(T) = (1,2,\ldots,n-2)$;
6) $P(T) = (3,3,4,5,\ldots,n-2,n-2)$.

4.44. Найти все графы, которые являются деревьями вместе со своими дополнениями.

4.45. Какие из графов, изображенных на рис. 8, планарны?





6 7 8 9 10

Рис. 8. К задаче 4.45

4.46. Какое наименьшее количество ребер нужно удалить из графа G, чтобы получить планарный граф, если:

1) $G = K_6$;
2) $G = Q_4$;
3) $G -$ граф Петерсена (рис. 9)?

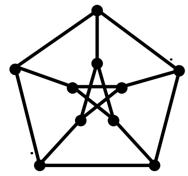


Рис. 9. Граф Петерсена

4.47. Построить граф с 6 вершинами и 12 ребрами, который содержит одновременно подграфы, гомеоморфные K_5 и $K_{3,3}$.

4.48. Выяснить, существует ли планарный граф, у которого:

1) 7 вершин и 16 ребер;
2) 8 вершин и 17 ребер.

4.49. Какое наибольшее число граней может быть у плоского пятивершинного графа, не имеющего петель и кратных ребер? Изобразить этот граф.

4.50. При каких n граф Q_n планарен?

4.51. ***Объединением графов*** $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Можно ли граф K_7 разложить в объединение двух планарных подграфов?

4.52. Перечислите все графы с указанными свойствами и значениями параметров (в скобках указано число искомых графов):

1) 6 вершин, 5 ребер (15);
2) 7 вершин, 4 ребра (10);
3) связные, 6 вершин, 6 ребер (13);
4) связные, 5 ребер (12);
5) две компоненты связности, 4 ребра (9);
6) без изолированных вершин, 4 ребра (11);
7) набор степеней (2,2,2,3,3,4) (4);

8) набор степеней (2,2,3,3,3,3) (4);
9) деревья, 7 вершин (11);
10) деревья, набор степеней (1,1,1,1,2,2,2,3,3) (9);
11) деревья, набор степеней (1,1,1,1,1,1,2,2,3,4) (8);
12) леса, 5 вершин (10);
13) деревья, степени не более 3, 8 вершин (11);
14) графы с единственным циклом, 5 вершин (9);
15) графы с единственным циклом, 6 вершин, 5 ребер (8);
16) связные, не имеющие циклов длины 3, 5 вершин (6);
17) имеющие эйлеров цикл, 6 вершин (8);
18) имеющие эйлеров цикл, 7 вершин, 9 ребер (3);
19) имеющие гамильтонов цикл, 5 вершин (8);
20) имеющие гамильтонов цикл, 6 вершин, 8 ребер (6);
21) имеющие цикл длины 6, 5 вершин (6);
22) непланарные, 6 вершин, 11 ребер (4);
23) двудольные, 5 вершин (13);
24) двудольные, 6 вершин, 6 ребер (6);
25) ориентированные, без петель, 3 вершины (16);
26) ориентированные, без петель, 4 вершины, 3 ребра (13).

5. Функции алгебры логики

Терминология и обозначения

Пусть $E=\{0,1\}$. Функция $f(x_1, x_2,...,x_n)$, определенная на множестве E^n и принимающая значения из множества E, называется ***функцией алгебры логики*** или ***булевой функцией*** от n переменных, т.е. $f: E^n \to E$.

Имеются четыре булевы функции от одной переменной (см. табл. 1).

x	0	x	$\bar{x}$	1	
0	0	0	1	1	
1	0	1	0	1	

Табл.1. Функции одной переменной

Эти функции носят соответственно следующие названия:

0 – константа ***нуль***.

x – ***тождественная функция***.

$\bar{x}$ – ***отрицание*** x, читается как «не x».

1 – константа ***единица.***

x y	$x \& y$	$x \vee y$	$x \oplus y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0 0	0	0	0	1	1	1	1
0 1	0	1	1	1	0	1	0
1 0	0	1	1	0	0	1	0
1 1	1	1	0	1	1	0	0

Табл. 2. Элементарные функции от двух переменных

В табл. 2 сведены элементарные булевы функции от двух переменных.

$x \& y$ – ***конъюнкция*** x и y, обозначается также $x \cdot y$ или xy, читается «x и y».

$x \vee y$ – ***дизъюнкция*** x и y, читается «x или y».

$x \oplus y$ – ***сложение по модулю*** **2** x и y, читается «x плюс y».

$x \to y$ – ***импликация*** x и y, читается «из x следует y».

$x \leftrightarrow y$ – ***эквивалентность*** x и y, часто обозначается как $x \sim y$, читается «x эквивалентно y».

$x \mid y$ — ***штрих Шеффера*** x и y, или ***антиконъюнкция*** x и y.

$x \downarrow y$ — ***стрелка Пирса*** x и y, или ***антидизъюнкция*** x и y.

Суперпозицией функций $f_1,..., f_m$ называется функция f, полученная с помощью подстановок этих функций друг в друга и переименования переменных.

Основные эквивалентности алгебры логики

1. Функция $x \circ y$, где $\circ \in \{ \&, \vee, \oplus, \leftrightarrow, |, \downarrow \}$, обладает ***свойством коммутативности***: $x \circ y = y \circ x$.

2. Функция $x * y$, где $* \in \{ \&, \vee, \oplus, \leftrightarrow \}$, обладает ***свойством ассоциативности***: $(x * y) * z = x * (y * z)$.

3. ***Дистрибутивные законы***:

$$(x \vee y) \,\&\, z = (x \,\&\, z) \vee (y \,\&\, z);$$

$$(x \,\&\, y) \vee z = (x \vee z) \,\&\, (y \vee z);$$

$$(x \oplus y) \,\&\, z = (x \,\&\, z) \oplus (y \,\&\, z).$$

4. ***Законы де Моргана***:

а) $\overline{x \,\&\, y} = \overline{x} \vee \overline{y}$; *б)* $\overline{x \vee y} = \overline{x} \,\&\, \overline{y}$.

5. ***Законы поглощения***:

а) $x \vee (x \,\&\, y) = x$; *б)* $x \,\&\, (x \vee y) = x$.

6. *а)* $x \vee (\overline{x} \,\&\, y) = x \vee y$; *б)* $x \,\&\, (\overline{x} \vee y) = x \,\&\, y$.

7. *а)* $x \,\&\, \overline{x} = x \,\&\, 0 = x \oplus x = 0$; *б)* $x \vee \overline{x} = x \vee 1 = x \leftrightarrow x = 1$.

8. *а)* $x \,\&\, x = x \vee x = x \,\&\, 1 = x \vee 0 = x \oplus 0 = x$;

б) $x \oplus 1 = x \to 0 = x \leftrightarrow 0 = x \,|\, x = x \downarrow x = \overline{x}$;

9. *а)* $x \oplus y = (x \,\&\, \overline{y}) \vee (\overline{x} \,\&\, y) = (x \vee y) \,\&\, (\overline{x} \vee \overline{y})$;

б) $x \to y = \overline{x} \vee y$;

в) $x \leftrightarrow y = \overline{x \oplus y} = (x \,\&\, y) \vee (\overline{x} \,\&\, \overline{y}) = (x \vee \overline{y}) \,\&\, (\overline{x} \vee y)$;

г) $x \,|\, y = \overline{x \,\&\, y} = \overline{x} \vee \overline{y}$;

д) $x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{x} \,\&\, \overline{y}$.

Соседними наборами по k-ой компоненте называются наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}, 0, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}, 1, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_n)$, различающиеся только в k-ой компоненте.

Переменная x_k для функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***существенной***, если найдется пара наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, соседних по k-ой компоненте, таких, что $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$. В противном случае переменная x_k называется ***фиктивной***.

Пусть для функции $f(x_1, x_2,...,x_n)$ переменная x_k является фиктивной. Возьмем таблицу, задающую функцию $f(x_1, x_2,...,x_n)$. Вычеркнем из нее все строки вида $\alpha_1,...,\alpha_{k-1}, 1, \alpha_{k+1},...,\alpha_n$, $f(\alpha_1,...,\alpha_{k-1}, 1, \alpha_{k+1},...,\alpha_n)$, а также столбец, соответствующий переменной x_k. Полученная таблица будет определять некоторую булеву функцию $g(x_1, x_2,...,x_{k-1}, x_{k+1},...,x_n)$ от $n-1$ переменной. Будем говорить, что функция $g(x_1, x_2,...,x_{k-1}, x_{k+1},...,x_n)$ получена из функции $f(x_1, x_2,...,x_n)$ ***путем удаления фиктивной переменной*** x_k, а также что функция $f(x_1, x_2,...,x_n)$ получается из $g(x_1, x_2,...,x_{k-1}, x_{k+1},...,x_n)$ ***путем введения фиктивной переменной*** x_k.

Две функции $f(\tilde{x}^n)$ и $g(\tilde{x}^m)$ называются ***равными***, если функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно получить из функции $g(\tilde{x}^m)$ путем введения и удаления фиктивных переменных. Для любой функции, отличной от константы 0 или 1, существует равная ей, у которой все переменные существенные.

Функция $f^*(x_1,...,x_n)$ называется ***двойственной*** к функции $f(x_1,...,x_n)$, если $f^*(x_1,...,x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$.

Если функция $f(\tilde{x}^n)$ не равна тождественно нулю, тогда она может быть представлена в ***совершенной дизъюнктивной нормальной форме*** (сокращённо ***СДНФ***):

$$f(x_1,...,x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n) \\ f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n},$$

где дизъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1,...,\sigma_n)$ из E^n, на которых функция $f(\tilde{x}^n)$ обращается в единицу.

Если функция $f(\tilde{x}^n)$ не равна тождественно единице, тогда она может быть представлена в ***совершенной конъюнктивной нормальной форме*** (сокращённо ***СКНФ***):

$$f(x_1,..., x_n) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n) \\ f(\sigma_1,...,\sigma_n)=0}} \left(x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}} \right),$$

где конъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ из E^n, на которых функция $f(\tilde{x}^n)$ обращается в нуль.

5.1. По $f(x_1,x_2)$ и $g(x_1,x_2)$, заданным векторно, построить функцию h:

1) $\tilde{\alpha}_f=(1011)$, $\tilde{\alpha}_g=(0111)$,

а) $h(\tilde{x}^2)=f(x_1,g(x_1,x_2))$; *б*) $h(\tilde{x}^2)=g(x_2,f(x_2,x_1))$;

в) $h(\tilde{x}^2)=f(f(x_1,g(x_1,x_2)),g(x_1,x_2))$;

г) $h(\tilde{x}^3)=g(x_1,x_2)\oplus f(x_3,g(x_1,x_2))$;

д) $h(\tilde{x}^3)=f(x_2,g(x_3,x_1))\leftrightarrow g(x_1,g(x_2,x_3))$.

2) $\tilde{\alpha}_f=(1010)$, $\tilde{\alpha}_g=(0110)$,

а) $h(\tilde{x}^3)=f(x_3,g(x_1,x_2))$; *б*) $h(\tilde{x}^3)=g(g(x_3,x_2),f(x_1,x_3))$;

в) $h(\tilde{x}^3)=f(f(x_3,g(x_1,x_2)),g(x_1,x_2))$;

г) $h(\tilde{x}^3)=f(f(x_1,x_2),g(x_3,x_1))\to g(x_1,g(x_1,x_2))$.

5.2. Доказать тождества:

1) $x\vee y=(x\to y)\to y$; 2) $x\leftrightarrow y=(x\to y)\&(y\to x)$;

3) $x\downarrow y=((x\mid x)\mid(y\mid y))\mid((x\mid x)\mid(y\mid y))$;

4) $x\vee(y\leftrightarrow z)=(x\vee y)\leftrightarrow(x\vee z)$;

5) $x\,\&\,(y\leftrightarrow z)=((x\,\&\,y)\leftrightarrow(x\,\&\,z))\leftrightarrow x$;

6) $x\to(y\leftrightarrow z)=(x\to y)\leftrightarrow(x\to z)$;

7) $x\vee(y\to z)=(x\vee y)\to(x\vee z)$;

8) $x\,\&\,(y\to z)=(x\to y)\to(x\,\&\,z)$;

9) $x\to(y\vee z)=(x\to y)\vee(x\to z)$;

10) $x\to(y\,\&\,z)=(x\to y)\,\&\,(x\to z)$;

11) $x\to(y\to z)=(x\to y)\to(x\to z)$.

5.3. Выяснить, эквивалентны ли формулы A и B:

1) $A=\overline{x\oplus y\cdot z}\cdot\overline{\bar{y}\to x\cdot z}\cdot(\bar{x}\downarrow y)$, $B=\overline{(x\cdot y\to(y\downarrow z))\vee x\cdot z}\cdot z$;

2) $A=(x\oplus y\cdot z)\to(\bar{x}\to(y\to z))$, $B=x\to((y\to z)\to x)$;

3) $A=(x\cdot y\to z)\vee((x\downarrow y)\mid z),\ B=((x\to y\cdot z)\oplus(x\leftrightarrow y))\vee(y\to x\cdot z)$;

4) $A=(\bar{x}\to(\bar{y}\to(x\leftrightarrow z)))\cdot(x\leftrightarrow(y\to(z\vee(x\to y)))),B=(x\to(y\to z))\to x$;

5) $A=(((x\mid y)\downarrow\bar{z})\mid y)\downarrow(\bar{y}\to z),\ B=((x\mid y)\downarrow(y\mid\bar{z}))\cdot(x\to(y\to z))$;

6) $A=(\bar{x}\vee\bar{y}\cdot z)\to((x\to y)\to((y\vee z)\to\bar{x})),\ B=(x\to y)\to(\bar{y}\to\bar{x})$;

7) $A=(x\mid\bar{y})\to((y\downarrow\bar{z})\to(x\oplus z)),\ B=x\cdot y\cdot z\oplus(\bar{x}\to z)$;

8) $A=(x\cdot\bar{y}\vee\bar{x}\cdot z)\oplus((y\to z)\to\bar{x}\cdot y),\ B=(x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\oplus y)\oplus z$;

9) $A=(\bar{x}\vee y)\to((y\mid\bar{z})\to(x\leftrightarrow x\cdot z)),\ B=x\cdot y\vee(\overline{x\to x\cdot\bar{y}}\to z)$;

10) $A=x\to((\bar{x}\cdot\bar{y}\to(\bar{x}\cdot\bar{z}\to y))\to y)\cdot z,\ B=\overline{x\cdot(y\to\bar{z})}$;

11) $A=((x\vee y)\cdot\bar{z}\to((x\leftrightarrow\bar{z})\oplus\bar{y}))\cdot((x\oplus y)\cdot\bar{z}),\ B=(x\to y\cdot z)\cdot\overline{x\to y}$;

12) $A=\overline{((x\leftrightarrow y)\to(x\to\bar{z}))}\vee(x\oplus\bar{y}\cdot z),\ B=x\leftrightarrow(z\to y)$;

13) $A=\overline{(x\downarrow y)\vee(x\leftrightarrow z)}\mid(x\oplus y\cdot z),\ B=\bar{x}\cdot y\cdot z\vee\overline{x\to z}$;

14) $A=x\to((y\to z)\to y\cdot z),\ B=(x\vee(x\cdot y\to z))\cdot(x\oplus y\cdot z)$;

15) $A=\overline{((x\vee y)\to y\cdot z)\vee(y\to x\cdot z)}\vee(x\to(\bar{y}\to z)),\ B=(x\to y)\vee z$.

5.4. Перечислить все существенные и фиктивные переменные у следующих функций:

1) $f(\tilde{x}^3)=(10101010)$;

2) $f(\tilde{x}^3)=(10011001)$;

3) $f(\tilde{x}^3)=(00111100)$;

4) $f(\tilde{x}^4)=(0101111101011111)$;

5) $f(\tilde{x}^4)=(1100110000110011)$;

6) $f(\tilde{x}^4)=(1011010110110101)$;

7) $f(\tilde{x}^2)=((x_1\vee x_2)\to x_1\cdot x_2)\oplus(x_1\to x_2)\cdot(x_2\to x_1)$;

8) $f(\tilde{x}^2)=(x_1\cdot x_2\oplus(x_1\to x_2))\to(x_1\leftrightarrow x_1\cdot x_2)$;

9) $f(\tilde{x}^3)=((x_1\to\overline{x_2})\oplus(x_2\to\overline{x_3}))\oplus(x_2\to x_3)$;

10) $f(\tilde{x}^3)=((x_1\vee x_2\cdot\overline{x_3})\to(x_2\to x_1\cdot x_3))\to(x_1\vee x_3)$;

11) $f(\tilde{x}^3)=((x_1\downarrow(x_2\mid x_3))\downarrow(x_2\downarrow(x_1\mid x_3)))\downarrow(x_1\mid x_2)$.

5.5. Показать, что x_1 – фиктивная переменная у функции *f*, реализовав для этой цели функцию f формулой, не содержащей явно переменную x_1:

1) $f(\tilde{x}^2)=(x_2\to x_1)\cdot(x_2\downarrow x_2)$;

2) $f(\tilde{x}^2)=(x_1\leftrightarrow x_2)\vee(x_1\mid x_2)$;

3) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \oplus x_2) \to x_3) \cdot \overline{(x_3 \to x_2)}$;

4) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}) \leftrightarrow (\overline{x_1} \to \overline{x_2} \cdot x_3)) \cdot (x_2 \downarrow x_3)$;

5) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \to (x_1 x_2 \mid x_3)) \oplus (x_2 \to x_1) \cdot x_3$.

5.6. Найти число всех функций от n переменных, которые на противоположных наборах принимают одинаковые значения. При n = 2, 3 найти все такие функции, существенно зависящие от всех переменных.

5.7. Найти число всех функций от n переменных, которые на противоположных наборах принимают противоположные значения. При n = 2, 3 найти все такие функции, существенно зависящие от всех переменных.

5.8. Найти число всех функций от n переменных, которые на любой паре соседних наборов принимают противоположные значения. Найти вид этих функций.

5.9. Доказать, что если у функции $f(\tilde{x}^n)$ $(n \ge 1)$ имеются фиктивные переменные, то она принимает значение 1 на чётном числе наборов. Верно ли обратное утверждение?

5.10. Выяснить при каких $n\,(n \ge 2)$ функция $f(\tilde{x}^n)$ зависит существенно от всех своих переменных:

1) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee \ldots \vee x_n) \to ((x_1 \vee x_2) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} \vee x_n) \cdot (x_n \vee x_1))$;

2) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 x_2 \vee \ldots \vee x_{n-1} x_n \vee x_n x_1) \to (x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus x_{n-1} x_n \oplus x_n x_1)$;

3) $f(\tilde{x}^n) = ((x_1 \vee \ldots \vee x_n) \to x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) \to (x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1)$;

4) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \mid x_2) \oplus (x_2 \mid x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \mid x_n) \oplus (x_n \mid x_1)$;

5) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \to (x_2 \to \ldots \to (x_{n-1} \to x_n) \ldots)) \to (x_1 \to x_n) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} \to x_n)$.

5.11. Используя непосредственно определение двойственности булевых функций, а также основные тождества, выяснить, является ли функция g двойственной к функции f:

1) $f = x \oplus y,\ g = x \leftrightarrow y$;

2) $f = x \mid y,\ g = x \downarrow y$;

3) $f = x \to y,\ g = \overline{x} \cdot y$;

4) $f = x \cdot y \to z,\ g = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$;

5) $f = (\overline{x} \to \overline{y}) \to (y \to x),\quad g = (x \to y) \cdot (\overline{y} \to \overline{x})$;

6) $f = x \cdot y \vee z,\ g = x \cdot (y \vee z)$.

5.12. Используя принцип двойственности, построить и упростить формулу, реализующую функцию, двойственную к функции *f*.

1) $f = (x \vee y \vee z) \cdot (y \oplus z) \vee x \cdot y \cdot z$;

2) $f = (x \vee (1 \to y)) \vee y \cdot \bar{z} \vee \left(\bar{x} \mid \overline{y \downarrow \bar{z}}\right)$;

3) $f = (x \downarrow y) \oplus ((x \mid y) \downarrow (\bar{x} \leftrightarrow y \cdot z))$;

4) $f = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee (y \cdot \bar{z} \oplus 1)) \downarrow z$;

5) $f = (x \cdot (y \cdot z \vee 0) \leftrightarrow (z \cdot 1 \vee \bar{x} \cdot y)) \vee \bar{y} \cdot z$;

6) $f = (x \downarrow z) \oplus ((x \vee y) \leftrightarrow (\bar{x} \downarrow (y \vee \bar{z})))$.

5.13. Представить в совершенной д.н.ф. и совершенной к.н.ф. функции:

1) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_2}\, x_3 \vee (x_1 \to x_2 x_3)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \leftrightarrow \overline{x_2}) \vee (x_1 x_3 \oplus (x_2 \to x_3))$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (\overline{x_1} \cdot x_2 \oplus x_3) \cdot (x_1 \cdot x_3 \to x_2)$;

4) $f(\tilde{x}^3) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \cdot (x_1 \cdot x_2 \vee x_3)$;

5) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \oplus (x_1 \mid x_2 \cdot x_3)$;

6) $f(\tilde{x}^3) = (\overline{x_1} \cdot x_2 \to x_3) \cdot ((x_1 \to x_3) \to x_2)$.

5.14. Построить из заданной д.н.ф. функции ее совершенную д.н.ф.:

1) $f(\tilde{x}^3) = \overline{x_1} \cdot x_2 \vee \overline{x_3}$;

2) $f(\tilde{x}^3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \vee x_2 \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot \overline{x_3}$;

3) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee x_2 \cdot x_3 \vee \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$.

5.15. Построить из заданной к.н.ф. функции ее совершенную к.н.ф.:

1) $f(\tilde{x}^3) = \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \vee x_3)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x_2} \vee x_3) \cdot \overline{x_3}$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (\overline{x_1} \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \overline{x_3}) \cdot (x_2 \vee x_3)$.

5.16. Подсчитать число функций $f\left(\tilde{x}^n\right)$, у которых совершенная д.н.ф. удовлетворяет следующему условию:

1) каждая элементарная конъюнкция содержит хотя бы две буквы с отрицаниями;
2) отсутствуют элементарные конъюнкции, содержащие нечетное число букв с отрицаниями;
3) в каждой элементарной конъюнкции число букв с отрицаниями не больше числа букв без отрицаний.

5.17. Выразить через полином Жегалкина все элементарные функции алгебры логики от двух переменных.

5.18. Методом неопределенных коэффициентов найти полиномы Жегалкина для следующих функций:

1) $f\left(\tilde{x}^2\right)=(0100)$;
2) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(01101001)$;
3) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(10001110)$;
4) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(00000111)$;
5) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(01100110)$.

5.19. Построить полином Жегалкина для функции $f\left(\tilde{x}^n\right)$:

1) $f\left(\tilde{x}^2\right)=x_1\to\left(x_2\to\overline{x_1}\cdot x_2\right)$;
2) $f\left(\tilde{x}^2\right)=x_1\cdot\left(x_2\leftrightarrow x_1\cdot\overline{x_2}\right)$;
3) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(x_1\downarrow x_2\right)\mid\left(x_2\downarrow x_3\right)$;
4) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(x_1\vee x_2\right)\cdot\left(x_1\mid\left(x_3\to x_2\right)\right)$;
5) $f\left(\tilde{x}^3\right)=x_1\downarrow\left(\left(x_1\to x_2\right)\vee\overline{x_3}\right)$;
6) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(x_1\to\left(x_2\to x_3\right)\right)\cdot\left(\left(x_1\to x_2\right)\to x_3\right)$;
7) $f(x,y,z)=x\vee\bar{y}\vee\left(\left(x\oplus\left(y\downarrow z\right)\right)\to\bar{y}\cdot z\right)$;
8) $f(x,y,z)=\left(\left(x\leftrightarrow y\right)\downarrow z\right)\cdot\left(y\cdot\bar{z}\to\left(x\oplus y\cdot z\right)\right)$;
9) $f(x,y,z)=\left(x\vee y\cdot\bar{z}\right)\oplus\left(x\cdot\bar{y}\leftrightarrow\left(x\to y\cdot\bar{z}\right)\right)$
10) $f(x,y,z)=\left(x\vee y\vee\bar{z}\right)\to\left(x\cdot\bar{y}\leftrightarrow\left(x\oplus y\cdot\bar{z}\right)\right)$.

5.20. Найти функцию $f\left(\tilde{x}^n\right)$, у которой длина полинома Жегалкина в 2^n раз превосходит длину ее совершенной д.н.ф. $(n \geq 1)$.

5.21. Пользуясь свойством единственности совершенных форм и полинома Жегалкина, выяснить, равносильны ли выражения A и B, представив их в совершенной д.н.ф. или к.н.ф., либо построив для них полиномы Жегалкина:

1) $A = x_1 \to (x_2 \to x_3)$, $B = (x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3)$;
2) $A = (x_1 \cdot x_2 \to x_3) \to (x_1 \to x_3)$, $B = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}$;
3) $A = x_1 \cdot x_2 \to x_3$, $B = (x_1 \to x_3)(x_2 \to x_3)$;
4) $A = x_1 \cdot x_2 \vee (x_3 \to x_1)$, $B = \overline{x_1} \to \overline{x_3}$;
5) $A = (x_1 \to x_3)(x_2 \to x_3)$, $B = (x_1 \vee x_2) \to x_3$;
6) $A = x_1 \leftrightarrow x_2$, $B = (x_1 x_3 \leftrightarrow x_2 x_3)((x_1 \vee x_3) \leftrightarrow (x_2 \vee x_3))$.

6. Замкнутые классы и полнота систем функций алгебры логики

Терминология и обозначения

Система булевых функций $F = \{f_1, f_2, \ldots\}$ называется ***полной системой***, если любую булеву функцию можно представить формулой над F, т. е. реализовать в виде суперпозиции функций из F.

Замыканием множества F называется множество всех функций из P_2, являющихся суперпозициями функций из F. Замыкание множества F обозначается через $[F]$.

Система булевых функций F называется ***замкнутой***, если $[F] = F$.

Система булевых функций F называется ***полной***, если $[F] = P_2$.

Функция алгебры логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ***сохраняет константу* 0**, если $f(0,0,\ldots,0) = 0$. Множество всех булевых функций, сохраняющих константу 0, обозначается через T_0.

Функция алгебры логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ***сохраняет константу* 1**, если $f(1,1,\ldots,1) = 1$. Множество всех булевых функций, сохраняющих константу 1, обозначается через T_1.

Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется ***самодвойственной***, если она совпадает со своей двойственной, т.е. $f(x_1,\ldots,x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)$. Функция является самодвойственной тогда и только тогда, когда на любой паре противоположных наборов она принимает противоположные значения. Множество всех самодвойственных функций обозначается через S.

Лемма о несамодвойственной функции. Из всякой несамодвойственной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ с помощью подстановки вместо ее переменных функций x и $\overline{x}$ можно получить константу.

Пусть наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, таковы, что $\alpha_i \geq \beta_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, тогда будем говорить, что $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n)$ больше или равен $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, и обозначать через $\tilde{\alpha} \succeq \tilde{\beta}$. Если для наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ выполнено одно из двух неравенств: $\tilde{\alpha} \succeq \tilde{\beta}$ или $\tilde{\beta} \succeq \tilde{\alpha}$, то наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$

сравнимы. В противном случае, наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ ***несравнимы***. Функция $f(x_1,...,x_n)$ называется ***монотонной***, если для любых $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, таких, что $\tilde{\alpha} \succeq \tilde{\beta}$ выполнено неравенство: $f(\tilde{\alpha}) \geq f(\tilde{\beta})$. Множество всех монотонных функций обозначается через M.

Лемма о немонотонной функции. Из всякой немонотонной функции $f(x_1,...,x_n)$ с помощью подстановки вместо ее переменных функций 0, 1 и x можно получить $\bar{x}$.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***линейной***, если она представима полиномом Жегалкина не выше первой степени, т. е. если существуют такие константы $\alpha_i \in \{0,1\}$ $(i = 0,1,\ldots,n)$, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n.$$

Множество всех линейных функций обозначается через L.

Лемма о нелинейной функции. Из всякой нелинейной функции $f(\tilde{x}^n)$ с помощью подстановки вместо ее переменных констант 0, 1 и функций $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2$ и, быть может, путём навешивания отрицания над всей функцией, можно получить конъюнкцию $x_1 x_2$.

Критерий Поста о полноте. Система функций F полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из пяти замкнутых классов: T_0, T_1, S, M, L.

Полная система F называется ***базисом*** в P_2, если никакая ее подсистема не является полной, т. е. 1) $[F] = P_2$; 2) для $\forall f \in F \quad [F \setminus \{f\}] \neq P_2$.

Функция $f\left(\tilde{x}^n\right)$ называется ***шефферовой*** (или ***функцией Шеффера*** от n переменных), если она полна, т. е. образует базис в P_2.

6.1. Построить множество всех функций, зависящих от переменных x_1, x_2 и принадлежащих замыканию множества F:

1) $F = \{\bar{x}\}$; 2) $F = \{x_1 \oplus x_2\}$;

3) $F = \{0, \bar{x}\}$; 4) $F = \{x_1 \cdot x_2\}$;

5) $F = \{x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3\}$; 6) $F = \{x_1 \to x_2\}$;

7) $F = \{x_1 x_2, x_1 \oplus x_2\}$; 8) $F = \{x_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_3\}$.

6.2. Показать, что $f \in [F]$, выразив f формулой над множеством F:

1) $f = \bar{x}, \quad F = \{0, x \to y\}$;
2) $f = x \oplus y, \quad F = \{x \downarrow y\}$;
3) $f = x, \quad F = \{x \oplus y\}$;
4) $f = x \oplus y \oplus z, \quad F = \{x \leftrightarrow y\}$;
5) $f = 0, \quad F = \{xy \oplus z\}$;
6) $f = x, \quad F = \{x\bar{y}\}$;
7) $f = x \vee y, \quad F = \{\bar{x} \vee \bar{y}\}$.

6.3. Воспользовавшись теоремой сведения, доказать полноту системы F:

1) $F = \{x_1 \downarrow x_2\}$;
2) $F = \{x_1 | x_2\}$;
3) $F = \{x_1 \to x_2, \overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3}\}$;
4) $F = \{x_1 x_2 \oplus x_3, (x_1 \leftrightarrow x_2) \oplus x_3\}$;
5) $F = \{\bar{x}, x_1 \overline{x_2}\}$;
6) $F = \{x_1 x_2 \oplus x_3, x_1 \leftrightarrow x_2, x_1 \oplus x_3\}$.

6.4. Перечислить все булевы функции от одной переменной, которые:

1) сохраняют 0; 2) сохраняют 1; 3) сохраняют обе константы.

6.5. Перечислить все булевы функции от двух переменных, которые:

1) сохраняют 0; 2) сохраняют 1; 3) сохраняют обе константы.

6.6. Выяснить, при каких n функция $f(\tilde{x}^n)$ сохраняет константы:

1) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;
2) $f(\tilde{x}^n) = \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \right) \oplus x_n x_1$;
3) $f(\tilde{x}^n) = \bigoplus_{1 \le i < j \le n} x_i \cdot x_j$;
4) $f(\tilde{x}^n) = \bigoplus_{1 \le i < j \le n} (x_i \vee x_j)$;
5) $f(\tilde{x}^n) = 1 \oplus (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3) \ldots (x_n \to x_1)$;
6) $f(\tilde{x}^n) = \bigoplus_{i=1}^{n-2} (x_i \to (x_{i+1} \to x_{i+2}))$;

7) $f(\tilde{x}^n)=\bigoplus_{i=1}^{n-2}((x_i \to x_{i+1}) \to x_{i+2})$.

6.7. Доказать, что если булева функция сохраняет 0, то двойственная для нее функция сохраняет 1.

6.8. Доказать, что из всякой булевой функции, не сохраняющей 0, отождествлением всех ее переменных, можно получить функцию от одной переменной, также не сохраняющую 0, т. е. функцию $\bar{x}$ или константу 1.

6.9. Доказать, что из всякой булевой функции, не сохраняющей 1, отождествлением всех ее переменных, можно получить функцию от одной переменной, также не сохраняющую 1, т. е. функцию $\bar{x}$ или константу 0.

6.10. Найти все самодвойственные функции, существенно зависящие от двух переменных.

6.11. Заменить прочерки в векторе $\tilde{\alpha}_f$ символами 0 или 1 так, чтобы получился вектор самодвойственной функции:

1) $\tilde{\alpha}_f=(01-0-0--11-0-1--)$;
2) $\tilde{\alpha}_f=(--01--11--01--10)$;
3) $\tilde{\alpha}_f=(11--00--01--10--)$.

6.12. Выяснить, является ли самодвойственной функция f, заданная векторно. Для несамодвойственной функции определить, какие переменные следует заменить на x, а какие на $\bar{x}$, чтобы получить константу:

1) $\tilde{\alpha}_f=(01101001)$; 2) $\tilde{\alpha}_f=(01111001)$;
3) $\tilde{\alpha}_f=(10110110)$; 4) $\tilde{\alpha}_f=(10101000)$.

6.13. Выяснить, является ли функция f самодвойственной. Для несамодвойственной функции определить, какие переменные следует заменить на x, а какие на $\bar{x}$, чтобы получить константу.

1) $f=x\oplus y$; 2) $f=(x\to y)\to y$;
3) $f=x\cdot y\vee x\cdot z\vee y\cdot z$; 4) $f=x\oplus y\oplus z\oplus 1$;
5) $f=x\cdot y\vee z$; 6) $f=x\cdot y\oplus z\cdot(x\vee y)$;

7) $f = x \cdot y \oplus y \cdot z \oplus x \cdot z \oplus y \oplus z$; 8) $f = (x \to y) \oplus (y \to z) \oplus (z \to x) \oplus z$;

9) $f = x \cdot y \cdot z \oplus x \cdot y \oplus x \cdot z \oplus y \cdot z$; 10) $f = \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right) \to x \cdot \left(y \leftrightarrow z\right)$.

6.14. Какие из элементарных функций алгебры логики являются монотонными?

6.15. Выяснить, является ли монотонной функция f, заданная векторно. Для немонотонной функции подобрать соответствующую замену переменных, чтобы получить $\overline{x}$.

1) $\tilde{\alpha}_f = (01101001)$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (01010111)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (00110110)$; 4) $\tilde{\alpha}_f = (00010011)$.

6.16. Выяснить, является ли функция f монотонной. Если не является, то подобрать соответствующую замену переменных, чтобы получить $\overline{x}$.

1) $f = x \oplus y \oplus z$; 2) $f = xz \oplus y$;

3) $f = x \cdot \overline{y} \vee z$; 4) $f = \left(x \to \overline{y}\right) \oplus x \cdot \overline{z}$;

5) $f = x \cdot y \oplus y \cdot z \oplus x \cdot z \oplus x$; 6) $f = x \cdot y \oplus z \cdot \left(x \vee y\right)$;

7) $f = \left(x \downarrow z\right) \to \left(y \,|\, \overline{z}\right)$.

6.17. Доказать, что функция f является монотонной:

1) $f = \left(x \oplus y\right) \cdot \left(x \leftrightarrow y\right)$;

2) $f = x \to \left(y \to x\right)$;

3) $f = x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee x \cdot \overline{y} \cdot z \vee x \cdot y \cdot \overline{z} \vee x \cdot y \cdot z \vee \overline{x} \cdot y \cdot z$;

4) $f = \left(x \oplus y\right) \cdot x \cdot y$;

5) $f = x \cdot y \oplus y \cdot z \oplus z \cdot x$.

6.18. Найти все монотонные функции, которые можно получить из вектора $\tilde{\alpha}_f$ заменой символа «–» на 0 или 1:

1) $\tilde{\alpha}_f = (0-)$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (--)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (-00-)$; 4) $\tilde{\alpha}_f = (-10-)$;

5) $\tilde{\alpha}_f = (-----00-)$; 6) $\tilde{\alpha}_f = (---1--0-)$;

7) $\tilde{\alpha}_f = (0------1)$.

6.19. Найти все функции $f \in M \cap S$, которые можно получить из вектора $\tilde{\alpha}_f$ заменой символа «–» на 0 или 1:

1) $\tilde{\alpha}_f = (--)$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (-0--)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (---1)$; 4) $\tilde{\alpha}_f = (-00-0---)$;

5) $\tilde{\alpha}_f = (-01-0---)$.

6.20. Выяснить при каких $n \geq 1$ функция $f(\tilde{x}^n)$ монотонна:

1) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

2) $f(\tilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_i \cdot x_j$;

3) $f(\tilde{x}^n) = x_1 x_2 \ldots x_n \to (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n)$.

6.21. Доказать, что функция, двойственная монотонной функции, монотонна.

6.22. Доказать, что монотонная функция, не сохраняющая нуль (единицу), равна тождественно единице (нулю).

6.23. Доказать, что если f тождественно не равна константе, а $(f \vee f^*)$ – константа, то $f \notin M \cup S$.

6.24. Найти все самодвойственные монотонные функции $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящие от всех переменных (n = 1, 2, 3, 4).

6.25. Какие из элементарных булевых функций являются линейными?

6.26. Выяснить, является ли линейной функция f, заданная векторно:

1) $\tilde{\alpha}_f = (1001)$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (1101)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (10010110)$; 4) $\tilde{\alpha}_f = (11000011)$;

5) $\tilde{\alpha}_f = (01101001)$; 6) $\tilde{\alpha}_f = (10100110)$;

7) $\tilde{\alpha}_f = (0110100101101001)$; 8) $\tilde{\alpha}_f = (0111101111111100)$;

9) $\tilde{\alpha}_f = (1010010110011100)$. 10) $\tilde{\alpha}_f = (1110100110010111)$.

6.27. Выяснить, можно ли путем соответствующей замены переменных получить из функции f конъюнкцию $x \cdot y$:

1) $f = x \to y$;

2) $f = x \cdot y \vee y \cdot \overline{z} \vee \overline{z} \cdot x$;

3) $f = \left(x \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot y \cdot z\right) \oplus \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$;

4) $f = x \to \left(y \to z\right)$;

5) $f = x \cdot \overline{y} \vee y \cdot \overline{z} \vee z \cdot \overline{x}$;

6) $\tilde{\alpha}_f = (11101000)$;

7) $f = \left(x_1 \vee x_2 \vee x_4\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}\right)$;

8) $f = x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2x_3x_4 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} \vee x_1x_2$.

6.28. Заменить в векторе $\tilde{\alpha}_f$ прочерки символами 0 или 1 так, чтобы получился вектор значений некоторой линейной функции f. Выразить f полиномом Жегалкина.

1) $\tilde{\alpha}_f = (10-1)$;

2) $\tilde{\alpha}_f = (0-11)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (-001--1-)$;

4) $\tilde{\alpha}_f = (1-101---)$;

5) $\tilde{\alpha}_f = (-0-1--00)$;

6) $\tilde{\alpha}_f = (11-0---1)$;

7) $\tilde{\alpha}_f = (--10\ ----\ 0--1\ -110)$;

8) $\tilde{\alpha}_f = (1---\ ----\ ---0\ -110)$.

6.29. Найти число функций $f(\tilde{x}^n)$, принадлежащих множеству A:

1) $A = T_0 \cup T_1$;

2) $A = L - T_1$;

3) $A = (T_0 \cup T_1) \cap L$;

4) $A = S \cap T_1$;

5) $A = S \cap T_1 \cap L$;

6) $A = \left(T_1 \cup L\right) \cap S$;

7) $A = (S \cup L) \cap T_0$;

8) $A = T_0 \cup L \cup S$.

6.30. Доказать, что $L \bigcap T_0 \bigcap T_1 = L \bigcap S \bigcap T_0 = L \bigcap S \bigcap T_1 = L \bigcap S \bigcap T_0 \bigcap T_1$.

6.31. Доказать, что $L \subseteq T_1 \bigcup T_0 \bigcup S$.

6.32. Доказать, что множество A не пусто:

1) $A = LT_1 - (T_0 \bigcup S)$;

2) $A = LT_0 - (T_1 \bigcup S)$;

3) $A = LS - (T_1 \bigcup T_0)$.

6.33. Какие функции можно получить из функции $f(\tilde{x}^n)$ путем отождествления переменных, если:

1) $f \in L - T_1S$;

2) $f \in S - T_1$;

3) $f \in T_1 - T_0$;

4) $f \in T_1 - \overline{T_0}$;

5) $f \in T_0 - T_1$;

6) $f \in \overline{T_1} - T_0$;

7) $f \in S - T_0$;

8) $f \in \overline{T_1 - T_0}$.

6.34. Показать, что всякая монотонная функция содержится не менее чем в двух классах из T_0, T_1, L.

6.35. Выяснить, полна ли система функций. Если полна, то проиллюстрировать поэтапное доказательство теоремы Поста, т. е. получить через суперпозицию функций из этой системы константы, отрицание и конъюнкцию.

1) $\{ x \to yz,\ x(y \leftrightarrow z),\ xy \oplus yz \}$;

2) $\{ (xy \vee xz) \oplus yz,\ x \vee y,\ \overline{\bar{x} \to xy},\ x \leftrightarrow \bar{y} \}$;

3) $\{ xy \vee xz \vee yz,\ xy \to \bar{z},\ (xy \vee xz)(y \to z) \}$;

4) $\{ xy \leftrightarrow xz,\ xy \to \bar{z},\ x \leftrightarrow \bar{y} \}$;

5) $\{ x\bar{z} \vee xy \vee y\bar{z},\ (xy \vee \bar{x}z) \to \bar{y}z,\ \overline{xyz \leftrightarrow xz} \}$;

6) $\{ x \leftrightarrow xz\ ,\ xz \to xy,\ x \vee y,\ x \oplus y \}$;

7) $\{ x \vee y,\ x \oplus y, x \to y, 0 \}$.

6.36. Выяснить, полна ли система A функций, заданных векторами своих значений:

1) $A = \{ f_1 = (0110), f_2 = (1100\,0011), f_3 = (1001\,0110) \}$;

2) $A = \{ f_1 = (0111), f_2 = (0101\,1010), f_3 = (0111\,1111) \}$;

3) $A = \{ f_1 = (0111), f_2 = (1001\,0110) \}$;

4) $A = \{ f_1 = (0101), f_2 = (1110\,1000), f_3 = (0110\,1001) \}$;

5) $A = \{ f_1 = (1001), f_2 = (1110\,1000) \}$;

6) $A = \{ f_1 = (11), f_2 = (0111), f_3 = (0011\,0111) \}$;

7) $A = \{ f_1 = (10), f_2 = (0011\,0111) \}$.

6.37. Из полной системы функций A выделить всевозможные базисы:

1) $A = \{ 1, \bar{x}, xy(x \oplus y), x \oplus y \oplus xy \oplus yz \oplus xz \}$;

2) $A = \{ 0, x \oplus y, x \to y, xy \leftrightarrow xz \}$;

3) $A = \{ 0, 1, x \oplus y \oplus z, xy \oplus xz \oplus yz, xy \oplus z, x \vee y \}$;

4) $A=\{xy, x\vee y, xy\vee z, x\oplus y, x\to y\}$;

5) $A=\{xy\vee \bar{x}z, \bar{x}, x\to y, 0, x\oplus yz\}$.

6.38. Полна ли система $F=\left\{ f(\tilde{x}^n), g(\tilde{x}^n) \right\}$, если:

1) $f\in S-M$, $g\notin L\bigcup S$, $f\to g\equiv 1$;

2) $f\notin T_0\bigcup L$, $g\notin S$, $f\to g\equiv 1$;

3) $f\in \overline{T}_0\bigcup \overline{T}_1$, $g\in M-T_1$, $f\to g\equiv 1$;

4) $f\in SL-T_0$, $g\in M-T_0$, $f\to g\equiv 1$?

6.39. Выяснить, полна ли система функций $A=\{f,g,h\}$, если выполнены следующие условия: $f\notin L\bigcup T_0\, T_1$, $g\in M-L$, $f\to g\equiv 1$, $f\vee h\equiv 1$?

6.40. Привести примеры базисов, содержащих одну, две, три и четыре функции.

6.41. Перечислить все различные базисы, содержащие только функции, существенно зависящие от двух переменных.

6.42. Найти все функции Шеффера от двух переменных.

6.43. Доказать, что если $f\notin T_0\bigcup T_1\bigcup S$, то f – функция Шеффера.

6.44. Сколько существует функций Шеффера от *n* переменных?

6.45. Верно ли, что если $f\notin L\bigcup S\bigcup M$, то f полна?

6.46. Опровергнуть, что

1) если $f\notin (T_0\bigcup T_1)-S$, то $f\in L\bigcup M$;

2) если $f\in \overline{T_0}\ \overline{T_1}\ \overline{M}$, то f – функция Шеффера;

3) если $f\notin T_0\bigcup S\bigcup M$, то $f\in L\,\overline{T_1}\,S\,\overline{M}$;

4) если $f\notin L\bigcup S\bigcup M$, то f – функция Шеффера.

6.47. Выяснить, полна ли система функций *A*? В случае положительного ответа, привести пример полной системы функций из множества *A*.

1) $A=P_2-(T_0\bigcup T_1\bigcup L\bigcup S\bigcup M)$;

2) $A=(M-T_0)\bigcup(L-S)$;

3) $A=(S\cap M)\cup(L-M)$;

4) $A=(L\cap T_0\cap T_1)\cup(S-(T_0\cup T_1))$;

5) $A=(L\cap T_1)\cup(S\cap M)$;

6) $A=(L\cap T_1)\cup(S-T_0)$;

7) $A=(M-T_0)\bigcup(S-L)$.

6.48. Пусть f, g, h – попарно различные функции, существенно зависящие от двух переменных. Будет ли полной система функций $\{\bar{x},\ f, g, h\}$?

6.49. Доказать, что имеют место следующие включения:

1) $T_0 S\subseteq T_1$; 2) $T_0 T_1 L\subseteq S$;

3) $M\subseteq T_0\cup T_1$; 4) $M\subseteq T_0\cup L$;

5) $MS\subseteq T_0$; 6) $L\subseteq T_0\cup T_1\cup S$.

6.50. Проверить, что если $U=P_2$ (множество всех функций алгебры логики), то на диаграмме Венна для системы замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L пустыми будут в точности те клетки, которые в табл. 3 помечены символом $\varnothing$.

	T_0				$\overline{T_0}$				
	T_1		$\overline{T_1}$		T_1		$\overline{T_1}$		
L		$\varnothing$	$\varnothing$		$\varnothing$		$\varnothing$	$\varnothing$	M
		$\varnothing$	$\varnothing$		$\varnothing$			$\varnothing$	$\overline{M}$
$\overline{L}$			$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	M
			$\varnothing$		$\varnothing$				$\overline{M}$
	S	$\overline{S}$	S	$\overline{S}$	S	$\overline{S}$	S	$\overline{S}$	

Табл. 3. К задаче 6.50

6.51. Подсчитать число функций $f(\tilde{x}^n)$, принадлежащих классу A:

1) $A=LS$; 2) $A=LSM$;

3) $A=LST_0$; 4) $A=LST_0T_1$;

5) $A=MLST_0$; 6) $A=MLST_0T_1$;

7) $A=L\overline{S}T_0T_1$; 8) $A=LS\overline{T_0}\,\overline{T_1}$;

9) $A=\overline{L}ST_0T_1$; 10) $A=LT_0T_1$.

6.52. Верно ли, что $f \in [g]$ или $g \in [f]$?

1) $f = x \oplus y$, $g = xy$;

2) $f = x \oplus y$, $g = x \to y$;

3) $f = x \to y$, $g = xy$;

4) $f = x \leftrightarrow y$, $g = x \vee y$;

5) $f = x \oplus y$, $g = xy \to z$;

6) $f = x \to y$, $g = xy \oplus z$;

7) $f = x \leftrightarrow y$, $g = xy \oplus z$;

8) $f = x \to y$, $g = \bar{x}$;

9) $f = x \to y$, $g = xy \oplus xz \oplus yz$;

10) $f = x \oplus y$, $g = xy \oplus xz \oplus yz$.

7. Элементы теории кодирования

Терминология и обозначения

Пусть $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ - алфавит. Любая конечная последовательность символов из B называется ***словом*** в алфавите B. ***Длина слова*** – количество символов в нём. Через $|\alpha|$ будем обозначать длину слова α.

Пустое слово – слово, не содержащее ни одного символа. Будем обозначать его через λ. Длина пустого слова равна 0.

B^+ – множество всех непустых слов в алфавите B.

B^* – множество, содержащее все слова в алфавите B, включая пустое слово.

Пусть $L \subseteq B^*$ - язык сообщений, $A = \{0, 1, ..., q-1\}$, где $q \geq 2$, - алфавит канала связи. ***Алфавитное кодирование*** задается схемой f_v:

$$\begin{cases} b_1 \to v_1, \\ b_2 \to v_2, \\ \quad . \ . \ . \ . \\ b_n \to v_n, \end{cases}$$

где $v_i \in A^+$ - ***элементарный код***, соответствующий букве $b_i \in B$ $(i = \overline{1, n})$. Тогда каждому слову языка $b_{i_1} b_{i_2} ... b_{i_m}$ ставится в соответствие кодовое слово, определяемое по правилу:

$$f_v(b_{i_1} b_{i_2} ... b_{i_m}) = f_v(b_{i_1}) f_v(b_{i_2}) ... f_v(b_{i_m}) = v_{i_1} v_{i_2} ... v_{i_m}.$$

Схема алфавитного кодирования f_v задает ***код*** $V = \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$, представляющий собой упорядоченное множество элементарных кодовых слов v_i $(i = \overline{1, n})$.

Упорядоченный вектор $d(V) = \langle d_1, d_2, ..., d_n \rangle$, где $d_i = |v_i|$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ - длина элементарного кода v_i, называется ***спектром*** длин кода V.

К основным требованиям, предъявляемым к алфавитному кодированию, относится прежде всего взаимная однозначность кодирующего отображения

f_V. Код V называется ***взаимно однозначным*** или ***однозначно декодируемым***, если различным сообщениям языка соответствуют различные кодовые слова.

Если слово α имеет вид $\alpha_1\alpha_2$, тогда подслово α_1 называется ***префиксом***, а α_2 – ***суффиксом*** слова α.

Префикс (суффикс) слова α называется ***собственным***, если он отличен от пустого слова λ и от самого слова α.

Схема алфавитного кодирования f_V обладает ***свойством префикса***, если для любых i и j $(1 \le i, j \le n, i \ne j)$ слово v_i не является префиксом слова v_j.

Алфавитное кодирование, схема которого обладает свойством префикса, называется ***префиксным***.

Префиксные коды, т. е. коды, у которых никакой из элементарных кодов не является началом другого элементарного кода, составляют важный класс однозначно декодируемых кодов переменной длины.

Префиксность кода является достаточным условием его взаимной однозначности.

Для всякого однозначно декодируемого кода V в q-буквенном алфавите длины элементарных кодов $d_i = |v_i| \, (i = \overline{1, n})$ удовлетворяют ***неравенству Мак-Миллана***: $\sum_{i=1}^{n} q^{-d_i} \le 1.$

Неравенство Мак-Миллана является необходимым условием взаимной однозначности кода, но не достаточным.

Пусть набор натуральных чисел $d_1, d_2, \ldots, d_n$ удовлетворяет неравенству Мак-Миллана $\sum_{i=1}^{n} q^{-d_i} \le 1$, тогда существует префиксный код $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ в q-буквенном алфавите со спектром длин $d(V) = \langle d_1, d_2, \ldots, d_n \rangle$.

Для всякого однозначно декодируемого кода V в q-буквенном алфавите со спектром длин $d(V) = \langle d_1, d_2, \ldots, d_n \rangle$ существует префиксный код с тем же набором длин элементарных кодов и в том же кодирующем алфавите.

Пусть задано распределение вероятностей $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ ($p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$) для букв алфавита $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Величина $C(V, P) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mid v_i \mid$ называется ***стоимостью*** (или ***избыточностью***) кода $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ для набора вероятностей P.

Стоимость кода V определяет среднюю длину его элементарного кода и показывает, во сколько раз увеличивается средняя длина слова при кодировании сообщений кодом V.

Алфавитный код V^o называется ***оптимальным***, если

$$C(V^O, P) = \inf_V C(V, P).$$

7.1. Пусть $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ - алфавит языка сообщений, для которого задан код $V = \langle 10, 12, 012, 101, 2100 \rangle$ в алфавите $A = \{0, 1, 2\}$. Выяснить, является ли слово α кодом некоторого сообщения. В случае положительного ответа, выяснить является ли α кодом ровно одного сообщения.

1) α =10120121012100;
2) α =1012101201210012;
3) α =0121001210201;
4) α =120120121001210;
5) α =1010122100;
6) α =12101210012;
7) α =101212101012;
8) α =1010012100101.

7.2. Выяснить, обладает ли код V свойством префикса:

1) V = {0, 10, 11, 1110};

2) V = {01, 11, 10, 001};

3) V = {1001, 000, 001, 0110, 010, 1000, 0111};

4) V = {110, 011, 1011, 0100, 11011};

5) V = {02, 2, 11, 012, 102, 011, 0121};

6) V = {12, 22, 0011, 101, 0100, 20, 2100};

7) V = $\{0, 10, \ldots, 1^n0, \ldots\}$;

8) $V = \{0, 10, \ldots, 10^n, \ldots\}$.

7.3. Выяснить, обладает ли схема алфавитного кодирования:

$$\begin{cases} а \to 111, \\ в \to 10101, \\ г \to 010, \\ л \to 001, \\ о \to 000, \\ с \to 110 \end{cases}$$

свойством префикса. Справедливо ли неравенство Мак-Миллана для спектра длин заданного кода? С помощью кода, задаваемого схемой,

1) закодируйте слово *слава*;

2) закодируйте слово *голоса*;

3) декодируйте слово 110001000010;

4) декодируйте слово 10101000001000110;

5) декодируйте слово 01000000100010101111.

7.4. Выбрать максимальное по числу элементов подмножество *B* множества *A* с условием, что двоичные разложения наименьшей длины чисел из *B* представляют собой префиксный код:

1) $A = \{1, 5, 6, 7, 12, 13, 17\}$;

2) $A = \{1, 3, 6, 8, 10, 13, 19, 33, 37\}$;

3) $A = \{2, 6, 7, 9, 12, 15, 18, 35, 36, 37\}$;

4) $A = \{2, 3, 7, 8, 11, 12, 13, 14\}$;

5) $A = \{1, 2, 5, 8, 9, 10, 13, 15\}$;

6) $A = \{3, 5, 6, 9, 10, 13, 17\}$;

7) $A = \{1, 2, 5, 8, 9, 12, 13, 14\}$;

8) $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$;

9) $A = \{4, 6, 7, 10, 13, 15, 20, 23, 25\}$;

10) $A = \{5, 7, 9, 10, 12, 14, 17, 23, 24\}$.

7.5. С помощью неравенства Мак-Миллана выяснить, может ли набор чисел *L* быть набором длин элементарных кодовых слов двоичного взаимно однозначного кода:

1) $L = \{1, 2, 2, 3\}$; 2) $L = \{2, 2, 2, 4, 4, 4\}$; 3) $L = \{1, 2, 4, 4, 4, 4\}$;

4) $L = \{2, 2, 3, 4, 4\}$; 5) $L = \{1, 2, 3, 4, 4, 5\}$.

7.6. Построить двоичный префиксный код с заданной последовательностью длин элементарных кодов:

1) $L = \{1, 2, 3, 3\}$; 2) $L = \{1, 2, 4, 4, 4, 4\}$;

3) $L = \{2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4\}$; 4) $L = \{2, 2, 2, 4, 4, 4\}$;

5) $L = \{2, 2, 3, 4, 4\}$; 6) $L = \{2, 3, 3, 3, 3, 4, 4\}$;

7) $L = \{1, 3, 3, 4, 4, 4, 4\}$; 8) $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 6\}$;

9) $L = \{2, 2, 2, 4, 4, 5\}$; 10) $L = \{2, 3, 4, 5, 5, 5, 5\}$.

7.7. Для заданного распределения вероятностей P с помощью алгоритма Хаффмана построить оптимальный двоичный код:

1) P = (0,2; 0,4; 0,2; 0,2);
2) P = (0,1; 0,1; 0,7; 0,1);
3) P = (0,2; 0,2; 0,2; 0,2; 0,2);
4) P = (0,08; 0,03; 0,09; 0,1; 0,5; 0,2);
5) P = (0,3; 0,4; 0,06; 0,08; 0,04; 0,04; 0,04; 0,04);
6) P = (0,3; 0,3; 0,03; 0,03; 0,03; 0,03; 0,03; 0,01; 0,2; 0,04);
7) P = (0,06; 0,06; 0,06; 0,06; 0,06; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1);
8) P = (0,1; 0,2; 0,4; 0,05; 0,05; 0,05; 0,05; 0,05; 0,05);
9) P = (0,25; 0,15; 0,05; 0,1; 0,2; 0,1; 0,05);
10) P = (0,11; 0,08; 0,01; 015; 0,25; 0,21; 0,09; 0,1).

7.8. Выяснить, является ли код оптимальным для распределения вероятностей P = (0,15; 0,25; 0,05; 0,01; 0,09; 0,25; 0,15; 0,05):

1) V = (001; 010; 10; 11; 101; 011; 0110; 00);
2) V = (0000, 001; 1001; 10010; 0111; 111, 0010, 1110);
3) V = (000; 001; 010; 011; 100; 101; 110; 111);
4) V = (100; 00; 11110; 11111; 1110; 01; 101; 110);
5) V = (000; 01; 1110; 11111; 110; 10; 001; 11110);
6) V = (000; 10; 0111; 01111; 011; 01; 100; 11111);
7) V = (01; 02; 10; 12; 20; 21; 22; 00).

7.9. Построить оптимальный префиксный код для заданного распределения вероятностей P в алфавите A:

1) P = (0,2; 0,3; 0,2; 0,1; 0,2), $A = \{0,1,2\}$;

2) P = (0,2; 0,1; 0,4; 0,1; 0,1; 0,1), $A = \{0,1,2\}$;

3) P = (0,2; 0,1; 0,3; 0,1; 0,05; 0,1; 0,05; 0,1), $A = \{0,1,2\}$;

4) P = (0,2; 0,1; 0,3; 0,1; 0,05; 0,1; 0,05; 0,1), $A = \{0,1,2,3\}$;

5) P = (0,21; 0,17; 0,2; 0,12; 0,08; 0,16; 0,02; 0,04), $A = \{0,1,2,3\}$;

6) P = (0,02; 0,08; 0,05; 0,15; 0,04; 0,16; 0,2; 0,13, 0,17), $A = \{0,1,2,3\}$

8. Контрольные задания

8.1. Контрольная работа по алгебре множеств

Задача 1. Доказать или опровергнуть утверждения:

1. $(A\otimes BC)\otimes(BC\otimes(A\otimes B))=B.$
2. $A\otimes B=(A\otimes C)\otimes(B\otimes C).$
3. $(\overline{A}\otimes BC)\otimes(BC\otimes A\overline{BC})=\overline{ABC}.$
4. $((A\otimes B)-\overline{A}B)\cup((A\otimes C)-\overline{A}C)=A\overline{BC}.$
5. $(A\overline{B}\otimes AB)\otimes(C\otimes\overline{C})=\overline{A}.$
6. $A\otimes\overline{ABC}=(\overline{A}\otimes\overline{BC})\otimes(\overline{BC}\otimes ABC).$
7. $A\cup B\overline{C}=(A\otimes B\overline{C})\otimes AB\overline{C}.$
8. $A(B\otimes U)(C\otimes U)=(A-B)(A-C).$
9. $ABC\cup\overline{AC}\,\overline{B}=ABC\otimes\overline{AC}\,\overline{B}.$
10. $ABC\otimes A=((A\otimes B)-\overline{A}B)\cup(A-C).$
11. $\overline{A\otimes B\overline{C}}=AB\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B\overline{C}}.$
12. $(ABC\otimes AB)\otimes(A\otimes C)=(A\overline{B\overline{C}})\otimes C.$
13. $(\overline{A}-B)-\overline{C}=(\overline{A}\,\overline{B}C\otimes\overline{A})\otimes\overline{A}.$
14. $\overline{A}\cup BC=(ABC\otimes\overline{A}\,\overline{BC})\otimes\overline{A}BC.$
15. $A\overline{C}\cup\overline{B\overline{C}}=AB\overline{C}\otimes\overline{B\overline{C}}.$
16. $(A\otimes B)\otimes(C\otimes U)=(\overline{A}\otimes B)\otimes C.$
17. $(AC\otimes B)\otimes(B\otimes(AC\otimes C))=C.$
18. $AC\otimes BC=(AC\otimes C)\otimes(BC\otimes C).$
19. $(\overline{AC}\otimes B)\otimes(B\otimes A\overline{B}C)=\overline{ABC}.$
20. $AC\otimes\overline{ABC}=(\overline{AC}\otimes\overline{BC})\otimes(\overline{BC}\otimes ABC).$
21. $C\otimes B=(C\otimes A)\otimes(B\otimes A).$
22. $((C\otimes B)-\overline{C}B)\cup((A\otimes C)-\overline{C}A)=C\overline{BA}.$
23. $B\otimes\overline{ABC}=(\overline{B}\otimes\overline{AC})\otimes(\overline{AC}\otimes ABC).$

24. $C \otimes \overline{ABC} = \left(\overline{C} \otimes \overline{BC}\right) \otimes \left(\overline{B}\overline{A} \otimes ABC\right).$

25. $C\left(B \otimes U\right)\left(A \otimes U\right) = \left(C - B\right)\left(C - A\right).$

26. $C \otimes ABC = \left(\left(C \otimes B\right) - \overline{C}B\right) \cup \left(C - A\right).$

27. $\left(A \otimes B\right) \otimes \left(AC \otimes ABC\right) = \left(A\overline{C\overline{B}}\right) \otimes B.$

28. $A \cup BC = \left(\overline{A}\,BC \otimes A\,\overline{BC}\right) \otimes ABC.$

29. $\left(\vec{C} \otimes B\right) \otimes \left(A \otimes U\right) = \left(C \otimes B\right) \otimes A.$

30. $\left(\overline{AB} \otimes C\right) \otimes \left(C \otimes A\overline{C}B\right) = \overline{ABC}.$

Задача 2. Задано универсальное множество $U = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\right\}$ и в нем подмножества $A = \left\{x \mid x \le 4\right\}$, $B = \left\{2, 4, 5, 6\right\}$, $C = \left\{1, 3, 5, 6\right\}$, $D = \{x \mid x$ – простое[1]$\}$, $E = \left\{1, 2, 6, 7\right\}$. Найдите множества:

1. $A \otimes B\overline{D}E$; $C\overline{A} \times \left(E - D\right)$; $2^{AC} - 2^{\overline{E}}$; $\left(C - A\right)^{BD}$.
2. $C \otimes AB$; $\left(CD \cup \overline{E}\right) \times E\overline{D}$; $2^{DC} \cup 2^{BC}$; $\overline{B}^{\,AC}$.
3. $C \otimes A\overline{B}E$; $AC \times A\left(B \cup D\right)$; $2^{CD} \cap 2^{AD}$; $(AB)^{\overline{A}}$.
4. $B \otimes E$; $\left(CE \cup \overline{D}\right) \times AB$; $2^{AD} - 2^{\overline{B}}$; $\left(B - \overline{C}\right)^{\overline{A}}$.
5. $A\overline{E} \otimes D$; $C\overline{B} \times \left(BC \cup \overline{A}\right)$; $2^{BC} \cap 2^{CD}$; $(BE)^{BD}$.
6. $E \otimes AC$; $\left(AB \cup \overline{C}\right) \times C\overline{D}$; $2^{\overline{A}} \cap 2^{BC}$; $\left(B - E\right)^{AC}$.
7. $CD\overline{E} \otimes A$; $BC \times B\left(C \cup E\right)$; $2^{BD} \cap 2^{CD}$; $(AE)^{\overline{B}}$.
8. $\left(B \cup C\right) \otimes \overline{D}E$; $\left(A - \overline{C}\right) \times AB$; $2^{AB} - 2^{\overline{C}}$; $(CD)^{AB}$.
9. $B \otimes \left(A - D\right)C$; $D\overline{A} \times \left(E - C\right)$; $2^{DE} - 2^{\overline{C}}$; $(AB)^{\overline{D}}$.
10. $D \otimes BC$; $\left(CE \cup \overline{D}\right) \times A\overline{B}$; $2^{AB} \cup 2^{D\overline{C}}$; $\overline{E}^{\,AE}$.
11. $D \otimes \overline{B}E$; $BD \times C\left(B \cup D\right)$; $2^{DE} \cap 2^{AD}$; $(BC)^{\overline{E}}$.
12. $CD \otimes \overline{A}$; $\left(A - B\right) \times BD$; $2^{AD} - 2^{\overline{E}}$; $\left(CE\overline{D}\right)^{\overline{C}}$.
13. $\overline{A}C \otimes E$; $D\overline{C} \times \left(AC \cup \overline{B}\right)$; $2^{CE} \cap 2^{BE}$; $(AB)^{\overline{C}}$.

---

[1] Простым числом называется натуральное число, большее единицы, не имеющее других делителей, кроме самого себя и единицы.

14. $D\otimes BE;\quad \left(BC\cup\overline{A}\right)\times D\overline{E};\quad 2^{\overline{D}}\cap 2^{AC};\quad \overline{B}^{DC}.$

15. $D\overline{E}\otimes A;\quad CE\times A(D\cup E));\quad 2^{\overline{E}}\cup 2^{CD};\quad (BD)^{\overline{C}}.$

16. $(D\cup C)\otimes\overline{B}E;\quad DE\times A\overline{C};\quad 2^{AB}-2^{\overline{C}};\quad \overline{D}^{CB}.$

17. $A\overline{B}\otimes AD;\quad B\overline{D}\times\overline{C};\quad 2^{BC}\cap 2^{C\overline{E}};\quad \left(A\overline{D}\right)^{\overline{A}E}.$

18. $\left(A\cup\overline{E}\right)\otimes BD;\quad \overline{B}D\times\left(\overline{B}\overline{D}\cup\overline{A}E\right);\quad 2^{A\overline{C}}\cup 2^{B\overline{D}};\quad (AC)^{\overline{D}}.$

19. $\left(\overline{E}\cup B\overline{D}\right)\otimes AC;\quad A\left(\overline{C}\cup E\right)\times\overline{B}D;\quad 2^{\overline{B}}-2^{AC};\quad (A-D)^{A\overline{C}}.$

20. $\left(\overline{B}D\cup A\right)\otimes BC;\quad \left(AC\cup\overline{B}D\right)\times BD;\quad 2^{A\overline{E}}\cup 2^{A\overline{B}C};\quad \left(\overline{A}C\right)^{AB}.$

21. $\overline{C}\otimes A\overline{B};\quad \left(CD\cup\overline{E}\right)\times E\overline{D};\quad 2^{DC}\cup 2^{\overline{B}\,\overline{C}};\quad \overline{B}^{A\overline{C}}.$

22. $A\otimes E;\quad \left(CE\cup\overline{D}\right)\times AB;\quad 2^{BD}-2^{\overline{A}};\quad (A-\overline{C})^{\overline{B}}.$

23. $B\otimes AC;\quad \left(\overline{A}B\cup\overline{C}\right)\times C\overline{D};\quad 2^{\overline{AD}}\cap 2^{BC};\quad (B-E)^{A\overline{C}}.$

24. $(A\cup C)\otimes\overline{D}E;\quad \left(A\overline{C}\right)\times AB;\quad 2^{\overline{A}B}-2^{\overline{C}};\quad (CD)^{A\overline{B}}$

25. $(BC)\otimes\overline{D}E;\quad \left(\overline{A}-\overline{C}\right)\times A\overline{B};\quad 2^{AB}\otimes 2^{\overline{C}};\quad (C-D)^{AB}.$

26. $\overline{A}\otimes BC;\quad \left(CE\overline{D}\right)\times A\overline{B};\quad 2^{AB}-2^{D\overline{C}};\quad \overline{E}^{\overline{A}E}.$

27. $\left(\overline{E}B\overline{D}\right)\otimes AC;\quad \overline{A}\left(\overline{C}\cup E\right)\times\overline{B}\overline{D};\quad 2^{\overline{B}}\otimes 2^{AC};\quad \left(\overline{A}D\right)^{A\overline{C}}.$

28. $\overline{A}\otimes BE;\quad \left(\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\right)\times D\overline{E};\quad 2^{\overline{D}}\otimes 2^{AC};\quad \overline{B}^{D\overline{C}}.$

29. $(A\otimes C)\otimes\overline{B}E;\quad \overline{D}E\times A\overline{C};\quad 2^{AB}-2^{\overline{CD}};\quad \overline{A}^{CB}.$

30. $\left(A\overline{E}\right)\otimes\overline{B}D;\quad \overline{B}A\times\left(\overline{B}\overline{D}\cup\overline{A}D\right);\quad 2^{A\overline{C}}-2^{B\overline{D}};\quad \left(\overline{B}C\right)^{\overline{D}}.$

Задача 3. Упростить условия:

1. $\begin{cases} A\subseteq\overline{B}\otimes\overline{C};\\ AD\subseteq B\otimes\overline{C};\\ AB\subseteq C\cup D;\\ AC\subseteq C\,(B\cup D).\end{cases}$

2. $\begin{cases} A=B\cup C;\\ \overline{B}=\overline{C}\,D\otimes D;\\ \overline{D}\subseteq C;\\ AD=B\,C\,D.\end{cases}$

3. $\begin{cases} BC \subseteq A \cup D; \\ AB \subseteq C \cup D; \\ BD \subseteq AC \cup \overline{A}\,\overline{C}; \\ B \subseteq \overline{A} \otimes \overline{C}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} A \subseteq B \cup C; \\ \overline{B} \subseteq D \subseteq \overline{A}; \\ C \cup D \subseteq A \cup B; \\ AB \subseteq \overline{D}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} A \subseteq \overline{B} \cup C; \\ \overline{D} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}; \\ BC \subseteq \overline{A} \cup \overline{D}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \overline{A} \subseteq \overline{C} \cup \overline{D}; \\ A\,\overline{B} \subseteq \overline{C} \cup \overline{D}; \\ AD \subseteq \overline{B} \cup \overline{C}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} X = Y \cup Z; \\ \overline{Y} = \overline{Z}W \otimes W; \\ \overline{Z} \subseteq W; \\ X\ W = Y\ Z\,W. \end{cases}$

8. $\begin{cases} B = \overline{C} \cup \overline{D}; \\ \overline{A} = \overline{B}\,\overline{C}; \\ \overline{D} \subseteq C; \\ \overline{AD} = \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} X \subseteq \overline{Y} \otimes \overline{Z}; \\ XW \subseteq Y \otimes \overline{Z}; \\ XY \subseteq Z \cup W; \\ XZ \subseteq Z\,(Y \cup W). \end{cases}$

10. $\begin{cases} \overline{X} = \overline{Y}\ \overline{Z}; \\ Y = \overline{Z} \cup \overline{W}; \\ \overline{W} \subseteq Z; \\ \overline{X} \cup \overline{W} = \overline{Y\ Z\ W}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} CD \subseteq A \cup B; \\ BC \subseteq A \cup D; \\ AC \subseteq B \otimes \overline{D}; \\ C \subseteq \overline{B} \otimes \overline{D}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} C \subseteq A \cup D; \\ \overline{D} \subseteq B \subseteq \overline{C}; \\ A \cup B \subseteq C \cup D; \\ CD \subseteq \overline{B}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \overline{W} = \overline{X}\ \overline{Y}; \\ X = \overline{Y} \cup \overline{Z}; \\ \overline{ZW} = \overline{X} \cup \overline{Y} \cup \overline{Z}; \\ \overline{Y} \subseteq Z. \end{cases}$

14. $\begin{cases} A\ B = A\ C\ D; \\ B = C \cup D; \\ \overline{C} = A\overline{D} \otimes A; \\ \overline{A} \subseteq D. \end{cases}$

15. $\begin{cases} A \subseteq B \otimes D; \\ AC \subseteq B \otimes \overline{D}; \\ A\overline{C} \subseteq D \otimes \overline{B}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \overline{A} \subseteq \overline{C} \otimes \overline{D}; \\ A\,\overline{B} \subseteq \overline{C} \otimes \overline{D}; \\ C \cup D \subseteq B. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \overline{A} \subseteq \overline{C} \cup D; \\ \overline{D} \subseteq B \subseteq \overline{C}; \\ BD \subseteq \overline{C}; \\ \overline{C}\,\overline{D} \subseteq \overline{A}\,\overline{B}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} Z = X \cup Y; \\ Y = \overline{X} \cup \overline{W}; \\ \overline{X} \subseteq W; \\ ZW = XYW. \end{cases}$

19. $\begin{cases} XY \subseteq Z \cup W; \\ Y \subseteq \overline{X} \otimes \overline{Z}; \\ \overline{X}\,\overline{W} \subseteq \overline{Y} \cup \overline{Z}; \\ YW \subseteq XZ \cup \overline{X}\,\overline{Z}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} AD \subseteq B \otimes \overline{C}; \\ BD \subseteq A \cup C; \\ CD \subseteq A \cup B; \\ D \subseteq \overline{B} \otimes \overline{C}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \overline{A} = \overline{B} \cup C; \\ B = \overline{C}\,D \otimes D; \\ \overline{D} \subseteq C; \\ \overline{A}D = \overline{B}\;C\;D. \end{cases}$

22. $\begin{cases} B \subseteq A \cup C; \\ \overline{A} \subseteq D \subseteq \overline{B}; \\ C \cup D \subseteq A \cup B; \\ AB \subseteq \overline{D}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \overline{C} \subseteq \overline{A} \cup \overline{D}; \\ C\;\overline{B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{D}; \\ CD \subseteq \overline{B} \cup \overline{A}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \overline{D} \subseteq \overline{C} \otimes \overline{A}; \\ D\;\overline{B} \subseteq \overline{C} \otimes \overline{A}; \\ C \cup A \subseteq B. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \overline{Y} = \overline{X}\;\overline{Z}; \\ X = \overline{Z} \cup \overline{W}; \\ \overline{W} \subseteq Z; \\ \overline{Y} \cup \overline{W} = \overline{X\;Z\;W}. \end{cases}$

26. $\begin{cases} A \subseteq C \cup D; \\ \overline{D} \subseteq B \subseteq \overline{A}; \\ C \cup B \subseteq A \cup D; \\ AD \subseteq \overline{B}. \end{cases}$

27. $\begin{cases} A\,C = A\,B\,D; \\ C = B \cup D; \\ \overline{B} = A\overline{D} \otimes A; \\ \overline{A} \subseteq D. \end{cases}$

28. $\begin{cases} C = \overline{C} \cup \overline{D}; \\ \overline{A} = \overline{B}\,\overline{C}; \\ \overline{D} \subseteq B; \\ \overline{AD} = \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} X = Z \cup Y; \\ Y = \overline{Z} \cup \overline{W}; \\ \overline{Z} \subseteq W; \\ XW = ZYW. \end{cases}$

30. $\begin{cases} BD \subseteq A \otimes \overline{C}; \\ AD \subseteq B \cup C; \\ CD \subseteq A \cup B; \\ D \subseteq \overline{A} \otimes \overline{C}. \end{cases}$

Задача 4. Решить уравнение, найти необходимые и достаточные условия, при которых уравнение имеет решение. Оценить число решений уравнения.

1. $\left(A\otimes B\right)\otimes X = AB$.
2. $\left(\overline{A}\,\overline{B}-X\right)\otimes AB=\left(A\cup B\right)\overline{X}$.
3. $A\otimes BX = \overline{X}$.
4. $\left(A\cup BX\right)\otimes B=U$.
5. $A\overline{X}\otimes B=A-B$.
6. $\overline{A}\otimes BX = A\cup B$.
7. $A\cup X = B\cup A\overline{X}$.
8. $BX-\overline{A}=BX\otimes A$.
9. $\left(A\otimes X\right)\otimes\overline{X} = AB$.
10. $\overline{B}\cup\overline{X}=\left(X-B\right)\cup A$.
11. $\left(A-X\right)\cup B=B\otimes X$.
12. $AX\otimes B=B-X$.
13. $BX = A\otimes\left(B\cup X\right)$.
14. $A-X = BX-A$.
15. $X-A=B\cup\left(\overline{X}-A\right)$.
16. $\overline{AX}=\left(X-A\right)\cup B$.
17. $A\otimes B\overline{X} = A\cup X$.
18. $B\cup AX = B\otimes\overline{X}$.
19. $\left(A\otimes B\right)\otimes X = A\cup B$.
20. $\left(A\cup\overline{X}\right)\otimes B=A-B$.
21. $\left(AB\overline{X}\right)\otimes\overline{A}\overline{B}=\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)-X$.
22. $\left(\overline{B}\cup\overline{A}X\right)\otimes\overline{A}=U$.
23. $\overline{B}\otimes AX = A\cup B$.
24. $ABX = AX\otimes B$.
25. $BX\otimes\overline{A}=BX-A$.
26. $\overline{A}\bigcup\overline{X}=\left(X-A\right)\cup B$.
27. $BX\otimes A=A-X$.
28. $\overline{BX}=\left(X-B\right)\cup A$.
29. $A\cup BX = A\otimes\overline{X}$.
30. $\left(B\cup\overline{X}\right)\otimes A=B\overline{A}$.

Задача 5. Решить систему уравнений. Найти необходимые и достаточные условия, при которых система имеет решение. Оценить число решений системы уравнений.

1. $\begin{cases} AX = AC, \\ BX = BC, \\ CX = AB. \end{cases}$

2. $\begin{cases} AX = C, \\ B\overline{X} = C, \\ BX\cup A\overline{X} = \overline{C}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} X\cup B = B\cup C, \\ X\cup A = A\cup C, \\ X\cup C = B\cup C. \end{cases}$

4. $\begin{cases} AX = B, \\ B\overline{X} = C, \\ C\overline{X} = A\cup B. \end{cases}$

5. $\begin{cases} AX\cup B\overline{X} = C, \\ BX\cup A\overline{X} = \overline{C}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} AX = B, \\ B\overline{X} = \overline{C}. \end{cases}$

7. $\begin{cases}(A \cup \overline{X})(B \cup X) = C \cup X, \\ B X \cup C = \overline{A X}.\end{cases}$

8. $\begin{cases}A \cup B \cup X = A, \\ A B X = C.\end{cases}$

9. $\begin{cases}A - X = \overline{X} - B, \\ A \cup X = C.\end{cases}$

10. $\begin{cases}A \cup X = B X, \\ A X = C \cup X.\end{cases}$

11. $\begin{cases}A \otimes X = B, \\ B \otimes \overline{X} = C.\end{cases}$

12. $\begin{cases}A X = B, \\ BX \cup \overline{C}\,\overline{X} = AC.\end{cases}$

13. $\begin{cases}A \cup B \cup X = C, \\ A B X = \overline{C}.\end{cases}$

14. $\begin{cases}A \otimes X = C, \\ B \otimes \overline{X} = A.\end{cases}$

15. $\begin{cases}A - \overline{X} = X - C, \\ A \cup \overline{X} = B.\end{cases}$

16. $\begin{cases}B \cup \overline{X} = A X, \\ A \overline{X} = C \cup X.\end{cases}$

17. $\begin{cases}AX \cup C \overline{X} = B, \\ BX \cup C \overline{X} = \overline{A}.\end{cases}$

18. $\begin{cases}A \cup X = B, \\ B \otimes \overline{X} = \overline{C}.\end{cases}$

19. $\begin{cases}C - X = \overline{X} - B, \\ A \cup X = B.\end{cases}$

20. $\begin{cases}\overline{A} \cup X = C X, \\ A \overline{X} = B \otimes X.\end{cases}$

21. $\begin{cases}C X = A, \\ B \overline{X} = A, \\ BX \cup C \overline{X} = \overline{A}.\end{cases}$

22. $\begin{cases}AX = C, \\ B \overline{X} = A, \\ C \overline{X} = A \cup B.\end{cases}$

23. $\begin{cases}B X = A, \\ A \overline{X} = \overline{C}.\end{cases}$

24. $\begin{cases}C \cup B \cup X = C, \\ A = C B X.\end{cases}$

25. $\begin{cases}C \cup X = B X, \\ CX = A \cup X.\end{cases}$

26. $\begin{cases}C X = B, \\ AC = BX \cup \overline{A}\,\overline{X}.\end{cases}$

27. $\begin{cases}\overline{B} \otimes X = C, \\ \overline{B} = \overline{A} \otimes \overline{X}.\end{cases}$

28. $\begin{cases}A \cup \overline{X} = B X, \\ B \overline{X} = C \cup X.\end{cases}$

29. $\begin{cases}A = B \cup X, \\ A \otimes \overline{X} = \overline{C}.\end{cases}$

30. $\begin{cases}\overline{C} \cup X = A X, \\ C \overline{X} = B \otimes X.\end{cases}$

Задача 6. Равносильны ли системы условий:

1. $\begin{cases} A\cup B\subseteq C; \\ C\cup B\subseteq A\cup D; \\ C\cup A\subseteq D\cup B; \\ AC\subseteq B; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=B; \\ B\subseteq C\subseteq B\cup D. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \overline{W}\subseteq Z; \\ Y\subseteq \overline{ZW}; \\ X=Y\cup Z; \\ XW=YZW; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y\subseteq X; \\ X=Z=\overline{W}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \overline{A}\cup\overline{B}=D; \\ AC=D; \\ C\subseteq A\cup B; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{A}=B; \\ A=C; \\ \overline{D}\subseteq B. \end{cases}$

4. $\begin{cases} AD=BCD; \\ C\subseteq\overline{D}; \\ CD\subseteq\overline{B}; \\ A=B\cup C; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C\subseteq A\subseteq\overline{D}; \\ B\subseteq A\subseteq B\cup C. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \overline{Y}\subseteq\overline{ZW}; \\ XW=YZW; \\ X=Y\cup Z; \\ \overline{Z}\subseteq W; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=Z=Y\cup Z; \\ Y=ZW; \\ \overline{W}\subseteq Z. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \overline{A}\cup\overline{B}=D; \\ AC=D; \\ C\subseteq A\cup B; \\ B\subseteq\overline{D}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\overline{B}; \\ \overline{A}=\overline{C}; \\ D=\varnothing. \end{cases}$

7. $\begin{cases} AD=BCD; \\ A\cup B=C\cup D; \\ B\subseteq D; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=C; \\ A\subseteq\overline{B}; \\ C\subseteq\overline{D}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} Y=\overline{ZW}; \\ XW=YZW; \\ X=Y\cup Z; \\ \overline{W}\subseteq Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=Y; \\ X=Z; \\ W=\varnothing. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \overline{A} \cup \overline{B} = D; \\ AC = D; \\ C \subseteq A \cup B; \\ B \subseteq \overline{D}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \overline{B}; \\ A = C; \\ \overline{A} \subseteq D. \end{cases}$

10. $\begin{cases} X\ Z = Y\ W; \\ XW \cup YZ = \overline{YW}; \\ X \subseteq W; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = W; \\ Y = Z. \end{cases}$

11. $\begin{cases} B \cup C \subseteq A; \\ A \cup B \subseteq C \cup D; \\ A \cup C \subseteq D \cup B; \\ AC \subseteq B; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C; \\ B \subseteq A \subseteq B \cup D. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \overline{X} \subseteq Z; \\ Y \subseteq \overline{X\,Z}; \\ W = Y \cup Z; \\ XW = XYZ; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y \subseteq W; \\ \overline{X} = Z = W. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \overline{B} \cup \overline{D} = A; \\ A = CD; \\ C \subseteq B \cup D; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{B} = D; \\ C = D; \\ \overline{A} \subseteq B. \end{cases}$

14. $\begin{cases} ACD = BD; \\ C \subseteq \overline{D}; \\ A \subseteq \overline{C} \cup \overline{D}; \\ A \cup C = B; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C \subseteq B \subseteq \overline{D}; \\ A \subseteq B \subseteq A \cup C. \end{cases}$

15. $\begin{cases} YZ \subseteq W; \\ XY = YZW; \\ X = Z \cup W; \\ \overline{Z} \subseteq Y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = Z = Z \cup W; \\ YZ = W; \\ \overline{Y} \subseteq Z. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \overline{A} \cup \overline{C} = D; \\ AB = D; \\ B \subseteq A \cup C; \\ C \subseteq \overline{D}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \overline{C}; \\ \overline{A} = \overline{B}; \\ D = \varnothing. \end{cases}$

17. $\begin{cases} A\overline{C} = B\overline{C}\,\overline{D}; \\ A \cup B = \overline{C} \cup \overline{D}; \\ B \subseteq \overline{C}; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \overline{D}; \\ A \subseteq \overline{B}; \\ \overline{C} \subseteq D. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \overline{X} = \overline{Z} \cup \overline{W}; \\ \overline{X}ZW = \overline{Y}W; \\ \overline{Y} = \overline{X} \cup Z; \\ \overline{W} \subseteq Z; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X = Y; \\ \overline{Y} = Z; \\ W = \varnothing. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \overline{A} \cup \overline{B} = C; \\ AD = C; \\ D \subseteq A \cup B; \\ B \subseteq \overline{C}; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \overline{B}; \\ A = D; \\ \overline{A} \subseteq C. \end{cases}$

20. $\begin{cases} XZ = YW; \\ XY \cup ZW = \overline{YW}; \\ Z \subseteq W; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X = Y; \\ Z = W. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \overline{W} \subseteq X; \\ Y \subseteq \overline{XW}; \\ Z = Y \cup X; \\ ZW = YXW; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Y \subseteq Z; \\ X = Z = \overline{W}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} CD = BAD; \\ A \subseteq \overline{D}; \\ AD \subseteq \overline{B}; \\ C = B \cup A; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A \subseteq C \subseteq \overline{D}; \\ B \subseteq C \subseteq B \cup A. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \overline{D} \cup \overline{B} = A; \\ A = DC; \\ C \subseteq D \cup B; \\ B \subseteq \overline{A}; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} D = \overline{B}; \\ \overline{D} = \overline{C}; \\ A = \varnothing. \end{cases}$

24. $$\begin{cases} ZW = \overline{X} \\ ZXW = YW; \\ Y = X \cup Z; \\ \overline{W} \subseteq Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = Y; \\ Y = Z; \\ W = \varnothing. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} Y\ Z = X\ W; \\ YW \cup XZ = \overline{XW}; \\ Y \subseteq W; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = W; \\ X = Z. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} \overline{D} \cup \overline{C} = A; \\ DB = A; \\ B \subseteq D \cup C; \\ C \subseteq \overline{A}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = \overline{C}; \\ \overline{D} = \overline{B}; \\ A = \varnothing. \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} Y = \overline{Z} \cup \overline{W}; \\ YZW = XW; \\ X = Y \cup Z; \\ \overline{W} \subseteq Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{X} = Y; \\ \overline{Z} = \overline{X}; \\ W = \varnothing. \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} \overline{Y} \subseteq Z; \\ X \subseteq \overline{YZ}; \\ W = X \cup Z; \\ YW = XYZ; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \subseteq W; \\ \overline{Y} = Z = W. \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} BCD = AD; \\ C \subseteq \overline{D}; \\ B \subseteq \overline{C} \cup \overline{D}; \\ B \cup C = A; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C \subseteq A \subseteq \overline{D}; \\ B \subseteq A \subseteq B \cup C. \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} \overline{X}\,\overline{Z} = \overline{Y}\ W; \\ \overline{X}\,\overline{Y} \cup \overline{Z}\,W = \overline{\overline{Y}W}; \\ \overline{Z} \subseteq W; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = Y; \\ Z = \overline{W}. \end{cases}$$

8.2. Контрольная работа по комбинаторике

Задача 1. Дано множество U из n элементов. Каким числом способов в нем можно выбрать три подмножества A, B, C так, чтобы выполнялись заданные условия:

1) $n=7$, $|A-B|=1$, $|B-(A\cup C)|=4$;
2) $n=9$, $|(A\cap B)\cup C|=2$, $|A-(B\cup C)|=5$;
3) $n=8$, $|A\cup B|=6$, $|A-(B\cup C)|=5$;
4) $n=7$, $|A\cup B\cup C|=5$, $|A-B|=4$;
5) $n=6$, $|A-B|=3$, $|B\cap(A\cup C)|=2$;
6) $n=7$, $|A\cap(B\cup C)|=2$, $|(B\cup C)-A|=1$;
7) $n=9$, $|(A\cap B)\cup C|=8$, $|A\cap(B\cup C)|=1$;
8) $n=7$, $|A\cup B|=2$, $|C\cap(A\cup B)|=1$;
9) $n=9$, $|A-(B\cup C)|=6$,$|C\cap(A\cup B)|=2$;
10) $n=8$, $|(A\cap B)\cup C|=6$, $|C-(A\cup B)|=4$;
11) $n=8$, $|A-B|=2$, $|A\cap B\cap C|=4$;
12) $n=7$, $|(A-B)\cup C|=1$, $|B-(A\cup C)|=3$;
13) $n=7$, $|A\cup B|=5$, $|A\cap B\cap C|=3$;
14) $n=8$, $|A-B|=6$, $|(B\cap C)-A|=1$;
15) $n=5$, $|(A\cap B)\cup C|=3$, $|C-(A\cap B)|=1$;
16) $n=6$, $|A\cup B|=4$, $|(A\cup B)-C|=1$;
17) $n=8$, $|A-(B\cup C)|=5$, $|(B\cup C)-A|=1$;
18) $n=7$, $|(A\cap B)\cup C|=4$, $|C-(A\cap B)|=1$;
19) $n=9$, $|A-B|=3$, $|(B\cap C)-A|=5$;
20) $n=6$, $|A-B|=3$, $|B-(A\cap C)|=2$;
21) $n=7$, $|(A-B)\cup C|=6$, $|C\cap(A\cup B)|=3$;
22) $n=8$, $|A-(B\cup C)|=5$, $|B-(A\cap C)|=2$;
23) $n=7$, $|(A-B)\cup C|=6$, $|A-(B\cup C)|=3$;
24) $n=9$, $|A\cap B|=4$, $|A-(B\cup C)|=4$;
25) $n=7$, $|A\cap B|=5$, $|(A\cup C)-B|=1$;
26) $n=6$, $|(A-B)\cup C|=4$, $|(A\cup C)-B|=2$;
27) $n=8$, $|A\cap B\cap C|=4$, $|(A\cup B)-C|=1$;

28) $n=8$, $|A\cap B|=5$, $|C-(A\cup B)|=2$;

29) $n=8$, $|(A-B)\cup C|=7$, $|C-B|=6$;

30) $n=7$, $|A\cap B\cap C|=3$, $|A-(B\cap C)|=2$?

Задача 2. На одной из кафедр университета работают *S* человек, среди которых *T* человек не знают ни одного иностранного языка. *A* человек знают английский, *N* – немецкий, *F* – французский. *AN* знают английский и немецкий, *AF* – английский и французский, *NF* – немецкий и французский, *ANF* знают все три языка. По заданным в таблице условиям восстановить недостающую информацию.

№	*S*	*A*	*N*	*F*	*AN*	*AF*	*NF*	*ANF*	*T*
1.	17	11	6	5	4	3	2	1	?
2.	16	?	9	7	4	4	5	2	3
3.	17	8	10	?	6	4	4	3	5
4.	20	11	8	5	7	3	4	?	7
5.	?	10	7	4	5	4	3	3	5
6.	17	12	9	7	8	?	5	4	3
7.	21	11	?	6	6	5	3	2	5
8.	26	14	11	5	?	4	3	2	6
9.	19	13	9	5	5	3	3	1	?
10.	17	?	9	6	6	4	4	2	2
11.	16	12	9	?	6	4	3	3	1
12.	17	13	6	4	6	3	2	?	3
13.	?	14	9	7	7	5	3	2	1
14.	18	15	8	6	7	?	4	3	2
15.	20	12	?	8	5	5	3	1	4
16.	23	14	8	7	?	4	4	2	5
17.	23	15	8	9	3	4	5	2	?
18.	?	14	7	8	4	5	4	3	1
19.	20	?	9	6	4	3	2	1	2

20.	25	11	14	10	6	4	?	2	3
21.	27	17	13	?	9	6	5	4	4
22.	30	18	14	9	9	5	4	?	4
23.	26	15	13	11	8	?	5	3	2
24.	28	17	?	10	11	5	7	4	4
25.	30	19	16	12	?	8	7	5	3
26.	35	20	16	15	10	8	9	6	?
27.	?	20	17	13	8	5	4	1	5
28.	39	?	17	13	8	5	6	2	4
29.	37	22	16	?	8	5	4	3	2
30.	33	19	18	11	9	?	7	2	3

Задача 3. Рассматриваются слова в алфавите $\{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$. Через n_i обозначается число вхождений буквы a_i в слово. Требуется подсчитать число слов длины n, удовлетворяющих данным условиям.

1. $q = 3$, $n = 9$, $n_1 \geq 6$;
2. $q = 4$, $n = 7$, $n_1 = 2n_2$;
3. $q = 4$, $n = 7$, $n_1 + n_2 < n_3 + n_4$;
4. $q = 5$, $n = 8$, $n_1 = n_2 + n_3 + n_4$;
5. $q = 3$, $n = 9$, $n_1 = 2, \quad n_2 < n_3$;
6. $q = 5$, $n = 7$, $n_1 + n_2 = 3, \quad n_3 \geq 2$;
7. $q = 3$, $n = 7$, $n_1 = n_2$;
8. $q = 3$, $n = 10$, $n_1 = n_2 + n_3$;
9. $q = 3$, $n = 7$, $n_1 + n_2 < n_3$;
10. $q = 4$, $n = 6$, $n_1 + n_2 = n_3$;
11. $q = 4$, $n = 5$, $n_1 < n_2$;
12. $q = 3$, $n = 8$, $n_1 + n_2 \geq 6$;
13. $q = 3$, $n = 8$, $2 < n_1 < 6$;
14. $q = 3$, $n = 6$, $n_1 \leq n_2 \leq n_3$;

15. $q=4$, $n=7$, $n_1 \le 2, \quad n_2+n_3=4$;
16. $q=5$, $n=8$, $n_1=4, \quad n_2 \le 3$;
17. $q=4$, $n=6$, $n_1 \ge n_2+n_3+n_4$;
18. $q=4$, $n=8$, $n_1+n_2=3, \quad n_3 \ge 2$;
19. $q=4$, $n=9$, $n_1 > n_2 > 2$;
20. $q=5$, $n=6$, $n_1=n_2$;
21. $q=5$, $n=6$, $n_1+n_2=n_3+n_4$;
22. $q=4$, $n=8$, $n_1=2, \quad n_2 \ge 3$;
23. $q=5$, $n=7$, $n_1 \le 2, \quad n_2+n_3+n_4=3$;
24. $q=4$, $n=8$, $n_1+n_2 \le 4, \quad n_3=1$;
25. $q=5$, $n=7$, $n_1=n_2=n_3$;
26. $q=4$, $n=7$, $n_1 < n_2 < 4$;
27. $q=5$, $n=6$, $n_1+n_2 > n_3+n_4+n_5$;
28. $q=5$, $n=7$, $n_1+n_2+n_3 < n_4 < 4$;
29. $q=4$, $n=8$, $2n_1+n_2=6$;
30. $q=3$, $n=9$, $n_1 \ge n_2+n_3$.

Задача 4. Сколькими способами можно переставить буквы слова:

1. «здание», чтобы гласные шли в алфавитном порядке;
2. «перешеек», чтобы четыре буквы «е» не шли подряд;
3. «ежевика», чтобы «и» шла непосредственно после «к»;
4. «тарантас», чтобы две буквы «а» не шли подряд;
5. «каракули», чтобы никакие две гласные не стояли рядом;
6. «группоид», чтобы не менялся порядок гласных букв;
7. «перемена», чтобы три буквы «е» не шли подряд;
8. «столовая», чтобы никакие две гласные не стояли рядом;
9. «фигура», чтобы согласные шли в алфавитном порядке;
10. «баобаб», чтобы три буквы «б» не шли подряд;
11. «тетрадь», чтобы «ь» шла непосредственно после «р»;
12. «колокола», чтобы две буквы «о» не шли подряд;
13. «симфония», чтобы никакие две согласные не стояли рядом;
14. «симметрия», чтобы не менялся порядок гласных букв;
15. «кукуруза», чтобы две буквы «у» не шли подряд;

16. «алгебра», чтобы «р» шла непосредственно после «а»;
17. «автобус», чтобы гласные шли в алфавитном порядке;
18. «карандаш», чтобы две буквы «а» не шли подряд;
19. «решение», чтобы «е» шла непосредственно после «н»;
20. «множество», чтобы согласные шли в алфавитном порядке;
21. «апелляция», чтобы «я» шла непосредственно после «л»;
22. «гиппопотам», чтобы гласные шли в алфавитном порядке;
23. «баллада», чтобы две буквы «а» не шли подряд;
24. «интеллект», чтобы «л» шла непосредственно после «е»;
25. «идиллия», чтобы три буквы «и» не шли подряд;
26. «пассажир», чтобы согласные шли в алфавитном порядке;
27. «диаграмма», чтобы «м» шла непосредственно после «а»;
28. «оперетта», чтобы не менялся порядок гласных букв;
29. «гипербола», чтобы гласные шли в алфавитном порядке;
30. «баррикада», чтобы две буквы «а» не шли подряд?

Литература

1. Алексеев В.Е., Киселёва Л.Г., Смирнова Т.Г. Сборник задач по дискретной математике. − Методическая разработка, Нижний Новгород, 2007. − 48 с.
2. Алексеев В.Е., Таланов В.А. Графы. Модели вычислений. Структуры данных. − Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2005. – 307 с.
3. Андерсон Д.А. Дискретная математика и комбинаторика. : Пер. с англ. − Издательский дом "Вильямс", 2004. − 960 с.
4. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. − М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. − 416 с.
5. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. − М.: Наука, 1990. − 384 с.
6. Жильцова Л.П., Смирнова Т.Г. Основы теории графов и теории кодирования в примерах и задачах: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2008. – 64 с.
7. Киселёва Л.Г., Смирнова Т.Г. Функции алгебры логики в примерах и задачах: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2008. – 57 с.
8. Марков А. А. Введение в теорию кодирования. − М.: Наука, 1982. − 192 с.
9. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. − М.: Наука, 2000. − 384 с.

Оглавление

Владимир Евгеньевич **Алексеев**
Лариса Георгиевна **Киселева**
Татьяна Геннадьевна **Смирнова**

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Электронное учебно-методическое пособие