МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Методические указания к решению задач по численному дифференцированию

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2016

УДК 519.6.
ББК 22.19
М-54

М-54 Методические указания к решению задач по численному дифференцированию. Составители: Калашников А.Л., Федоткин А.М., Фокина В.Н. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 27 с.

Рецензент: к.ф.-м.н. доцент **Н.М. Голышева**

В пособии приведены методические указания для решения задач по теме “Численное дифференцирование”, относящейся к разделу курса «Численные методы». На примерах продемонстрированы различные приёмы вычисления производных на основе интерполяции, сплайнов, неопределенных коэффициентов и сеточных методов. Приведены также тексты программ в математическом пакете scilab для численной реализации дифференцирования функций и построения графиков их производных.

Работа будет полезна при проведении практических занятий по численным методам и для самостоятельной работы студентов ИИТММ ННГУ.

УДК 519.6.
ББК 22.19

ОГЛАВЛЕНИЕ **стр.**

ВВЕДЕНИЕ 4
1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ 5
1.1. Производная для неравноотстоящих узлов 5
1.2. Производная для равноотстоящих узлов 6
1.3. Безразностные формулы численного дифференцирования 9
2. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ 11
3. СЕТОЧНЫЙ МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ 13
4. СПЛАЙНЫ В ЧИСЛЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ 16
5. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ 18
6. ГРАФИКИ ПРИБЛИЖЁННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 20
ЛИТЕРАТУРА 26

ВВЕДЕНИЕ

К численному дифференцированию приходится обращаться, когда вычисляют производные от функций заданных таблично или непосредственное дифференцирование затруднено. Последнее, например, возникает при сложном аналитическом виде функции. Тогда её интерполируем, а за производную принимаем производную интерполирующей функции. Так представляя $f(x) = P(x) + R(x)$, где $f(x)$ искомая функция, а $P(x)$ интерполирующая и $R(x)$ остаток, то, дифференцируя k раз, имеем

$$f^{(k)}(x) = P^{(k)}(x) + R^{(k)}(x).$$

Далее, считаем, что $f^{(k)}(x) \approx P^{(k)}(x)$ с точностью до $R^{(k)}(x)$. Следует отметить, что, вообще говоря, если остаток $R(x) \approx 0$, то $R^{(k)}(x)$ может быть достаточно большим. Отметим, что здесь подсчитываем значение производной в любой точке отрезка задания функции.

Кроме интерполирования для численного дифференцирования существуют ещё сеточные методы. При этом вычисляем значение производных в узлах сетки на конечном отрезке.

Материал разбит на 4 главы. Глава 1 посвящена численному дифференцированию с использованием интерполяционных многочленов Лагранжа, Ньютона. В главе 2 рассмотрены методы неопределённых коэффициентов для вычисления значения производных. Глава 3 посвящена сеточным методам численного дифференцирования. В главе 4 для дифференцирования использованы сплайны.

В пособии во всех главах разобраны различные способы решения задач на численное дифференцирование, позволяющие лучше усвоить теоретический материал. Имеются также в конце пособия задачи и упражнения на численное дифференцирование для решения, которых применимы методы глав 1-4. Кроме этого приведены для сравнения графики численных производных полученных с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, сеточного метода и кубического сплайна. Эти графики наглядно показывают какой из методов даёт меньшую погрешность. Для построения этих графиков использован математический пакет SCILAB версии 4.1.2 хорошо приспособленный для численных методов. Приведены также программы в этом пакете, реализующие численное дифференцирование для задания, приведённого в таблице.

Работа будет полезна при проведении практических занятий по численным методам и для самостоятельной работы студентов ИИТММ ННГУ.

1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ

1.1. Производная для неравноотстоящих узлов

Поскольку таблично заданная функция приближается, в частности, интерполяционным многочленом, то естественно ее производную находить через производную этого многочлена. Здесь, например, можно брать либо многочлен Ньютона или Лагранжа. Пусть интерполирующая функция многочлен Ньютона для неравноотстоящих узлов:

$$N(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + \ldots + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})f(x_0, x_n) \quad (1)$$

где $f(x_k)$ - значение таблично заданной функции в узлах x_k, $k = \overline{0,n}$. Введем обозначения: $x - x_j = \alpha_j$. Тогда формулу (1) можно переписать в виде:

$$N_n(x) = f(x_0) + \alpha_0 f(x_0, x_1) + \ldots + \alpha_0 \cdot \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} f(x_0, \ldots, x_n). \quad (2)$$

Здесь $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ - разделённая разность. Дифференцируя $N(x)$, имеем

$$\begin{aligned} N'_n(x) &= f(x_0, x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1)f(x_0, x_1, x_2) + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_3)\cdot \\ &\cdot f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \ldots + (\alpha_0\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-2} + \ldots + \alpha_0\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-1})f(x_0, \ldots, x_n) \end{aligned} \quad (3)$$

Полагаем, что приближённо $f'(x) \approx N'_n(x)$ для $x \in [x_0, x_n]$ при $x_0 < x_n$. Введем функцию $w_n(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_n)$. Тогда остаток

$$R'_n(x) = w'_n(x) \cdot f(x, x_0, \ldots, x_n) + w_n(x) \cdot f(x, x, x_0, \ldots, x_n) \quad (4)$$

где $R_n(x) = w_n(x) \cdot f(x, x_0, \ldots, x_n)$ — остаток для формулы Ньютона. Если же функция $f(x)$ будет $(n+2)$ раза непрерывно дифференцируема на $[a,b]$ отрезке расположения узлов интерполяции, то

$$R'_n(x) = w'_n(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!} + w_n(x) \cdot \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)}, \quad (5)$$

где ξ_0, ξ_1 - некоторые “средние” точки из $[a,b]$. В общем случае для m-ой производной при неравноотстоящих узлах получаем:

$$\begin{aligned} N^{(m)}(x) &= m! f(x_0, x_1, \ldots, x_n) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m)f(x_0, \ldots, x_{m+1}) + \\ &+ (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \ldots + \alpha_m\alpha_{m+1})f(x_0, \ldots, x_{m+1}) + \ldots + \\ &+ (\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-m} + \ldots + \alpha_{m+1} \cdot \alpha_{m+2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-1})f(x_0, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда полагаем приближённо $f^m(x) \approx N_n{}^{(m)}(x)$ для $x \in [x_0, x_1]$. При этом остаток для m - ой производной будет

$$R_n^m(x) = \sum_{j=0}^{n} C_m^j (f(x, x_0, \ldots, x_n)) w_n^{(m-j)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{m!}{(m-j)!} f(\underbrace{x, \ldots, x}_{j+1 раз}, x_0, \ldots, x_n) \cdot w_n^{m-j}(x). \quad (7)$$

При предположении нужного количества непрерывных производных для $f(x)$, то погрешность вычисленная для m-ой производной будет

$$R_n^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{m!}{(m-j)!\cdot(n+j+1)!} \cdot f^{(n+j+1)}(\xi_j) \cdot w_n^{(m-j)}(x), \qquad (8)$$

где ξ_j — некоторые точки, заключенные в интервале между наибольшим и наименьшим из чисел $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$. Отметим, что вместо многочлена Ньютона можно использовать и многочлен Лагранжа. Тогда $f^{(m)}(x) \approx L_n^{(m)}(x)$, а остаточный член для этого случая вычисляется по (8).

Пример 1. Найти приближённо y' при $x = 2$ для $y = \sqrt{x}$.

Решение. Построим интерполяционный полином для $x_0 = 1{,}69$ на отрезке [1,69;2,25]. Возьмём $n = 2$ и узлы интерполирования $x_0 = 1{,}69$, $x_1 = 1{,}96$, $x_2 = 2{,}25$. Тогда $f(x_0) = 1{,}3$, $f(x_1) = 1{,}4$, $f(x_2) = 1{,}5$. Построим таблицу разделённых разностей:

x	y	1-ая	2-ая
1,69	1,3	0,37	-0,05
1,96	1,4	0,34	
2,25	1,5		

Возьмём многочлен Ньютона интерполирования вперёд:

$$N_2(x) = 1{,}3 + 0{,}37 \cdot (x - 1{,}69) - 0{,}05 \cdot (x - 1{,}69)(x - 1{,}96) \qquad (9)$$

Тогда производная $N_2'(x)$ будет

$$N_2'(x) = 0{,}37 - 0{,}05(2x) - 3{,}65 \qquad (10)$$

и $N_2'(x) = 0{,}3535$. Отметим, что значение $(\sqrt{x})'_{x=2} \approx 0{,}35355$.

1.2. Производная для равноотстоящих узлов

Пусть h– шаг таблицы. Возьмем формулу Ньютона для равных промежутков:

$$N_n(x) = N(x_0 + th) = f_0 + tf^1_{\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!} f^n_{\frac{n}{2}}, \qquad (11)$$

где $f_0 = f(x_0)$, а $f^1_{\frac{1}{2}}, f^2_1, \ldots$ конечные разности и $t = (x - x_0)/h$. Тогда производные 1-го и 2-го порядка от многочлена Ньютона имеют вид:

$$N_n'(x) = h^{-1}(f^1_{\frac{1}{2}} + \frac{2t-1}{2!} f^2_1 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{3!} f^3_{\frac{3}{2}} + \ldots), \qquad (12)$$

$$N_n''(x) = h^{-2}(f^2_1 + \frac{6t-6}{3!} f^3_{\frac{3}{2}} + \frac{12t^2 - 36t + 22}{4!} f^4_2 + \ldots).$$

Остаточный член для каждой из этих формул (12) можно вычислить или оценить по равенствам (7), (8). Отметим, что в узлах значения производных выглядят более просто. Например, для $x = x_0$ или $t = 0$

$$N'_n(x_0) = h^{-1}(f^1_{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} f^2_1 + \tfrac{1}{3} f^3_{\frac{3}{2}} + \ldots), \qquad (13)$$

$$N''_n(x_0) = h^{-2}(f^2_1 + 2 f^3_{\frac{3}{2}} + \tfrac{11}{12} f^4_2 + \ldots).$$

Для вычисления значения производной $f'(x)$ в начале таблицы целесообразно применять формулу Ньютона интерполирования вперёд, а для конца таблицы интерполирования назад. При аргументе x в центре таблицы или вблизи него можно использовать многочлены с центральными разностями. Такое объясняется тем, что сами многочлены в этих случаях лучше аппроксимируют функцию $f(x)$.

Как практически оценивать погрешность, возникающую при численном дифференцировании. Для этого имеется следующая рекомендация. Общая погрешность вычисления производной может рассматриваться как сумма погрешности усечения, то есть отбрасывания остаточного члена интерполяционной формулы и погрешности округления. Если $f(x)$ задана таблично, то для оценки погрешности усечения нельзя воспользоваться аналитическими представлениями (7), (8) остаточных членов, так как надо уметь оценить высшие производные функции $f(x)$, которые для табличной функции могут быть и неизвестны. Тогда на практике для оценки погрешности усечения обычно руководствуются следующими соображениями.

Предположим, что рассматриваемая $f(x)$ не имеет быстро колеблющихся составляющих. Тогда малость величин разностей определённого порядка свидетельствует о достаточно хорошем приближении этой функции интерполяционным многочленом. Если разности некоторого порядка различаются меньше, чем на величину погрешности их округления, то эти разности считают практически постоянными величинами. Разности более высоких порядков в расчет не принимают и считают, что погрешность усечения не превосходит единицы младшего разряда значений $y_k = f(x_k)$, делённой на h. Если формулу численного дифференцирования обрывают раньше чем указано выше, то отброшенные члены служат для оценки погрешности усечения. Для исследования погрешности округления можно использовать обычные правила округления. Отметим, что погрешность округления у формул численного дифференцирования обратно пропорциональна h^m, где m - порядок производной. При этом она /погрешность/ увеличивается с ростом порядка производной функции $f(x)$. Таким образом, с уменьшением шага h численного дифференцирования, погрешность округления возрастает, погрешность же усечения как правило, убывает. Поэтому при вычислениях по формулам численного дифференцирования стараются выбрать оптимальный шаг расчёта.

Пример 2. Вычислить производную функцию Струве 0-го индекса $H_0(x)$ в точке $x = 7{,}5$, если $H_0(x)$ задана таблицей:

x	y	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
7,50	0,2009	49	0	-1	1	0	-3
7,52	0,2058	49	-1	0	1	-3	7
7,54	0,2107	48	-1	1	-2	4	-9
7,56	0,2155	47	0	-1	2	-5	
7,58	0,2202	47	-1	1	-3		
7,60	0,2249	46	0	2			
7,62	0,2295	46	-2				
7,64	0,2341	44					
7,66	0,2385						

Здесь шаг $h = 0{,}02$ и все числа в конечных разностях $\Delta^1 y$, $\Delta^2 y$, … надо умножить на 10^{-4}.

Решение. Согласно числам в таблице, абсолютная погрешность исходных значений функции $H_0(x)$ не превосходит величины $\varepsilon = 0{,}5 10^{-4}$. Применяя правило вычисления абсолютной погрешности разности, находим, что абсолютная погрешность разности *k*-го порядка оценивается величиной $2^k \cdot \varepsilon$. Из таблицы видно, что разности 2-го порядка и выше различаются меньше чем на величину погрешности их округления. Поэтому в формуле (12), которую здесь можно применить при $t = 0$, имеем

$$y'_0 = f'(x_0) \approx\approx \; h^{-1}(\Delta y_0 - \tfrac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \ldots + (-1)^n \tfrac{1}{n}\Delta^n y_0).$$

Для подсчёта $f'(x_0) = H'_0(7{,}5)$, где $x_0 = 7{,}5$, достаточно взять два первых члена. Отсюда приближённое значение $H'_0(7{,}5) \approx\approx \; 0{,}245$. При этом погрешность усечения оценивается величиной

$$\frac{1}{3h}\max\left|\Delta^3 y\right| = \frac{1 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{0{,}02} < 0{,}34 \cdot 10^{-4},$$

а погрешность округления величиной $\dfrac{2^2 \cdot \varepsilon}{h} = \dfrac{4 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4}}{0{,}02} 10^{-2}$. Таким образом, результат получился в пределах погрешности округления.

1.3. Безразностные формулы численного дифференцирования

Здесь возможно применение интерполяционного многочлена, поскольку в некоторых случаях удобнее выражать формулы численного дифференцирования не через разности, а непосредственно через значения функции. Для получения таких формул удобно пользоваться, например, формулой Лагранжа. Проиллюстрируем это на ней при равноотстоящих узлах интерполяции. Как известно таблично заданную функцию для равномерной сетки узлов с шагом h можно представить в виде суммы:

$$f(x) = \frac{(-1)^n t \ldots (t-n)}{n!} \sum_{j=0}^{n} \sum \frac{(-1)^j C_n^j y_j}{t - \mathrm{j}} + h^{n+1} \cdot t \ldots (t-n) f(x, x_0, \ldots, x_n). \quad (14)$$

Здесь первое слагаемое – многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов, а 2-ое остаток с использованием разделённой разности $f(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Величина $t = (x - x_0)/h$ и $x = x_0 + th$, $y_j = f(x_j)$.

Дифференцируя один раз, получим для 1-ой производной выражение:

$$f'(x) = h^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{n} \sum \frac{(-1)^{n+j} \cdot C_n^j}{n!} \cdot y_j \cdot \left(\frac{t \cdot (t-1) \cdot \ldots \cdot (t-n)}{t - j} \right)' + \quad (15)$$

$$+ h^n \cdot f(x, x_0, \ldots, x_n)(t(t-1)\ldots(t-n))' + h^{n+1} \cdot f(x, x, x_0, \ldots, x_n) \cdot t(t-1)\ldots(t-n)$$

Для 2-ой производной получаем равенство

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} \sum_{j=0}^{n} \sum \frac{(-1)^{n+j} C_n^j}{n!} y_j \cdot \left(\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-j}\right)' + \quad (16)$$

$$+ h^{n-1} \cdot f(x, x_0, \ldots, x_n)(t(t-1)\ldots(t-n))'' + 2h^n \cdot f(x, x_0, \ldots, x_n) \cdot (t(t-1)\ldots(t-n))' + 2h^{n+1} f(x, x, x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Нетрудно получить выражения и более старших производных. Для узла $x = x_k$ имеем значения $f'(x_k), f''(x_k)$ в узлах интерполяции. При наличии у функции $f(x)$ нужного количества производных, можно получить более простой вид остаточного члена и саму формулу численного дифференцирования. Например, при $x = x_k$, то есть $t = k$, получаем для 1-ой производной:

$$f'(x_k) = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{n} \sum \frac{(-1)^{n+j} C_n^j y_j}{n!} \left(\frac{t(t-1)\ldots(t-\mathrm{n})}{t-j}\right)'_{t=k} +$$

$$+ h^n \cdot (t(t-1)\ldots(t-\mathrm{n}))'_{t=k} \cdot \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}, \quad (17)$$

где точка $\xi \in [a, b]$ - отрезку интерполяции. Аналогично из (16) при $x = x_k$ или соответственно $t = k$ получаем для производной

$$f''(x_k)=h^{-2}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n+j}C_n^j y_j}{n!}\left(\frac{t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-\text{n})}{t-j}\right)''_{t=k}+h^{n-1}\frac{f^{(n+1)}(\xi_{1k})}{(n+1)!}\cdot$$

$$\cdot((t(t-1)\ldots(t-n))''_{t=k}+2h^n f^{(n+2)}(\xi_{2k})(t(t-1)\ldots(t-n))'_{t=k}/(n+2)! \qquad (18)$$

где ξ_{1k}, ξ_{2k} - некоторые “средние” точки из $[a,b]$.

Пример 3. Получим выражения для 1-ой и 2-ой производной при $n=2$ или три точки. Тогда из (17), (18) очевидно имеем:

$$y_0'=\tfrac{1}{2h}(-3y_0+4y_1-\text{y}_2)+\tfrac{h^2}{3}f'''(\xi_0);$$

$$y_1'=\tfrac{1}{2h}(y_2-\text{y}_0)-\tfrac{h^2}{6}f'''(\xi_1);$$

$$y_2'=\tfrac{1}{2h}(y_0-4y_1+3\text{y}_2)+\tfrac{h^2}{3}f'''(\xi_2),$$

где ξ_0, ξ_1, $\xi_2\in[x_0,x_2]$, а также

$$y_0''=\tfrac{1}{h^2}(y_0-2y_1+\text{y}_2)-hf''(\xi_{10})+\tfrac{h^2}{6}f^{(4)}(\xi_{20})$$

$$y_1''=\tfrac{1}{h^2}(y_0-2y_1+\text{y}_2)-\tfrac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_{11}),$$

$$y_2''=\tfrac{1}{h^2}(y_0-2y_1+\text{y}_2)+hf''(\xi_{21})-\tfrac{h^2}{6}f^{(4)}(\xi_{22}),$$

где ξ_{10}, ξ_{20}, ξ_{11}, ξ_{21}, $\xi_{22}\in[x_0,x_2]$

Рассмотрим, в частности, таблицу десятичного логарифма $\lg x$:

x	340	350	360
y	2,531	2,544	2,556

Требуется приближённо найти производную $\lg'(340)$, а также оценить погрешность вычисления.

Решение. Так как шаг $h=10$, то производная

$$y_0'=\lg' 340=\tfrac{1}{2\cdot 10}(-3\cdot 2{,}531+4\cdot 2{,}544-2{,}556)+\tfrac{10^2}{3}\lg'''\xi_0,$$

где $\xi_0\in[340{,}360]$. Подсчитывая, получаем $y_0'=0{,}00135$ с точностью до $\frac{10^2}{3}\lg'''(\xi_0)$. Это значение можно оценить. Действительно,

$$\left|\lg'''\xi_0\right|=2\cdot(\xi_0^3\cdot\ln 10)^{-1}\leq\ 2\cdot(340^3\cdot\ln 10)^{-1}$$

так как $\xi_0\in[340{,}360]$ и функция x^{-3} убывающая.Тогда погрешность ρ для y_0' будет оцениваться неравенством $\rho<2\cdot 10^2(3\cdot 340^3\ln 10)^{-1}\approx\ 0{,}56\cdot 10^{-5}$.

2. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Этот метод относится к построением формул численного дифференцирования в узлах сетки без использования конечных разностей. Для этого записываем искомую формулу в виде:

$$y^{(k)}(x_p) = \sum_{j=0}^{n} C_j^{(p)} y_j + R_n(f), \tag{19}$$

где $C_j^{(p)}$ коэффициент численного дифференцирования, а $y_j = f(x_j)$ и $R_n(f)$ остаточный член. Далее подбираем $C_j^{(p)}$ из условия $R_n(f) = 0$, когда $f(x) = 1, x, \dots, x^n$. Тогда получаем её точной для многочленов до n-ой степени. Отсюда имеем систему линейных алгебраических уравнений для $C_j^{(p)}$:

$$\begin{aligned} &C_0^{(p)} + C_1^{(p)} + \dots + C_n^{(p)} = 0, \\ &C_0^{(p)}x_0 + C_1^{(p)}x_1 + \dots + C_n^{(p)}x_n = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &C_0^{(p)}x_0^{k-1} + C_1^{(p)}x_1^{k-1} + \dots + C_n^{(p)}x_n^{k-1} = 0, \\ &C_0^{(p)}x_0^{k} + C_1^{(p)}x_1^{k-1} + \dots + C_n^{(p)}x_n^{k} = k!, \\ &C_0^{(p)}x_0^{k+1} + C_1^{(p)}x_1^{k+1} + \dots + C_n^{(p)}x_n^{k+1} = (k+1)!\,x_p \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &C_0^{(p)}x_0^{n} + C_1^{(p)}x_1^{n} + \dots + C_n^{(p)}x_n^{n} = n(n-1)\dots(n-\mathrm{k}+1)x^{n-\mathrm{k}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Определитель системы (20) является определителем Вандермонда. Поэтому она имеет единственное решение $C_j^{(p)}$ с $j = \overline{0,n}$. Далее из (19) с точностью до остатка $R_n(f)$ найдём значение производной $y^{(k)}(x_p)$ в узле x_p:

$$y^{(k)}(x_p) \approx \sum_{j=0}^{n} C_j^{(p)} y_j\,,\; p = \overline{0,n}.$$

<u>Пример 4</u>. Пусть $k = 1$ и $n = 2$. Тогда у нас будут узлы x_0, x_1, x_2 и система (20) для узла x_0 имеет вид:

$$C_0^{(0)} + C_1^{(0)} + C_2^{(0)} = 0, \quad C_0^{(0)}x_0 + C_1^{(0)}x_1 + C_2^{(0)}x_2 = 1, \quad \sum_{i=0}^{2} C_i^{(0)} x_i^2 = 2x_0.$$

Для узла x_1 получаем

$$C_0^{(1)} + C_1^{(1)} + C_2^{(1)} = 0, \quad C_0^{(1)}x_0 + C_1^{(1)}x_1 + C_2^{(1)}x_2 = 1, \quad \sum_{i=0}^{2} \sum C_i^{(1)} x_i^2 = 2x_1 .$$

Для узла x_2 имеем

$$C_0^{(2)} + C_1^{(2)} + C_2^{(2)} = 0,$$
$$C_0^{(2)}x_0 + C_1^{(2)}x_1 + C_2^{(2)}x_2 = 1,$$
$$C_0^{(2)}x_0^2 + C_1^{(2)}x_1^2 + C_2^{(2)}x_2^2 = 2x_2.$$

Из этих уравнений найдем $C_j^{(p)}$ и тогда для таблично заданной функции $y_j = f(x_j)$ производная приближённо находится как

$$y'(x_p) \approx \sum_{j=0}^{2} C_j^{(p)} y_j \text{ при } p = 0,1,2 .$$

Отметим, что для равномерной сетки узлов с шагом h остаток будет $R_n(f) = o(h^{n+1\text{-}k})$. Это будет показано в п. 2. для достаточно гладкой функции $y = f(x)$.

3. СЕТОЧНЫЙ МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Существует ещё один способ приближённого вычисления производной любого порядка в узлах сетки с заданной точностью для достаточно гладкой функции.

Итак, пусть функция $u(x)$ имеет требуемую гладкость. Надо заменить её производную $u^{(k)}(x)$ k-го порядка в узле $x = x_j$ на приближение в виде некоторой суммы её значений. Полагаем сетку равномерной с шагом h.

Запишем равенство

$$u^{(k)}(x) = h^{-k} \sum_{s=-s_1}^{s_2} a_s u(x+sh) + o(h^p), \tag{21}$$

где p порядок погрешности аппроксимации, а $o(h^p)$ остаточный член формулы (21), a_s неизвестные коэффициенты. Подберём не зависящие от h числа a_s для $s = -s_1,\ -s_1+1, \ldots$ таким образом, чтобы равенство (21) оказалось справедливым. Пределы суммирования $s_1 \le 0$ и $s_2 \ge 0$ можно взять произвольными, но так, чтобы $k + p - 1 \le s_1 + s_2$. Используя формулу Тейлора разложения для функции $u(x+sh)$, получим

$$\begin{aligned} u(x+sh) &= u(x) + \frac{sh}{1!}u'(x) + \ldots \\ &+ \frac{(sh)^{k+p-1}}{(k+p-1)!}(u(x))^{(k+p-1)} + \frac{(sh)^{k+p}}{(k+p)!}u^{(k+p)}(\xi_s) \end{aligned} \qquad 22)$$

где ξ_s — некоторое “среднее” число согласно представлению остатка в форме Лагранжа. Далее, подставим выражение (22) в (21) и приведём подобные члены. Тогда имеем

$$u^{(k)}(x) = h^{-k}\Big(\sum_{s=-s_1}^{s_2} a_s + \ldots + \frac{u^{(k+p-1)}(x)h^{k+p-1}}{(k+p-1)!}\sum_{s=-s_1}^{s_2} a_s s^{k+p-1}\Big) + \frac{h^p}{(k+p)!}\sum_{s=-s_1}^{s_2} s^{k+p} a_s u^{(k+p)}(\xi_s). \tag{23}$$

Приравнивая коэффициенты при h^s, где $s = -k, -k+1, \ldots, p-1$, в левой и правой частях равенства (23), получим систему линейных алгебраических уравнений для a_s:

$$\sum_{s=-s_1}^{s_2} a_s = 0, \ldots, \sum_{s=-s_1}^{s_2} s^{k-1} a_s = 0,\ \sum_{s=-s_1}^{s_2} s^k a_s = k!,\ \sum_{s=-s_1}^{s_2} s^{k+1} a_s = 0, \ldots, \sum_{s=-s_1}^{s_2} s^{k+p-1} a_s = 0, \tag{24}$$

Если $s_1 + s_2 = k + p - 1$, то система (24) имеет единственное решение, так как её определитель является определителем Вандермонда и отличен от нуля. Если же $k+p \le s_1+s_2$, то система (24) имеет бесконечное число решений. Тогда для формулы (21) достаточно взять какой-либо набор a_s. В обоих этих случаях, отбрасывая в (21) остаток, получаем в узле x_j приближённое значение: $u^{(k)}(x_j) \approx h^{-\mathrm{k}} \cdot \sum\limits_{s=-\mathrm{s}_1}^{s_2} a_s u(x_j+sh)$ до $o(h^p)$.

<u>Замечание 1</u>. Случай п.1. соответствует $s_1+s_2=n$, где $n+1$ число всех узлов x_j и коэффициенты $C_s^j = h^{-\mathrm{k}} a_s$ для каждого узла свои. Тогда из равенства $n=k+p-1$ получаем порядок $p=n-\mathrm{k}+1$ и, соответственно, в формуле (19) остаток $R_n(f)=o(h^{n-\mathrm{k}+1})$.

<u>Пример 5</u>. Опираясь на равенство (21), получить приближение для первой и второй производной.

<u>Решение</u>. Случай 1-ой производной. Очевидно, существует одно разностное соотношение $h^{-1}(a_0u(x)+a_1u(x+h))$, где $x=x_j$ узел, который приближает $u'(x)$ с первым порядком по h. Это вытекает из равенств

$$k=1, s_1=0, s_2=1, p=1,$$

а также по $s_1+s_2=1=k+p-1$, что приводит к единственному решению системы для неизвестных a_0, a_1: $a_0+a_1=0 \;\; 0\cdot a_0+1\cdot a_1=1!$

Решая её, находим $a_0=-1, a_1=1$. Тогда производная

$$u'(x)=h^{-1}(u(x+h)-u(x))+\mathrm{o}(h)$$

для всякого узла $x=x_j$ и чтобы x_j+h тоже было узлом.

Среди выражений 2-го порядка точности вида

$$h^{-1}(a_1u(x-h)+a_0u(x)+a_1u(x+h)),$$

где $x=x_j$ и $x+h, x-h$ - тоже узлы сетки, существует не одно с 1-ым порядком точности. Действительно, так как $s_1=s_2=1$, то при $p=1$ и $k=1$ получаем $s_1+s_2=2=k+p$. Отсюда, по сказанному выше, имеем бесконечный набор a_s. Если же хотим получить 2-ой порядок, то полагаем $p=2, k=1$ и тогда имеем $s_1+s_2=2=k+p-1$. Но это приводит к единственности a_s. Для последнего случая получаем систему

$$a_{-1}+a_0+a_1=0, \quad -a_{-1}+0\cdot a_0+a_1=1!, \qquad a_{-1}+0\cdot a_0+a_1=0$$

Из неё находим $a_1=0{,}5$, $a_0=0$, $a_{-1}=-0{,}5$. Тогда выражение для производной $u'(x)$ будет:

$$u'(x)=(2h)^{-1}\cdot(u(x+h)-u(x\text{-}h))+\mathrm{o}(h^2).$$

Отбрасывая остаток $\mathrm{o}(h^2)$, получаем с точностью до $\mathrm{o}(h^2)$ приближенную формулу:

$$u'(x) \approx (2h)^{-1}(u(x+h) - u(x-h)).$$

Случай 2-ой производной. Для приближения $u''(x)$ с порядком h^2 полагаем $k = 2, p = 2$ и $s_1 + s_2 = 3$. Возьмём $s_1 = 1$, $s_2 = 2$. Тогда $s_1 + s_2 = 3 = k + p - 1$ и числа a_s для получения

$$u''(x) = h^{-2}(a_{-1}u(x-h) + a_0u(x) + a_1u(x+h) + a_2u(x+2h))$$

будут единственными. Для их нахождения решаем систему

$$\sum_{s=-1}^{2} a_s = 0,\ \sum_{s=-1}^{2} sa_s = 0,\ \sum_{s=-1}^{2} s^2a_s = 2!,\ \sum_{s=-1}^{2} s^3a_s = 0.$$

Из неё получаем $a_1 = a_{-1} = 1, a_0 = 2, a_2 = 0$. Отсюда

$$u''(x) = h^{-2}(u(x+h) - 2u(x) + \mathrm{u}(x-h)) + \mathrm{o}(h^2).$$

Отбрасывая остаток, имеем с точностью до $o(h^2)$ приближение

$$u''(x) = h^{-2}(u(x+h) - 2\mathrm{u}(x) + u(x-h))$$

в узле $x = x_j$. Здесь необходимо также, чтобы числа $x\text{-}h, x+h, x+2h$ были узлами сетки таблицы значений функции $u(x)$.

4. СПЛАЙНЫ В ЧИСЛЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ

При численном дифференцировании можно использовать и приближение функции сплайном. Как известно, для $f(x)$ заданной в узлах x_k сплайн $S_m(f,x)$ на каждом из отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ есть многочлен m-й степени:

$$S_m(f,x) = p_{mj}(x) = a_{j0} + a_{j1}x + \ldots + a_{jm}x^m, \overline{j = 1, n-1}$$

и в x_j его производные удовлетворяют условиям непрерывности:

$$p_{mj}^{(k)}(x_j) = p_{mj-1}^{(k)}(x_j), \overline{k = 0, m-1}; S_m(f, x_i) = y_i, \overline{j = 2, n-2}.$$

Кроме того, могут быть ещё и дополнительные условия, например, граничные для производных от сплайна. Всё это необходимо для однозначного нахождения неизвестных $a_{j0}, a_{j1}, \ldots, a_{jm}$ при $j = \overline{1, n-1}$. Построив сплайн, приближённо полагают $f'(x) \approx p'_{mj}(x)$ для аргумента $x \in [x_j, x_{j+1}]$. Аналогично можно найти приближённо и 2-ую и далее

$$f''(x) \approx p''_{mj}(x), f'''(x) \approx p'''_{mj}(x), \ldots.$$

Для кубического сплайна с шагом сетки h при наличии у функции 4-х непрерывных производных справедливы оценки:

$$\|f(x) - \mathrm{S}_3(f,x)\| \le M_4 h^4,$$

$$\|f'(x) - \mathrm{S}'_3(f,x)\| \le M_4 h^3$$

$$\|f''(x) - \mathrm{S}''_3(f,x)\| \le M_4 h^2,$$

где норма берётся в пространстве $C[a,b]$, а постоянная M_4 удовлетворяет неравенству: $\left|f^{(4)}(x)\right| \le M_4$ на $[a,b]$ - отрезке задания функции $f(x)$.

<u>Пример 6.</u> Дана таблица функции $y = f(x)$:

x	0	2	4
y	1,5	2,3	3,4

Требуется построить сплайн 2-го порядка и приближённо найти производную $f'(x)$ при $x = 0{,}5$.

<u>Решение</u>. Запишем сплайн 2-го порядка в виде:

$$S_2(f,x) = \begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2, x \in\in [0,2] \\ b_0 + b_1(x-2) + b_2(x-2)^2, x \in [2,4] \end{cases}$$

Для его построения необходимо найти 6 неизвестных: $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$. Очевидно с учётом равенства $y_k = S(f, x_k)$, где x_k - узлы, получаем $a_0 = 1{,}5$, $b_0 = 2{,}3$. Для нахождения же 4-х остальных неизвестных выведем 4-е линейных алгебраических уравнения. Первое получаем из равенства производной сплайна в точке “стыка” $x = 2$:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)'\Big|_{x=2} = (b_0 + b_1(x - 2) + b_2(x - 2)^2)'\Big|_{x=2}$$

Отсюда $a_1 + 4a_2 = b_1$. Далее, с учётом равенств $y_k = S_2(f, x_k)$ в узлах $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, выводим уравнения:

$$1{,}5 + 2a_1 + 4a_2 = 2{,}3;\ 2{,}3 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 = 3{,}4.$$

Последнее уравнение можно, например, получить, задавая на концах граничное условие: $S_2'(f, x_0) = const$ или $S_2'(f, x_2) = const$.

Пусть $S_2'(f, x_0) = 0$. Тогда имеем $a_1 + 2a_2 \cdot 0 = 0$ или $a_1 = 0$. Окончательно получаем: $a_0 = 1{,}5$, $a_1 = 0$, $b_0 = 2{,}3$, и уравнения

$$b_1 = a_1 + 4a_2,\ 2{,}3 = 1{,}5 + 2a_1 + 4a_2,\ 3{,}4 = 2{,}3 + 2b_1 + 4b_2.$$

Производя вычисления, находим:

$$a_2 = 0{,}2,\ b_1 = 0{,}8,\ b_2 = -0{,}125.$$

В итоге имеем сплайн

$$S_2(f, x) = \begin{cases} 1{,}5 + 0{,}2x^2, x \in [0{,}2] \\ 2{,}3 + 0{,}8(x - 2) - 0{,}125(x - 2)^2, x \in [2{,}4] \end{cases}$$

Для приближённого нахождения $f'(0{,}5)$ полагаем

$$f'(0{,}5) \approx (1{,}5 + 0{,}2x^2)'\Big|_{x=0{,}5} = 1{,}7.$$

Замечание 2. Отметим, например, что для приближённого нахождения $f'(2{,}5)$ надо было бы аналогично использовать сплайн-интерполяцию для участка $[2{,}4]$.

5. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Используя различные методы численного дифференцирования данной работы глав 1-4, вычислить производную.

1. Зная значения $\sin x$ при $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$, найти производную при $x=\pi/12, 3\pi/8$. Сравнить с точным значением.

2. Зная $\cos x$ при $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$, найти производную при $x=\pi/12, 3\pi/8$. Сравнить с точным значением.

3. Дана таблица десятичного логарифма $\mathrm{Lg}\, x$:
   Lg 340=2,531; Lg 350=2,544; Lg 360=2,556; Lg370=2,568.
   Найти производную при x=345, 346. Сравнить с точным значением.

4. Дана таблица arctg x:
   arctg 0,176= 10°, arctg 0,268= 15°, arctg 0,364 = 20°, arctg 0,466 = 25°.
   Найти производную при x=0.3. Сравнить с точным значением..

5. Зная значения tg x при $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$, найти производную при $x = \pi/10, 4\pi/15$. Сравнить с точным значением.

6. Вычислить значения производной интегрального синуса
   $\mathrm{Si}(x)=\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$ при x = 0,26; 0,35, используя таблицу его значений:
   Si 0,22 = 0,219, Si 0,27 = 0,269, Si 0,32 = 0,318, Si 0,37 = 0,367.
   Сравнить с точным значением.

7. Вычислить значения производной интеграла вероятностей
   $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x} e^{-t^2}\, dt$ при x=0,27 и x=0,52, используя таблицу:
   Ф(0,15)=0,168; Ф(0,25)=0,276; Ф(0,35)=0,379;
   Ф(0,45)=0,475; Ф(0,55)=0,563.
   Сравнить с точным значением.

8. Дана таблица значений функции:

x	0,12	0,14	0,16	0,18	0.20	0,22
y	6,27	6,405	6,487	6,505	6.436	6,259

   Найти приближенно производную функции при x=0,168, 0,215.

9. Дана таблица:

x	1,415	1,420	1,425	1,430	1,435	1,440	1,445
y	0,87	0,88	0,85	0,86	0,89	0,90	0,92

Найти приближенно производную при x=1,428, 1,432, 1,438.

10. Дана таблица:

x	1	1.1	1.2	1.3
y	2.78	2.83	2.87	2.91

Составляя таблицу разностей,

$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0.05	-0.01	0.01
0.04	0	

найти приближённо производную при x=0.9 и x=1.4.

11. Дана таблица значений интеграла вероятностей $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$

x	0.05	0.15	0.35	0.45
$\Phi(x)$	0,05637	1.6800	0.37938	0.47548

Найти приближенно производную при x=0.01, 0.03, 0.5, 0,55 и сравнить с точным значением.

12. Дана таблица ch$x$:

x	0.30	0.35	0.45	0.50	0.55
ch$x$	1.04534	1.06188	1.10297	1.12763	1.15510

Найти приближенно производную при x= 0.2; x= 0.6. Сравнить с точным значением.

6. ГРАФИКИ ПРИБЛИЖЁННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Приведём графики приближённых производных при интерполяции, сеточном методе и кубическом сплайне. Для их сравнения возьмём функцию $f(x) = \sin(3x)$ с её производной $f'(x) = 3\cos(3x)$. Количество узлов возьмём одинаковое $N = 15$ и приведём ERROR ─ максимальную ошибку по узлам. Графики получены на основе программы в свободном математическом пакете SCILAB версии 4.1.2, текст которой прилагается по каждому графику и методу. В графиках точное значение производной (при графической интерполяции в пакете) изображено непрерывной кривой, а приближённая производная знаком * в узлах значения функции. Тем самым наглядно видна разница в точности методов.

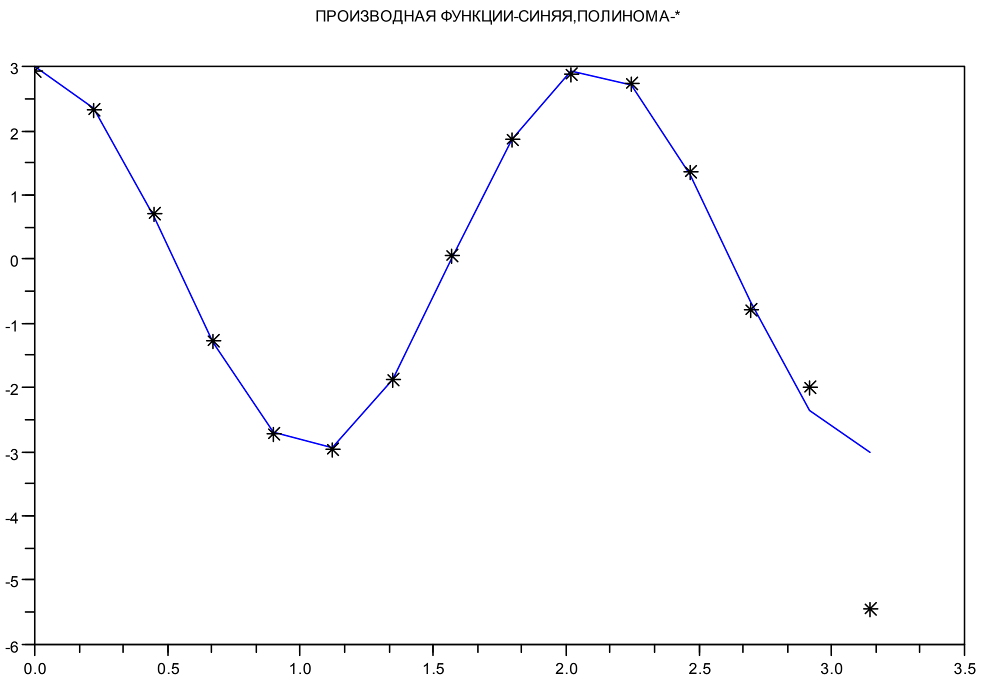
I. Дифференцирование многочлена Лагранжа

Программа

```
//Производная от многочлена Лагранжа N-ой степени
//L(x)=sum(A(j)x^(j-1)),j=1,2,..,N
clc;clear;
N=input("Enter N<=20-number knots");
a=0;  b=%pi;
h=(b-a)/(N-1);
//Функция для интерполяции
disp("Function sin(3*x)");
function w=F(x),w=sin(3*x),endfunction
disp("diff(Function(x))");
function w=DF(x),w=3*cos(3*x),endfunction
for i=1:N
//Узлы интерполяции
X(i)=a+(i-1)*h;
//Значения функции в узлах интерполяции
Y(i)=F(X(i));
end;
//MV-Матрица Вандермонда
for i=1:N
for j=1:N
MV(i,j)=X(i)^(j-1);
end;  end;
B=MV\Y;
A=zeros(1,20);
for j=1:N
A(j)=B(j);
end;
```

```
//Полином, производные DF-функции и DL-полинома
function
w=L(x),w=A(1)+A(2)*x+A(3)*x^2+A(4)*x^3+A(5)*x^4+A(6)*x^5+A(7)*
x^6+A(8)*x^7+A(9)*x^8+A(10)*x^9+A(11)*x^10+A(12)*x^11+A(13)*x^1
2+A(14)*x^13+A(15)*x^14+A(16)*x^15+A(17)*x^16+A(18)*x^17+A(19)
*x^18+A(20)*x^19,endfunction
for k=1:N
df(k)=DF(X(k));
DL(k)=numdiff(L,X(k));
Error(k)=DL(k)-df(k);
end;
ERROR=norm(Error,'inf')
N=N
//Вывод результатов
S=input('Enter 1<=S<=N for exit results'); m=1;
for i=1:S
RES(m,1)=X(i);     RES(m,2)=df(i);
RES(m,3)=DL(i);    RES(m,4)=Error(i);
m=m+1;             end;
disp("   X          df      DL        Error    ");
format('v',7);            disp(RES);
//Графики производных функции и полинома
plot(X,df,X,DL,"k*")
xtitle("ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ-СИНЯЯ,ПОЛИНОМА-*")
```

Графики



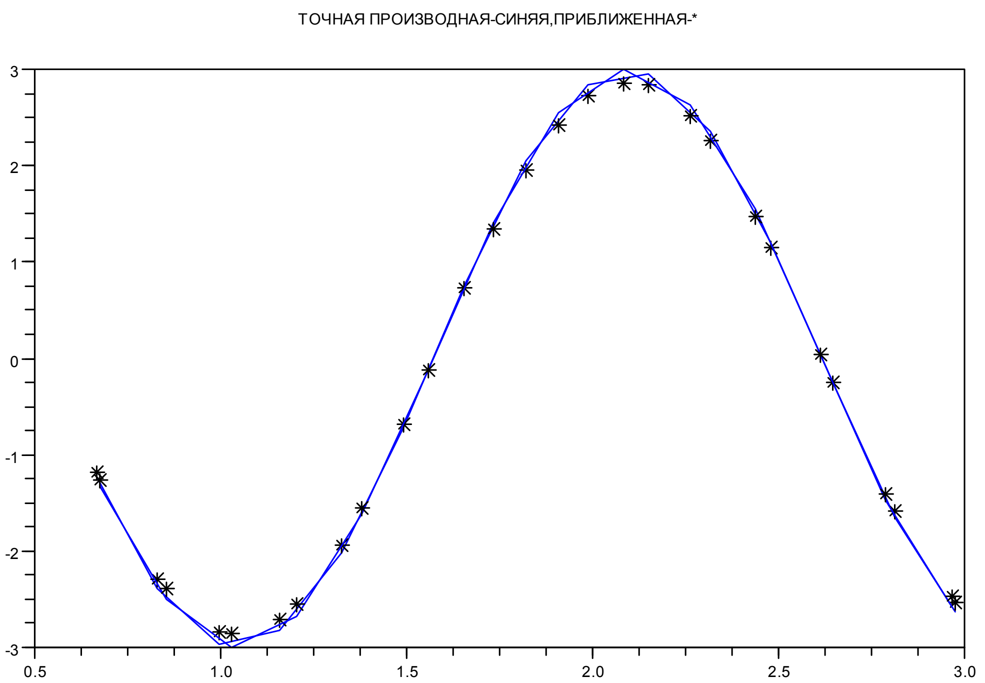
ERROR = 2.4405496.

II. Сеточный метод численного дифференцирования

Программа

```
//Метод сеток-дискретизация 1-ой производной на[0,a].
clear; clc;
N=input("Enter number of knots on OX");
a=0.5; b=%pi;    hx=(b-a)/N;
disp("du/dx=du(x), 0<=x<=a');
//Функции задачи
deff('w=u(x)','w=sin(3*x)');
//Производная функции
deff('w=du(x)','w=3*cos(3*x)');
//Значение du(x)на внутренних узлах
for i=1:N-1;
xs(i)=a+i*hx;   dut(i)=du(xs(i));
end;
//ux(i)-значение u(x) на сетке узлов x
for i=1:N+1
x(i)=a+(i-1)*hx; ux(i)=u(x(i));
end;
//Дискретная dup-производная и Error-погрешность
for i=2:N
dup(i-1)=(ux(i+1)-ux(i-1))/(2*hx);
Error(i-1)=dup(i-1)-dut(i-1);
end;
//Вывод результатов
ERROR=norm(Error,'inf')
N1=N-1
S=input('Enter 1<=S<=N1 for exit results'); m=1;
for i=1:S
RES(m,1)=xs(i);     RES(m,2)=dut(i);
RES(m,3)=dup(i);    RES(m,4)=Error(i);
m=m+1;              end;
disp("   xs       dut        dup      Error    ");
format('v',7);           disp(RES);
//Графики производной функции и лискретизации
plot(xs,dut,xs,dup,"k*");
xtitle("ТОЧНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ-СИНЯЯ,ПРИБЛИЖЕННАЯ-*");
```

Графики (во внутренних узлах отрезка [*a*,*b*])



ERROR = 0.1376.

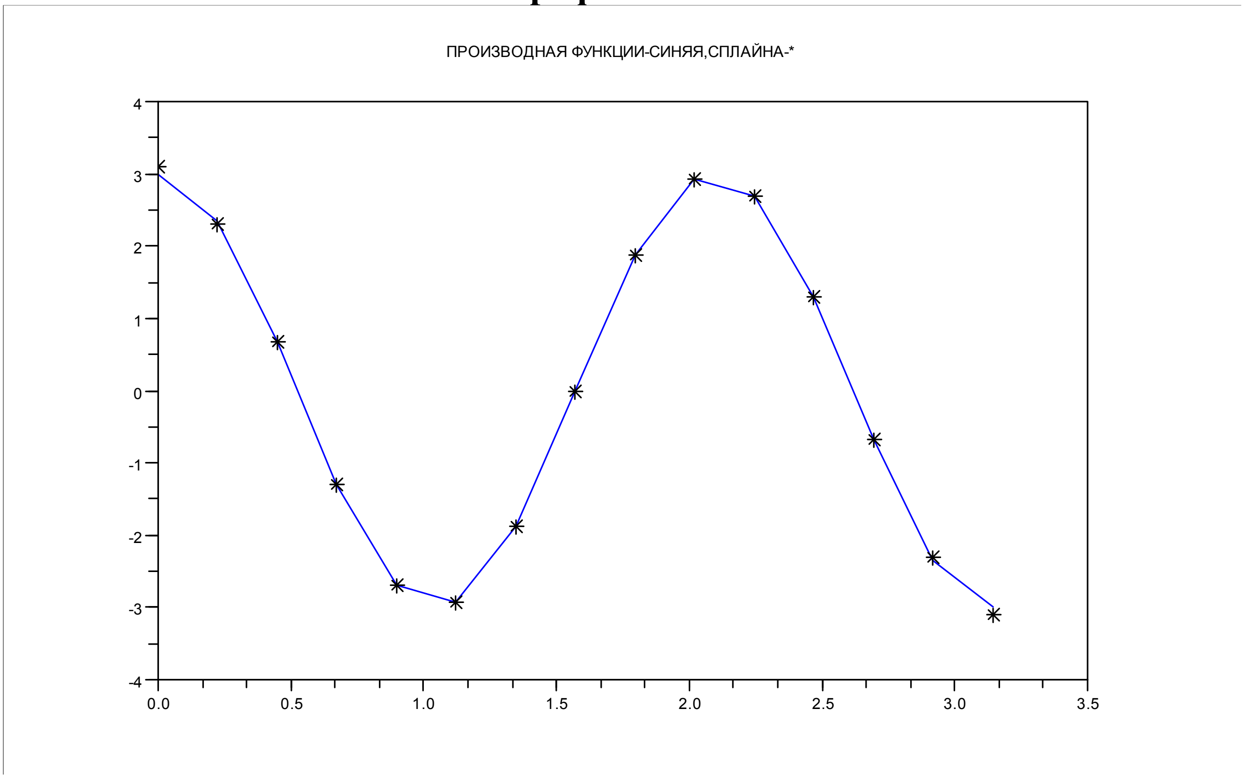
III. Метод сплайнов численного дифференцирования

Программа

```
//Вычисление производной кубическим сплайном
clc;clear;
a=0; b=%pi;
N=input("Enter N for number of knots");
h=(b-a)/(N-1);
//------Функции и её производная------
disp("F(x)=sin(3*x)");
function w=F(x),w=sin(3*x),endfunction
disp("dF(x))=3*cos(3*x)");
function w=dF(x),w=3*cos(3*x),endfunction
//X-узлы,Y-функция и производная dF в X
for i=1:N
X(i)=a+(i-1)*h; Y(i)=F(X(i));
df(i)=dF(X(i));
end;
//Коэффициенты сплайна
d=splin(X',Y');
//Значения сплайна и 1-ой производной в X
[SP0,SP1]=interp(X,X',Y',d);
Error=SP1-df;
//Максимальная погрешность производной сплайна
```

```
ERROR=norm(Error,'inf')
M=input('Enter 1<=M<=N for exit results'); s=1;
for i=1:M
RES1(s,1)=X(i);     RES1(s,2)=df(i);
RES1(s,3)=SP1(i);  RES1(s,4)=Error(i);
s=s+1; end;
disp('    X        df      SP1      Error ");
format('v',7);    disp(RES1)
//ГРАФИКИ
plot(X,df,X,SP1,"k*")
xtitle("ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ-СИНЯЯ,СПЛАЙНА-*")
```

Графики



ERROR = 0.0988.

Анализ графиков и погрешности ERROR показывает, что наилучший результат численного дифференцирования среди остальных имеет метод сплайн-интерполяции.

ЗАДАНИЕ

Используя пакет SCILAB, вычислить значение 1-ой производной функции (по таблице), используя сеточный метод, сплайн-интерполяцию. Построить графики точной производной функции и численной производной. Использовать **N= 10, 20, 40** и сравнить результаты в зависимости от количества узлов.

Таблица

№	$F(x)$	$[a;b]$
1.	$y = \sin x$	[-π; π]
2.	$y = \ln x$	[2;6]
3.	$y = \cos x$	[-π; π]
4.	$y = \mathrm{tg} x$	[-1;1]
5.	$y = x - \frac{1}{x^2}$	[2;6]
6.	$y = \sin x - \frac{1}{x^2}$	[1; 5]
7.	$y = \cos x - \frac{1}{x}$	[5;9]
8.	$y = \frac{1}{3x+5}$	[2;8]
9.	$y = \frac{x^2}{\sin x + 2}$	[-5,-1]
10.	$\sin x + \cos x$	[-π; π]
11.	$y = \cos x - \frac{1}{x^4}$	[π; 2π]
12.	$\sin^3 x - \cos x$	[3π; 4π]

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 432 с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
3. Вержбицкий В.М. Основы численного анализа. − М.: Высшая школа, 2001. − 840 с
4. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В., Рудченко Е.А. Scilab: Решение инженерных и математических задач. − М.: ALT Linux: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. − 260 с.

Методические указания к решению задач по численному дифференцированию

Составители**:**
Александр Львович **Калашников**
Андрей Михайлович **Федоткин**
Валентина Николаевна **Фокина**

Учебно-методическое пособие