

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ
ЗАДАЧ НА КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ для студентов
ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02
«Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2016

УДК 517.54 (075)
ББК В16я73
М-54

М-54 Методические указания к решению задач на конформные отображения. Составители: Калашников А.Л., Филиппов В.Н. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 56 с.

Рецензент: к.ф.-м.н. доцент **О.Е. Галкин**

В пособии содержатся примеры, относящиеся к теме “Конформные отображения” по курсу теории функций комплексного переменного. Приведены подробные методические указания для их решения и необходимые теоретические сведения. Имеются контрольные упражнения на применение основных элементарных функций. Пособие будет полезно при проведении практических занятий, коллоквиумов по теории функций комплексного переменного и для самостоятельной работы студентов ИИТММ ННГУ.

УДК 517.54 (075)
ББК В16я73

ОГЛАВЛЕНИЕ	стр.
ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТФКП.....	7
ГЛАВА 2. ОТОБРАЖЕНИЯ, ОСУЩЕСТВЛЯЕМЫЕ	
ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ	19
§1. Дробно-линейная функция.....	19
§2. Степенная функция	26
§3. Функция Жуковского	29
§4. Показательная функция	33
§5. Радикал	37
§6. Логарифмическая функция.....	40
§7. Общие задачи	41
ГЛАВА 3. УПРАЖНЕНИЯ	49
ЛИТЕРАТУРА	55

ВВЕДЕНИЕ

Первое упоминание о комплексных числах — “мнимых величинах”— по-видимому, содержится в работах Дж. Кардано (1501-1576) и относится к 1545 г. Позже (в 1572 г.) о полезности “мнимых величин” высказался Р. Бомбелли (ок. 1530-1572) при решении кубических уравнений в неприводимых случаях, когда действительные корни выражаются через комплексные числа. Таким образом, первоначально комплексные числа — “мнимые величины”— вводились в виде формальных решений квадратных и кубических уравнений. Эти решения имели вид $a + b\sqrt{-1}$, где a и b — действительные числа, а что понимать под $\sqrt{-1}$, было неясно. Отношение к комплексным числам, как придуманным для удобства рассуждений, сохранялось ещё долго. Даже основоположники математического анализа И. Ньютон (1643-1727) и Г. Лейбниц (1646-1716) не придавали комплексным числам серьёзного значения.

Впервые геометрическую интерпретацию комплексных чисел дал норвежский математик К. Вессель (1745-1818) в 1799 г. Он сопоставил комплексным числам векторы на плоскости, т.е. в аналитическом выражении — упорядоченные пары действительных чисел, что совпадает с современным определением комплексных чисел. Сложение и вычитание комплексных чисел соответствовали аналогичным операциям с векторами, а умножение комплексных чисел означало перемножение их величин (модулей) как положительных действительных чисел и сложение направлений (аргументов).

Величину $\sqrt{-1}$ — “мнимую единицу” — обозначить буквой i предложил Л. Эйлер (1707-1783). Термин “комплексное число” впервые ввёл Л. Карно (1753-1823). Однако, и то, и другое в обиход было введено Г.Ф. Гауссом (1777-1855).

Теперь “мнимая единица” i приобретала реальный смысл — она соответствовала вектору единичной длины, направленному в положительную сторону оси ординат; умножение на i означало поворот на угол $\frac{\pi}{2}$.

Множество комплексных чисел обладает свойством полноты и замкнутости относительно всех операций алгебры и математического анализа.

К началу XIX века новая числовая система в основном сложилась. В то же время были предприняты попытки нового обобщения числовых систем — попытки построить n -мерный аналог (при $n > 2$) поля \mathbf{C} комплексных чисел. В 1843 г. У. Гамильтоном (1805-1865) была предложена такая система чисел путём введения трёх различных “мнимых единиц” — алгебра кватернионов, содержащих поле \mathbf{C} , реализуемая в 4-мерном пространстве \mathbf{R}^4 и обладающая всеми свойствами поля, кроме коммутативности умножения (т.е. являющаяся телом).

В дальнейшем были введены числовые системы со многими “мнимыми единицами”. Получающиеся при этом числа, включая кватернионы, называются гиперкомплексными. Исследования, проведённые К. Вейерштрассом (1815-1897), Г. Фробениусом (1849-1917), Ч. Пирсом (1839-1914), показала, что любое обобщение комплексных чисел неизбежно связано с нарушением каких-либо законов арифметических операций. А именно, все конечномерные действительные ассоциативные алгебры без делителей нуля исчерпываются полем действительных чисел \mathbf{R} , полем комплексных чисел \mathbf{C} и телом кватернионов \mathbf{H} (теорема Фробениуса, 1877). Отсутствие делителей нуля у конечномерной алгебры влечёт за собой наличие в этой алгебре однозначного деления.

Таким образом, единственным обобщением действительных чисел с сохранением основных законов арифметики являются комплексные числа. Кватернионы оказываются самыми близкими из гиперкомплексных чисел к действительным и комплексным числам. Следует отметить, что были найдены применения кватернионов в электродинамике и механике.

В XIX веке теория функций комплексного переменного (ТФКП) получила существенное развитие в первую очередь благодаря работам О.Л. Коши (1789-1857), Б. Римана (1826-1866), К. Вейерштрасса (1815-1897).

Исследования Коши опирались на разработанную им теорию интегрирования в комплексной области, начала которой восходят ещё к Эйлеру и П.С. Лапласу (1749-1827), В связи со специальными интегралами (эллиптические и другие не элементарные функции) следует назвать работам Гаусса, Н.Х. Абеля (1802-1829), К.Г. Якоби (1804-1851), А. Лежандра (1752-1833), В.А. Пюизё (1820-1883).

Риман рассматривает функцию комплексного переменного как отображение области одной комплексной плоскости на область другой, обладающее определёнными свойствами (“конформное отображение”), и доказывает основную теорему данной теории (теорема Римана). Им было предложено геометрическое представление комплексных чисел точками сферы (“сферы Римана”). В 1826 году вышла работа Н.И. Лобачевского (1792-1856) по неевклидовой геометрии. Оказалось, что геометрия Лобачевского моделируется соотношениями дуг окружностей на сфере Римана. Новые обоснования методов Римана содержатся в работах А. Пуанкаре (1854-1912), других математиков.

В основу исследований функций комплексного переменного К. Вейерштрасс положил свойства степенных рядов и с их помощью распространял (продолжал) функции на более широкие области (“аналитическое продолжение”).

Методы ТФКП широко применяются в алгебре, дифференциальных уравнениях, теории чисел, теоретической физике, гидродинамике, газовой динамике, теории взрывов, теории упругости и т.д.

Основные понятия (расширенная комплексная плоскость, сфера Римана, евклидова и сферическая метрики, открытые и замкнутые множества, граница множества, компакт, путь, жорданова кривая, область, функция, однолиственность, непрерывность, дифференцируемость, аналитичность, конформность) и теоре-

тические сведения (теорема о сохранении области; условия, необходимые и достаточные для однолиственности функции в точке; теорема о достаточных условиях конформности отображения односвязной области на односвязную область; принцип симметрии Римана-Шварца; теорема Римана; формула Кристоффеля-Шварца) приведены в главе 1.

В главе 2 рассмотрены конформные отображения посредством основных элементарных функций: дробно-линейной, степенной, Жуковского, показательной, радикала и логарифмической. Кроме теоретических сведений по этим функциям в этой главе имеются типовые примеры и методические указания для их решения. Здесь же приведены примеры задач и методы их решения, требующие применения разнообразных методов, изложенных в главе 2.

Глава 3 содержит контрольные упражнения, в которых требуется самостоятельно выбрать метод решения задач на конформные отображения, используя способы, представленные в главах 1 и 2.

Пособие будет полезно при проведении практических занятий, коллоквиумов, контрольных, а также экзаменов по теории функций комплексного переменного и ее самостоятельного изучения студентами ИИТММ ННГУ.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТФКП

Дополнение определения сходящейся последовательности комплексных чисел определением сходимости к бесконечному пределу требует введения бесконечно удалённой точки (единственной!). Точнее, если последовательность $z_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$, такова, что для любого действительного числа $R > 0$ существует такой номер $n_0 = n_0(R)$, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|z_n| > R$, будем говорить, что эта последовательность имеет пределом бесконечность. Этот факт записываем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty.$$

Рассмотрим конструкцию, которая придаёт символу ∞ наглядный геометрический смысл. Пусть некоторая сфера S лежит на комплексной плоскости, касаясь её в точке 0 , а ON — диаметр. Соединим точку N (“северный полюс” сферы) с точкой z комплексной плоскости отрезком прямой. Этот отрезок пересекает сферу в единственной точке Z , отличной от N . Это построение, ставящее в соответствие каждой точке плоскости определённую точку сферы, называется стереографической проекцией, а сама сфера — сферой Римана. При таком подходе для любой последовательности $z_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, пределом соответствующих точек $Z_n \in S$, $n = 1, 2, \dots$, будет точка

N . Таким образом, точки сферы Римана находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством всех комплексных чисел, дополненных символическим числом ∞ . Дополнение множества комплексных чисел числом ∞ соответствует дополнению комплексной плоскости одной символической точкой, отвечающей числу ∞ . Эту точку будем называть бесконечно удалённой точкой, а дополненную ею комплексную плоскость — расширенной комплексной плоскостью и обозначать $\bar{\mathbb{C}}$: $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Этот термин будем употреблять как синоним термина “сфера Римана”. Нередко \mathbb{C} называют ещё конечной комплексной плоскостью.

Приведём краткий вывод формул, связывающих координаты точки $z = (x, y)$ комплексной плоскости с координатами соответствующей точки $Z = (\xi, \eta, \zeta)$ — стереографического образа — сферы Римана.

Оси ξ и η возьмём совпадающими с осями x и y , а ось ζ направим так, чтобы центр сферы Римана находился в точке $(0, 0, 1/2)$. Тогда точка $Z = (\xi, \eta, \zeta)$ сферы Римана удовлетворяет уравнению

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1/2)^2 = 1/4,$$

или

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta - \zeta^2.$$

Поскольку точки $N(0,0,1)$, $Z = (\xi, \eta, \zeta)$, $z = (x, y)$ лежат на одной прямой, можем написать

$$\frac{x-0}{\xi-0} = \frac{y-0}{\eta-0} = \frac{0-1}{\zeta-1},$$

откуда

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}, \quad x^2 + y^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta}. \quad (1)$$

Используя равенства (1), нетрудно получить также зависимости

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \zeta = 1 - \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}. \quad (2)$$

Точки комплексной плоскости, удовлетворяющие уравнению

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad (3)$$

образуют окружность (при $A \neq 0, B^2 + C^2 - 4AD > 0$) или прямую (при $A = 0$).

С помощью формул (1) для координат точек сферы Римана соответствующим точкам окружности (3) (прямую на комплексной плоскости будем называть окружностью бесконечного радиуса) получаем уравнение

$$A \cdot \frac{\zeta}{1-\zeta} + B \cdot \frac{\xi}{1-\zeta} + C \cdot \frac{\eta}{1-\zeta} + D = 0,$$

или

$$B \cdot \xi + C \cdot \eta + (A - D) \cdot \zeta + D = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) является уравнением плоскости в пространстве $0\xi\eta\zeta$. Поскольку пересечение сферы с плоскостью есть окружность, то приходим к утверждению, что при стереографической проекции окружность на комплексной плоскости переходит в окружность на сфере Римана. Это утверждение обратимо. Ясно, что окружность на сфере Римана, проходящая через точку $N(0;0;1)$, соответствует прямой линии на комплексной плоскости.

Отметим, что при стереографической проекции угол между двумя кривыми на плоскости остаётся равным углу между соответствующими кривыми на сфере Римана.

Наряду с обычной евклидовой метрикой на \mathbf{C} , когда под расстоянием $\rho(z_1, z_2)$ между двумя комплексными числами $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + iy_1$ и $z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + iy_2$ понимается расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) в евклидовом пространстве \mathbf{R}^2 :

$$\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2|, \quad (5)$$

введём сферическую метрику на $\overline{\mathbf{C}}$, (а значит и на \mathbf{C}), когда под расстоянием $d(z_1, z_2)$ между z_1 и z_2 будем понимать расстояние между стереографическими образами Z_1 и Z_2 точек z_1 и z_2 в евклидовом пространстве \mathbf{R}^3 :

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2} = \\ &= \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}}, \end{aligned} \quad (6)$$

если $z_1 \in \mathbf{C}$ и $z_2 \in \mathbf{C}$ (воспользовались формулами (2)). Если же $z_2 = \infty$, а $z_1 \neq \infty$, то $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = 0$, $\zeta_2 = 1$ и

$$d(z_1, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}. \quad (7)$$

Замечание 1. Отметим, что для любых двух точек z_1 и z_2 из \mathbf{C} выполняются неравенства:

$$\frac{1}{1 + m} \cdot \rho(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_2) \leq \rho(z_1, z_2), \quad (8)$$

где $m = \max\{|z_1|, |z_2|\}$.

Множества на \mathbf{C} и $\overline{\mathbf{C}}$.

Определение 1. При $\varepsilon > 0$ и $z_0 \in \mathbf{C}$ множество

$$B(z_0; \varepsilon) = \{z \in \mathbf{C} : \rho(z, z_0) < \varepsilon\}$$

называется кругом с центром $z_0 \in \mathbf{C}$ радиуса ε или, ε -окрестностью точки z_0 .

Определение 2. Множество $D \subset \mathbf{C}$ называется открытым в \mathbf{C} , если для любой точки $z \in D$ найдётся круг $B(z; \varepsilon)$ такой, что $B(z; \varepsilon) \subset D$.

Пример 1.1. \mathbf{C} — открытое множество в \mathbf{C} . Пустое множество \emptyset полагаем по определению открытым в \mathbf{C} .

Пример 1.2. Круг $B(z_0; r)$ — открытое множество в \mathbf{C} .

Действительно, если $z \in B(z_0; r)$, т.е. $\rho(z, z_0) < r$, то при

$$0 < \varepsilon < r - \rho(z, z_0)$$

будет включение $B(z; \varepsilon) \subset B(z_0; r)$, поскольку

$$\begin{aligned} (w \in B(z, \varepsilon)) &\Rightarrow (\rho(z, w) < \varepsilon) \Rightarrow (\rho(z_0, w) < \rho(z_0, z) + \rho(z, w) < \\ &< \rho(z_0, z) + r - \rho(z_0, z) = r). \end{aligned}$$

Пример 1.3. Множество $G = \{z \in \mathbf{C} : \rho(z_0, z) > r\}$ — внешность круга с центром z_0 радиуса r — является открытым (проверяется, как и в примере 1.2, используя неравенство треугольника для метрики).

Определение 3. Множество $F \subset \mathbf{C}$ называется замкнутым в \mathbf{C} , если его дополнение $G = \mathbf{C} \setminus F = CF$ в \mathbf{C} является открытым в \mathbf{C} множеством.

Пример 1.4. Множество $\bar{B}(z_0; r) = \{z \in \mathbf{C}: \rho(z, z_0) \leq r\}$ при $r \geq 0$, является замкнутым, что следует из определения 3 и примера 1.3. Множество $\bar{B}(z_0; r)$ называется замкнутым кругом с центром z_0 и радиуса r .

Утверждение 1. 1a) Объединение $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ множеств любой системы $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$ множеств, открытых в \mathbf{C} , является множеством, открытым в \mathbf{C} .

1b) Пересечение $\bigcap_{k=1}^n G_k$ конечного числа множеств, открытых в \mathbf{C} , является множеством, открытым в \mathbf{C} .

1c) Пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ множеств любой системы $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ множеств, замкнутых в \mathbf{C} , является множеством, замкнутым в \mathbf{C} .

1d) Объединение $\bigcup_{k=1}^n F_k$ конечного числа множеств, замкнутых в \mathbf{C} , является множеством, замкнутым в \mathbf{C} .

Доказательство. 1a) Если $w \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, то найдётся такое $\alpha_0 \in A$, что $w \in G_{\alpha_0}$ и, следовательно, найдётся такая ε -окрестность $B(w; \varepsilon)$ точки w , что $B(w; \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}$. Значит, $B(w; \varepsilon) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

1b) Пусть $w \in \bigcap_{k=1}^n G_k$. Тогда $w \in G_k$, $k = \overline{1, n}$. Пусть $\delta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, такие, что $B(w; \delta_k) \subset G_k$, $k = \overline{1, n}$. Полагая $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, получим, что $\delta > 0$ и $B(w; \delta) \subset \bigcap_{k=1}^n G_k$.

1c) Справедливость следует из равенства

$$C\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} (CF_\alpha).$$

1d) Аналогично, имеем

$$C\left(\bigcup_{k=1}^n F_k\right) = \bigcap_{k=1}^n (CF_k).$$

Пример 1.5. Множество $S(z_0; r) = \{z \in \mathbf{C}: \rho(z, z_0) = r\}$ с $r \geq 0$ есть окружность радиуса r с центром в точке $z_0 \in \mathbf{C}$ и будет замкнутым множеством, поскольку дополнение к $S(z_0; r)$ является объединением двух открытых множеств $B(z_0; r)$ и $CB(z_0; r)$.

Определение 4. Открытое в \mathbf{C} множество, содержащее данную точку, называется окрестностью этой точки в \mathbf{C} .

Ясно, что ε -окрестность точки является её окрестностью.

Определение 5. Точка $z \in \mathbb{C}$ по отношению ко множеству $E \subset \mathbb{C}$ называется:

- 1) внутренней точкой E , если она содержится в E вместе с некоторой своей окрестностью;
- 2) внешней точкой E , если она является внутренней точкой дополнения к E в \mathbb{C} ;
- 3) граничной точкой E , если она не является ни внешней, ни внутренней точкой множества E (т.е. будет граничной точкой множества, если в любой её окрестности имеются как точки этого множества, так и точки ему, не принадлежащие).

Совокупность всех граничных точек множества E обозначается ∂E (или FrE , а иногда frE).

Пример 1.6. Окружность $S(z_0; r)$, $r > 0$, является множеством граничных точек как открытого круга $B(z_0; r)$ так и замкнутого круга $\bar{B}(z_0; r)$:

$$S(z_0; r) = \partial B(z_0; r) = \partial \bar{B}(z_0; r).$$

Определение 6. Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется ограниченным, если величина

$$d(E) = \sup_{z_1, z_2 \in E} \rho(z_1, z_2),$$

называемая диаметром множества E , конечна.

Для ограниченности множества E необходимо и достаточно существование числа $R > 0$, что $\bar{B}(z_0; R) \supset E$.

Замечание 2. Для неограниченного множества бесконечно удалённую точку по определению считаем граничной.

Пример 1.7. Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является граничной точкой множества $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$; это множество не имеет внешних точек.

Пример 1.8. Все точки окружности $S(z_0; r)$ являются её граничными точками, но $S(z_0; r)$, как множество в \mathbb{C} , внутренних точек не имеет.

Определение 7. Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется предельной точкой множества $E \subset \mathbb{C}$, если для любой окрестности $U(z_0)$ точки z_0 пересечение $E \cap U(z_0)$ есть бесконечное множество.

Определение 8. Объединение множества $E \subset \mathbb{C}$ и всех его предельных точек из \mathbb{C} называется замыканием множества E в \mathbb{C} и обозначается \bar{E} .

Пример 1.9. Множество $\bar{B}(z_0; r) = B(z_0; r) \cup S(z_0; r)$ есть множество предельных точек для открытого круга $B(z_0; r)$.

Утверждение 2. Множество замкнуто в \mathbb{C} тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки:

$$(F \text{ замкнуто в } \mathbb{C}) \Leftrightarrow (F = \bar{F} \text{ в } \mathbb{C}).$$

Определение 9. Множество $K \subset \mathbb{C}$ называется компактом, если из любого покрытия K открытыми множествами можно выделить конечное покрытие.

Из этого определения сразу же получаем, что если K — компакт в \mathbb{C} , то

- 1) K — ограниченное множество;
- 2) K — замкнутое множество (рассуждая от противного);
- 3) любое замкнутое множество $F \subset K$ само является компактом.

Утверждение 3. Множество $K \subset \mathbb{C}$ является компактом тогда и только тогда, когда K замкнуто и ограничено в \mathbb{C} .

Определение 10. Путём γ называется непрерывное отображение числового промежутка \mathbf{I} (т.е. отрезка, интервала, полуинтервала, луча или всей числовой оси) в \mathbb{C} (или $\overline{\mathbb{C}}$).

Другими словами: путь — это комплекснозначная функция

$$z = \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

действительного переменного t , непрерывная в каждой точке промежутка $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$.

Если $\mathbf{I} = [\alpha; \beta]$, то точка $(x(\alpha), y(\alpha))$ — называется началом пути, а точка $(x(\beta), y(\beta))$ — концом. Путь называется замкнутым, если он имеет начало и конец и эти точки совпадают: $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

Определение 11. Путь $\gamma: \mathbf{I} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ называется простым путём, если отображение взаимно однозначно. При этом образ $\gamma(\mathbf{I})$ называется кривой Жордана (жордановой кривой) в $\overline{\mathbb{C}}$.

Определение 12. Путь $\gamma: [\alpha; \beta] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ называется кусочно-гладким, если отрезок $[\alpha; \beta]$ можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых сужение отображения γ задаётся непрерывно дифференцируемыми функциями.

Определение 13. Множество $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется линейно связным, если для любой пары z_1, z_2 его точек существует простой путь $\gamma: \mathbf{I} \rightarrow E$ такой, что кривая $\gamma(\mathbf{I})$ содержится в E , а точки z_1 и z_2 являются началом и концом пути γ .

Замечание 3. На данном этапе не будем рассматривать иного понятия связности множества, кроме линейной связности. Поэтому для краткости условимся линейно связные множества называть связными.

Определение 14. Областью в \mathbb{C} (или $\overline{\mathbb{C}}$) называется открытое связное множество.

Функция комплексного переменного.

Общее определение функции комплексного переменного ничем не отличается от обычного определения функции действительного переменного.

Функция — это правило, которое каждому комплексному числу из данного множества ставит в соответствие некоторое комплексное число. Символически это записываем

$$w = f(z), z \in D, D \subset \mathbb{C},$$

или

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C}$$

(при этом, не оговаривая, наряду с \mathbb{C} будем рассматривать и $\overline{\mathbb{C}}$). Тогда мы говорим, что задана комплекснозначная функция комплексного переменного. Множество D называется областью определения функции f (чаще всего мы будем находиться в ситуации, когда область определения функции является областью). Задать функцию — это значит задать пару (f, D) .

Отметим, что задание функции $f(z) = u + iv$ комплексного переменного z равносильно заданию двух действительных функций

$$u = \operatorname{Re} f(x + iy), v = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

двух действительных переменных x и y .

Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ называется непрерывной, если непрерывны функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Это определение равносильно следующему:

функция f , заданная в области D , непрерывна в точке $z_0 \in D$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $z \in D$ из круга $|z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Наибольший интерес представляют взаимно однозначные (однолистные) отображения.

Определение однолистности. Если функция $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, в различных точках из D принимает различные значения, то будем говорить, что функция однолистка на множестве D . При этом отображение $w = f(z)$ является взаимно однозначным отображением множества D на множество $f(D)$.

Функция f называется однолистной в точке $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, если она однолистка в некоторой окрестности этой точки.

Перейдём к рассмотрению отображений, осуществляемых аналитическими функциями. Существуют различные подходы к определению понятия аналитичности. Наиболее распространёнными являются два из них. Первый связан с геометрическим представлением о функции, и в его основе лежит требование наличия производной по комплексному переменному, то есть требование комплексной дифференцируемости. Этот подход развивали О. Коши и Б. Риман. Второй основывается на возможности представления функции степенным рядом. Этот подход применял К. Вейерштрасс.

Пусть D — область в комплексной плоскости \mathbb{C} .

Определение дифференцируемости. Функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ называется \mathbb{C} -дифференцируемой (или просто дифференцируемой) в точке $z \in D$, если

$$f(z + \Delta z) - f(z) = A \cdot \Delta z + o(\Delta z)$$

при $\Delta z \rightarrow 0$. Здесь A — комплексное число, не зависящее от Δz . Это требование эквивалентно существованию предела

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

— производной функции f в точке z (при этом $A = f'(z)$). Величина $f'(z) \cdot \Delta z = df(z)$ называется дифференциалом функции f в точке z , отвечающим приращению аргумента Δz (заметим, что $dz = \Delta z$).

Определение аналитичности 1. Функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ называется аналитической (голоморфной, регулярной, правильной) в области D , если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Определение аналитичности 2. Функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ называется аналитической в области D , если для каждой точки $z_0 \in D$ существует окрестность этой точки, в которой функция f представляется сходящимся степенным рядом:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots$$

Из основного свойства сходящихся степенных рядов (сумма степенного ряда дифференцируема внутри круга сходимости) и теоремы Тейлора (дифференцируемая в области функция в окрестности каждой точки области представляется сходящимся степенным рядом) следует, что данные определения аналитичности эквивалентны.

Функция называется аналитической в точке, если она аналитична в некоторой окрестности этой точки.

Конформные отображения.

Одним из важнейших свойств функций комплексного переменного является конформность. Сначала напомним, что *углом между кривыми*, пересекающимися в некоторой точке $z_0 \in \mathbb{C}$, называется угол между касательными к ним в этой точке. *Углом между кривыми*, пересекающимися в точке $z = \infty$, называется угол между образами этих кривых при отображении $v = \frac{1}{z}$ в точке

$v = 0$ (поскольку отображению $v = \frac{1}{z}$ соответствует поворот сферы Римана на

180° вокруг диаметра с концами в точках $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ и $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, то это отображение в каждой точке сферы сохраняет углы между кривыми, лежащими на сфере).

Определение конформности в точке. Отображение $w = f(z)$, заданное в некоторой окрестности точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, называется *конформным в точке z_0* , если выполняются два условия:

- 1) **сохранение углов:** угол между любыми двумя гладкими кривыми, пересекающимися в точке z_0 , по величине и направлению отсчёта равен углу между их образами;
- 2) **постоянство растяжения:** имеет место постоянство растяжения по всем направлениям, выходящим из точки z_0 .

Замечание 4. Конформность отображения $w = f(z)$ в точке $z_0 \in \bar{C}$ эквивалентна тому, что оно дифференцируемо в этой точке и $f'(z_0) \neq 0$.

Определение конформности в области. Отображение $w = f(z)$ называется **конформным в области** $D \subset \bar{C}$, если оно конформно в каждой точке этой области и функция f однолистка в D .

Отметим, что отображение может быть конформным в каждой точке области, но, тем не менее, не может быть конформным во всей области из-за отсутствия однолистности в этой области.

Замечание 5. Конформность отображения $w = f(z)$ в области $D \subset \bar{C}$ эквивалентна тому, что f аналитична и однолистка в D .

Замечание 6. Можно показать, что если функция f аналитична в точке $z_0 \in C$ и $f'(z_0) \neq 0$, то отображение $w = f(z)$ конформно в этой точке (и даже в некоторой окрестности этой точки).

Замечание 7. Ясно, что отображение, обратное к конформному в области, является конформным и что суперпозиция конформных отображений также является конформным отображением.

Перечислим некоторые свойства отображений, осуществляемых аналитическими функциями.

Свойство А1. (Теорема о сохранении области). Если функция f , определённая в области $D \subset \bar{C}$ и принимающая значения в \bar{C} , аналитична в каждой точке этой области, за исключением, быть может, полюсов, и не равна тождественно постоянной, то образ $f(D)$ также является областью в \bar{C} .

Свойство А2. Для того чтобы функция f , голоморфная в точке $z_0 \neq \infty$, была однолистной в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы $f'(z_0) \neq 0$.

Свойство А3. Для того чтобы функция

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots, \quad |z| > R,$$

голоморфная в точке $z_0 = \infty$, была однолистной в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы $c_1 \neq 0$.

Свойство А4. Для того чтобы функция f , имеющая в точке $z = a$ полюс, была однолистной в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы этот полюс был полюсом первого порядка.

Свойство А5. Пусть функция f аналитична в ограниченной односвязной области D и непрерывна вплоть до её границы ∂D (то есть непрерывна на её замыкании \bar{D}), являющейся замкнутой кусочно-гладкой кривой Жордана. Если f взаимно однозначно отображает кривую ∂D на замкнутую кусочно-гладкую кривую Γ с сохранением направления обхода, то функция f конформно отображает область D на внутренность $\text{int } \Gamma$ кривой Γ . Обратно, если аналитическая в области D функция f конформно отображает область D на область G , то функцию f можно непрерывно продолжить на \bar{D} так, что f будет отображать ∂D на ∂G взаимно однозначно и с сохранением направления обхода.

Свойство А6. Любая аналитическая функция $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, однолиственная в \mathbb{C} , является (целой) линейной. Любая аналитическая функция $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ и однолиственная в $\bar{\mathbb{C}}$, является дробно-линейной.

Свойство А7. Если отображение области $D \subset \bar{\mathbb{C}}$, заданное аналитической функцией, является однолиственным, то оно конформно в этой области.

Свойство А8. (Принцип симметрии Римана-Шварца.) Пусть функция f аналитична в области D , граница которой содержит интервал γ действительной оси, а область D^* симметрична D относительно действительной оси и не имеет общих точек с D . Если функция непрерывна вплоть до γ (то есть непрерывна на $D \cup \gamma$) и принимает действительные значения на γ , то её можно продолжить в область $D \cup \gamma \cup D^*$ до аналитической функции $F(z)$ следующим образом:

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \gamma; \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D^*. \end{cases}$$

Если при этом функция f конформно отображает область D на некоторую область G и образ Γ интервала γ также является интервалом действительной оси, то функция F конформно отображает область $D \cup \gamma \cup D^*$ на область $G \cup \Gamma \cup G^*$, где G^* — область, симметричная G относительно действительной оси.

Заметим, что принцип симметрии сохраняет силу и в случае, когда γ или её образ Γ являются дугами окружностей.

Следующее утверждение лежит в основе всей теории конформных отображений.

Свойство А9. (Теорема Римана.) Если D и G — две односвязные области расширенной комплексной плоскости, границы которых в $\bar{\mathbb{C}}$ состоят более чем из одной точки, то существует бесконечно много аналитических и однолистных в области D функций, каждая из которых осуществляет конформное отображение D на G (поэтому любые две такие области являются конформ-

но эквивалентными). При этом для любой пары точек $z_0 \in D$, $z_0 \neq \infty$, и $w_0 \in G$ и любого действительного числа α из промежутка $(-\pi, \pi]$ найдётся ровно одна функция из этого семейства, удовлетворяющая условиям $f(z_0) = w_0$ и $\arg f'(z_0) = \alpha$.

Замечание 8. Граница односвязной области расширенной комплексной плоскости, состоящая более чем из одной точки, на самом деле содержит континуум точек.

Замечание 9. Среди односвязных областей расширенной комплексной плоскости выделим три, которые будем называть *каноническими*:

- 1) вся расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$;
- 2) комплексная плоскость \mathbb{C} ;
- 3) единичный круг $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Покажем, что различные канонические области не являются конформно эквивалентными (то есть утверждение теоремы Римана для них не верно). В самом деле, $\overline{\mathbb{C}}$ не гомеоморфна ни \mathbb{C} , ни B , и тем более не конформно эквивалентна им. Области \mathbb{C} и B гомеоморфны, но конформного отображения \mathbb{C} на B не существует. Действительно, если бы некоторая функция f осуществляла такое отображение, то она была бы целой и всюду в \mathbb{C} подчинялась неравенству $|f(z)| < 1$, а, значит, согласно теореме Лиувилля, была бы постоянной, что противоречит конформности.

Замечание 10. Из теоремы Римана следует, что любая односвязная область D расширенной комплексной плоскости конформно эквивалентна ровно одной из канонических областей. Действительно, если её граница ∂D пуста, то D конформно эквивалентна $\overline{\mathbb{C}}$, если ∂D состоит из одной точки, то D эквивалентна \mathbb{C} , а если ∂D состоит более чем из одной точки, то, согласно теореме Римана, D конформно эквивалентна B . То, что D не может быть конформно эквивалентной более чем одной канонической области, вытекает из предыдущего замечания.

В силу теоремы Римана существует функция, конформно отображающая полуплоскость или круг на многоугольник. Аналитическое выражение для таких функций можно получить с помощью принципа симметрии.

Свойство A10. (Формула Кристоффеля-Шварца.) Пусть G — односвязный ограниченный многоугольник с вершинами в точках B_k и с внутренними углами $\pi\beta_k$, $\beta_k \in (0, 2]$, в этих вершинах, $k = 1, \dots, n$. Определим функции $f(z)$, $\text{Im } z > 0$, равенством

$$f(z) = C_1 \int_{z_0}^z (\zeta - a_1)^{\beta_1 - 1} \cdot \dots \cdot (\zeta - a_n)^{\beta_n - 1} d\zeta + C_2, \quad (9)$$

где C_1 и C_2 — комплексные постоянные, $\text{Im } z_0 > 0$ и a_1, \dots, a_n — различные действительные числа, а интеграл берётся по кривой, лежащей в верхней полуплоскости. Тогда параметры C_1 , C_2 , z_0 и a_1, \dots, a_n можно подобрать так, что-

бы функция f конформно отображала верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на многоугольник G , а точки a_k перейдут в вершины B_k , $k = 1, \dots, n$.

Замечание 11. Формула (9) пригодна и для определения функции, отображающей на многоугольник G любую другую полуплоскость или круг. В этом случае следует считать точки a_1, \dots, a_n расположенными на соответствующей прямой или окружности.

Замечание 12. Если какие-либо из точек a_k являются бесконечно удалёнными, то формула (9) даже упрощается: под интегралом отсутствуют соответствующие множители $(\zeta - a_k)^{\beta_k - 1}$. Если же в бесконечность попадает одна или несколько вершин многоугольника G , то формула (9) остаётся без изменений — нужно лишь учесть определение величины угла с вершиной в бесконечно удалённой точке.

Интегралы, возникающие в формуле Кристоффеля-Шварца, как правило, не выражаются через элементарные функции. Наибольшая трудность заключается в определении постоянных a_1, \dots, a_n . Произвольно можно задать лишь три из этих чисел, после чего отображение определяется однозначно. Для нахождения остальных постоянных получается система уравнений, точно решить которую обычно не удаётся. «Явные» формулы (через эллиптические функции) интеграл Кристоффеля-Шварца даёт лишь для треугольников, а также для многоугольников, полученных из треугольника с помощью нескольких осевых симметрий.

ГЛАВА 2. ОТОБРАЖЕНИЯ, ОСУЩЕСТВЛЯЕМЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

§1. Дробно-линейная функция

Дробно-линейная функция имеет вид:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$.

Основные свойства дробно-линейной функции:

- 1) **Однолистность.** Однолистка во всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.
- 2) **Конформность.** Конформно отображает $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$;
- 3) **Групповое свойство.** Множество всех дробно-линейных отображений образует группу.
- 4) **Круговое свойство.** образом окружности или прямой также является окружность или прямая.
- 5) **Свойство сохранения симметрии.** Точки, симметричные относительно окружности или прямой, переходят в точки, симметричные относительно образа этой окружности или прямой.
- 6) **Свойство инвариантности двойного отношения четырёх точек.** Если дробно-линейное отображение переводит четыре различные точки z_1, z_2, z_3, z_4 в четыре различные точки w_1, w_2, w_3, w_4 , то выполняется равенство:

$$\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} \cdot \frac{w_4 - w_3}{w_4 - w_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}.$$

Замечание 13. С помощью этого равенства можно однозначно определить отображение, переводящее данные три различные точки z_1, z_2, z_3 в данные три различные точки w_1, w_2, w_3 .

- 7) Дробно-линейное отображение, не равное тождественному, имеет две неподвижные точки, которые могут совпадать.
- 8) Любое конформное отображение единичного круга B на себя имеет вид:

$w = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - z\bar{a}}$, где a — любая точка единичного круга, а θ — любое действительное число.

- 9) Любое конформное отображение верхней полуплоскости на единичный круг

B имеет вид: $w = e^{i\theta} \frac{z - a}{z - \bar{a}}$, где $\text{Im } a > 0$ и $\theta \in \mathbb{R}$.

10) Любое конформное отображение верхней полуплоскости на себя имеет вид:

$w = \frac{az + b}{cz + d}$, где a, b, c, d — любые действительные числа, удовлетворяющие условию $ad - bc \neq 0$.

11) Производная имеет вид: $\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$.

Частным случаем дробно-линейной функции является **линейная функция** $f(z) = az + b$, где $a \neq 0$.

Укажем некоторые конкретные примеры линейных отображений (для наглядности плоскость независимого переменного и плоскость значений функции будем считать совмещёнными):

1) отображение $w = z + b$ является параллельным переносом (или сдвигом) на вектор b ;

2) отображение $w = e^{i\alpha} \cdot z$, где $\alpha \in \mathbf{R}$, есть поворот вокруг начала координат на угол α ;

3) отображение $w = r \cdot z$, где $r > 0$, является гомотетией с центром в начале координат и коэффициентом гомотетии r .

Пример 2.1.1.

Найти образ треугольника с вершинами в точках $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$ при отображении $w = (i - 1)z - 2$.

Решение.

Преобразуем функцию к виду $w = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z - 2$. Это отображение эквивалентно композиции трех преобразований; поворота на угол $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, гомотетии с коэффициентом $r = \sqrt{2}$ и сдвига на вектор $b = -2$. Таким образом, в плоскости (w) получим треугольник с вершинами

$$w_1(0) = -2, w_2(1) = -3 + i, w_3(i) = -3 - i.$$

Пример 2.1.2.

На что отобразит функция $w = \frac{1}{z}$ полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$, из которой удалён круг $|z| \leq 1$?

Решение.

Граница данной области состоит из прямой $l_1 = \{z : \operatorname{Re} z = 0\}$ и окружности $l_2 = \{z : |z - 1| = 1\}$. Эти линии имеют одну общую точку $z = 0$, в которой они касаются друг друга (рис. 1).

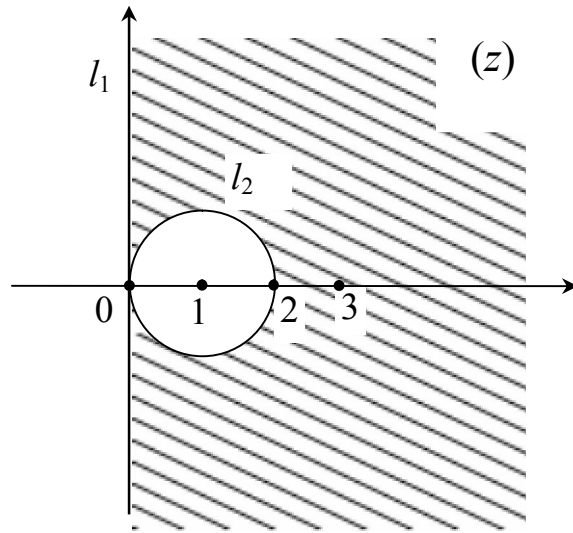


Рис. 1. Вид области в плоскости (z)

Образом $z = 0$ при отображении $w = \frac{1}{z}$ будет $w = \infty$. По круговому свойству образами l_1 и l_2 будут прямые L_1 и L_2 . Но поскольку угол между этими прямыми в $w_0 = \infty$ должен быть равен нулю, то L_1 и L_2 параллельны. Образом l_1 является мнимая ось $\operatorname{Re} w = 0$, так как точки $z = iy$ переходят в точки $w = \frac{1}{iy} = -i \frac{1}{y}$ при $-\infty < y < +\infty$. Образом l_2 будет прямая $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$, так как $z = 2$ переходит в $w = \frac{1}{2}$. Поскольку внутренняя точка $z = 3$ переходит в точку $w = \frac{1}{3}$, которая тоже должна быть внутренней, то функция $w = \frac{1}{z}$ отобразит данную область на полосу $\{w : 0 < \operatorname{Re} w < \frac{1}{2}\}$ (рис. 2).

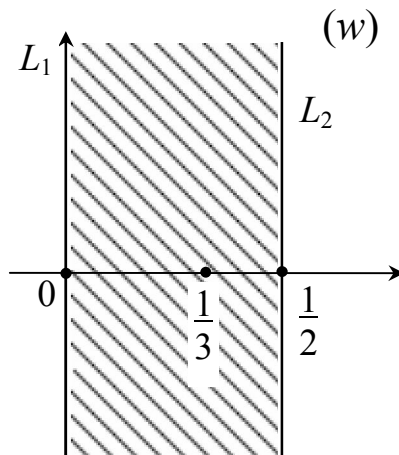


Рис. 2. Образ области в плоскости (w)

Пример 2.1.3.

Отобразить треугольник с вершинами в точках $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = 1$ (рис.

3) с помощью функции $w = \frac{1}{z}$.

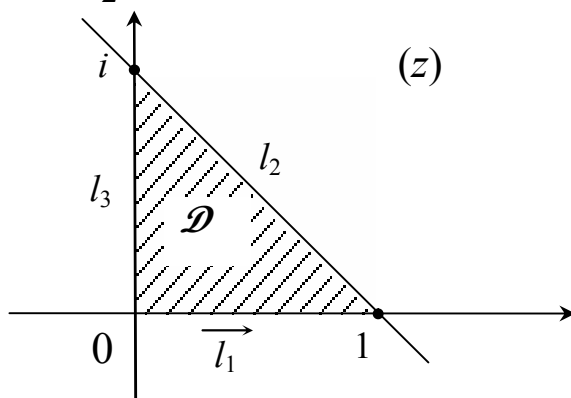


Рис. 3. Область примера 2.1.3

Решение.

Обозначим стороны треугольника через l_1 , l_2 , l_3 . Сторона l_1 отобразится в $L_1 = [0, +\infty)$ — часть действительной оси, а l_3 перейдет в луч $L_3 = [-i, -i\infty)$ мнимой оси (см. пример 1.2). По круговому свойству образом прямой, которой принадлежит l_2 , является окружность L_2 , поскольку указанная прямая не проходит через точку $z = 0$, образом которой является точка $w = \infty$. Точки $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = \infty$ отображаются соответственно в точки $w_1 = 1$, $w_2 = -i$, $w_3 = 0$ и через них можно провести единственную окружность. Образом l_2 будет полуокружность L_2 , не содержащая точки $w = 0$, ибо она есть образ $z = \infty$, не принадлежащая l_2 . При обходе границы l_2 от $z_1 = 1$ к $z_2 = i$ область D лежит слева. Значит при обходе L_2 от $w_1 = 1$ к $w_2 = -i$ область G — образ области D — должна быть слева от L_1 (рис. 4).

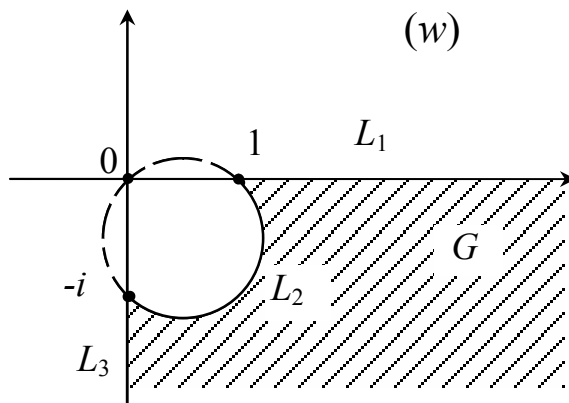


Рис. 4. Образ треугольника рис. 3

Пример 2.1.4.

Найти область плоскости (w), на которую отображается с помощью функции $w = \frac{z}{z-1}$ угол $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ (рис. 5).

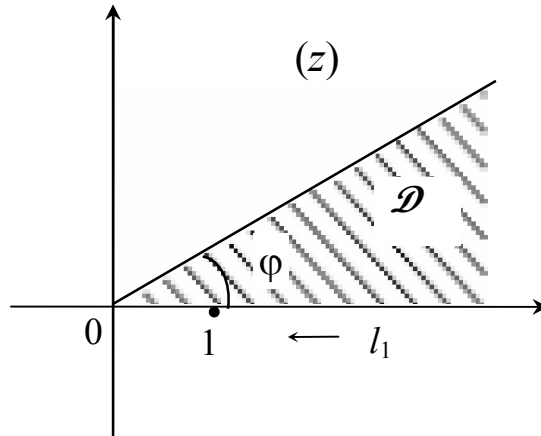


Рис. 5. Область на (z)

Решение.

По круговому свойству стороны угла преобразуются либо в дуги окружностей, либо в части прямых. Поскольку $z = 1$ принадлежит l_1 и она переходит в $w = \infty$, то l_1 преобразуется в часть прямой. Если точка z лежит на стороне l_1 , то z действительно. Значит, и $w = \frac{z}{z-1}$ действительно. Таким образом, l_1 отображается в часть действительной оси. Учитывая, что точки $z_1 = 0, z_2 = 1-0, z_3 = 1+0, z_4 = \infty$ преобразуются в точки $w_1 = 0, w_2 = -\infty, w_3 = +\infty, w_4 = 1$, находим образ $l_1: L_1 = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. Луч l_2 отобразится в часть L_2 окружности, проходящей через точки $w_1 = 0, w_4 = 1$, которые есть образы точек $z_1 = 0, z_4 = \infty$. Однако двух точек не достаточно, чтобы однозначно построить эту окружность. Поскольку отображение является конформным, то углы между лучами l_1 и l_2 на плоскости (z) в точке $z = 0$ и углы между линиями L_1 и L_2 на плоскости (w) в точке $w = 0$ должны быть равны как по величине, так и по направлению отсчета. Поэтому угол между L_1 и касательной к окружности в точке $w = 0$ должен быть равен $\frac{\pi}{4}$. Теперь окружность и дуга L_2 определены однозначно. При обходе границы l_1 от точки $z = \infty$ к точке $z = 0$ через точку $z = 1$ область D находится справа. Значит, при обходе границы L_1 от точки $w = 1$ к точке $w = 0$ через точку $w = \infty$ область G должна находиться тоже справа.

Итак, при отображении $w = z/(z - 1)$ имеем область рис. 6.

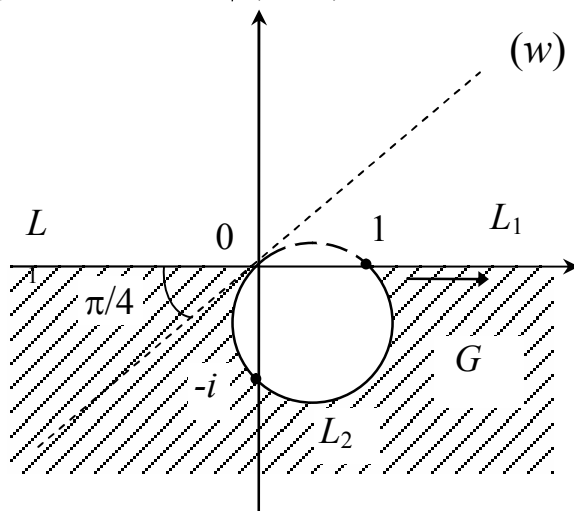


Рис. 6. Образ области на (w)

Пример 2.1.5.

Отобразить полуплоскость $\text{Im } z > 0$ (рис. 7)

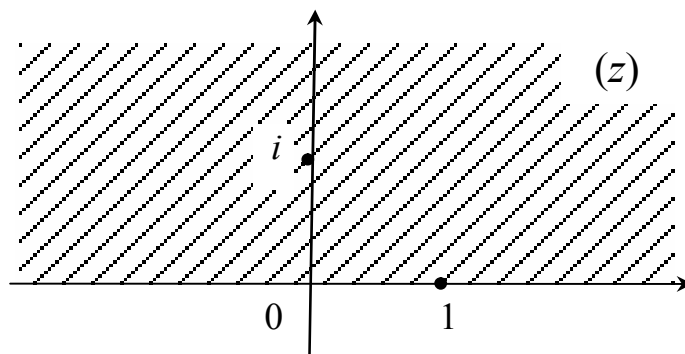


Рис. 7. Область на (z)

на круг $|w| < 1$ так, чтобы точка $z_1 = i$ перешла в центр круга, а точка $z_2 = 1$ была неподвижной (рис. 8).

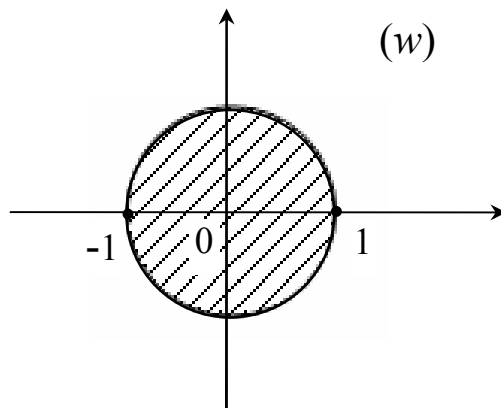


Рис. 8. Образ области на (w)

Решение.

Воспользуемся функцией 9) замечания 13, в которой возьмём $a = i$. Тогда $w = f(z) = e^{i\theta} \frac{z-i}{z+i}$. Определим множитель $e^{i\theta}$ из условия $f(1) = 1$. Отсюда имеем $1 = e^{i\theta} \frac{1-i}{1+i}$ или $1 = -e^{i\theta} i$. Поэтому $e^{i\theta} = i$. Подставляя найденное значение в функцию $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-i}{z+i}$, получим $w = i \frac{z-i}{z+i}$. Очевидно, $f(i) = 0$.

Пример 2.1.6.

Найти функцию, отображающую полуплоскость $\text{Im } z > 1$ с выброшенным кругом $|z - 2i| \leq 1$ (рис. 9)

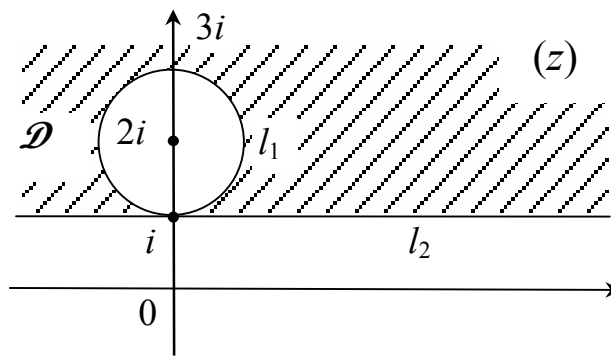


Рис. 9. Область D на (z)

на полосу $0 < \text{Re } z < 1$ (рис. 10).

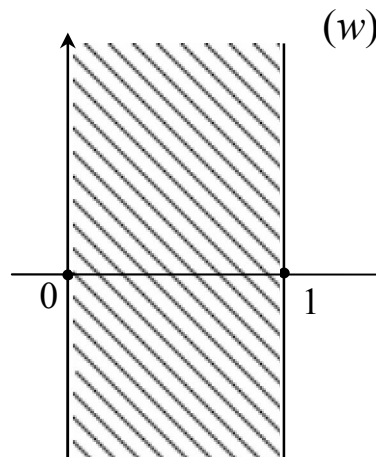


Рис. 10. Образ области на (w)

Решение.

Границами области D являются окружность l_1 и прямая l_2 . Их образами на плоскости (w) должны быть прямые. Это получается применением

дробно-линейной функции, которая точку $z = i$ отобразила бы в точку $w = \infty$. Очевидно, в качестве такой функции подойдёт функция $w_1 = \frac{1}{z-i}$.

Найдём образ области D при отображении с помощью функции w_1 . Любая точка $z = x + i$ прямой l_2 , $-\infty < x < +\infty$, перейдёт в точку $w_1 = \frac{1}{x}$, лежащую на действительной числовой оси, причём $-\infty < w_1 < +\infty$. Поэтому l_2 отобразится на действительную ось. Учитывая, что точка $z = 3i$ принадлежит l_1 и переходит в $w_1 = -\frac{i}{2}$, а мнимая ось отобразится в мнимую ось, то, воспользовавшись конформностью отображения w_1 в точке $z = i$, получаем, что образом l_2 является прямая L_2 , которая параллельна действительной оси (рис. 11).

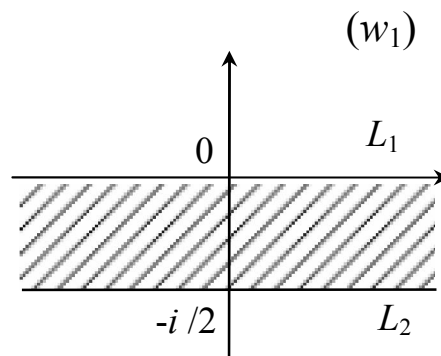


Рис. 11. Промежуточный образ области D в плоскости (w_1)

Используя преобразование поворота $w_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} w_1$ на угол $\frac{\pi}{2}$ и гомотетию

$$w_3 = 2w_2, \text{ получим искомую функцию } w = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{z-i} = \frac{2i}{z-i}.$$

§2. Степенная функция

Это функция $w = z^n$, ($n \in \mathbf{N}, n \geq 2$). Её основные свойства:

- 1) отображение является конформным во всех точках комплексной плоскости \mathbf{C} , кроме точки $z = 0$;
- 2) функция однолистна в каждом из углов

$$\frac{2\pi}{n} k < \varphi < \frac{2\pi}{n} (k+1), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

и образом каждого такого угла будет вся плоскость \mathbb{C} с разрезом вдоль положительной части действительной оси;

3) угол $0 < \varphi < \alpha$, $0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}$, отображается на угол $0 < \varphi < n\alpha$.

Пример 2.2.1.

Найти функцию, отображающую область $-\frac{\pi}{4} < \arg(z - 1 - i) < \frac{\pi}{4}$ (рис. 12).

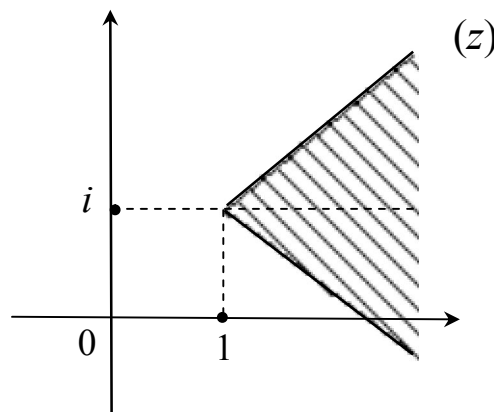


Рис. 12. Область на (z)

на область $\text{Im } w > 0$ (рис. 13).

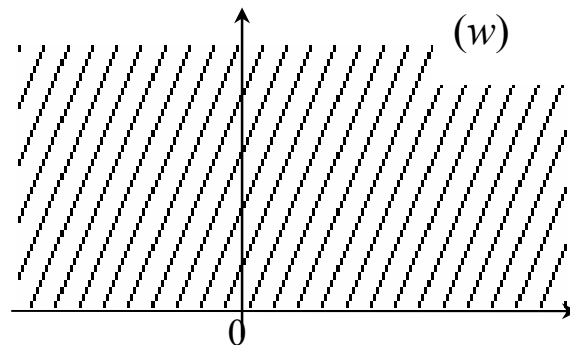


Рис. 13. Образ области на (w)

Решение.

Перенесём вершину угла в начало координат и повернём полученный угол на угол $\frac{\pi}{4}$ против часовой стрелки. Тогда получаем промежуточную область в плоскости (w_1) (рис. 14).

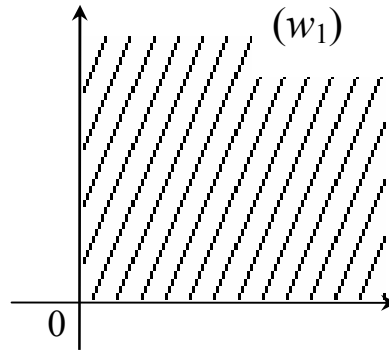


Рис. 14. Область в (w_1) после переноса и поворота

Это осуществляется функцией $w_1 = e^{-\frac{\pi}{4}z} (z - 1 - i)$. Угол $0 < \arg w_1 < \frac{\pi}{2}$ отображим на область $\text{Im } w > 0$ с помощью функции $w = w_1^2$. Окончательно, искомая функция имеет вид: $w = e^{-\frac{\pi}{2}i} (z - 1 - i)^2 = -i(z - 1 - i)^2$.

Пример 2.2.2.

Отобразить полукруг $|z| < 1, \text{Im } z > 0$ (рис.15)

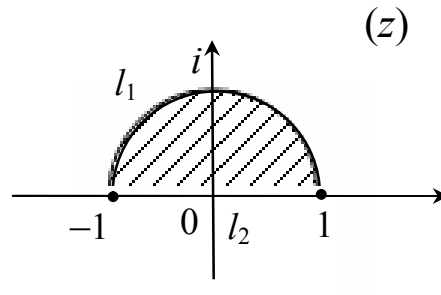


Рис. 15. Область на (z)

на круг $|w| < 1$ (рис. 16).

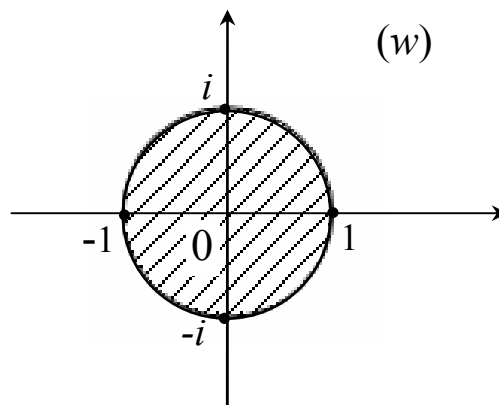


Рис. 16. Образ области на (w)

Решение.

Сначала отобразим полукруг на полуплоскость, а потом её на круг.

1) Вначале применяем дробно-линейную функцию, отображающую полу-круг на первый координатный угол. В качестве такой функции можно взять $w_1 = -\frac{z+1}{z-1}$. Тогда, так как $w_1(1) = \infty$, а $w_1(-1) = 0$, образами линий l_1 и l_2 будут лучи L_1 и L_2 , выходящие из $w_1 = 0$ и образующие прямой угол. Когда z пробегает отрезок $l_2 = [-1, 1]$, точка w_1 будет описывать луч $L_2 = [0, \infty)$ на действительной оси. Поскольку $w_1(i) = i$, то можно утверждать, что образом полуокружности l_1 является луч $L_1 = \{w_1 : \arg w_1 = \frac{\pi}{2}\}$ (рис. 17).

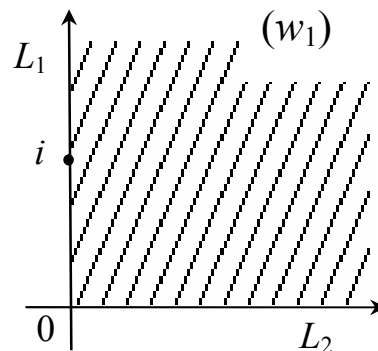


Рис. 17. Область на (w_1)

Пользуясь степенной функцией $w_2 = w_1^2$, отобразим первый координатный угол на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w_2 > 0$.

2) С помощью функции $w = e^{i\theta} \frac{w_2 - a}{w_2 - \bar{a}}$, $\text{Im } a > 0$, отобразим полуплоскость $\text{Im } w_2 > 0$ на круг $|w| < 1$ (см. пример 2.1.5). Результирующее отображение $w = e^{i\theta} \frac{(z+i)^2 - a(z-i)^2}{(z+i)^2 - \bar{a}(z-i)^2}$ не является единственным, поскольку оно зависит от выбора значений параметров θ и a .

§3. Функция Жуковского

Это функция $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Её основные свойства:

- 1) отображение конформно во всех точках расширенной комплексной плоскости, кроме точек $z = -1$ и $z = 1$ (эти точки являются неподвижными);
- 2) функция однолистна в области тогда и только тогда, когда в этой области нет различных точек z_1 и z_2 , связанных соотношением $z_1 \cdot z_2 = 1$. В частности,

функция Жуковского однолистка в следующих областях: единичный круг, внешность единичного круга, верхняя и нижняя полуплоскости;

3) функция Жуковского конформно отображает:

1. единичный круг на плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$;
2. верхнюю полуплоскость на плоскость с разрезом по лучам $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$;
3. полукруг $|z| < 1, \text{Im } z > 0$ на нижнюю полуплоскость.

Пример 2.3.1.

С помощью функции Жуковского отобразить круг $|z| < 1$ с двумя разрезами $[-1, -\frac{1}{4}]$, $[0, 1]$ вдоль действительной оси (рис. 18).

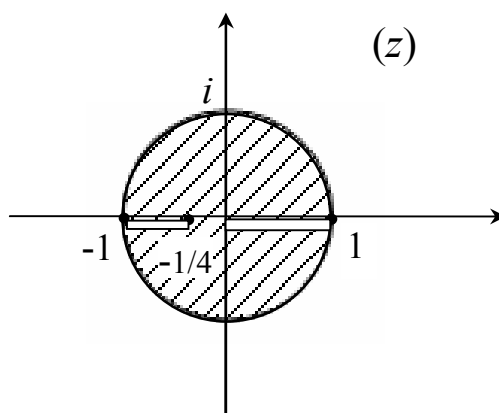


Рис. 18. Область на (z)

Решение.

Данная область принадлежит области однолиственности функции Жуковского. Образом круга $|z| < 1$ является вся плоскость с разрезом $[-1, 1]$ вдоль действительной оси. Разрезы $[-1, 0]$, $[0, 1]$ отображаются на разрезы $[-\frac{17}{8}, 1]$ и $[1; +\infty)$ (рис. 19).

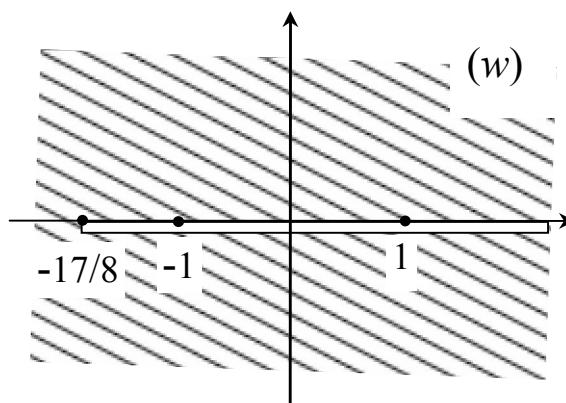
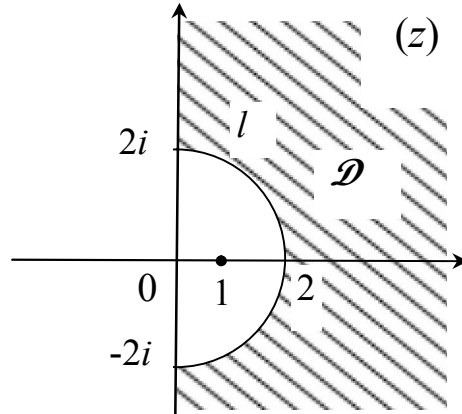


Рис. 19. Образ области (z) на (w)

Пример 2.3.2.

Найти образ G области $D = \{z : |z| > 2, \operatorname{Re} z > 0\}$ (рис. 20) при отображении $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

Рис. 20. Область на (z) **Решение.**

Область D принадлежит области однолиственности функции Жуковского. Образами лучей мнимой оси $(-\infty i; -2i]$ и $[2i; +\infty i)$ будут также лучи мнимой оси $(-\infty i; -\frac{3}{4}i]$ и $[\frac{3}{4}i; +\infty i)$, ибо $z = iy$ отображается в $w = \frac{i}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right)$. Полу-

окружность $l = \{z : z = 2e^{i\varphi}, |\varphi| < \frac{\pi}{2}\}$ перейдет в половину эллипса с полуосями

$\frac{5}{4}$ и $\frac{3}{4}$, лежащую в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$. Действительно, поскольку любая точка образа L полуокружности l записывается в виде

$$w = \frac{1}{2} (2e^{i\varphi} + \frac{1}{2}e^{-i\varphi}) = \frac{5}{4} \cos \varphi + i \frac{3}{4} \sin \varphi,$$

то, полагая $w = u + iv$, получаем, что линия L будет задана в параметрической форме уравнениями $u = \frac{5}{4} \cos \varphi$, $v = \frac{3}{4} \sin \varphi$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$. Исключая φ , получаем

уравнение $\frac{16u^2}{25} + \frac{16v^2}{9} = 1$, $u > 0$, определяющее половину эллипса L . Тогда образ D определяется неравенствами $\frac{16u^2}{25} + \frac{16v^2}{9} > 1$, $u > 0$ и его вид на

плоскости (w) показан на рис. 21.

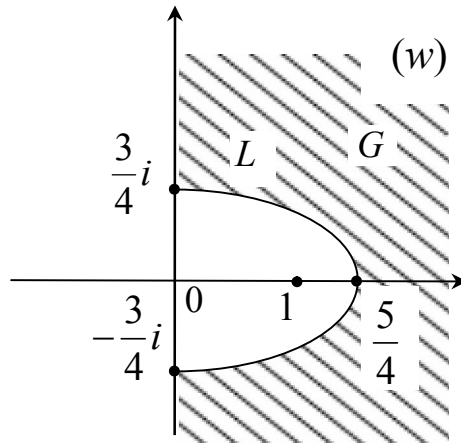


Рис. 21. Образ D на плоскости (w)

Пример 2.3.3.

Из плоскости удалён круг $|z| < 1$ и сделаны два разреза $[-3; 1]$, $[1; 3]$ вдоль действительной оси (рис. 22).

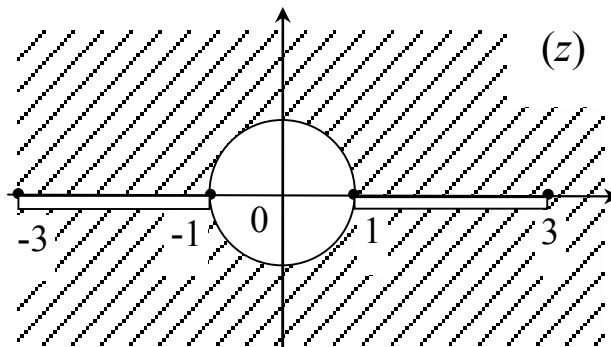


Рис. 22. Область на (z)

Отобразить полученную область на плоскость с разрезом $[0; +\infty)$ на действительной оси (рис. 23).

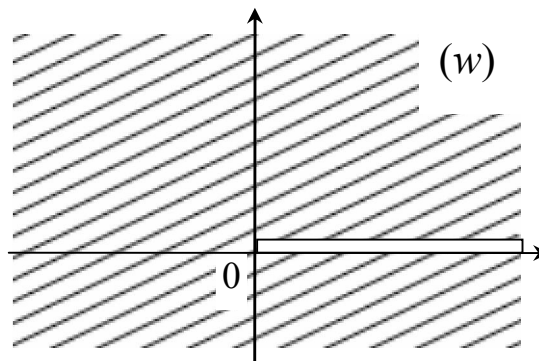


Рис. 23. Образ области на (w)

Решение.

Данная область принадлежит области однолиственности функции Жуковского. Поэтому применяем функцию $w_1 = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Образом окружности $|z| = 1$ является отрезок $[-1; 1]$ действительной оси, проходимый дважды. Разрезы $[-3; -1]$, $[1; 3]$ перейдут в разрезы по отрезкам $[-\frac{5}{3}, -1]$, $[1, \frac{5}{3}]$ действительной оси (рис. 24).

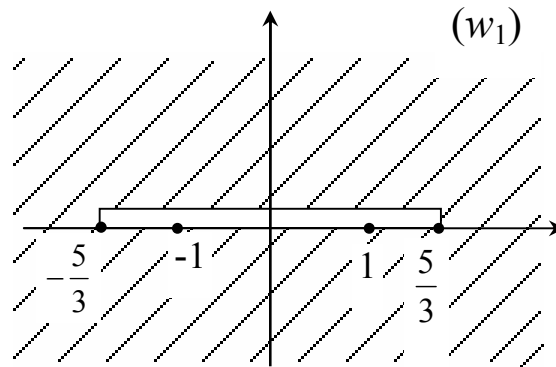


Рис. 24. Образ области в (w_1) с применением функции Жуковского

Для завершающего шага нужно отрезок $[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}]$ действительной оси отобразить на положительную часть действительной оси. Это выполняется с помощью

дробно-линейной функции $w = \frac{w_1 + \frac{5}{3}}{-w_1 + \frac{5}{3}}$, однолистной во всей плоскости. Име-

ем $w(-\frac{5}{3}) = 0$, $w(\frac{5}{3} - 0) = +\infty$ и $w(0) = 1$. Поэтому промежуток $[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}]$ перейдет именно в положительную часть действительной оси. Итак, функция

$w = \frac{3z^2 + 10z + 3}{-3z^2 + 10z - 3}$ осуществляет нужное отображение.

§4. Показательная функция

Это функция $w = e^z$. Её основные свойства.

1) отображение конформно во всех точках комплексной плоскости;

2) однолистка в области тогда и только тогда, когда эта область не содержит различных точек z_1 и z_2 , связанных соотношением

$$z_1 - z_2 = 2k\pi i, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Примером такой области служит любая горизонтальная полоса

$$2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3) семейство прямых $y = c$, $c \in \mathbf{R}$, переходит в семейство лучей $\arg w = c$, а семейство прямых $x = c$, $c \in \mathbf{R}$ переходит в семейство окружностей $|w| = e^c$ (каждая окружность обходится бесконечное число раз).

В частности, показательная функция конформно отображает:

1. горизонтальную полосу

$$\alpha + 2\pi k < \operatorname{Im} z < \beta + 2\pi k, \quad \beta - \alpha \leq 2\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

на угол $\alpha < \arg w < \beta$;

2. прямоугольник

$$c < \operatorname{Re} z < d, \quad \alpha + 2\pi k < \operatorname{Im} z < \beta + 2\pi k, \quad \beta - \alpha \leq 2\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

на кольцевой сектор: $e^c < |w| < e^d$, $\alpha < \arg w < \beta$.

Пример 2.4.1.

Найти образ полосы $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ с разрезом по горизонтали $\operatorname{Im} z = \pi$ между точками $z_1 = -1 + \pi i$, $z_2 = \infty$, $z_3 = 1 + \pi i$, $z_4 = \infty$ (рис. 25) при отображении её с помощью показательной функции.

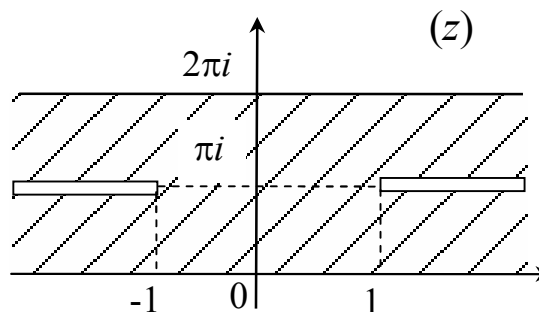


Рис. 25. Область на (z)

Решение.

Данная область принадлежит области однолиственности показательной функции. Горизонтальная полоса $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ отобразится на всю плоскость с разрезом вдоль положительной части действительной оси. Образом горизонтальной прямой $\operatorname{Im} z = \pi$, на которой находятся разрезы, является отрицательная часть действительной оси. Значит, получим разрезы на луче $\arg w = \pi$ между точками $w_1 = 0$, $w_2 = -e^{-1}$ и $w_3 = -e$, $w_4 = \infty$ (рис. 26).

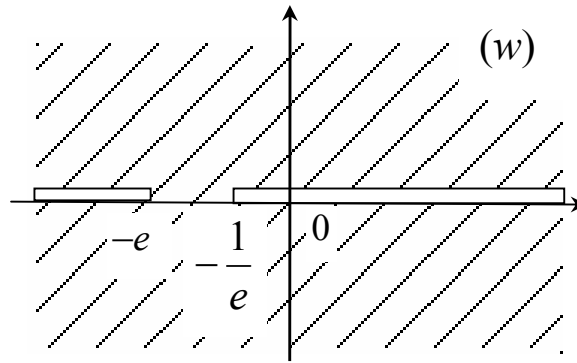


Рис. 26. Образ области на (w)

Пример 2.4.2.

При $w = e^z$ найти образ области $\{1 < \operatorname{Re} z < 2, \frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{2\pi}{3}\}$ (рис.27).

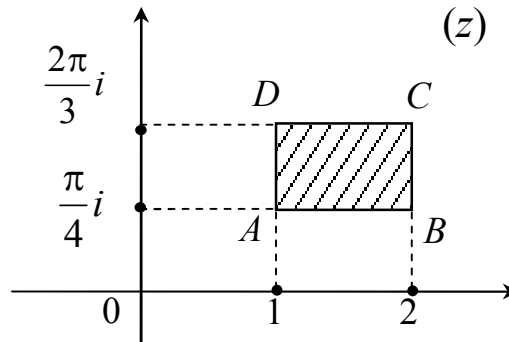


Рис. 27. Область на (z)

Решение.

Данная область принадлежит области однолиственности функции $w = e^z$. Стороны АВ и DC прямоугольника отображаются на отрезки лучей $\arg w = \frac{\pi}{4}$ и $\arg w = \frac{2\pi}{3}$, заключённые в кольцо $e < |w| < e^2$, а стороны AD и CB — на дуги окружностей $|w| = e$ и $|w| = e^2$ между этими лучами (рис. 28).

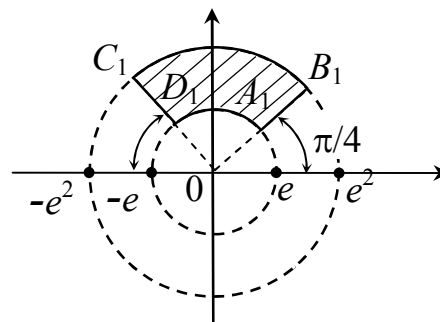


Рис. 28. Образ области на (w)

Пример 2.4.3.

Отобразить полуполосу $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ (рис. 29) на полукруг $\{w : |w| < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$.

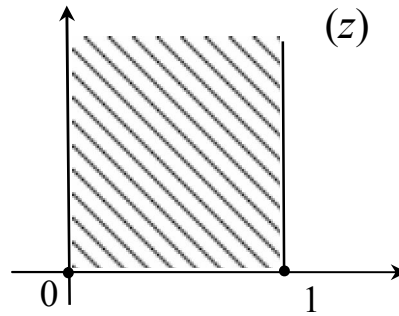


Рис. 29. Область на (z)

Решение.

Сделаем преобразование поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ и расширим полуполосу до

ширины π : $w_1 = \pi e^{\frac{\pi}{2}i} z = \pi iz$ (рис. 30).

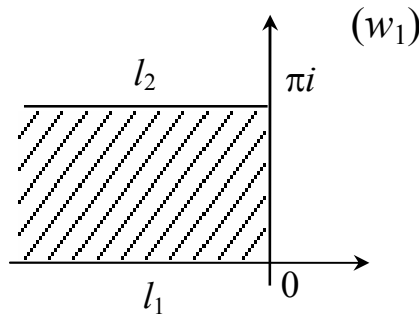


Рис. 30. Образ области на (w_1)

Полученная область G на плоскости (w_1) принадлежит области однолиственности показательной функции. Положим $w = e^{w_1}$. По свойству 3) показательной функции полупрямые l_1 и l_2 переходят в отрезки $[0, 1]$ и $[-1, 0]$ действительной оси. Отрезок $[0, \pi i]$ мнимой оси отобразится на дугу окружности $|w| = 1, 0 \leq \arg w \leq \pi$ (рис. 31).

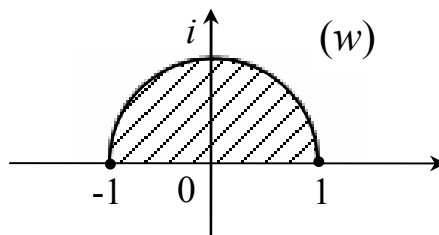


Рис. 31. Образ области на (w)

При обходе части l_1 границы от $-\infty$ до 0 область остаётся слева. Значит, при обходе образа l_1 соответственно от 0 до 1 область G должна оставаться слева. Таким образом, получим нужную область — полукруг $|w| < 1$ с мнимой частью $\text{Im } w > 0$ при отображении $w = e^{\pi iz}$.

§5. Радикал

Это функция комплексного переменного

$$w = \sqrt[n]{z}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2. \quad (5.1)$$

При каждом z , кроме $z = 0$ и $z = \infty$, радикал имеет n различных значений

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (5.2)$$

где $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. В показательной форме

$$w_k = \sqrt[n]{r} \exp\left(i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5.3)$$

(считаем, что угол $\varphi = \arg z$ удовлетворяет условию $0 \leq \varphi < 2\pi$). Свойства:

1) n -значная функция (5.1) имеет две алгебраические точки ветвления порядка n : $z = 0$ и $z = \infty$;

2) функции w_0, w_1, \dots, w_{n-1} , получающиеся из формул (5.2), (5.3) и рассматриваемые на комплексной плоскости с разрезом между точками 0 и ∞ (в качестве разреза может служить произвольная жорданова кривая расширенной плоскости, соединяющая точки 0 и ∞), называются ветвями n -значной функции (5.1). Для выделения одной ветви функции (5.1) в плоскости с разрезом приведённого выше типа нужно указать значение $\sqrt[n]{z}$ в какой-либо точке z_0 .

В частности, каждая из двух ветвей функции $w = \sqrt{z}$ конформно отображает плоскость с разрезом вдоль положительной части действительной оси (точки 0 и ∞ исключаются) на полуплоскость: верхнюю или нижнюю в зависимости от выбора ветви. Причём на различных берегах разреза функция принимает противоположные значения.

Пример 2.5.1.

На что отобразится область (рис. 32) (l_1 — положительная часть действительной оси, l_2 — дуга единичной окружности), если отображение осуществляется с помощью однозначной ветви $w_0 = \sqrt{|z|} \exp\left(i \frac{\arg z}{2}\right)$ функции $w = \sqrt{z}$?

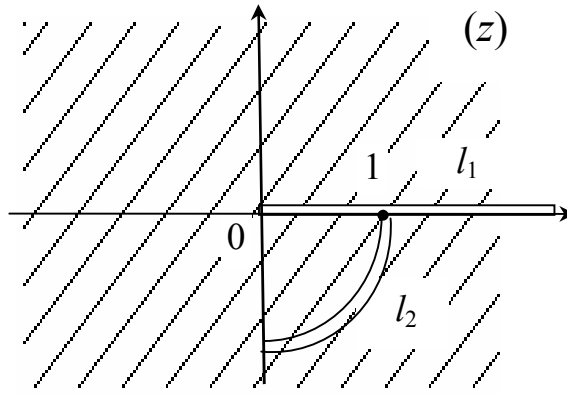


Рис. 32. Область на (z)

Решение.

Образом верхнего берега разреза $l_1 = \{z : 0 \leq |z| < \infty, \arg z = 0\}$ является положительная часть действительной оси $0 \leq |w| < \infty, \arg w = 0$, а нижний берег разреза отобразится в отрицательную часть действительной оси. На дуге l_2 имеем: $\frac{3\pi}{2} \leq \arg w \leq 2\pi, |z|=1$, и поэтому образом l_2 будет дуга окружности $L_2 = \{w : \frac{3\pi}{4} \leq \arg w \leq \pi, |w|=1\}$ (рис. 33).

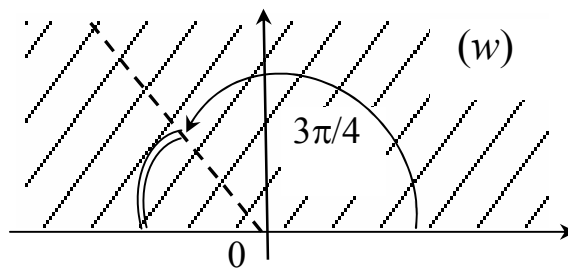


Рис. 33. Образ области на (w)

Пример 2.5.2.

Отобразить всю плоскость с разрезами на действительной оси $[1; +\infty)$ и $(-\infty; -1]$ (рис. 34)

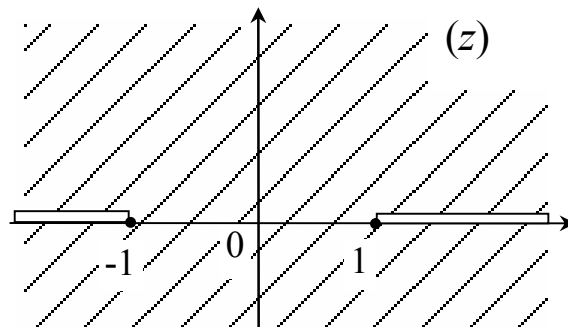


Рис. 34. Область на (z)

на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$ (рис. 35).

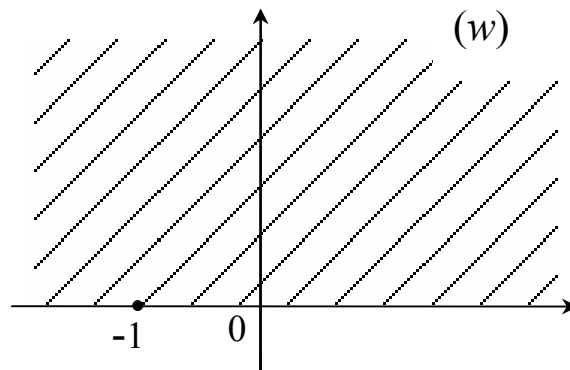


Рис. 35. Образ области на (w)

Решение.

Сначала отобразим данную область на промежуточную плоскость (w_1) с разрезом $[0; +\infty)$ на действительной оси с помощью дробно-линейной функции, переводящей точки $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ в точки $w_1 = \infty$, $w_2 = 1$ и $w_3 = 0$ соответственно. Такая дробно-линейная функция имеет вид: $w_1 = \frac{z-1}{z+1}$ и тогда получаем образ области на плоскости (w_1) (рис. 36).

Далее, воспользуемся функцией $w = \sqrt{w_1}$ и получаем верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$. Таким образом, требуемое отображение имеет вид:

$$w = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}.$$

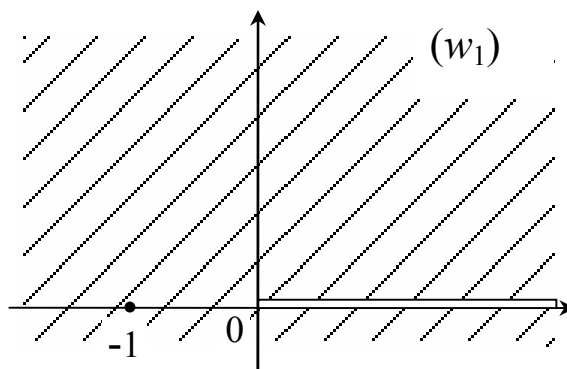


Рис. 36. Образ области (z) на (w_1)

§6. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ определяется как обратная к показательной функции — для любого z , $z \neq 0$, $z \neq \infty$, её значения представляются формулами

$$w_k = \operatorname{Ln}_k z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.1)$$

Таким образом, $w = \operatorname{Ln} z$ — бесконечнозначная функция.

Функция $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ называется **главным значением логарифма**. Тогда $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi ki$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Отметим некоторые свойства логарифмической функции:

- 1) точки $z = 0$ и $z = \infty$ называются **точками ветвления бесконечного порядка (или логарифмическими точками ветвления)**;
- 2) ветви функции $\operatorname{Ln} z$ можно выделять в любой области, которая не содержит ни одного замкнутого пути, охватывающего точку $z = 0$ (в качестве такой области можно взять плоскость с разрезом по произвольной жордановой кривой, соединяющей точки 0 и ∞ ; в частности, по произвольному лучу, выходящему из начала координат). В любой такой области можно выделить бесконечное (счетное) число различных однозначных ветвей $\operatorname{Ln}_k z$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, отличающихся постоянными слагаемыми, кратными $2\pi i$. Каждая ветвь однозначно определяется указанием области, в которой она рассматривается, и значением w_k в одной из точек области (или k в (6.1)).

Функция $\operatorname{Ln}_k z$ конформно отображает:

1. угол $\alpha < \arg z < \beta$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$ на полосу $\alpha + 2\pi k < \operatorname{Im} z < \beta + 2\pi k$;
2. кольцевой сектор $r < |z| < R$, $\alpha < \arg z < \beta$ ($r > 0$ и $\beta - \alpha \leq 2\pi$) на прямоугольник $\ln r < \operatorname{Re} z < \ln R$, $\alpha + 2\pi k < \operatorname{Im} z < \beta + 2\pi k$.

Пример 2.6.1.

Найти образ области $|z| > 1$, $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ (рис. 37) при отображении с помощью функции $w = \ln z$.

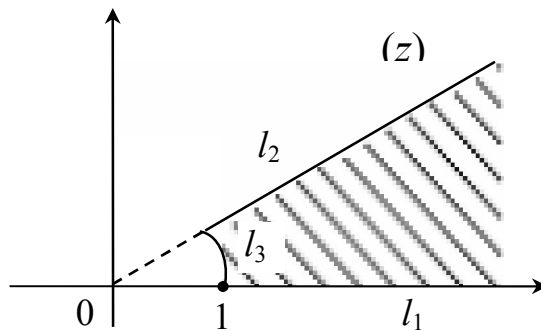


Рис. 37. Область на (z)

Решение.

Если $w = \ln z = \ln |z| + i \arg z$ и $w = u + iv$, то $u = \ln |z|$, $v = \arg z$. Образом луча $l_1 = \{z : |z| \geq 1, \arg z = 0\}$ будет положительная часть действительной оси $L_1 = \{w : u \geq 0, v = 0\}$, образом луча $l_2 = \{z : |z| \geq 1, \arg z = \frac{\pi}{4}\}$ будет горизонтальная полупрямая $L_2 = \{w : u \geq 0, v = \frac{\pi}{4}\}$. Образом дуги окружности $l_3 = \{z : |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\}$ будет вертикальный отрезок $L_3 = \{w : u = 0, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{4}\}$. Итак, образом области на (w) будет правая горизонтальная полуполоса (рис. 38).

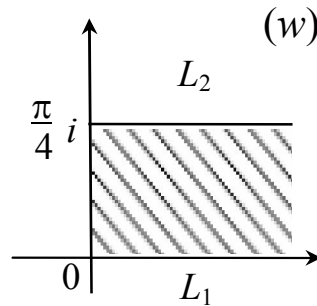


Рис. 38. Образ области на (w)

§7. Общие задачи

Рассмотренные отображения в §§1-6 позволяют строить новые: зная f и g , можно построить и их суперпозицию $f \circ g$. Например, отображение $w = \cos z$ можно записать в виде: $w = \frac{1}{2}(w_2 + \frac{1}{w_2})$, где $w_2 = e^{w_1}$ и $w_1 = iz$.

Если требуется найти функцию, конформно отображающую заданную область D на заданную область G , то можно искать её в виде композиции последовательности известных элементарных функций. Возможен и другой подход: сначала находим конформные отображения h и g областей D и G соответственно на верхнюю полуплоскость, а затем в качестве искомой функции $f : D \rightarrow G$ берём $f = g^{-1} \circ h$.

Пример 2.7.1.

Отобразить на круг $|w| < 1$ внешность кругов $|z + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ и $|z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ с разрезами по отрезкам действительной оси: $[-2, -1]$, $[1, 2]$ (рис. 39).

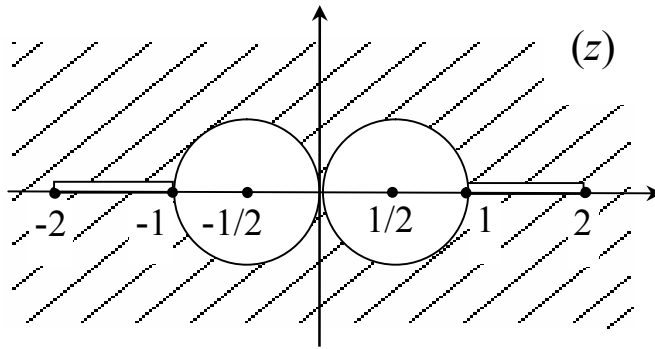


Рис. 39. Область на (z)

Решение.

Так как дробно-линейная функция отображает верхнюю полуплоскость на круг единичного радиуса, то достаточно на каком-то этапе получить верхнюю полуплоскость. В качестве первой отображающей функции возьмём $w_1 = \frac{1}{z}$, так как именно эта функция “распрямит” окружности, переводя точку $z = 0$ в $w_1 = \infty$. Образами окружностей будут прямые $\operatorname{Re} w_1 = 1$ и $\operatorname{Re} w_1 = -1$, а разрезы по отрезкам действительной оси отобразятся в разрезы по отрезкам $[-\frac{1}{2}, -1]$, $[\frac{1}{2}, 1]$ действительной оси. На плоскости (w_1) получим вертикальную полосу с разрезами (рис. 40).

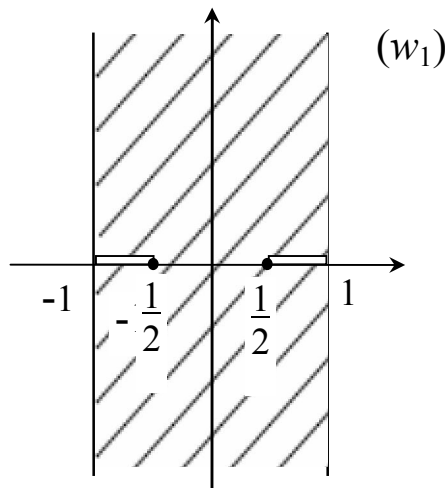


Рис. 40. Промежуточный образ области (z) на (w_1)

С помощью линейного преобразования

$$w_2 = \frac{\pi}{2}(w_1 e^{i\frac{\pi}{2}} + i) = \frac{\pi i}{2}(w_1 + 1)$$

получим горизонтальную полосу шириной π с разрезами по мнимой оси (рис. 41).

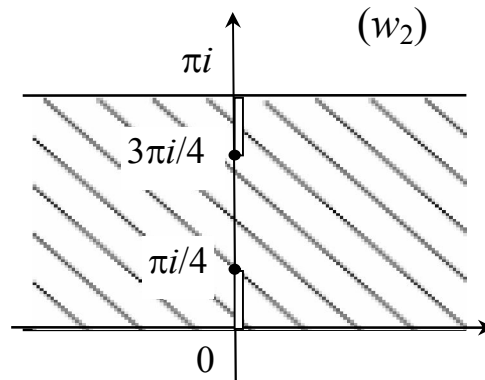


Рис. 41. Образ области (w_1) на (w_2)

Полученная область принадлежит области однолиственности показательной функции $w_3 = e^{w_2}$, которая отобразит её на верхнюю полуплоскость с разрезами по дугам единичной окружности

$$|w_3| = 1, \quad 0 \leq \arg w_3 \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} \leq \arg w_3 \leq \pi,$$

изображённую на рис. 42.

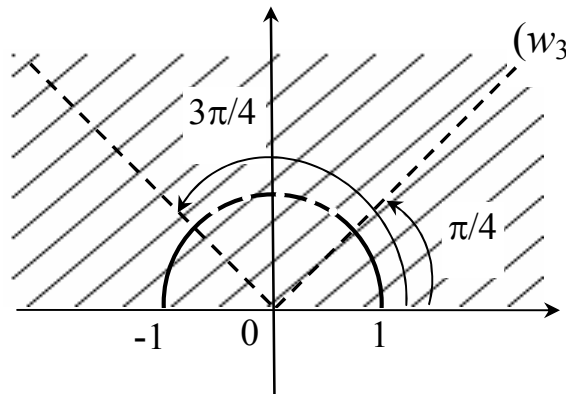


Рис. 42. Образ области (w_2) на (w_3)

Эта область плоскости (w_3) принадлежит области однолиственности функции Жуковского (и дробно-линейной функции). Применяя функцию Жуковского

$$w_4 = \frac{1}{2} \left(w_3 + \frac{1}{w_3} \right),$$

получим всю плоскость с двумя разрезами $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$,

$[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ по действительной оси (рис. 43).

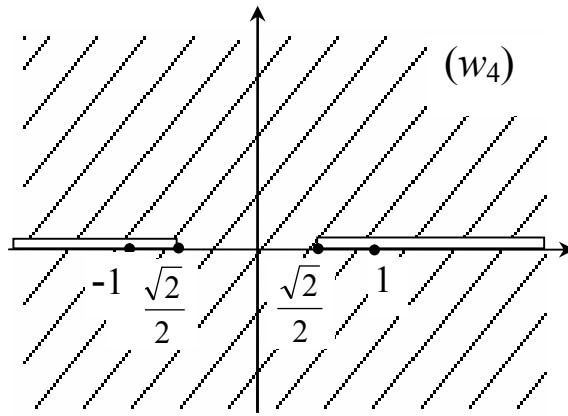


Рис. 43. Образ области (w_2) на (w_4)

Теперь нужно использовать дробно-линейную функцию, так как она однолистна во всей расширенной плоскости. Возьмём эту функцию в виде

$$w_5 = \frac{(w_4 + \frac{\sqrt{2}}{2})}{(w_4 - \frac{\sqrt{2}}{2})}$$

Тогда $w_5(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$, $w_5(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \infty$. Учитывая, что $w_5(\infty) = 1$, получим на плоскости (w_5) всю плоскость с разрезом по положительной части действительной оси (рис. 44).

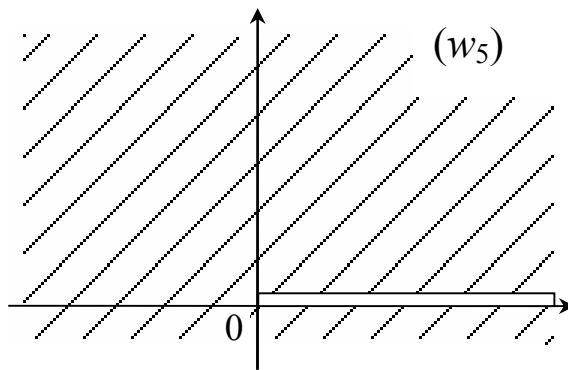


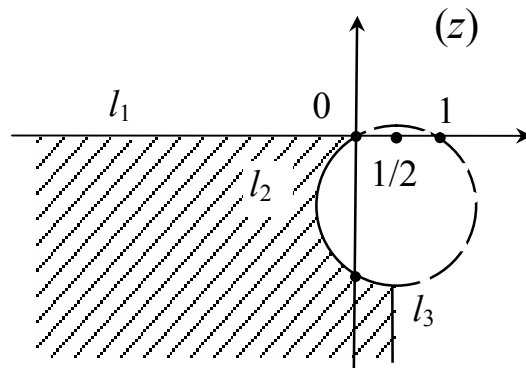
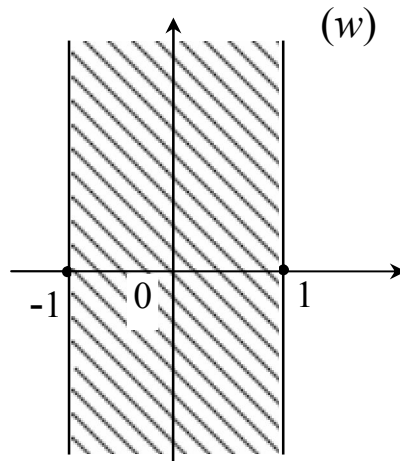
Рис. 44. Образ области (w_4) на (w_5)

Применяя, далее, однозначную ветвь функцию $w_6 = \sqrt{w_5}$, получим на плоскости (w_6) верхнюю полуплоскость $\text{Im } w_6 > 0$, которая с помощью дробно-линейной функции отобразится на круг $|w| < 1$ (см. замечание 13).

Отметим, что результирующее отображение не является единственным: оно зависит от выбора значений θ и a .

Пример 2.7.2.

Отообразить область (рис. 45)

Рис. 45. Область на (z) на область $|\operatorname{Re} w| < 1$ (рис. 46).Рис. 46. Образ области на (w) **Решение.**

Данная область принадлежит области однолиственности дробно-линейной функции. Поскольку линии l_1 и l_2 ортогональны l_3 , то отобразим их в прямые, переведя их общую точку $z = 0$ в $w_1 = \infty$ с помощью функции $w_1 = \frac{1}{z}$. Дуга окружности l_2 перейдёт в часть прямой L_2 , проходящей через точки $w_1 = i$ и $w_1 = 1$; часть прямой l_3 отобразится в часть окружности, проходящей через точки $w_1 = 0, w_1 = 2$ и ортогональную L_2 ; l_1 отобразится на отрицательную часть действительной оси, что отражено на рис. 47.

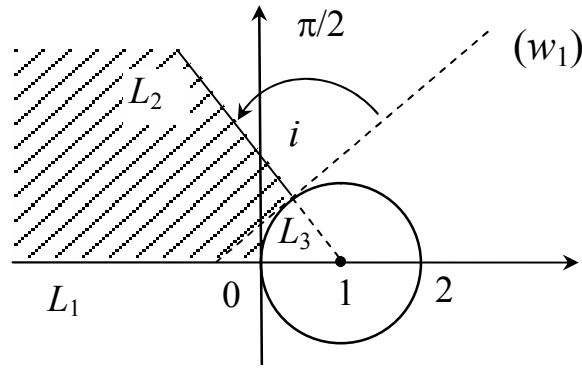


Рис. 47. Образ области (z) на (w_1)

Применяя преобразования параллельного переноса, поворота на угол $-\frac{3\pi}{4}$ и степенную функцию $w_2 = ((w_1 - 1)e^{-\frac{3\pi}{4}i})^4 = -(w_1 - 1)^4$, получим внешность полукруга $\{w_2 : |w_2| > 1, \text{Im } w_2 > 0\}$ (рис. 48).

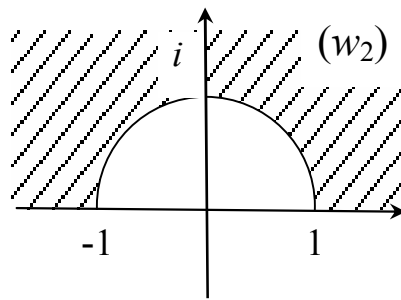


Рис. 48. Образ области (w_1) на (w_2)

Эта область на плоскости (w_2) принадлежит области однолиственности функции Жуковского $w_3 = \frac{1}{2} \left(w_2 + \frac{1}{w_2} \right)$, которая отобразит её на верхнюю полуплоскость (рис. 49).

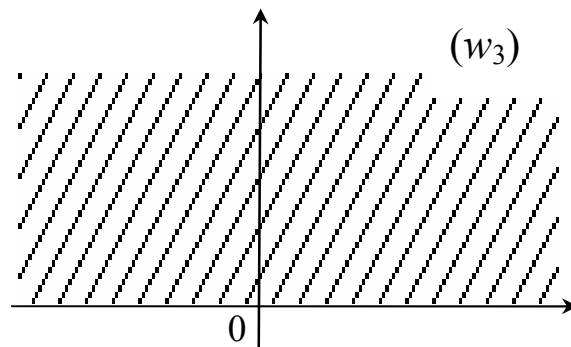


Рис. 49. Образ области (w_2) на (w_3)

Для отображения верхней полуплоскости на горизонтальную полосу $0 < \text{Im } w_4 < \pi$ (рис. 50), используем главную ветвь логарифмической функции $w_4 = \ln w_3$.

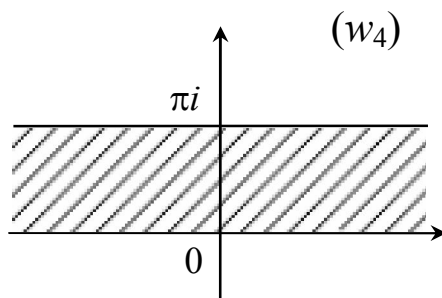


Рис. 50. Образ области (w_3) на (w_4)

Преобразования поворота, гомотетии и параллельного переноса

$$w = \frac{2}{\pi} w_4 e^{-\frac{\pi}{2}i} - 1$$

позволяют получить требуемую область $|\text{Re } w| < 1$ (рис. 46). Таким образом, указанная последовательность элементарных функций осуществляет искомое отображение.

Пример 2.7.3.

Отобразить область, изображённую на рис. 45, на всю плоскость с разрезами $[1, +\infty)$, $(-\infty, -1]$ (рис. 34).

Решение.

1) Сначала отображаем исходную область D на верхнюю полуплоскость. Из решения примера 2.7.2 следует, что это можно сделать с помощью функции

$$h(z) = w_3 = -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{z} - 1 \right)^4 + \left(\frac{1}{z} - 1 \right)^{-4} \right).$$

2) Отобразим плоскость с разрезами $[1, +\infty)$ и $(-\infty, -1]$, изображённую на рис. 34, на верхнюю полуплоскость. Для этого можно применить (см. пример

2.5.2) функцию $g(z) = w = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$.

Итак, получаем, что функция $h(z)$ область D и функция $g(z)$ область G отображают на верхнюю полуплоскость. Тогда $g^{-1}(w) = \frac{w^2 + 1}{w^2 - 1}$, являющаяся обратной функцией к $g(z)$, отображает верхнюю полуплоскость на область G (плоскость с разрезами $[1, +\infty)$ и $(-\infty, -1]$). В этом случае сложная функция $f(z) = g^{-1} \circ h(z)$ отображает область D на G , что и осуществляет требуемое

отображение. Поскольку $g^{-1}(w) = \frac{w^2 + 1}{w^2 - 1}$, то, заменяя w на w_3 , получаем окончательный вид требуемого преобразования:

$$f(z) = \frac{\left(\left(\frac{1}{z} - 1 \right)^4 + \left(\frac{1}{z} - 1 \right)^{-4} \right)^2 + 1}{\left(\left(\frac{1}{z} - 1 \right)^4 + \left(\frac{1}{z} - 1 \right)^{-4} \right)^2 - 1}.$$

ГЛАВА 3. УПРАЖНЕНИЯ

1. На что отобразит функция $w = \frac{1}{z}$ следующие области:

- 1) круг $|z + i| < 1$;
- 2) вертикальную полосу $0 < \operatorname{Re} z < 1$;
- 3) первый координатный угол с удалённым полукругом $\{z : |z - i| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$;
- 4) вертикальную полуполосу $\{z : -1 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ с удалённым полукругом $\{z : |z| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

2. Конформно отобразить:

- 1) область, заключённую между окружностями $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $|z - 1| = 1$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$;
- 2) полукруг $\{z : |z + i| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$ на первый координатный угол;
- 3) полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы точка $z = 1$ перешла в центр круга, а точка $z = i$ была неподвижной;
- 4) круг $|z| < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ так, чтобы точки $z = \pm i$ были неподвижными;
- 5) полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы точка $z = 2i$ перешла в центр круга и производная в этой точке была отрицательной;
- 6) полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < R$ так, чтобы точка $z = i$ перешла в центр круга, а производная в этой точке была равна единице.

3. Отобразить конформно:

1) круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы

а) $w(0) = \frac{1}{2}$, $\arg w'(0) = \pi$;

б) $w(i) = -i$, $w(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$;

2) круг $|z| < 1$ на круг $|w + i| < 2$ так, чтобы $w(0) = \frac{3}{2}$, $w(\frac{i}{2}) = -\frac{1}{2}$;

3) круг $|z + 1| < 1$ на круг $|w - 1| < 1$ так, чтобы $w(-\frac{1}{2}) = 1$ и аргумент производной в точке $z = -\frac{1}{2}$ был равен нулю.

4. Найти образы указанных областей при заданных дробно-линейных отображениях:

- 1) круга $|z| < 1$ при $w = \frac{z-1}{z+1}$;
- 2) внешности круга $|z| \leq 1$ при $w = \frac{z+1}{z-1}$;
- 3) полуплоскости $\text{Im } z > 1$ при $w = \frac{z-i}{z}$;
- 4) кольца $1 < |z| < 2$ при $w = \frac{z+1}{z+2}$;
- 5) луночки $\{z : |z| < 1, |z-1| < \sqrt{2}\}$ при $w = \frac{z+i}{z-i}$;
- 6) полосы $0 < \text{Im } z < 1$ при $w = \frac{z-i}{z-2i}$;
- 7) внешности круга $|z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ при $w = \frac{4z}{z+1}$.

5. Отобразить с помощью функции $w = z^2$ следующие области:

- 1) полукруг $\{z : |z| < 3, \text{Im } z < 0\}$;
- 2) полукруг $\{z : |z| < 1, \text{Im } z > 0\}$ с разрезом по мнимой оси между точками $z = i$ и $z = \frac{i}{2}$;
- 3) первый координатный угол с разрезом по дуге окружности $|z| = 1$ между точками $z = 1$ и $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$;
- 4) сектор $\{z : |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$ с разрезом $(0, \frac{1+i}{2})$ по лучу $\arg z = \frac{\pi}{4}$;
- 5) полуплоскость $\text{Im } z > 0$ с разрезами $(0, i]$, $[2i, +\infty i)$ вдоль мнимой оси;
- 6) полуплоскость $\text{Im } z > 0$ с разрезом $(i, 2i]$ по мнимой оси и удалённым полукругом $\{z : |z| \leq 1, \text{Im } z \geq 0\}$.

6. Отобразить с помощью дробно-линейной и степенной функций:

- 1) полуплоскость $\text{Im } z > 0$ с разрезом по дуге окружности

$$\{z : |z| = 1, 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{2}\}$$

на всю плоскость с разрезом вдоль положительной части действительной оси;

- 2) полукруг $\{z : |z| < 1, \text{Im } z > 0\}$ на полуплоскость $\text{Im } w > 0$;
- 3) область $\{z : \text{Im } z > 0, |z| > 1\}$ с разрезом $(i, 2i]$ по мнимой оси на всю плоскость с разрезом по положительной части действительной оси;
- 4) сектор $\{z : |z| < 1, |\arg z| < \frac{\pi}{8}\}$ на полуплоскость $\text{Im } w > 0$;

5) сектор $\{z : |z| < 1, |\arg z| < \frac{\pi}{3}\}$ на круг $|w| < 1$.

7. Найти образы данных областей при отображении с помощью главной ветви функции $w = \sqrt{z}$:

1) круга $|z| < 2$ с разрезом $[0, 2)$ по действительной оси;

2) всей плоскости с разрезом вдоль положительной части действительной оси.

8. Отобразить конформно с применением дробно-линейной, степенной функций и радикала:

1) плоскость с разрезом $[-2, 2]$ по действительной оси на круг $|w| < 1$;

2) плоскость с разрезами $(-\infty, 0]$ и $[1, +\infty)$ по действительной оси на область $|w| > 1$;

3) полуплоскость $\text{Im } z > 0$ с разрезом $[i, +\infty i)$ по мнимой оси на круг $|w| < 1$;

4) круг $|z| < 1$ с разрезом $[0, i)$ по мнимой оси на круг $|w - i| < 1$;

5) полукруг $\{z : |z| < 3, \text{Im } z > 0\}$ с разрезом $[i, 3i)$ по мнимой оси на полукруг $\{w : |w| < 1, \text{Im } w > 0\}$;

6) внешности круга $|z| \leq 1$ с разрезами $(1, +\infty)$ и $(-2, -1)$ по действительной оси на полуплоскость $\text{Re } w > 0$.

9. Отобразить с помощью функции $w = e^z$ следующие области:

1) полосу $0 < \text{Im } z < \frac{\pi}{3}$;

2) полуполосу $\{z : |\text{Im } z| < \frac{\pi}{2}, \text{Re } z > 0\}$;

3) полуполосу $\{z : |\text{Im } z| < 1, \text{Re } z > 0\}$ с горизонтальным разрезом, идущим вправо от точки $z_1 = 1 + i\frac{\pi}{4}$ до точки $z_2 = \infty$;

4) полуполосу $\{z : 0 < \text{Im } z < \pi, \text{Re } z > 0\}$, имеющую горизонтальный разрез $(\frac{\pi}{2}i, 1 + \frac{\pi}{2}i]$.

5) полосу $0 < \text{Im } z < \pi$ с разрезом $(0, \frac{\pi}{2}i]$ по мнимой оси.

10. На что отобразит функция $w = \ln z$ следующие области:

1) полукруг $\{z : |z| < 1, \text{Re } z > 0\}$;

2) круг $|z| < 1$ с разрезом $[0, i)$ по мнимой оси;

3) область $\{z : |z| > 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$;

4) полукруг $\{z : |z| < 2, \text{Im } z > 0\}$ с разрезом $[i, 2i)$ по мнимой оси;

5) полуплоскость $\text{Im } z > 0$ с разрезом по дуге окружности

$$\{z : |z| = 1, 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

11. Найти конформные отображения, используя дробно-линейную, степенную и показательную функции:

- 1) полосы $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ с разрезом $[\pi i, \infty i)$ по горизонтали $\operatorname{Im} z = \pi$ на круг $|w| < 1$;
- 2) полосы $0 < \operatorname{Im} z < 2$ с разрезом $[i, 2i)$ по мнимой оси на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$;
- 3) внешности объединения кругов $\{z : |z| \leq 2, |z - 3| \leq 1\}$, разрезанной по промежутку $(-2i, -3i]$ мнимой оси, на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$;
- 4) области $\{z : \operatorname{Im} z > 0, |z - i| > 1\}$, разрезанной по промежутку $(2i, 3i]$ мнимой оси на круг $|w| < 1$;
- 5) полуполосы $\{z : |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z > 0\}$ на круг $|w| < 1$;
- 6) области $\operatorname{Re} z > 0, |z - 1| > 1$, разрезанной вдоль $(2, 3], [4, +\infty)$ — промежутков действительной оси, на первый координатный угол;
- 7) внешности кругов $|z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}, |z - \frac{3}{2}| \leq \frac{1}{2}$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$.

12. Найдите конформные отображения:

- 1) круга $|z| < 1$ на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 1$;
- 2) круга $|z| < 1$ с разрезом $[0, 1)$ по действительной оси на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 1$;
- 3) полукруга $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ на полуполосу $\{w : \operatorname{Re} w > 0, 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$;
- 4) области $\{z : |z| > 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$ на полуполосу $\{w : 0 < \operatorname{Re} w < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$;
- 5) полосы $0 < \operatorname{Im} z < 2$ с разрезом $(0, i]$ по мнимой оси на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 1$;
- 6) полуполосы $\{z : \operatorname{Im} z > 0, 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$;
- 7) первого координатного угла с удалённым полукругом $\{z : |z - i| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$

на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 1$;

- 8) области $\{z : \operatorname{Im} z > 0, |z + 1| > 1, |z - 1| > 1\}$ на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 1$;

13. Найдите образы данных областей при отображении с помощью функции Жуковского $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$:

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right):$$

- 1) полукруга $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$;

2) полукруга $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ с разрезом $[-\frac{i}{2}, 0)$ по мнимой оси;

3) полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$;

4) полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ с удалённым полукругом $\{z : |z| \leq 1, \operatorname{Im} z > 0\}$;

5) круга $|z| < 1$ с разрезом $[-\frac{1}{2}, 1)$ по действительной оси;

6) четверти круга $\{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$;

7) полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по дуге окружности

$$\{z : |z| = 1, 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{2}\};$$

14. Найти конформные отображения с помощью дробно-линейной, степенной функций и функции Жуковского:

1) полукруга $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезами $(0, \frac{i}{4}]$ и $[\frac{i}{2}, i)$ вдоль мнимой оси

на всю плоскость с разрезом вдоль положительной части действительной оси;

2) области $\{z : |z| > 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$;

3) кругового сектора

$$\{z : |z| < 1, \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3}\}$$

на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$;

4) внешности круга $|z| \leq 2$ с разрезом $(2, +\infty)$ по действительной оси на всю плоскость с разрезом по отрицательной части действительной оси;

5) части внешности окружности, проходящей через точки $z = 0$, $z = 1$ и $z = -i$,

расположенную в области $\{z : \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z < 0\}$, на полуплоскость

$\operatorname{Im} w > 0$;

6) области $\{z : |z| < 1, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}\}$ на круг $|w| < 1$;

15. Найдите конформные отображения, используя дробно-линейную функцию, радикал и функцию Жуковского:

1) внешности круга $|z| \leq 1$ с разрезами $(-\infty, -3]$, $[-2, -1)$, $(1, \infty)$ вдоль действительной оси на круг $|w| < 1$;

2) круга $|z| < 1$ с разрезами вдоль промежутков $[\frac{i}{2}, i)$, $(-i, -\frac{i}{3})$ мнимой оси на

полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$;

3) внешности круга $|z + 1| \leq 1$ с разрезами $[-3, -2]$, $[0, 1)$ вдоль действительной оси на круг $|w| < 1$;

4) внешности круга $|z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ с разрезом $[-1, 0)$ по действительной оси на полуплоскость $\text{Im } w > 0$;

5) полуплоскость $\text{Re } z < 1$ с разрезами $(-\infty, -1]$, $[0, 1)$ по действительной оси на полуплоскость $\text{Re } w > 0$.

16. Найдите конформные отображения областей с помощью показательной, дробно-линейной функций и функции Жуковского:

1) части полуплоскости $\text{Im } z > 0$, расположенной между окружностями

$$\{z : |z - 1| = 1, |z - 2| = 2\},$$

на полуплоскость $\text{Im } w > 0$;

2) круга $|z| < 1$, из которого удалены части двух кругов, касающихся в точке

$z = 1$ действительной оси, а в точках $z = e^{\pm \frac{\pi}{4}i}$ — соответственно лучей $\arg z = \pm \frac{\pi}{4}$, на круг $|w| < 1$;

3) полукруга $\{z : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}, \text{Im } z > 0\}$, из которого удалена его часть, отсекаемая кругом $|z - \frac{i}{2}| \leq \frac{1}{2}$, на полуплоскость $\text{Im } w > 0$;

4) внешность окружностей $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $|z + \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$, принадлежащей полуплоскости $\text{Im } z > 0$, на круг $|w + \frac{i}{2}| < \frac{1}{2}$;

5) полуплоскости $\text{Re}(e^{\frac{\pi}{4}i} z) > 0$, из которой удалены принадлежащие ей части кругов

$$\{z : |z - \frac{1+i}{2}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, |z + \frac{1+i}{2}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\},$$

на полукруг $\{w : |w| < 1, \text{Im } w > 0\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977.-736 с.
2. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. – М.: 1978.-388 с.
3. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977.-444 с.
4. Евграфов М.А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1991.-448 с.
5. Волковыский Л.И., Лунц П.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.:Наука, 1975.-312 с.
6. Евграфов М.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.В., Бежанов К.А. Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: Наука, 1991.-416 с.
7. Миролубов А.А., Корсакова Л.Ф., Филиппова Н.М. Методические рекомендации к решению задач по теме "Конформные отображения". – Горький: Изд-во ГГУ, 1979. - 24 с.
8. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. – М.: ИЛ, 1963.-213 с.
9. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть I. Функции одного переменного. – М.: Наука, 1976.-320 с.
10. Рябинин А.А., Галкин О.Е., Филиппов В.Н., Филиппова Н.М. Методические рекомендации к решению задач по теме "Конформные отображения. Ч. 1, 2". – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2002.- 58 с.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ
ЗАДАЧ НА КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ**

Составители:

Александр Львович **Калашников**

Викторий Николаевич **Филиппов**

Учебно-методическое пособие