МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского**

# Методические указания к решению задач на интегралы с параметром

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2016

УДК 517.987 (077)
ББК В162р
М-54

М-54 Методические указания для решения задач на интегралы с параметром. Составители: Калашников А.Л., Потёмин Г.В., Филиппов В.Н. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 52 с.

Рецензент: к.ф.-м.н, доцент **Галкин О.Е.**

В пособии приведены методические указания для решения задач по курсу "Математический анализ" и теме “Интегралы от параметра”. На примерах продемонстрированы различные приёмы вычисления собственных и несобственных интегралов, зависящих от параметра. Представлены способы вычисления и исследования сходимости этих интегралов.

Пособие будет полезно при проведении практических занятий, коллоквиумов по математическому анализу и для самостоятельной работы студентов ИИТММ ННГУ.

УДК 517.987 (077)
ББК В162р

**ОГЛАВЛЕНИЕ** **стр.**

## ВВЕДЕНИЕ

Пособие составлено на основе опыта проведения практических занятий и лекций по математическому анализу на ИИТММ ННГУ и посвящено теме “Интегралы, зависящие от параметра”. Материал разбит на четыре главы. Глава 1 посвящена собственным интегралам, зависящим от параметра, и их свойствам. В главе 2 приведено основное понятие для изучения несобственных интегралов, зависящих от параметра – понятие равномерной сходимости. На его основе приведены условия непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра. В главе 3 рассмотрены аналогичные условия для несобственных интегралов 2-го рода. Глава 4 посвящена двум важным для анализа интегралам, зависящим от параметра – эйлеровым интегралам 1-го и 2-го рода. Эти две специальные функции носят название: гамма-функция Эйлера и бета-функция Эйлера. В конце пособия приведены задачи для самостоятельного решения по разобранным темам предыдущих глав и список литературы.

Во всех главах имеются необходимые теоретические сведения и примеры с решениями. Учебно-методическое пособие будет полезно при проведении практических занятий, коллоквиумов по математическому анализу и для самостоятельной работы студентов ИИТММ ННГУ.

# ГЛАВА 1. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ С ПАРАМЕТРОМ

Пусть в прямоугольнике $P=[a,b;c,d]$ определена функция $f(x,y)$ ***интегрируемая*** на $[a,b]$ для всех $y\in[c,d]$, то есть существует интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$. Тогда функция $I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ называется **интегралом от параметра *y***. Отметим, что отрезок $[c,d]$ может быть и неограниченным, а $f(x,y)$ может быть задана и на $P(y)=[a(y),b(y);c,d]$, где $a(y)$, $b(y)$ есть некоторые функции, определенные на $[c,d]$. Тогда $I(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$.

## 1.1. Существование и непрерывность

**Теорема 1** (существование $I(y)$). Если $f(x,y)$ непрерывна на $P(y)$ по переменной $x$, то существует $I(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$.

**Следствие 1**. Если $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b;c,d]$, то существует

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx.$$

**Определение 1**. Пусть $f(x,y)$ определена на $[a,b;c,d]$, $y_0\in[c,d]$ и

1) существует функция $p(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ при всех $x\in[a,b]$;

2) для $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$, что для $\forall x\in[a,b]$ и $|y-y_0|<\delta$

$$|f(x,y)-p(x)|<\delta.$$

Тогда говорят, что $f(x,y)\Rightarrow p(x)$ при $y\to y_0$ равномерно по $x\in[a,b]$, а $p(x)$ равномерный предел для $f(x,y)$ на $[a,b]$.

**Теорема 2**. Для равномерной сходимости $f(x,y)$ при $y\to y_0$ к предельной функции $p(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall y_n\to y_0$ последовательность $f_n(x)=f(x,y_n)\Rightarrow p(x)$ на $[a,b]$ равномерно.

**Замечание 1**. Здесь в теореме 2 сформулировано определение равномерной сходимости $f(x,y)$ к $p(x)$ по Гейне, а в определении 1 по Коши.

**Теорема 3** ( достаточные условия). Если $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b;c,d]$, то при $y\to y_0$ на $[a,b]$ имеем: $f(x,y)\Rightarrow f(x,y_0)=p(x)$.

**Теорема 4**. Если $f(x,y) \Rightarrow p(x)$ при $y \to y_0$ на $[a,b]$ и существуют $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ и $\int\limits_a^b p(x)dx$, то существует $\lim\limits_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b p(x)dx$

**Следствие 2**. Если $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b;c,d]$, то по $y$ непрерывен $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$, что означает существование

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)dx.$$

**Пример 1**. Исследовать на непрерывность $I(y) = \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}dx$ при $y \to 0$, где $(x,y) \in [-1,1;-1,2]$.

**<u>Решение</u>.** Здесь $f(x) = \sqrt{x^2+y^2}$ непрерывна на $[-1,1;-1,2]$.Тогда по следствию 2 существует и непрерывен $I(y)$. Отсюда

$$\lim_{y\to 0} I(y) = \int\limits_{-1}^{1}\lim_{y\to 0}\sqrt{x^2+y^2}dx = \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2}dx .= \int\limits_{-1}^{1}|x|dx = 1 = I(0).$$

**Пример 2**. Найти $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2+y^2}$.

**<u>Решение</u>.** Здесь $y$ параметр и $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ и всюду непрерывна. Поэтому $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2+y^2}$ существует и по следствию 2 имеем

$$\lim_{y\to 0} I(y) = \int\limits_0^1 \lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right)dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

### 1.2. Дифференцируемость собственного интеграла с параметром

**Теорема 5** (правило Лейбница). Пусть
1) $f(x,y)$ определена и непрерывна в $[a,b;c,d]$;
2) существует $f'_y(x,y)$ непрерывная в $[a,b;c,d]$.

Тогда на $[c,d]$ существует непрерывная $I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$.

**Пример 3**. Исследовать $I(y)=\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+x^2+y^2}$ на дифференцируемость.

**<u>Решение</u>.** Так как $f(x,y)=\frac{x}{1+x^2+y^2}$ определена и непрерывна везде, то интеграл $I(y)$ будет непрерывен для всех $y$.

Производная $f'_y(x,y)=\frac{-2y\cdot x}{(1+x^2+y^2)^2}$ тоже непрерывна для всех $x,y$ и по теореме 5

$$I'_y(y)=\int\limits_0^1 \frac{-2y\cdot x}{(1+x^2+y^2)^2}dx=-y\int\limits_0^1 \frac{2xdx}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}.$$

При замене $t=1+x^2+y^2$, получаем значение

$$I'_y(y)=-y\int\limits_{1+y^2}^{2+y^2}\frac{dt}{t^2}=y\cdot\left(\left.\frac{1}{t}\right|_{1+y^2}^{2+y^2}\right)=\frac{-y}{\left(2+y^2\right)\left(1+y^2\right)}.$$

**Пример 4.** Вычислить $I(\alpha)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin^2 x+\alpha^2\cos^2 x\right)dx$ при. $\alpha>0$.

**<u>Решение</u>.** Очевидно

$$I(1)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 1dx=0.$$

Здесь $f(x,\alpha)=\ln\left(\sin^2 x+\alpha^2\cos^2 x\right)$ и $f'_\alpha(x,\alpha)=\frac{2\alpha\cos^2 x}{\sin^2 x+\alpha^2\cos^2 x}$ непрерывны для $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ и $\alpha>0$. Тогда по правилу Лейбница существует

$$I'(\alpha)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha\cos^2 xdx}{\sin^2 x+\alpha^2\cos^2 x}.$$

Используя замену $t=\mathrm{tg}x$ находим для $\alpha\neq 1$

$$I'(\alpha)=2\alpha\int\limits_0^\infty\frac{dt}{\left(t^2+1\right)\left(t^2+\alpha^2\right)}=$$

$$=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+\alpha^2}\right)dt=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left.\left(\mathrm{arctg}t-\frac{1}{\alpha}\mathrm{arctg}\frac{t}{\alpha}\right)\right|_0^\infty=\frac{\pi}{\alpha+1}.$$

Отсюда $I(\alpha) = \int \frac{\pi}{\alpha + 1} d\alpha = \pi \ln(\alpha + 1) + c$. Поскольку $I(\alpha)$ непрерывна для $\alpha > 0$ и $I(1) = 0$, то имеем: $I(1) = \pi \ln(1+1) + c$. Отсюда число $c = -\pi \ln 2$. Окончательно получаем $I(\alpha) = \pi(\ln(\alpha+1) - \ln 2)$.

**Пример 5**. С помощью дифференцирования по параметру интеграла $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}$, $\alpha > 0$ вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(x^2 + \alpha^2\right)^2}$.

**<u>Решение</u>.** Очевидно, здесь выполнены все условия непрерывности и дифференцируемости интеграла по параметру, так как $f(x,\alpha) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$ и $f'_\alpha(x,\alpha) = -\frac{2\alpha}{\left(x^2 + \alpha^2\right)^2}$ непрерывны для $\alpha > 0$ и $x \in [0,1]$. Тогда

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha}\Big|_0^1 = \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}}{\alpha}.$$

Здесь $\int \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha} + c$. Производная, как легко проверить, равна

$$I'(\alpha) = \left( \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}}{\alpha} \right)' = -\frac{\alpha + \left(1 + \alpha^2\right) \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}}{\alpha^2 \left(1 + \alpha^2\right)}.$$

Тогда получаем

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(x^2 + \alpha^2\right)^2} = \frac{-1}{2\alpha} \int\limits_0^1 \left( \frac{1}{x^2 + \alpha^2} \right)'_\alpha dx = \frac{-I'(\alpha)}{2\alpha} = \frac{\alpha + \left(1 + \alpha^2\right) \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}}{2\alpha^3 \left(1 + \alpha^2\right)}.$$

### 1.3. Интегрирование собственного интеграла по параметру

**Теорема 6** (интегрирование по параметру). Для $f(x,y)$ непрерывной в $[a,b;c,d]$ существует $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_c^d I(y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$, что означает перестановку порядка интегрирования в повторных интегралах.

**Пример 6**. Вычислить $I=\int\limits_0^1 \frac{x^d-x^c}{\ln x}dx$ при $0<c<d$.

**<u>Решение</u>**. Рассмотрим функцию $f(x,y)=x^y$. Эта функция непрерывна в прямоугольнике $[0,1;c,d]$. В этом случае возможно применить смену порядка интегрирования по теореме 6 (интегрирование по параметру). Тогда $\int\limits_c^d\left(\int\limits_0^1 x^y dx\right)dy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_c^d x^y dy\right)dx=I$, поскольку $\int\limits_c^d x^y dy=\frac{x^d-x^c}{\ln x}$. Но интеграл $\int\limits_0^1 x^y dx=\frac{1}{1+y}$. Поэтому

$$\int\limits_c^d\left(\int\limits_0^1 x^y dx\right)dy=\int\limits_c^d\frac{dy}{1+y}=\ln(1+y)\Big|_c^d=\ln\frac{1+d}{1+c}.$$

Отсюда $I=\ln\frac{1+d}{1+c}$ (теорема 6 помогает вычислить интеграл от параметра).

### 1.4. Собственный интеграл с пределами от параметра

Рассмотрим $I(y)=\int\limits_{a(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ с $\alpha(y),\beta(y)$ от $y\in[c,d]$.

**Теорема 7** (о непрерывности $I(y)$. Пусть $f(x,y)$ определена и непрерывна в $[a,b;c,d]$, а функции $\alpha(y),\beta(y)$ непрерывны в $[c,d]$ и при всех $y\in[c,d]$ значения $\alpha(y),\beta(y)\in[a,b]$. Тогда $I(y)$ непрерывен на $[c,d]$:

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)dx=I(y_0)$$

для всех $y_0\in[c,d]$.

**Пример 7**. Используя непрерывность интеграла от параметра, найти

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_y^{1+y}\sqrt{x^2+y^2}dx.$$

**<u>Решение</u>**. Здесь $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, а $\alpha(y)=y$, $\beta(y)=1+y$ непрерывны по $x,y$ везде. Тогда из непрерывности $I(y)$ (по теореме 7), получаем существование $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_y^{1+y}\sqrt{x^2+y^2}dx=\int\limits_0^1\sqrt{x^2}dx=\int\limits_0^1|x|dx=1$ (см. пример 1).

**Пример 8**. Найти предел $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{1+y}^{2+y^2}\dfrac{dx}{1+x^2+y^2}$.

**<u>Решение</u>.** Здесь $\alpha(y)=1+y$, $\beta(y)=1+y^2$ и $f(x,y)=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ непрерывны для всех $x,y$. Тогда по теореме 7 получаем

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{1+y}^{2+y^2}\frac{dx}{1+x^2+y^2}=\int\limits_1^2\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_1^2=\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1=\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{4}$$

**Теорема 8** (дифференцируемость $I(y)$). Пусть

1) $f(x,y)$ определена и непрерывна в $[a,b;c,d]$;
2) существует $f'_y(x,y)$ непрерывная в $[a,b;c,d]$;
3) функции $\alpha(y)$, $\beta(y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в $[c,d]$ и $\alpha(y)$, $\beta(y)$ $\in[a,b]$.

Тогда существует $I'(y)$ непрерывная в $[c,d]$ и

$$I'(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f'_y(x,y)dx+\beta'(y)f(\beta(y),y)-\alpha'(y)f(\alpha(y),y).$$

**Пример 9**. Найти $I'(y)$, если $I(y)=\int\limits_y^{1+y}\sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

**<u>Решение</u>.** Здесь все условия теоремы 8 выполнены. Тогда по формуле дифференцирования

$$I'(y)=\int\limits_y^{1+y}\frac{ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\cdot\sqrt{(1+y)^2+y^2}-1\sqrt{y^2+y^2}\,,$$

при $f'_y(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, а $\alpha'(y)=1$, $\beta'(y)=1$, $\alpha(y)=y$, $\beta(y)=1+y$.

**Пример 10**. Найти $I'(y)$, если $I(y)=\int\limits_{\cos y}^{\sin y}sh(yx^2)dx$.

**<u>Решение</u>.** Здесь условия теоремы 8 выполнены и по формуле дифференцирования получаем

$$I'(y)=\cos y\cdot sh\left(y\sin^2 y\right)+\sin y\cdot sh\left(y\cos^2 y\right)+\int\limits_{\cos y}^{\sin y}x^2ch(yx^2)dx$$

Здесь $\alpha(y)=\cos y$, $\beta(y)=\sin y$ и $f(x,y)=\operatorname{sh}(yx^2)$, $f'_y(x,y)=x^2\operatorname{ch}(yx^2)$.

# ГЛАВА 2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА С ПАРАМЕТРОМ

Рассмотрим интегралы с параметром на бесконечном отрезке интегрирования: несобственные интегралы от параметра 1-го рода**.**

**Определение 2**. Пусть на $[a,\infty;c,d]$ определена функция $f(x,y)$ и для всех $y\in[c,d]$ существует $I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$. Тогда $I(y)$ называется **несобственным интегралом от параметра 1-го рода**. При этом говорят, что $I(y)$ сходится на $[c,d]$.

**Замечание 2**. Отрезок $[c,d]$ может быть и неограниченным, а пределы интегрирования могут быть $\pm\infty$. В исследовании сходимости $I(y)$ используем признаки сходимости для несобственного интеграла 1-го рода без параметра, а для непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости интеграла от параметра вводится **равномерная сходимость** $I(y)$.

## 2.1. Равномерная сходимость несобственных интегралов 1-го рода с параметром

**Определение 3**. $I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ называется равномерно сходящимся на $[c,d]$, если

1) $I(y)$ сходится на $[c,d]$;

2) для всякого $\varepsilon>0$ существует $\Delta(\varepsilon)>a$, что для всех $A>\Delta(\varepsilon)$ и всех $y\in[c,d]$ верно неравенство $\left|\int\limits_a^\infty f(x,y)-\int\limits_a^A f(x,y)dx\right|<\varepsilon$.

Последнее неравенство эквивалентно следующим:

$$|R(A,y)|<\varepsilon,\quad |I(y)-F(A,y)|<\varepsilon,$$

где $R(A,y)=\int\limits_A^\infty f(x,y)dx$, $F(A,y)=\int\limits_a^A f(x,y)dx$. Здесь $R(A,y)$ – остаток интеграла $I(y)$. В этом случае равномерная сходимость $I(y)$ означает равномерную сходимость $R(A,y)\rightrightarrows 0$, $F(A,y)\rightrightarrows I(y)$ при $A\to\infty$ для всех $y\in[c,d]$. Понятие равномерной сходимости здесь аналогично как и для собственного интеграла от параметра (см. определение 1).

**Пример 11**. Исследовать $I(y)=\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^y}$ на равномерную сходимость, где $y\in[2,4]$.

**Решение.** Рассмотрим остаток $R(A,y)$. Очевидно

$$0<R(A,y)=\int\limits_A^\infty \frac{dx}{1+x^y}<\int\limits_A^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_A^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}A.$$

Таким образом, для всех $A>0$ и всех $y\in[2,4]$ верно неравенство $0<R(A,y)<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}A$. Тогда для $\varepsilon>0$ при $0<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}A<\varepsilon$ получаем $|R(A,y)|<\varepsilon$. Здесь при $\operatorname{arctg}A>\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ и для $A>\max(0,\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right))=\Delta(\varepsilon)$ выполнено определения равномерной сходимости $I(y)$.

**Замечание 3**. Сходимость $R(A,y)\rightrightarrows 0$ при $A\to\infty$ является необходимым и достаточным условием равномерной сходимости $I(y)$.

**Теорема 9**. Для равномерной сходимости сходящегося $I(y)$ на $[c,d]$ **необходимо и достаточно**, чтобы $P(A)\to 0$ при $A\to\infty$, где $P(A)=\sup|R(A,y)|$ по $y\in[c,d]$.Тогда $R(A,y)\rightrightarrows 0$ при $A\to\infty$.

**Теорема 10**. Для равномерной сходимости сходящегося $I(y)$ **достаточно**, чтобы существовала функция $C(A)\ge|R(A,y)|$ для всех $A>a$ и $y\in[c,d]$ для которой $\lim\limits_{A\to\infty}C(A)=0$.

**Замечание 4**. Отметим, что теоремы 9 и 10 и определения 2,3 легко переформулировать и для $\int\limits_{-\infty}^a f(x,y)dx$, а также $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x,y)dx$

**Пример 12**. Исследовать $\int\limits_0^\infty e^{-xy}dx=I(y)$ на равномерную сходимость на а) $E_1=[q,\infty]$, где $q>0$, б) $E_2=(0,\infty)$.

**Решение.** Очевидно, остаток

$$R(A,y)=\int\limits_A^\infty e^{-xy}dx=\frac{-e^{-xy}}{y}\Big|_A^\infty=\frac{e^{-Ay}}{y}<\frac{e^{-Aq}}{q}=C(A)$$

и $C(A)\to 0$ при $A\to\infty$. Тогда по теореме 10 получаем в случае а) равномерную сходимость $I(y)$ на $E_1=[q,\infty]$. Если же $y\in E_2=(0,\infty)$, то

$$P(A)=\sup_{y\in[0,\infty)}|R(A,y)|>\sup_{y\in[0,\infty)}\cdot e^{-Ay}\cdot y^{-1}=\infty$$

для любого числа $A>0$. Следовательно, $P(A)$ не стремится к 0 при $A\to\infty$ и в случае б) $I(y)$ сходится неравномерно на $E_2=(0,\infty)$.

**Замечание 5**. Отрицание равномерной сходимости $I(y)$ означает: $\exists\varepsilon_0>0$ такое, что для $\forall\Delta\in[a,\infty)$ существуют $y_\Delta\in[c,d]$ и $Q_\Delta\in[\Delta,\infty)$ такие, что $|\int\limits_{Q_\Delta}^{\infty} f(x,y_\Delta)dx|>\varepsilon_0$ ($I(y)$ сходится неравномерно на $[c,d]$).

**Пример 13**. Исследовать на равномерную сходимость

$$I(y)=\int\limits_0^\infty ye^{-xy}dx \quad \text{при } y\geq 0.$$

**<u>Решение</u>.** Применим отрицание равномерной сходимости. Очевидно, $I(0)=0$ и $I(y)$ сходится для всех $y>0$, что легко проверить. При замене $xy=t$ остаток

$$R(A,y)=\int\limits_A^\infty ye^{-xy}dx=\int\limits_{Ay}^\infty e^{-t}dt=e^{-Ay}.$$

Тогда для всех $\Delta>0$ существует $y_\Delta=\dfrac{1}{\Delta}$, для которого

$$|R(\Delta,y_\Delta)|=\left|\int\limits_\Delta^\infty f(x,y_\Delta)dx\right|=e^{-\Delta\cdot\frac{1}{\Delta}}=e^{-1}>\varepsilon_0$$

при $\varepsilon_0=0{,}5\cdot e^{-1}$. Отсюда на основе замечания 5 интеграл $I(y)$ сходится неравномерно.

Приведём критерий Коши равномерной сходимости.

**Теорема 11.** Для равномерной сходимости $I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon>0$ существовало $\Delta(\varepsilon)>a$ такое, что для всех $A,B>\Delta(\varepsilon)$ и всех $y\in[c,d]$ будет $\left|\int\limits_A^B f(x,y)dx\right|<\varepsilon$.

**Пример 14**. Исследовать по критерию Коши интеграл примера 12.

**<u>Решение</u>.** Здесь $I(y)=\int\limits_0^\infty e^{-xy}dx$. Рассмотрим случай а), когда множество $E_1=[q,\infty]$. Тогда $y\in[q,\infty)$, где $q>0$ и $\int\limits_A^B e^{-xy}dx=\dfrac{e^{-Ay}-e^{-By}}{y}$ для

$A, B > 0$. Очевидно, $0 < \int\limits_A^B e^{-xy} dx < \frac{e^{-Ay}}{y} < \frac{e^{-q\Delta}}{q}$ для $B > A > \Delta > 0$. Выбирая $\Delta(\varepsilon)$ из неравенства $e^{-q\Delta} q^{-1} < \varepsilon$, получаем

$$\Delta(\varepsilon) > \max(0, q^{-1} \ln(\varepsilon \cdot q)^{-1}) = p(\varepsilon).$$

Например, $\Delta(\varepsilon) = 2p(\varepsilon)$.. Тогда $\left| \int\limits_A^B e^{-xy} dx \right| < e^{-\Delta q} \cdot q^{-1} < \varepsilon$ при $A, B > \Delta(\varepsilon)$ и выполнен критерий Коши, по которому $I(y)$ сходится равномерно.

В случае б) при $y \in (0, \infty)$ имеем $\left| \int\limits_A^B e^{-xy} dx \right| = \left| \frac{e^{-By} - e^{-Ay}}{-y} \right|$. Тогда для всякого $\Delta > 0$, полагая $A = \Delta$, $B = 2\Delta$ и $y = \frac{1}{\Delta}$, получаем

$$\left| \int\limits_A^B e^{-xy} dx \right| = \Delta \cdot \left| e^{-2} - e^{-1} \right| > 1$$

при $\Delta > \left| e^{-2} - e^{-1} \right|^{-1}$. Следовательно, при $\varepsilon_0 = 1$ получаем отрицание критерия Коши, а значит неравномерную сходимость $\int\limits_0^\infty e^{-xy} dx$ при $y > 0$.

Приведем достаточные условия равномерной сходимости $I(y)$.

**Теорема 12 (признак Вейерштрасса)**. Пусть $f(x, y)$ определена в $[a, \infty, c, d]$ и

1) существует $\int\limits_a^A f(x, y) dx$ для всех $A > a$ и $y \in [c, d]$;

2) $|f(x, y)| \le p(x)$ для всех $(x, y) \in [a, \infty, c, d]$;

3) $\int\limits_0^\infty p(x) dx$ сходится.

Тогда $\int\limits_0^\infty f(x, y) dx$ сходится абсолютно и равномерно на $[c, d]$.

**Пример 15**. Интеграл $I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{1 + x^\alpha} dx$ при $\alpha \ge 2$ исследовать на равномерную сходимость.

.

**<u>Решение</u>**. Поскольку $\left|\dfrac{\sin x}{1+\alpha^2}\right| \le \dfrac{1}{1+x^\alpha} \le \dfrac{1}{1+x^2}$ для $\alpha \ge 2$, $x \ge 0$, а интеграл $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{2}$, что означает его сходимость, то при $p(x) = \left(1+x^2\right)^{-1}$ применяем признак Вейерштрасса. Тогда по этому признаку интеграл $I(y)$ равномерно сходится для $\alpha \ge 2$.

**Пример 16**. Исследовать на равномерную сходимость

$$I(\alpha) = \int\limits_1^\infty \frac{\ln^\alpha x}{x^3} dx \text{ при } \alpha \in [0,4].$$

**<u>Решение.</u>** Поскольку верна оценка $0 \le \dfrac{\ln^\alpha x}{x^3} \le \dfrac{\ln^4 x}{x^3}$ и интеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{\ln^4 x}{x^3} dx$ сходится по предельному признаку (ибо для $f(x) = \dfrac{\ln^4 x}{x^3}$ и $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ имеем $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^4 x}{x} = 0$, а $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^2}$ сходится, то сходится и $\int\limits_1^\infty f(x)dx$). Полагая $p(x) = \dfrac{\ln^4 x}{x}$, получаем по признаку Вейерштрасса равномерную сходимость $I(\alpha)$ при $\alpha \in [0,4]$.

**Теорема 13 (признак Дирихле)**. Пусть функции $f(x,y), g(x,y)$ определены на $[a,\infty,c,d]$ и выполнены условия:

1) $f(x,y), g(x,y)$ непрерывны на $[a,\infty,c,d]$;
2) $F(B,y) = \int\limits_a^B f(x,y)dx$ равномерно ограничена для всех $B > a$ и всех $y \in [c,d]$ (существует число $C > 0$, для которого $|F(B,y)| \le C$);
3) функция $g(x,y)$ для всех $y \in [c,d]$ монотонна по $x$ и $g(x,y) \rightrightarrows 0$ равномерно при $x \to \infty$ и $y \in [c,d]$.

Тогда интеграл $\int\limits_0^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$.

**Замечание 6**. Условие 3) в частности проверяется по знаку $g'_x(x,y)$. Так если $g'_x(x,y) \le 0$, то $g(x,y)$ убывает по $x$, а при $g'_x(x,y) \ge 0$ функция $g(x,y)$ возрастает по $x$. Равномерная сходимость $g(x,y) \rightrightarrows 0$ при $x \to \infty$ и $y \in [c,d]$ проверяется аналогично как и равномерная сходимость остатка

$R(A,y)$(см. замечание 3). В частности $g(x,y)\Rightarrow 0$ при $x\to\infty$, если $|g(x,y)|\le P(x)$ для всех $x\ge a$, $y\in[c,d]$ и $p(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

**Следствие 3**. Пусть $f(x,y)$, $g(x,y)$ определены на $[a,\infty,c,d]$ и

1) $f(x,y)$, $g(x,y)$ непрерывны на $[a,\infty,c,d]$;

2) $g'_x(x,y)$ непрерывна и знакоопределена;

3) $\left|\int\limits_a^B f(x,y)dx\right|<C$ для некоторой $C>0$ и всех $B>a$ и $y\in[c,d]$;

4) $g(x,y)\Rightarrow 0$ при $x\to\infty$ и $y\in[c,d]$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ равномерно сходится на $[c,d]$.

**Пример 17**. Исследовать $I(y)=\int\limits_0^\infty \frac{\sin xy}{x}dx$ на равномерную сходимость при $y\in[b,\infty]$, где $b>0$.

**<u>Решение</u>.** Введем функции $f(x,y)=\sin(xy)$ и $g(x)=\frac{1}{x}$. Очевидно $g(x)\to 0$ при $x\to\infty$ и $g'(x)=\frac{-1}{x^2}<0$. Кроме того, для функции

$$F(x,B)=\int\limits_0^B \sin xydx=\frac{\cos B-1}{y}$$

Верна оценка: $|F(B,y)|\le\frac{2}{b}$. Тогда по следствию 3 получаем равномерную сходимость для всех $y\in[b,\infty]$ интеграла

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin xy}{x}dx=\int\limits_0^\infty f(x,y)g(x,y)dx.$$

**Пример 18**. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{y^2\cos xy}{x+y^2}dx \text{ при } y\in(0,\infty].$$

**<u>Решение</u>.** Применим здесь признак Дирихле. Для этого введем функции $f(x,y)=y\cos(xy)$ и $g(x,y)=\frac{y}{x+y^2}$. Проверим выполнение условий теоремы 13. Очевидно, функция $g(x,y)$ монотонна по $x$ (убывает по $x$) при каждом $y\in[0,\infty]$. В частности, это легко проверить по знаку $g'_x(x,y)$ равной $g'_x(x,y) = -\dfrac{y}{\left(x+y^2\right)^2} < 0$. Кроме того, $0 \le g(x,y) = \dfrac{y}{x+y^2} < \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ при $x \in [1,\infty)$ и $y \in (0,\infty)$. Действительно, поскольку $\left(\sqrt{x}\right)^2 + y^2 \ge 2\sqrt{x}y$, то для $y > 0$ имеем $0 \le \dfrac{y}{x+y^2} \le \dfrac{y}{2\sqrt{x}y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Функция $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \to 0$ при $x \to \infty$. Поэтому по замечанию 6 получаем $g(x,y) \rightrightarrows 0$ при $x \to \infty$ и всех $y \in (0,\infty)$. Далее $\left|\int\limits_1^B y\cos xy dx\right| = \left|\sin By - \sin y\right| \le 2$ при $y \in (0,\infty)$ и $B \ge 1$. Итак, здесь выполнены условия признака Дирихле и, таким образом, интеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{y^2 \cos xy}{x+y^2} dx$ сходится равномерно.

**Теорема 14 (признак Абеля)**. Пусть функции $f(x,y)$, $g(x,y)$ определены и непрерывны на $[a,\infty,c,d]$ и

1) $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно по $y \in [c,d]$;
2) функция $g(x,y)$ ограничена на $[a,\infty,c,d]$ и монотонна по $x$ для любого $y \in [c,d]$.

Тогда $\int\limits_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно по $y \in [c,d]$.

**Замечание 7**. Вместо отрезка $[c,d]$ можно рассматривать любое числовое множество $E$, а монотонность $g(x,y)$ по $x$ для всех $y \in [c,d]$ при существования $g'_x(x,y)$ можно проверить по ее знаку. Так, если производная $g'_x(x,y) \ge 0$, то $g(x,y))$ возрастает, а при $g'_x(x,y) \le 0$ убывает по $x$.

**Пример 19**. Показать, что $\int\limits_1^\infty \dfrac{\cos x}{2x-y} \operatorname{arctg}(xy)dx$ сходится равномерно на $[0,1]$.

**<u>Решение</u>.** Здесь удобнее применить признак Абеля. Действительно, если положить $f(x,y) = \cos x$, а $g(x,y) = \dfrac{\operatorname{arctg}(xy)}{2x-y}$, то неравенство

$$\left|\int\limits_1^B f(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_1^B \cos x dx\right| \le 2$$

верно для всех $y \in [0,1]$ и $B \geq 1$. Но монотонность $g(x,y)$ по $x$ не очевидна: поскольку числитель и знаменатель при $y > 0$ растут с ростом $x$. Поэтому проще использовать признак Абеля, чем Дирихле. Для этого переобозначим функции под интегралом. Введем $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{2x - y}$, а $g(x,y) = \operatorname{arctg}(xy)$. Функция $g(x,y)$, очевидно, монотонна по $x$ при всех $y \in [0,1]$, что легко проверить, например, по знаку $g'_x(x,y)$. Здесь $g'_x(x,y) = \dfrac{y}{1 + x^2 y^2} \geq 0$ и, тем самым, функция $g(x,y)$ возрастает по $x$. Рассмотрим $\int\limits_1^{\infty} f(x,y)dx$ и исследуем его на равномерную сходимость по $y$ на $[0,1]$. Для этого представим

$$f(x,y) = \frac{\cos x}{2x - y} = f_1(x) \cdot g_1(x,y),$$

где $f_1(x) = \cos x$, а $g_1(x,y) = \dfrac{1}{2x - y}$. Очевидно

$$\left| \int\limits_1^B f_1(x,y)dx \right| = \left| \int\limits_1^B \cos x dx \right| \leq 2$$

для всех $B \geq 1$ и при $y \in [0,1]$

$$0 \leq g_1(x,y) = \frac{1}{2x - y} \leq \frac{1}{2x - 1}.$$

Здесь $\dfrac{1}{2x-1} \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда по замечанию 6 $g_1(x,y) \rightrightarrows 0$ равномерно при $x \to \infty$ для всех $y \in [0,1]$. Очевидно, $g'_{1,x}(x,y) = -\dfrac{2}{(2x - y)^2} < 0$. Тем самым $g_1(x,y)$ монотонна по $x$ для любого фиксированного $y \in [0,1]$. Таким образом, выполнены для $\int\limits_1^{\infty} f(x,y)dx$ условия признака Дирихле и этот интеграл равномерно сходится. Поэтому для $\int\limits_1^{\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ выполнены условия признака Абеля и исходный интеграл равномерно сходится.

## 2.2. Непрерывность несобственного интеграла 1-го рода с параметром

**Теорема 15 (непрерывность интеграла).** Пусть
1) $f(x,y)$ определена и непрерывна на $[a,\infty,c,d]$;
2) $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$.

Тогда $I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ непрерывен на $[c,d]$.

**Пример 20**. Доказать, что $I(y)=\int\limits_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2}dx$ непрерывен на $(0,\infty)$.

**<u>Решение</u>.** Поскольку верна оценка $\left|\frac{\cos xy}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{1+x^2}$, для всех $y>0$, а $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $I(y)$ сходится равномерно. Так как $f(x,y)=\frac{\cos xy}{1+x^2}$ непрерывна по $x,y$ везде, то по теореме 15 получаем непрерывность $I(y)$ на $(0,\infty)$.

Для исследования на непрерывность часто сужают область параметра, где возможно применить равномерную сходимость и, расширяя ее, получают непрерывность уже во всей области. Приведем такие примеры.

**Пример 21**. Исследовать интеграл $I(\alpha)=\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{1+x^\alpha}$ на непрерывность при $\alpha\in(2,\infty)$.

**<u>Решение</u>.** Здесь непосредственно применить признаки равномерной сходимости затруднительно, хотя подинтегральная функция непрерывна и несложная. Пусть $\alpha\ge q>2$.Тогда $I(\alpha)$ для $\alpha\ge q>2$ будет уже равномерно сходиться по признаку Вейерштрасса, поскольку $0\le\frac{x}{1+x^\alpha}\le\frac{x}{1+x^q}=p(x)$, а $\int\limits_0^\infty p(x)dx=\int\limits_0^\infty\frac{xdx}{1+x^q}$ сходится при $q>2$ (что легко установить по предельному признаку, ибо $\frac{x}{1+x^q}\approx\frac{1}{x^{q-1}}$ при $x\to\infty$ и показатель $\lambda=q-1>1$).

Тогда, с учетом непрерывности $f(x,\alpha)=\dfrac{x}{1+x^{\alpha}}$, получаем по теореме 15 непрерывность $I(\alpha)$ для всех $\alpha \ge q > 2$. Возьмем любое число $\alpha_0 > 2$. Полагая $q_0=\dfrac{\alpha_0+2}{2}$, получаем $q_0>2$, и, по доказанному, непрерывность для всех $\alpha \ge q_0$. Но $2<q_0<\alpha_0$. Тогда $I(\alpha)$ будет непрерывна и в точке $\alpha_0$. Таким образом для всех $\alpha_0>2$ функция $I(\alpha)$ непрерывна. Отсюда интеграл $I(\alpha)$ непрерывен для всех $\alpha>2$.

**Пример 22**. Исследовать $I(y)=\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\cos x}{x^y}dx$ на непрерывность при $y\in(0,\infty)$.

**<u>Решение</u>.** Здесь признак Вейерштрасса неприменим, поэтому используем другие признаки, так как исходный интеграл сходится, но не абсолютно (что легко установить по признаку Дирихле при фиксированном $y$). Пусть $y \ge a > 0$. Представим $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{x^y}=f_1(x)\cdot g_1(x,y)$, где $f_1(x)=\cos x$, а $g_1(x,y)=\dfrac{1}{x^y}$ при $y\ge a>0$. Тогда $\left|\int\limits_1^B \cos x dx\right| = \left|\sin B-\sin 1\right| \le 2$, а $g_1(x,y)=\dfrac{1}{x^y}\le\dfrac{1}{x^a}$, где $\dfrac{1}{x^a}\downarrow 0$ при $x\to\infty$. Следовательно, $g_1(x,y)\rightrightarrows 0$ по $y\in[a,\infty)$ и $g_1(x,y)$ убывает по $x$ при фиксированном $y\ge a>0$. Отсюда по признаку Дирихле получаем равномерную сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\cos x}{x^y}dx$, а с учетом непрерывности $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{x^y}$ для $x\ge 1$, $y\ge a>0$, и непрерывность $I(y)$ в области $y\ge a>0$ для всех $a>0$. Рассуждая как в примере 21, получаем непрерывность $I(y)$ во всей области $y>0$.

### 2.3. Дифференцируемость несобственного интеграла 1-го рода с параметром

**Правило Лейбница** о дифференцируемости интеграла по параметру.

**Теорема 16**. Пусть $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны в $[a,\infty,c,d]$ и

1) $I(y)=\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ сходится;

2) $\int\limits_a^{\infty} f'_y(x,y)dx$ равномерно сходится для всех $y \in [c,d]$.

Тогда для всех $y \in [c,d]$ существует $I'(y) = \int\limits_a^{\infty} f'_y(x,y)dx$.

**Пример 23**. Исследовать на дифференцируемость $I(y) = \int\limits_2^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^y} dx$ при $3 \le y \le 4$.

**<u>Решение</u>.** Проверим выполнение условий теоремы 16. Очевидно

$$f(x,y) = \frac{\sin x}{1+x^y}, \quad f'_y(x,y) = -\frac{yx^{y-1}\sin x}{(1+x^y)^2}$$

непрерывны на $[0,\infty;3,4]$. Проверим выполнение остальных условий теоремы 16. Поскольку для $y \in [3,4]$ имеем $\left|\frac{\sin x}{1+x^y}\right| \le \frac{1}{1+x^y} \le \frac{1}{x^3}$, $x \in [2,\infty)$, а $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса для несобственного интеграла 1-го рода интеграл $\int\limits_2^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^y} dx$ при $y \in [3,4]$ будет абсолютно сходиться, а значит и сходиться. Для производной $f'_y(x,y)$ имеем очевидную оценку:

$$\left|\frac{yx^{y-1}\sin x}{\left(1+x^y\right)^2}\right| < \frac{4 \cdot x^{y-1}}{\left(1+x^y\right)^2} < \frac{4x^y}{2x^{2y}} = \frac{2}{x^y} < \frac{2}{x^3}$$

для $y \in [3,4]$ и $x \in [2,\infty)$. Но $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса для несобственного интеграла 1-го рода от параметра получаем равномерную сходимость $\int\limits_2^{\infty} \frac{yx^{y-1}\sin x}{(1+x^y)^2} dx$ для $y \in [3,4]$. Отсюда по правилу Лейбница существует $I'(y) = \int\limits_2^{\infty} \frac{yx^{y-1}\sin x}{(1+x^y)^2} dx$. Поскольку $f'_y(x,y)$ – непрерывна и $I'(y)$ равномерно сходится, то получаем и непрерывность $I'(y)$ по теореме о непрерывности несобственного интеграла от параметра 1-го рода.

**Замечание 8**. Условия теоремы 16 о дифференцируемости интеграла от параметра (правило Лейбница) с применением теоремы о непрерывности интеграла от параметра устанавливают и непрерывность $I'(y)$, поскольку в теореме 16 $I'(y)$ равномерно сходится, а производная $f'_y(x,y)$ непрерывна для $(x,y)\in[a,\infty,c,d]$.

**Пример 24**. Доказать, что при $\alpha>0,\beta>0$

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx=\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

**<u>Решение</u>.** Покажем сходимость интеграла для всех $\alpha,\beta>0$. Действительно, у функции $f(x,\alpha,\beta)$ на $[0,\infty)$ нет особых точек, ибо при $x\to+0$ будет $f(x,\alpha,\beta)\to\beta-\alpha$. Поэтому имеем здесь несобственный интеграл первого рода для любых фиксированных $\alpha,\beta>0$. Пусть $\alpha>\beta>0$. Тогда $I(\alpha,\beta)=\int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{(e^{-(\alpha-\beta)x}-1)}{x}dx$. Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-\beta x}(e^{-(\alpha-\beta)x}-1)}{xe^{-\beta x}}=0$ и интеграл $\int_0^\infty e^{-\beta x}dx=\frac{1}{\beta}$, то есть сходится, то по предельному признаку сравнения для несобственного интеграла 1-го рода, получаем сходимость $I(\alpha,\beta)$ при $\alpha>\beta>0$. Если же $\beta>\alpha>0$, то, рассуждая аналогично, получаем сходимость $I(\alpha,\beta)$. Если же $\alpha=\beta$, то, очевидно, $I(\alpha,\beta)=0$. Итак, $I(\alpha,\beta)$ сходится при всех $\alpha,\beta>0$. Покажем законность дифференцирования по параметру (правило Лейбница) для несобственного интеграла. Интегралы

$$I'_\alpha(\alpha,\beta)=\int_0^\infty f'_\alpha(x,\alpha,\beta)dx=\int_0^\infty -e^{-\alpha x}dx=-\frac{1}{\alpha}$$

$$I'_\beta(\alpha,\beta)=\int_0^\infty f'_\beta(x,\alpha,\beta)dx=\int_0^\infty e^{-\beta x}dx=\frac{1}{\beta}$$

сходятся равномерно при $\alpha,\beta\ge\varepsilon>0$ по признаку Вейерштрасса, так как $\left|-e^{-\alpha x}\right|\le e^{-\varepsilon x}$ и $\left|e^{-\beta x}\right|\le e^{-\varepsilon x}$, а $\int_0^\infty e^{-\varepsilon x}dx=\frac{1}{\varepsilon}$ – сходится. Тогда условия теоремы 16 при $\alpha,\beta\ge\varepsilon>0$ выполнены. Но $I'_\alpha(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\alpha}$ и $I'_\beta(\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta}$. Тогда $I(\alpha,\beta)=\int-\frac{d\alpha}{\alpha}=-\ln\alpha+\varphi(\beta)$, $I(\alpha,\beta)=\int\frac{d\beta}{\beta}=\ln\beta+\psi(\alpha)$.

Найдем функции $\psi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$. При $\alpha=\beta$ получаем

$$I(\alpha,\beta)=I(\beta,\beta)=-\ln\beta+\varphi(\beta)=0 \text{ и } \varphi(\beta)=\ln\beta.$$

Отсюда для $\alpha,\beta>0$ имеем $I(\alpha,\beta)=-\ln\alpha+\ln\beta=\ln\frac{\beta}{\alpha}$.

## 2.4. Интегрируемость несобственного интеграла 1-го рода с параметром

**Теорема 17**. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в $[a,\infty,c,d]$ и $I(y)=\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ равномерно сходится для всех $y\in[c,d]$. Тогда верна формула: $\int\limits_c^d I(y)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx=\int\limits_a^{\infty} dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$.

**Пример 25**. Вычислить $I(\beta)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\beta x}dx$, $\beta>0$.

**Решение.** Очевидно, $I(\beta)=\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^1 e^{-\beta x}\cos(tx)dt\right)dx$, поскольку

$$\frac{\sin x}{x}e^{-\beta x}=\int\limits_0^1 e^{-\beta x}\cos(tx)dt.$$

Покажем, что $f(x,t,\beta)=e^{-\beta x}\cos(tx)$ удовлетворяет условиям теоремы 17 и, следовательно,

$$I(\beta)=\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^1 f(x,t,\beta)dt\right)dx=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{\infty} f(x,t,\beta)dx\right)dt=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{\infty} e^{-\beta x}\cos(tx)dx\right)dt.$$

Очевидно, $f(x,t,\beta)$ непрерывна на $[0,\infty;0,1]$, где $\beta$ фиксируем, а $t$ параметр. Так как для любого $\beta>0$ интеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-\beta x}dx$ сходится и $|f(x,t,\beta)|\le e^{-\beta x}$, $t\in[0,1]$, то по признаку Вейерштрасса $\int\limits_0^{\infty} e^{-\beta x}\cos(tx)dx$ сходится равномерно на $[0,1]$. Интегрируя по частям, получаем $\int\limits_0^{\infty} e^{-\beta x}\cos(tx)dx=\frac{\beta}{\beta^2+t^2}$. Отсюда

$$I(\beta)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\beta x}dx=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{\infty} e^{-\beta x}\cos txdx\right)dt=\int\limits_0^1\frac{\beta dt}{\beta^2+t^2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{\beta}.$$

# ГЛАВА 3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА С ПАРАМЕТРОМ

Здесь рассмотрены интегралы вида $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ при $y\in E$, где $E$ – некоторое числовое множество, а точка $a$ или $b$ – особые. Далее, для определенности, множество $E=[c,d]$ и $b$ – особая точка. Область сходимости $I(y)$ определяются на основе признаков сходимости для несобственного интеграла 2-го рода без параметра, при этом параметр $y$ фиксируется.

Далее рассмотрим непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$. Здесь важна, как и прежде, равномерная сходимость интеграла.

## 3.1. Равномерная сходимость несобственного интеграла 2-го рода с параметром

**С**лучай $b$ особой точки (опр. 4) и $a$ особой (опр. 4.1).

**Определение 4.** $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ называется равномерно сходящимся для $(x,y)\in[a,b)\times[c,d]$ если

1) для всякого $y\in[c,d]$ существует $I(y)$;
2) для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, что для всех $0<\beta<\delta$,

$b-\beta>a$ и всех $y\in[c,d]$ имеем (А): $\left|I(y)-\int\limits_a^{b-\beta} f(x,y)dx\right|<\varepsilon$.

**Определение 4.1.** $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ называется равномерно сходящимся для $x\in(a,b]$ и $y\in[c,d]$, если

1) для всех $y\in[c,d]$ существует $I(y)$;
2) для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, что для всех $0<\lambda<\delta$ при

$0<\lambda<b-a$ и всех $y\in[c,d]$ верно (В): $\left|I(y)-\int\limits_{a+\lambda}^{b} f(x,y)dx\right|<\varepsilon$.

**Замечание 9.** Неравенство (А) эквивалентно $\left|R(\beta,y)\right|<\varepsilon$, где $R(\beta,y)=\int\limits_{b-\beta}^{b}f(x,y)dx$ – остаток несобственного интеграла $I(y)$.

При замене $t=\dfrac{1}{b-x}$ мы переходим от интеграла 2-го рода к несобственному интегралу 1-го рода. Тогда $I(y)=\int\limits_{a}^{b}f(x,y)dx=\int\limits_{c}^{\infty}f^*(t,y)dt$, где $f^*(t,y)=f\left(b-\dfrac{1}{t},y\right)\cdot\dfrac{1}{t^2}$, а $c=(b-a)^{-1}$ и вся теория несобственного интеграла 1-го рода от параметра может быть применена для исследования интеграла 2-го рода. Как и в несобственном интеграле 1-го рода от параметра здесь также имеется критерий Коши равномерной сходимости.

**Теорема 18 (критерий Коши).** Пусть $f(x,y)$ интегрируема по $x$ на любом отрезке $[a,\eta]\subset[a,b)$ в собственном смысле и всех $y\in[c,d]$. Тогда для равномерной сходимости интеграла $I(y)=\int\limits_{a}^{b}f(x,y)dx$ для всех $y\in[c,d]$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого числа $\varepsilon>0$ существовало $\delta(\varepsilon)>0$ с $b-\delta>a$, что для всех $\alpha,\beta\in(0,\delta)$ и всех $y\in[c,d]$ было выполнено неравенство $\left|\int\limits_{b-\alpha}^{b-\beta}f(x,y)dx\right|<\varepsilon$.

Критерий Коши чаще удобно использовать при доказательстве отсутствия равномерной сходимости. В этом случае существует $\varepsilon_0>0$, что для всех $\delta>0$ с $b-\delta>a$ существуют $\alpha_1,\beta_1\in(0,\delta)$ и $y\in[c,d]$ для которых

$$\left|\int\limits_{b-\alpha_1}^{b-\beta_1}f(x,y_1)dx\right|\geq\varepsilon_0.$$

**Пример 26.** Исследовать по определению на равномерную сходимость $I(y)=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{dx}{(1-x)^y}$ для всех $y\in(0,1)$.

<u>**Решение**</u>. Очевидно в этой области $I(y)$ существует. Используем определение равномерной сходимости. Пусть $\delta>0$, $1-\delta>0$ и $0<\beta<\delta$. Тогда $\left|I(y)-\int\limits_{0}^{1-\beta}\dfrac{dx}{(1-x)^y}\right|=\dfrac{\beta^{1-y}}{1-y}$ для $y\in(0,1)$. Поскольку $\lim\limits_{y\to1-0}\dfrac{\beta^{1-y}}{1-y}=+\infty$, то

какое бы $\delta$ ни подбирали, при $y \to 1-0$ имеем $\left| I(y) - \int\limits_0^{1-\beta} \frac{dx}{(1-x)^y} \right| > c > 0$ для любого $c > 0$ и не меньше $\varepsilon_0 = c/2$. Тогда для $y \in (0,1)$ нет равномерной сходимости.

**Пример 27**. Покажем отсутствие равномерной сходимости по критерию Коши для $I(y)$ примера 26. Имеем для $y \in (0,1)$ и $0 < \alpha, \beta < \delta$, $\delta > 0$, $1-\delta > 0$ равенство:

$$\left| \int\limits_{1-\alpha}^{1-\beta} \frac{dx}{(1-x)^y} \right| = \left| \frac{\alpha^{1-y} - \beta^{1-y}}{1-y} \right| \le \frac{\beta^{1-y} \left| \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{1-y} - 1 \right|}{1-y}.$$

Пусть $\frac{\alpha}{\beta} = a > 0$. Но $\lim\limits_{z \to 0} \frac{a^z - 1}{z} = \ln a$. Отсюда $\lim\limits_{y \to 1-0} \frac{a^{1-y} - 1}{1-y} = \ln a$ и $\lim\limits_{y \to 1-0} \beta^{1-y} = 1$. Тогда $\lim\limits_{y \to 1-0} \frac{\beta^{1-y} \left| \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{1-y} - 1 \right|}{1-y} = |\ln a|$ для любого числа $a > 0$ с $0 < \alpha, \beta < \delta$. При $a >> 1$ имеем $\left| \int\limits_{1-\alpha}^{1-\beta} \frac{dx}{(1-x)^y} \right| >> 1$ и будет больше любого $\varepsilon > 0$.Отсюда $I(y)$ сходится неравномерно для $y \in (0,1)$.

**Теорема 19**. Для равномерной сходимости сходящегося $I(y)$ на $[c,d]$ необходимо и достаточно: остаток $R(\beta, y) \rightrightarrows 0$ при $\beta \to +0$ равномерно по $y \in [c,d]$. Здесь $R(\beta, y) \rightrightarrows 0$ означает, что для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, при котором для всех $0 < \beta < \delta$ и всех $y \in [c,d]$ имеем $|R(\beta, y)| < \varepsilon$.

**Теорема 20**. Для равномерной сходимости сходящегося интеграла $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ на $[c,d]$ необходимо и достаточно, чтобы для функции $P(\beta) = \sup\limits_{y \in [c,d]} |R(\beta, y)|$ существовал $\lim\limits_{\beta \to +0} P(\beta) = 0$.

**Пример 28**. Исследуем $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^y}$ при $y \in E_2 = (0,1)$ на равномерную сходимость, используя теорему 20.

<u>**Решение.**</u> Имеем для остатка $R(\beta, y)$ равенство

$$\left|R(\beta,y)\right| = \left|\int\limits_{1-\beta}^{1} \frac{dx}{(1-x)^y}\right| = \left|\frac{\beta^{1-y}}{1-y}\right|, \quad y \in E_2 = (0;1).$$

Тогда $P(\beta) = \sup \left| \dfrac{\beta^{1-y}}{1-y} \right| = +\infty$ для всех $y \in (0;1)$ и $P(\beta)$ не стремится к $0$. Таким образом, здесь нет равномерной сходимости для $I(y)$.

**Следствие 4**. Если интеграл $I(y)$ сходится на $[c,d]$ и

$$P(\beta) = \sup_{y\in[c,d]} \left|R(\beta,y)\right| \le q(\beta)$$

и $\lim\limits_{\beta\to+0} q(\beta) = 0$, то $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходится на $[c,d]$.

**Пример 29**. Используя следствие 4, доказать равномерную сходимость $I(y) = \int\limits_0^1 \dfrac{\sin xy}{(1-x)^y} dx$ на $E = [\frac{1}{3}; \frac{3}{4}]$..

**Решение**. Здесь

$$\left|R(\beta,y)\right| = \left|\int\limits_{1-\beta}^{1} \frac{\sin xy}{(1-x)^y} dx\right| \le \int\limits_{1-\beta}^{1} \frac{|\sin xy|}{(1-x)^y} dx \le \int\limits_{1-\beta}^{1} \frac{dx}{(1-x)^y} = \frac{\beta^{1-y}}{1-y} \le \frac{\beta^{1/4}}{1-3/4}$$

для $y \in E$, а $P(\beta) = \sup\limits_{y\in E} \left|R(\beta,y)\right| \le 4\beta^{1/4}$. При $q(\beta) = 4\beta^{1/4}$ имеем $q(\beta) \to 0$ с $\beta \to +0$ и, тем самым, $I(y)$ равномерно сходится по следствию 4.

**Теорема 21 (признак Вейерштрасса)**. Пусть

1) $f(x,y)$ непрерывна на $[a;b)\times[c;d]$;

2) для всех $(x,y)\in[a,b)\times[c,d]$ имеем $\left|f(x,y)\right| \le p(x)$ для некоторой функции $p(x)$ определенной на $[a;b)$;

3) $\int\limits_a^b p(x)dx$ сходится (в собственном или несобственном смысле).

Тогда $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ абсолютно и равномерно сходится на $[c,d]$.

**Пример 30**. Исследовать по признаку Вейерштрасса равномерную сходимость $I(y) = \int\limits_0^1 \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x+1}(1-x)^y} dx$ на $[0; \frac{1}{2}]$.

**Решение**. Для функции $f(x,y)$ имеем оценку:

$$|f(x,y)|=\left|\frac{\sin xy}{\sqrt{x+1}(1-x)^y}\right|\le\frac{|\sin xy|}{\sqrt{x+1}(1-x)^y}\le\frac{1}{(1-x)^y}\le\frac{1}{(1-x)^{1/2}}$$

для $y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Нетрудно установить, что $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится. Тогда, вводя $p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, получаем, что $I(y)$ абсолютно и равномерно сходится для $y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ по теореме 21 (признак Вейерштрасса).

В случаях, когда $I(y)$ сходится условно, для исследования на равномерную сходимость применяются признаки Абеля и Дирихле.

**Теорема 22 (признак Дирихле)**. Пусть

1) функции $f(x,y)$, $g(x,y)$ непрерывны на $[a;b)\times[c;d]$;

2) функция $F(\beta,y)=\int\limits_a^\beta f(x,y)dx$ при $a\le\beta<b$ равномерно ограничена на $[a;b)\times[c;d]$;

3) для любого $y\in[c,d]$ функция $g(x,y)$ монотонна по $x$ на $[a;b)$ и $g(x,y)\rightrightarrows 0$ при $x\to b-0$ и $y\in[c,d]$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$.

**Замечание 10**. Равномерная сходимость $g(x,y)\rightrightarrows 0$ при $x\to b-0$ и $y\in[c,d]$ означает следующее**:** для всякого числа $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что при всех $0<b-x<\delta$ и всех $y\in[c,d]$ модуль $|g(x,y)|<\varepsilon$. В частности для установления равномерной сходимости $g(x,y)\rightrightarrows 0$ можно использовать теоремы, аналогичные теореме 20 и следствию 4. На практике возможны варианты. Так, например, если $g(x,y)=g_1(x)$, то есть зависит только от $x$, и в условии 3) $g_1(x)\to 0$ при $x\to b-0$. Монотонность $g(x,y)$ можно проверить, при условии существования $g'_x(x,y)$ по ее знаку. Так, если $g'_x(x,y)\le 0$ при $x\in[a,b)$ и $y\in[c,d]$, то функция $g(x,y)$ убывает по $x$, а при $g'_x(x,y)\ge 0$ возрастает по $x$. На практике так и следует осуществлять эту проверку.

**Пример 31**. Исследовать по признаку Дирихле равномерную сходимость $I(y)=\int\limits_0^1\frac{y\cos(xy)\sin\frac{y}{x}}{x}dx$ при $y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

**Решение.** Здесь особая точка $a=0$, а функция

$$P(x,y)=\frac{y\cos(xy)\left(\sin\dfrac{y}{x}\right)}{x}$$

знакопеременна. Введем $f(x,y)=\sin\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{x^2}$, $g(x,y)=x\cos(xy)$. Тогда

$$F(\alpha,y)=\int_\alpha^1\sin\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{x^2}\,dx=\int_\alpha^1\sin\frac{y}{x}\,d\left(-\frac{y}{x}\right)=\cos\frac{y}{x}\Bigg|_\alpha^1=\cos y-\cos\frac{y}{\alpha}$$

для всех $y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ и всех $0<\alpha<1$. Очевидно, $\left|F(\alpha,y)\right|=\left|\cos y-\cos\frac{y}{\alpha}\right|\le 2$. Тем самым $F(\alpha,y)$ равномерно ограничена для всех $y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ и $0<\alpha<1$ и условие 2 признака Дирихле здесь выполнены. Условие 1) признака Дирихле здесь тоже выполнено, поскольку $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны на $(0,1)\times\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Проверим выполнение условия 3) признака Дирихле для функции $g(x,y)=x\cos(xy)$. Поскольку $|g(x,y)|=|x\cos(xy)|\le|x|\cdot|\cos(xy)|\le|x|$, то при $x\to+0$ будет $g(x,y)\rightrightarrows 0$ по $y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, согласно определению 1 (равномерной сходимости функции), что нетрудно проверить, ибо $g(x,y)$ имеет мажоранту $|x|$: $|g(x,y)|\le|x|$. Покажем монотонность функции $g(x,y)$ по $x$. Поскольку $g'_x(x,y)=\left(x\cos(xy)\right)'_x=\cos(xy)-xy\sin(xy)$, то достаточно установить знак производной для монотонности $g(x,y)$. Рассмотрим функцию $p(z)=\cos z-z\sin z$, где аргумент $z\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Представим ее в виде: $p(z)=(\cos z)(1-z\,\mathrm{tg}z)$. Так как $0\le z\le\frac{1}{2}<\frac{\pi}{4}$, то $0\le\mathrm{tg}z<1$. Тогда $z\,\mathrm{tg}z<\frac{1}{2}$ и $1-z\,\mathrm{tg}z>0$. Но $\cos z>0$ для $z\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Отсюда $p(z)>0$ на $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Для $z=xy$ при $x\in(0,1)$ и $y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ имеем $xy\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Тогда и $g(x,y)$ возрастает по $x$ так как $p(xy)=\cos(xy)-xy\sin(xy)=g'_x(x,y)>0$, и по признаку Дирихле $I(y)$ равномерно сходится на $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

**Теорема 23 (признак Абеля)**. Пусть

1) функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны на $[a;b)\times[c;d]$;

2) $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходится на $[c;d]$;

3) $g(x,y)$ ограничена на $[a;b)\times[c;d]$ и при всех $y\in[c,d]$ монотонна по $x$ на $[a;b)$.

Тогда $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c;d]$.

**Замечание 11**. Так, если $f(x,y)=f_1(x)$ и $\int\limits_a^b f_1(x)dx$ сходится, то выполнено условие 2). Если же $g(x,y)=g_1(x)$ и $g_1(x)$ монотонна по $x$ и ограничена, то выполнено условие 3). При дифференцируемости $g(x,y)$ монотонность $g(x,y)$ можно проверить по знаку производной. Так при $g'_x(x,y)\le 0$ функция $g(x,y)$ убывает, а при $g'_x(x,y)\ge 0$ возрастает по $x$ при любом $y\in[c,d]$.

**Пример 32.** Исследовать $I(y)=\int\limits_0^1 \dfrac{y\cos xy\cos\frac{y}{x}}{\sqrt{x}}dx$ на равномерную сходимость для $y\in[0,1]$.

<u>**Решение**</u>**.** Здесь особая точка $a=0$, а подинтегральная функция $\phi(x,y)=\dfrac{y\cos xy\cdot\cos\frac{y}{x}}{\sqrt{x}}$. Введем $f(x,y)=\dfrac{\cos\frac{y}{x}}{\sqrt{x}}$ и $g(x,y)=y\cos(xy)$. Так как $|f(x,y)|=\left|\dfrac{\cos\frac{y}{x}}{\sqrt{x}}\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, а $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса (теорема 21) получаем равномерную сходимость $\int\limits_0^1\dfrac{\cos\frac{y}{x}}{\sqrt{x}}dx$ по $y\in[0,1]$.

Очевидно, $|g(x,y)|=|y\cos xy|=|y||\cos xy|\le|y|\le 1$ при $y\in[0,1]$ и $g(x,y)$ убывает по $x$, поскольку $g'_x(x,y)=-y^2\sin xy<0$ на $(0;1]\times[0;1]$. Кроме того, $\phi(x,y)$ непрерывна на $(0;1]\times[0;1]$ и условия с 1) по 3) в теореме 23 выполнены. Тогда $I(y)$ равномерно сходится на $[0;1]$.

### 3.2. Непрерывность несобственного интеграла 2-го рода с параметром

**Теорема 24 (**непрерывность $I(y)$). Пусть

1) $f(x,y)$ определена и непрерывна на $[a;b)\times[c;d]$;

2) $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходится.

Тогда $I(y)$ непрерывен на $[c;d]$.

**Пример 33**. Показать непрерывность $\int\limits_0^4 \frac{\sin xy}{\sqrt{4-x}}dx$ для $y\in(-\infty,\infty)$.

**<u>Решение</u>.** Для любого отрезка $[c;d]$ функция $f(x,y)=\frac{\sin xy}{\sqrt{4-x}}$ непрерывна на $[0;4)\times[c;d]$. Исследуем $I(y)=\int\limits_0^4 \frac{\sin xy}{\sqrt{4-x}}dx$ на равномерную сходимость. Применим здесь признак Вейерштрасса. Очевидно

$$\left|f(x,y)\right|=\left|\frac{\sin xy}{\sqrt{4-x}}\right|\le\frac{\left|\sin xy\right|}{\sqrt{4-x}}\le\frac{1}{\sqrt{4-x}}.$$

Но $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ сходится. Тогда по теорема 21 $I(y)$ сходится абсолютно и равномерно на $[c;d]$ и по теореме 24 (о непрерывности) получаем непрерывность $I(y)$ на $[c;d]$, а значит в любой точке $y_0\in(-\infty,\infty)$. Отсюда $I(y)$ будет непрерывен на $(-\infty,\infty)$.

**Пример 34**. Исследовать $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{y}{x}}{(1-x)^y}dx$ на непрерывность при $y\in(0,1)$.

**<u>Решение</u>.** Здесь $I(y)=\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{y}{x}}{(1-x)^y}dx$ абсолютно сходится по мажорантному признаку для несобственного интеграла 2-го рода, ибо для $f(x,y)=\frac{\sin\frac{y}{x}}{(1-x)^y}$ будет $\left|f(x,y)\right|=\frac{\left|\sin\frac{y}{x}\right|}{(1-x)^y}\le\frac{1}{(1-x)^y}$. Но $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^y}$ сходится для всех $y\in(0,1)$. Рассмотрим любой отрезок $[c,d]\subset(0,1)$. Отсюда $0<c<d<1$ и для $(x,y)\in[0;1)\times[c;d]$ получаем

$$\left|f(x,y)\right| \le \frac{1}{(1-x)^y} \le \frac{1}{(1-x)^d}$$

Так как $d<1$, то $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^d}$ сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса (теорема 21) с учетом мажоранты $p(x)=\frac{1}{(1-x)^d}$ получаем равномерную сходимость $I(y)$ на $[c;d]$ и по теореме 24 (о непрерывности) $I(y)$ будет непрерывен на $[c,d]\subset(0,1)$. Поскольку $[c;d]$ любой, то получаем непрерывность $I(y)$ в любой внутренней точке $y\in(0;1)$ или непрерывность на $(0,1)$.

**Пример 35.** Исследовать $I(y)=\int\limits_0^1 \frac{y\cos xy \sin\frac{y}{x}}{x}dx$ при $y\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ на непрерывность.

__Решение__. Здесь функция

$$f(x,y)=\frac{y\cos xy\cdot\sin\frac{y}{x}}{x}$$

для $x\in(0,1]$ и $y\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Точка $a=0$ особая, но $f(x,y)$ непрерывна на $(0;1]\times\left[0;\frac{1}{2}\right]$ и $I(y)$ равномерно сходится по **признаку Дирихле** (см. пример 31). Тогда по теореме 24 (о непрерывности) получаем непрерывность $I(y)$ на $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

**Пример 36**. Исследовать $I(y)=\int\limits_0^1 \frac{y\cos xy\cos\frac{y}{x}}{\sqrt{x}}dx$ при $y\in[0;1]$ на непрерывность.

__Решение.__ На основе примера 32 получаем равномерную сходимость интеграла $I(y)$ по признаку Абеля. Но функция

$$f(x,y)=\frac{y\cos xy\cdot\cos\frac{y}{x}}{\sqrt{x}}$$

непрерывна на $(0;1]\times[0;1]$, где $a=0$ – особая точка. Тогда по теореме 24 (о непрерывности) $I(y)$ непрерывен на $[0;1]$.

### 3.3. Дифференцируемость несобственного интеграла 2-го рода с параметром

**Теорема 25 (правило Лейбница)**. Пусть

1) $f(x,y)$ определена и непрерывна в $[a;b)\times[c;d]$;

2) производная $f'_y(x,y)$ непрерывна в $[a;b)\times[c;d]$;

3) $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходится на $[c;d]$;

4) $\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c;d]$.

Тогда существует непрерывная $I'(y)=\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$.

**Пример 37**. Вычислить $I(\alpha)=\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.

**<u>Решение</u>.** Здесь $f(x,\alpha)=\frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x\sqrt{1-x^2}}$ и производная

$$f'_\alpha(x,\alpha)=\frac{1}{\left(1+\alpha^2x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$$

непрерывны на $[0;1)\times\left(-\infty,\infty\right)$. Поскольку

$$\left|f'_\alpha(x,\alpha)\right|=\left|\frac{1}{\left(1+\alpha^2x^2\right)\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

и $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса (теорема 21) получаем равномерную сходимость $\int\limits_0^1 f'_\alpha(x,\alpha)dx$ на $\left(-\infty,\infty\right)$ и

$$I'\left(\alpha\right)=\int\limits_0^1 f'_\alpha(x,\alpha)dx=\int\limits_0^1\frac{dx}{\left(1+\alpha^2x^2\right)\sqrt{1-x^2}}.$$

по теореме 25 (правило Лейбница). Сделаем в последнем интеграле замену $x=\sin t$. Тогда $\int\limits_0^1\frac{dx}{\left(1+\alpha^2x^2\right)\sqrt{1-x^2}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\alpha^2\sin^2 t}$. Осуществляя замену $u=\operatorname{ctg}t$, получаем в интеграле, после несложных преобразований, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\alpha^2 \sin^2 t} = \int_0^{\infty} \frac{du}{1+\alpha^2 + u^2},$$

ибо $du = -\dfrac{dt}{\sin^2 t}$ и $0 \leftrightarrow \infty$, а $\dfrac{\pi}{2} \leftrightarrow 0$. Но

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{1+\alpha^2+u^2} = \int_0^{\infty} \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2a},$$

где $a^2 = \left(\sqrt{1+\alpha^2}\right)^2$. Отсюда $I'(\alpha) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$ и $I(\alpha) = \displaystyle\int \frac{\pi d\alpha}{2\sqrt{1+\alpha^2}} + c$.

Вычисляя $I(\alpha)$, получаем, что $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{2} \ln\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right) + c$. Но $I(0) = 0$. Тогда $0 = \ln 1 + c$. Отсюда $c = 0$. Окончательно,

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \ln\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right).$$

## 3.4. Интегрируемость несобственного интеграла 2-го рода с параметром

**Теорема 25 (об интегрируемости)**. Пусть

1) $f(x,y)$ определена и непрерывна в $[a;b) \times [c;d]$;

2) существует $I(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ и равномерно сходится.

Тогда существует $\displaystyle\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$.

**Пример 38**. Вычислить $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

<u>**Решение.**</u> При замене $u = xt$ имеем $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+x^2t^2}$ для всех $x > 0$ и $I = \displaystyle\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{dt}{\left(1+x^2t^2\right)\sqrt{1-x^2}} \right) dx$. Покажем, что $f(x,t) = \dfrac{1}{\left(1+x^2t^2\right)\sqrt{1-x^2}}$ удовлетворяет условиям теоремы 25 и можно менять порядок интегрирования, которое имеет вид:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg} x dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x,t)dt \right) dx = \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x,t)dx \right) dt .$$

Здесь $f(x,t)$ непрерывна на $[0;1)\times[0;1]$. Интеграл

$$J(t) = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2t^2\right)\sqrt{1-x^2}}$$

для $t\in[0,1]$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, ибо имеется оценка $\left|\frac{1}{\left(1+x^2t^2\right)\sqrt{1-x^2}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ для $x\in[0,1)$, $t\in[0,1]$ и $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится. При $x=\sin z$ в $J(t)$, имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2t^2\right)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{1+t^2\sin^2 z},$$

а при $u=\mathrm{ctg} z$, получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{1+t^2\sin^2 z} = \int_0^{\infty} \frac{du}{1+t^2+u^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}.$$

Таким образом $J(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}$. С учетом равенств

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{arctg} x dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+t^2x^2\right)\sqrt{1-x^2}} \right) dt = \int_0^1 \frac{\pi dt}{2\sqrt{1+t^2}}$$

и значения интеграла

$$\int_0^1 \frac{\pi dt}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{\pi}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

получаем, что $I = \frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Таким образом, применяя интегрирование по параметру можно вычислять несобственные интегралы без параметра.

# ГЛАВА 4. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

## 4.1. Бета-функция

Интеграл $B(a,b)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ называется **бета-функцией**. Область сходимости здесь $a,b>0$, где $B(a,b)$ непрерывна.

**Свойства бета-функции:**

A1) Симметрия: $B(a,b)=B(b,a)$

A2) Понижение:

а) $B(a,b)=\dfrac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$, для $a>0,\ b>1$;

б) $B(a+1,b)=\dfrac{a+1}{a+b}B(a,b),\quad B(a,b+1)=\dfrac{b+1}{a+b}B(a,b)$;

A3) $B(a,n)=\dfrac{(n-1)!}{(a+n-1)...(n+1)a}$ и $B(m,n)=\dfrac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$;

A4) $B(a,1-a)=\dfrac{\pi}{\sin\pi a}$ для $0<a<1$ и $B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\pi,\ B(a,1)=\dfrac{1}{a}$;

A5) $B(a,b)=\int\limits_0^\infty \dfrac{y^{a-1}dy}{(1+y)^{a+b}},\ \ a,b>0$ и $B(a,1-a)=\int\limits_0^\infty \dfrac{y^{a-1}}{1+y}dy=\dfrac{\pi}{\sin\pi a}$;

**Пример 39**. Вычислить $I(m,n)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x dx$.

<u>**Решение**</u>. При $t=\sin^2 x$ для $m>-1, n>-1$ получаем

$$I(m,n)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right).$$

В частности $I(4,2)=\dfrac{1}{2}B\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\pi}{32}$, который вычисляется на основе следующего примера 40.

**Пример 40**. Вычислить $\int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$.

<u>**Решение.**</u> Здесь интеграл $\int\limits_0^1 x^{\frac{5}{2}-1}(1-x)^{\frac{3}{2}-1}dx=B\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$. Тогда на основе

свойства А2) получаем

$$B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{5}{2}-1}{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}-1}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-1}\cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{8}\frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{16}.$$

**Пример 41**. Вычислить $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^p x dx$.

**Решение.** При $\operatorname{tg}x=\sqrt{t}$ имеем

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{\frac{p-1}{2}}}{1+t}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2},1-\frac{p+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{p+1}{2}\pi}=\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi p}{2}},$$

где $p+1>0$ и $1-\dfrac{p+1}{2}>0$. Отсюда область сходимости $|\,p\,|<1$.

**Пример 42**. Вычислить через бета-функцию $I=\int\limits_0^{\infty}\dfrac{x^m dx}{\left(a+bx^n\right)^p}$, где $a,b>0$ и $m,n>0$.

**Решение.** Положим $x=\left(\dfrac{a}{b}t\right)^{\frac{1}{n}}$.Тогда

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{x^m dx}{\left(a+bx^n\right)^p}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}}{na^p}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+t)^p}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\frac{1}{na^p}B\left(\frac{m+1}{n},p-\frac{m+1}{n}\right)$$

С учетом положительности аргументов для $B(a,b)$ интеграл сходится при значениях $p,m,n$ удовлетворяющих $0<p-\dfrac{m+1}{n}$ или $0<\dfrac{m+1}{n}<p$.

### 4.2. Гамма-функция

Интеграл $\Gamma(a)=\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ называется **гамма-функцией.** Ее область сходимости, непрерывности и бесконечной дифференцируемости $a>0$ и производная $\Gamma^{(k)}(a)=\int\limits_0^\infty x^{a-1}(\ln x)^k e^{-x}dx$.

**Свойства гамма-функции:**

В1) $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$, $a>0$;

В2) $\Gamma(a+n)=(a+n-1)(a+n-2)...(n+1)a\Gamma(a)$;

а) $\Gamma(n+1)=n!$, б) $\Gamma(1)=1$;

В3) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$; $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$;

В4) $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin \pi a}$ – формула дополнения, где $0<a<1$.

В5) Связь бета и гамма функций**:** $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

В6) Формула Лежандра**:** $\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}$ при $a>0$.

**Пример 43**. Вычислить, применяя эйлеровы интегралы, интеграл Эйлера-Пуассона $I=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$ из теории вероятностей.

**Решение.** Заменим $x^2=t$. $t>0$. Тогда $x=\sqrt{t}$, а $dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ и $0\leftrightarrow 0$, $\infty\leftrightarrow\infty$. Отсюда $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Но $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ найдём используя формулу дополнения:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

Откуда $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\pi$ или $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Следовательно, $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

**Замечание 12.** $\Gamma(a)$ как интеграл 1-го рода заменой $t=\ln\frac{1}{x}$ в равенстве $\Gamma(a)=\int\limits_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$ преобразуется в $\Gamma(a)=\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{a-1}dx$

**Пример 44.** Вычислить $I=\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}$.

**<u>Решение</u>.** Заменим $x=2t$ при $dx=2dt$. Тогда получаем

$$I=\int\limits_0^2 x^{-\frac{2}{3}}(2-x)^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=\int\limits_0^1 2^{-\frac{2}{3}}t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{1}{3}}2^{-\frac{1}{3}}2dt=\int\limits_0^1 t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{1}{3}}dt=\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{3}-1}(1-t)^{\frac{2}{3}-1}dt=B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right).$$

Но $B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=B\left(\frac{1}{3},1-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $I=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

**Пример 45**. Вычислить $I=\int\limits_{-1}^2\frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)^3}}$.

<u>**Решени**е</u>. Имеем

$$I=\int\limits_{-1}^2(2-x)^{-\frac{1}{4}}(1+x)^{-\frac{3}{4}}dx=\int\limits_0^1 3^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}(3t)^{-\frac{3}{4}}3dt=$$

$$=\int\limits_0^1(1-t)^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{3}{4}}dt=B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=B\left(\frac{3}{4},1-\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi 3}{4}}=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}.$$

Здесь сделана замена $x=at+b$, чтобы $-1\leftrightarrow 0$, а $2\leftrightarrow 1$.Нетрудно, показать, что $b=-1, a=3$ и $x=3t-1$, а $dx=3dt$ и $2-x=3(1-t)$, $1+x=3t$.

Используя производные, можно находить различные интегралы.

**Пример 46**. Вычислить. $I(p)=\int\limits_0^\infty\frac{x^{p-1}\ln x dx}{1+x}$.

**<u>Решение</u>.** Очевидно, $I(p)$ является **производной от бета-функции**

$$I(p)=\frac{d}{dp}\int\limits_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{d}{dp}B(p,1-p)=\frac{d}{dp}\left(\frac{\pi}{\sin\pi p}\right)=-\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi},\ 0<p<1.$$

**Пример 47**. Вычислить $I=\int\limits_0^\infty \frac{x\ln x}{1+x^3}dx$.

**<u>Решение</u>.** Полагая $x^3=t$, получаем, что

$$I=\frac{1}{9}\int\limits_0^\infty \frac{t^{\frac{2}{3}-1}}{1+t}\ln t dt=-\frac{1}{9}\frac{\pi^2\cos\frac{2\pi}{3}}{\sin^2\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\pi^2}{27}$$

с использованием предыдущего примера, где $p=\frac{2}{3}$.

**Пример 48**. Вычислить $I=\int\limits_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^4}dx$.

**<u>Решение</u>**. Заменим $x^4=t$. Полученный интеграл $I=\frac{1}{64}\int\limits_0^\infty \frac{t^{-\frac{3}{4}}\ln^2 t}{1+t}dt$ является второй производной от бета-функции:

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}\ln^2 t}{1+t}dt=\frac{d^2}{dp^2}\left(\int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}dt\right)=\frac{d^2}{dp^2}B(p,1-p)=\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{\pi}{\sin\pi p}\right)$$

при $p=\frac{1}{4}$. Тогда имеем

$$I=\frac{1}{64}\frac{d^2}{dp^2}B(p,1-p)\Bigg|_{p=\frac{1}{4}}=\frac{1}{64}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{\pi}{\sin\pi p}\right)\Bigg|_{p=\frac{1}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{64}\pi^2$$

**Пример 49**. Вычислить $I(p)=\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)\ln x}$.

**<u>Решение</u>.** Нетрудно видеть, что $I(p)=\int B(p,1-p)dp+c$, где

$$B(p,1-p)=\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin\pi p}.$$

Отсюда $I(p)=\int\frac{\pi}{\sin\pi p}dp+c$. Осуществляя замену $t=\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}$, получаем

$$\int\frac{\pi}{\sin\pi p}dp=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}\right|+c$$

и $I(p)=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}\right|+c$, где $0<p<1$. Полагая, $p=\frac{1}{2}$ имеем $I\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 1+c$ или $c=I\left(\frac{1}{2}\right)$. Отсюда $I(p)=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}\right|+I\left(\frac{1}{2}\right)$.

**Пример 50**. Вычислить $I=\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ при $a>0$.

**__Решение__.** При замене $x=a\sqrt{t}$, $t\geq 0$ имеем

$$I=\frac{a^4}{2}\int\limits_0^1(1-t)^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{a^4}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{a^4}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)}=$$

$$=\frac{a^4}{2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\cdot a^4}{2!\cdot 2}.$$

Но $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1!!}{2^1}\sqrt{\pi}$. Отсюда $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^4}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2=\frac{\pi a^4}{16}$.

**Пример 51**. Вычислить $I=\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$.

**__Решение__.** Интеграл $I=\int\limits_0^\infty\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}dx$ выражается через бета-функцию $B\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)=\int\limits_0^\infty\frac{x^{\frac{5}{4}-1}dx}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}}$. Тогда получаем:

$$B\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)}{1!}=\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Здесь использована связь бета и гамма–функций, а также $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$ и $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin \pi p}$ при $p=\dfrac{1}{4}$. Итак, $I=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

**Пример 52**. Найти площадь области ограниченной кривой

$$\left(x^2+y^2\right)^6=x^4y^2.$$

**<u>Решение</u>**. Так как $x, y$ входят в уравнение в четной степени, то кривая симметрична относительно координатных осей и достаточно найти ее площадь в 1-ом квадранте: $x\geq 0$, $y\geq 0$. Введем замену: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тогда уравнение в полярных координатах будет: $\rho^{12}=\rho^6\cos^4\varphi\sin^2\varphi$ или $\rho^6=\cos^4\varphi\sin^2\varphi$, где $0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2}$. Как известно, площадь $S=\dfrac{1}{2}\cdot\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi$.

Так как $\rho^2=\cos^{\frac{4}{3}}\varphi\sin^{\frac{2}{3}}\varphi$, то

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{4}{3}}\varphi\sin^{\frac{2}{3}}\varphi d\varphi=\frac{1}{2}B\left(\frac{\frac{4}{3}+1}{2},\frac{\frac{2}{3}+1}{2}\right)=\frac{1}{2}B\left(\frac{7}{6},\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma(2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{12}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{12}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}.$$

Здесь использован для вычисления $S$ пример 39 при $m=\dfrac{4}{3}$ и $n=\dfrac{2}{3}$.

Используя симметрию кривой относительно координатных осей, получаем, что общая площадь в примере 52 будет равна $4S=4\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}$.

Пример 52 показывает возможность применения эйлеровых интегралов при вычислении площадей плоских фигур.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Исследовать на непрерывность функцию $F(y)=\int\limits_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$, где функция $f(x)$ непрерывна и положительна на $[0;1]$.
2. Найти $F'(x)$, если

$$1)\ F(x)=\int\limits_x^{x^2} e^{-xy^2}dy;\qquad 2)\ F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx.$$

Ответ:

$$1)\ F'(x)=-\int\limits_x^{x^2} y^2e^{-xy^2}dy+2xe^{-x^5}-e^{-x^3};$$

$$2)\ F(\alpha)=2\frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}.$$

3. Вычислить $J(a)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx$, применяя дифференцирование по параметру $a$.

Ответ: $J(a)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(a)\ln(1+|a|),\ \ a\in\mathrm{R}.$

4. Вычислить

$$J(a,b)=\int\limits_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx,\ a,b>0,$$

применяя дифференцирование по параметру.

Ответ: $\pi\ln\frac{a+b}{2}$.

5. Вычислить при $a,b>0$

$$J_1=\int\limits_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx,\qquad J_2=\int\limits_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx,$$

используя $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int\limits_a^b x^y dy$.

Ответ: $J_1=\ln\frac{b+1}{a+1},\ \ J_2=\operatorname{arctg}(1+b)-\operatorname{arctg}(1+a)$.

6. Вычислить $J=\int\limits_0^1 \cos(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$, $a,b>0$.

Ответ: $J=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$.

7. Доказать, что интеграл $J(a)$ сходится равномерно на множестве $E$:

1) $J(a)=\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x-a)^2+1}$, $\quad E=[0,+\infty)$;

2) $J(a)=\int\limits_0^\infty \frac{adx}{1+x^4a^2}$, $\quad E=(-\infty,+\infty)$;

3) $J(a)=\int\limits_2^\infty \frac{\cos(ax)\ln x}{\sqrt{x}}dx$, $\quad E=[a_0,+\infty)$, $a_0>0$;

4) $J(a)=\int\limits_1^\infty e^{-ax}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$, $\quad E=[0,+\infty)$.

8. Доказать, что интеграл $J(a)$ сходится равномерно на множестве $E_1$ и сходится неравномерно на множестве $E_2$:

1) $J(a)=\int\limits_0^\infty e^{-(x-a)^2}dx$, $\quad E_1=[0;1]$, $E_2=[0,+\infty)$;

2) $J(a)=\int\limits_1^\infty \frac{\ln^a x}{x}\sin x dx$, $\quad E_1=[0;1]$, $E_2=[1,+\infty)$.

9. Доказать, что функция $F(a)$ непрерывна на множестве $E$:

1) $F(a)=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{|\sin x|^a}dx$, $\quad E=(0;1)$;

2) $F(a)=\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi-x)^a}dx$, $\quad E=(0;2)$.

10. Вычислить, используя дифференцирование интегралов по параметру:

1) $\int\limits_0^\infty \left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx$; $\qquad$ 2) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx dx$;

3) $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$; $\qquad$ 4) $\int\limits_0^\infty e^{-k^2x^2}\cos(\alpha x)dx$.

Ответ: 1) $\ln\dfrac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2(\alpha+\beta)}}$, $\alpha>0$, $\beta>0$;

2) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$, $\alpha>0$, $\beta>0$;

3) $\dfrac{\pi}{2}(\mathrm{sign}a)(1+|a|-\sqrt{1+a^2})$;

4) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2|k|}e^{-\frac{\alpha^2}{2k^2}}$, $k\neq 0$.

11. С помощью эйлеровых интегралов вычислить интеграл:

1) $J=\int\limits_0^1(\ln x)^n\,dx$, 2) $J=\int\limits_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx$, где $n-$ целое положительное число;

3) $J=\int\limits_0^1\dfrac{x^4}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}dx$; 4) $J=\int\limits_0^\infty x^pe^{-ax}\ln x dx$, $a>0$, $p>-1$.

Ответ: 1) $(-1)^n n!$; 2) $\dfrac{1}{2}n!$; 3) $\dfrac{4}{27}\pi\sqrt{3}$; 4) $\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right)$.

12. Доказать равномерную сходимость интегралов при $\alpha\in E$.

1. $\int\limits_2^\infty\dfrac{dx}{x\ln^\alpha x}$; $E=[2;\infty)$;

2. $\int\limits_0^{0.5}\dfrac{dx}{x|\ln x|^\alpha}$; $E=[3;\infty)$;

3. $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx$; $E=[1;\infty)$;

4. $\int\limits_0^\infty\dfrac{\ln(1+x)\mathrm{arctg}\alpha x}{x^2}dx$; $E=[-1;1]$

5. $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\cos x dx$; $E=[1;\infty)$;

6. $\int\limits_3^\infty\dfrac{(\ln^2 x)\sin x}{(x-2)^\alpha}$; $E=[a;\infty), a>1$;

7. $\int\limits_2^\infty\dfrac{\ln^2 x}{x^2+\alpha^2}dx$; $E=(-\infty;\infty)$;

8. $\int\limits_0^\infty\dfrac{xdx}{1+(x-\alpha)^6}$; $E=(-\infty;1)$;

9. $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}\ln^8 x dx; E=[a;\infty),\ a>0$; 10. $\int\limits_2^\infty x^\alpha e^{-x}dx; E=[2;4]$;

11. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos\alpha x}{4+x^2}dx;\ \ E=(-\infty;\infty)$; 12. $\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}\alpha x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx;\ \ E=[0;2]$;

13. $\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha}{(x-1)^{\frac{2}{3}}(2-x)}dx; E=(0;\frac{1}{2})$; 14. $\int\limits_2^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx; E=[a;\infty),\ a>0$;

15. $\int\limits_2^\infty \frac{\cos x}{x^{\frac{1}{3}}}e^{-\alpha x}dx; E=[0;\infty)$; 16. $\int\limits_1^\infty \frac{\cos\alpha x\ln x}{\sqrt{x}}dx;\ E=[1;\infty)$;

17. $\int\limits_1^\infty \frac{x^2-\alpha^2}{(x^2+\alpha^2)^2}dx;\ E=(-\infty;\infty)$; 18. $\int\limits_2^\infty \frac{x\sin\alpha x}{(x+1)\ln^2 x}dx; E=[1;\infty)$;

19. $\int\limits_0^\infty \cos x^\alpha dx;\ \ E=[2;\infty)$; 20. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx;\ \ E=[0;\infty)$;

13. Исследовать на непрерывность интеграл от параметра при $\alpha\in E$.

1. $\int\limits_0^\infty e^{-(x-\alpha)^2}dx, E=(-\infty;\infty)$; 2. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx, E=(-\infty,\infty)$;

3. $\int\limits_0^\infty \sin(\alpha x^2)dx, E=[1;\infty)$; 4. $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{\alpha}{x}}{x^\alpha}dx, E=(0;1]$;

5. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}dx, E=[0;1]$; 6. $\int\limits_1^\infty \sin\left(\frac{\alpha}{x^2}\right)\sqrt{\ln x}dx, E=(-\infty;\infty)$;

7. $\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{2+x^\alpha}, E=(2;\infty)$; 8. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx, E=[0;\infty)$;

9. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{(x-\alpha)^2+4}dx, E=(-\infty,\infty);$ 10. $\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{10-4x+x^\alpha}, E=(2;\infty);$

11. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\sqrt{1+x^3}}dx, E=(-\infty,\infty);$ 12. $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{1+x^\alpha}dx, E=(0;\infty);$

13. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{4+(x+\alpha)^2}dx, E=(-\infty,\infty);$ 14. $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{\sin^\alpha x}, E=[0;1);$

15. $\int\limits_0^\infty \alpha e^{-x\alpha^2}dx, E=(-\infty;\infty);$ 16. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}dx, E=(0;2);.$

17. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{8+x}}e^{-\alpha x}dx, E=[0;\infty);$ 18. $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x^2 dx, E=[0;\infty);$

19. $\int\limits_0^1 \ln^\alpha(1+x^2)dx, E=\left(-\frac{1}{2};1\right];$ 20. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}dx, E=(0;1];$

14. Найти производную несобственного интеграла от параметра $\alpha$:

1. $\int\limits_1^\infty \frac{\sin\alpha x}{x^2}dx, \quad \alpha>0;$ 2. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+(x+\alpha)^2}dx, \quad |\alpha|<\infty;$

3. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos\alpha x dx, \quad |\alpha|<\infty;$ 4. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx, \quad \alpha>0;$

5. $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{(1+x^2)^2}dx, \quad |\alpha|<\infty;$ 6. $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx, \quad \alpha>0;$

7. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{1+x^2}dx, \quad |\alpha|<\infty;$ 8. $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}dx, \quad \alpha>0;$

9. $\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-x} dx, |\alpha| < \infty$;

10. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x} e^{-x} dx, \quad |\alpha| < \infty$;

11. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}} dx, \quad |\alpha| < \infty$;

12. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{x^2(1+x^2)} dx, \quad \alpha > 0$;

13. $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx, \quad |\alpha| < \infty$;

14. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx, \quad |\alpha| \le 1$;

15. $\int\limits_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{\alpha}{x^2}\right)} dx, \quad \alpha > 0$;

16. $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{(1+x^2)^3} dx, \quad |\alpha| < \infty$;

17. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \alpha > 0$;

18. $\int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3 dx, \quad |\alpha| < \infty$;

19. $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos x dx, \quad \alpha > 0$;

20. $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \alpha \ge 0$;

15. Используя интегралы Эйлера, вычислить интегралы:

1. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}$;

2. $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)^3}}$;

3. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3((2-x)^2}}$;

4. $\int\limits_1^2 \sqrt[3]{(2-x)^2(x-1)} dx$;

5. $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{dx}{(x+2)^2}$;

6. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2-x^3}}$;

7. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{(x+1)^3} dx$;

8. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(x+1)^3} dx$;

9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{e^{2x}+1}dx$;

10. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\beta}}dx,\ 0<\alpha<\beta$;

11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x+1}dx$;

12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+1)}dx$;

13. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx$;

14. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}\ln x}{1+x}dx,\ 0<a<1$;

15. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}dx$;

16. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}(x+2)}dx$;

17. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos^6 x dx$;

18. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin^p x}{1+\cos x}dx,\ p>1$;

19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^{2\alpha-1} x dx, 0<\alpha<1$;

20. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}^{\alpha} x dx}{(\sin x+\cos x)^2}, 0<\alpha<1$

16. Выразить через интегралы Эйлера:

1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^{\alpha}}}$;

2. $\int\limits_{0}^{1} x^{\alpha}(1-x^{\beta})dx$;

3. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\beta}}dx$;

4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{2\alpha}}{\sqrt[3]{1-x^3}}dx$;

5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2\beta}}{1+x^{2\alpha}}dx$;

6. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{(1+x)^{\beta}}dx$;

7. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha}dx}{(4+2x^{\beta})^3}$;

8. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\alpha}}}$;

9. $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x^2)^{\beta-1}dx$;

10. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x^{\alpha})^{\beta}}$ ;

11. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\alpha}}dx$;

12. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2\alpha}}}$;

13. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x^2}dx$;

14. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x^3}dx$;

15. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1} x dx$;

16. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\alpha-1} x dx$;

17. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\alpha} x dx$;

18. $\int\limits_0^{\infty} x^3 e^{x^{\alpha}} dx$;

19. $\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha} dx$;

20. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x}dx$;

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 2 т. – М.: Высшая школа, 1981. − Т.1. – 584 с.

2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 2 т. – М.: Высшая школа, 1981. − Т.2. – 687 с.

3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Начальный курс. − М.: Изд-во МГУ, 1985. – 662 с.

4. Ильин В.А., Садовничий В.А, Сендов Б.Х.. Математический анализ. Продолжение курса. − М.: Изд-во МГУ, 1987. – 358 с.

# Методические указания к решению задач на интегралы с параметром

Составители**:**
Александр Львович **Калашников**
Геннадий Владимирович **Потёмин**
Викторий Николаевич **Филиппов**

*Учебно-методическое пособие*