МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Методические указания к решению задач по интерполяции функций

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2016

УДК 519.6.
ББК 22.19
М-54

М-54 Методические указания к решению задач по интерполяции функций. Составители: Калашников А.Л., Потёмин Г.В., Федоткин А.М., Фокина В.Н. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 35 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **Панасенко А.Г.**

В пособии приведены методические указания для решения задач по теме “Приближение функций”, относящейся к разделу курса «Численные методы». На примерах продемонстрированы различные приёмы аппроксимации на основе интерполяции, сплайнов, метода наименьших квадратов. Приведены также тексты программ в математическом пакете scilab для численной реализации этих методов и построения графиков.

Работа будет полезна при проведении практических занятий по численным методам и для самостоятельной работы студентов ИИТММ ННГУ.

УДК 519.6.
ББК 22.19

ОГЛАВЛЕНИЕ **стр.**

ВВЕДЕНИЕ

К численному интерполированию приходится обращаться, когда вычисляют значения функций заданных таблично. Например, при сложном аналитическом виде функции или полученной из эксперимента. Тогда её интерполируем, а за её значение принимаем значение интерполирующей функции. Так представляя $f(x) = P(x) + R(x)$, где $f(x)$ искомая функция, а $P(x)$ интерполирующая и $R(x)$ остаток, имеем $f(x) \approx P(x)$ с точностью до остатка $R(x)$.

Учебно-методическое пособие состоит из 9 глав, отражающих понятие погрешности числа необходимого в численных методах, интерполяцию функций одной и двух переменных, а также метод наименьших квадратов. Кроме этого, приведены для сравнения графики, полученные с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, метода наименьших квадратов и кубического сплайна. Эти графики наглядно показывают, какой из методов даёт меньшую погрешность. Для построения этих графиков использован [1] математический пакет SCILAB версии 4.1.2 хорошо приспособленный для численных методов. Приведены также программы в этом пакете, реализующие аппроксимацию для заданий, приведённых в таблицах.

Здесь разобраны различные способы решения задач на интерполирование, позволяющие лучше усвоить теоретический материал. Имеются также в главах задачи и упражнения для самостоятельного решения, в которых применимы разобранные методы. Учебно-методическое пособие будет полезна в ходе практических занятий по численным методам и для самостоятельной работы студентов ИИТММ ННГУ.

1. ЭЛЕМЕНТРЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1. **Абсолютной погрешностью** числа A (точное число) числом a (приближенное число) называется число Δa, удовлетворяющее условию $|A-a| \le \Delta a$.

Относительной погрешностью называется некоторая величина δa, удовлетворяющая: $\left|\frac{A-a}{a}\right| \le \delta a$. Относительную погрешность записывают иногда в процентах. Например, для π его приближение $\pi^* = 3{,}14$. Тогда $\Delta\pi^* = 0{,}0016$ и $\delta\pi^* = \frac{0{,}0016}{3{,}14}$. Подсчитывая, имеем $\delta\pi^* = 0{,}0005$ или $0{,}005\%$.

2. **Значащие цифры числа.** Это все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева. Например: а) $x = 2{,}396029$ - все цифры и 0 - значащие; б) но для $x = 2{,}396029$ – значащие только 2, 6, 7, а первые три нуля - незначащие, ибо они служат вспомогательной цели - определению положения цифр $2{,}6{,}7$. Поэтому может быть принята запись: $x = 2{,}67 \cdot 10^{-3}$.

в) для $x = 227000$ и $x = 2{,}27 \cdot 10^6$ в первой записи все 7 цифр - значащие. Во второй же записи значащие только 2, 2, 7.

Если известно, что x - точное число, например, $x = 3200$, то для него нельзя использовать запись $x = 3{,}2 \cdot 10^3$ ибо тем самым два нуля переводятся в разряд незначащих цифр.

3. **Верные цифры числа**. Значащая цифра называется верной, если абсолютная погрешность числа не превосходит $\frac{1}{2}$ единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Пример 1. Пусть $a = 12{,}396$ и известно, что $\Delta a = 0{,}03$.

Сколько верных значащих цифр у числа a?

Имеем: $\Delta a > \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$, $\Delta a > \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$, $\Delta a > \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$, Значит, у числа a - верные знаки $1, 2, 3$, а числа $9, 6$ - сомнительные.

Пример 2. Пусть $a = 0{,}037862$ и $\Delta a = 0{,}007$. Здесь $\Delta a < \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$. Значит, у числа a все цифры сомнительные.

Пример 3. Пусть $a = 9{,}999785$ и $\Delta a = 4 \cdot 10^{-4}$. Здесь абсолютная погрешность $\Delta a = 0{,}4 \cdot 10^{-3} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$. Тогда у числа a все три знака после запятой верные.

4. **Округление чисел.** В основе процессов округления лежит идея минимальной разности числа c и его округленного значения c_0.

<u>Правило округления (по дополнению)</u>. Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все цифры его, стоящие справа от n-ой значащей цифры или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом:

а) если 1-ая из отброшенных цифр меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняются без изменения;

б) если 1-ая из отброшенных цифр больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;

в) если 1-ая из отброшенных цифр равна 5 и среди остальных отброшенных цифр есть ненулевые, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу;

г) если первая из отброшенных цифр равна 5, а все остальные отброшенные цифры нули, то последняя оставшаяся цифра сохраняется неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная.

<u>В исключительном случае</u>, когда отброшенная часть в точности равна $\frac{1}{2}$ единицы последнего сохраненного разряда, то для компенсации знаков ошибок округления используется правило четной цифры.

<u>Очевидно, что при таком правиле округления</u> погрешность не превосходит $\frac{1}{2}$ единицы десятичного разряда, определяемого последней оставленной значащей цифрой.

5. Практическое правило выполнения приближенных вычислений:

а) погрешности округлений возрастают в неустойчивых алгоритмах;

б) абсолютные и относительные погрешности числа принято округлять только в большую сторону, так как при округлениях границы неопределенности числа, как правило, увеличиваются. Поэтому вычисления ведут с одним или двумя запасными знаками;

в) при округлении целого числа отброшенные знаки не следует заменять нулями, а надо применять умножение на степени 10;

г) при выполнении приближенных вычислений число значащих цифр промежуточных результатов не должно превышать числа верных цифр более чем на одну или две единицы. Окончательный результат может содержать не более, чем одну излишнюю значащую цифру по сравнению с верными. Если при этом абсолютная погрешность результата не превышает 2-х единиц последнего сохраненного десятичного разряда, то излишняя цифра называется сомнительной;

д) точные числа с большим числом значащих цифр следует тоже округлять, сообразуясь с общей точностью вычислений.

6. **<u>О видах погрешностей в приближенных вычислительных методах</u>**:

а) неустранимая погрешность, возникающая из-за неточности исходной информации, например, неточности измерений;

b) погрешность метода и определяется методом;

c) погрешность вычислений, возникающая из-за округлений.

Если их последовательно обозначить как $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$, то в итоге получаем результат с абсолютной погрешностью $\Delta \le |\Delta_a| + |\Delta_b| + |\Delta_c|$. Таким образом, отсюда видно, что, например, хороший метод с малой погрешностью, но при большой погрешности округлений или неустранимой погрешности в итоге даст результат, определяющийся погрешностями Δ_a, Δ_c. Поэтому при плохих погрешностях (больших) Δ_a, Δ_c метод можно брать достаточно "грубым".

Задачи на вычисления погрешностей

I. Округляя числа до 3-х-значащих цифр, определить абсолютную Δ и относительную δ погрешности приближенных чисел:

1) 2,1514	4) 1,225	7) 0,1545	10) 94,525
2) 0,16152	5) -0,0015281	8) 0,003922	11) 105,02
3) 0,01204	6) -392,85	9) 625,55	12) 5,003.

II. Пользуясь оценкой $\left|\frac{\Delta a}{a}\right| \le \delta a$, определить абсолютную погрешность приближенных чисел по их относительным погрешностям:

1) $a = 13267$; $\delta = 0{,}1\%$; 4) $a = 2{,}32$ $\delta = 0{,}7\%$;
2) $a = 35{,}72$; $\delta = 1\%$; 5) $a = 0{,}896$ $\delta = 10\%$;
3) $a = 13267$; $\delta = 1\%$; 6) $a = 1{,}15$ $\delta = 1\%$.

III. При измерении некоторых углов получили числа $\alpha_1 = 21^\circ 37' 3''$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\alpha_3 = 75^\circ 20' 44''$, $\alpha_4 = 1^\circ 10''$. Определить относительные погрешности этих чисел, если абсолютная погрешность измерений равна 1". Какой из результатов наиболее точен?

IV. Определить количество верных цифр в числе x, если известна его абсолютная погрешность:

1) $x = 0{,}3931$ $\Delta x = 0{,}25 \cdot 10^{-2}$; 2) $x = 0{,}1132$ $\Delta x = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$;
3) $x = 38{,}2543$ $\Delta x = 0{,}27 \cdot 10^{-2}$; 4) $x = 293{,}481$ $\Delta x = 0{,}1$;
5) $x = 2{,}325$ $\Delta x = 0{,}1 \cdot 10^{-1}$; 6) $x = 14{,}00231$ $\Delta x = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$;
7) $x = 0{,}0842$ $\Delta x = 0{,}15 \cdot 10^{-2}$; 8) $x = 0{,}00381$ $\Delta x = 0{,}1 \cdot 10^{-4}$;
9) $x = -32{,}285$ $\Delta x = 0{,}2 \cdot 10^{-2}$; 10) $x = -0{,}2113$ $\Delta x = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$;

V. Определить количество верных цифр в числе, если известна его относительная погрешность:

1) $a = 1{,}8921$ $\delta a = 0{,}1 \cdot 10^{-2}$; 2) $a = 0{,}2218$ $\delta a = 0{,}2 \cdot 10^{-1}$;
3) $a = 22{,}351$ $\delta a = 0{,}1$; 4) $a = 0{,}02425$ $\delta a = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$;
5) $a = 0{,}000135$ $\delta a = 0{,}15$; 6) $a = 9{,}3598$ $\delta a = 0{,}1\%$;
7) $a = 0{,}11452$ $\delta a = 10\%$; 8) $a = 48361$ $\delta a = 1\%$;
9) $a = 592{,}8$ $\delta a = 2\%$; 10) $a = 14{,}936$ $\delta a = 1\%$.

2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Классический численно-аналитический подход заключается в том, чтобы использовать некоторые узлы функции для получения приближающего многочлена и затем выполнить аналитическую операцию над этим многочленом. Прежде чем начать вычисления, мы должны ответить на 4 вопроса:

1)Какие узлы мы будем использовать?

2) Какой приближающий класс функций мы будем использовать?

3) Какой критерий согласия мы применим?

4) Какую точность мы хотим?

Существуют три класса функций, широко применяемых в численном анализе. Первый включает в себя линейные комбинации функций: $1, x, x^2,..., x^n$, что совпадает с классом всех многочленов степени n. Второй класс образуют функции: 1, $\cos a_i x, \sin a_i x$. Третий класс - функции: e^{-aix}.

Каждая из этих групп обладает важным свойством таким как: конечное множество функций такой группы переходит само в себя, когда заменяется x на $x+h$. Это свойство важно, так как оно подразумевает, что когда мы выбираем множество аппроксимирующих функций, нам не требуется иметь сведений о начале отсчета, что удобно в численных методах.

Множество линейных комбинаций $1, x,..., x^n$ имеет еще одно важное свойство: как множество оно также не изменяется при замене x на kx. Далее выберем в качестве класса аппроксимирующих функций многочлены степени n:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n.$$

Естественно полагать, что $n+1$ условие, наложенное на многочлен в общем виде, позволит определить однозначно коэффициенты. В качестве этого условия, критерия согласия, потребуем точное совпадение в узловых точках. Если есть $n+1$ узловая точка, то можно найти многочлен степени n, который совпадает (пренебрегая ошибками округления) с функцией в узловых точках. Важно подчеркнуть, что соответствующий многочлен степени n, проходящий через эти точки, однозначно определен, независимо от того, как он строится и какие обозначения использованы. Приведём далее примеры интерполяционных многочленов [2].

Многочлен Лагранжа имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} y_k.$$

Остаток для $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ на $[a.b]$ с узлами $x_k \in [a,b]$ имеет вид: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\alpha)\cdot\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}$, где $\alpha \in [a,b]$. Здесь функции $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, а $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$.

Интерполяционная формула Ньютона представляет собой просто другой способ написания интерполяционного многочлена. Она на практике полезна, потому что число используемых узлов может быть увеличено или уменьшено без повторения всех предыдущих вычислений. Виды многочлена [2]:

а) интерполяционная формула Ньютона с неравностоящими узлами:

$$N_n = y_0 + (x - x_0) \cdot f(x_0, x_1) + \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \cdot f(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

где разделенные разности

$$f(x_{k-1}, x_k) = \frac{y_{k-1} - y_k}{x_{k-1} - x_k}, \qquad f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k) = \frac{f(x_{k-2} - x_{k-1}) - f(x_{k-1} - x_k)}{x_{k-2} - x_k},$$

и далее аналогично. Это формула интерполирования вперед, где используются верхние разности. Имеется еще формула Ньютона интерполирования назад:

$$N_n = y_n + (x - x_n) f(x_n, x_{n-1}) + \ldots + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1) f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0)$$

с нижними разностями. Конечные разности при $x_k = x_0 + kh$ имеют вид [2]:

$$f^1_{i+\frac{1}{2}} = y_{i+1} - y_i, \qquad f_i^2 = f^1_{\frac{2i+1}{2}} - f^1_{\frac{2i-1}{2}},$$

и далее аналогично. Тогда конечные разности k-го порядка связаны с разделенными по формуле: $f^k_{j+\frac{k}{2}} = f(x_j, x_{j+1}, x_{j+k}) k! h^k$ и по ней получаем [2]:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \frac{f^k_{\frac{k}{2}}}{k! h^k} \text{ и } f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}) = \frac{f^k_{-\frac{k}{2}}}{k! h^k}.$$

Отсюда можно вывести формулу Ньютона для равностоящих узлов.

б) интерполяционная формула Ньютона с равностоящими узлами $x_{k+1} - x_k = h$ будет

$$N_n(x) = y_0 + \frac{(x - x_0)}{h} f^1_{-\frac{1}{2}} + \frac{2(x - x_0)(x - x_1)}{h^2} f_2^1 + \ldots +$$
$$+ \frac{n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{h^n} f^n_{\frac{n}{2}}.$$

Здесь $f^k_{\frac{k}{2}}$ — конечные разности. Это формула Ньютона интерполирования вперед.

Для интерполирования назад при $x_{k+1} - x_k = -h$ формула Ньютона имеет вид:

$$N_n(x) = y_0 + \frac{(x - x_0)}{h} f^1_{-\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{h^n} f^n_{-\frac{n}{2}}.$$

Замечание 1. Если аргумент x, где надо найти приближенное значение функции $f(x)$ находится в начале таблицы, то пользуются формулой Ньютона интерполирования вперед. Если же x в конце, то - формулой интерполирования назад.

Оценка модуля погрешности приближенного вычисления значений дифференцируемой функции, используя формулу остатка [2], представляется в виде:

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max|\omega_{n+1}(x)|.$$

Здесь $M_{n+1} = \max\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ на $[a,b]$. Для формулы Ньютона можно брать тот же остаток и ту же оценку.

<u>Замечание 2</u>. При большом числе узлов неудобно пользоваться напрямую многочленами Лагранжа или Ньютона, поскольку получаются слишком высокие степени. Поэтому производят кусочно-полиномиальную интерполяцию: кусочно-линейную, кусочно-квадратичную и так далее. При этом, например, берут попарно узлы $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$,...,$[x_{n-1},x_n]$, для кусочно-линейной интерполяции и на отрезках $[x_k,x_{k+1}]$, записывают многочлен Лагранжа по значениям y_k, y_{k+1} функции. Тогда для $x \in [x_k,x_{k+1}]$ будет $f(x_k) \approx L_1^{(k)}(x)$, где $L_1^{(k)}(x)$- многочлен Лагранжа, соответствующий отрезку $[x_k,x_{k+1}]$. Погрешность для дважды непрерывно дифференцируемой $f(x)$ на $[x_0,x_n]$ будет $|R_1(x)| \le \frac{|(x-x_k)(x-x_{k+1})|}{2!}M_2$, а при шаге h оценка остатка $|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2!}h^2$. Задавая погрешность ε, можно получить из неравенства $\frac{M_2}{2!}h^2 < \varepsilon$ требуемый шаг h: $h < \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{M_2}$ для достижения требуемой точности. Аналогичное проделывается и для кусочно-квадратичной, кусочно-кубичной, а также другой кусочной интерполяции.

<u>Пример 1.</u> Дана таблица $\sin x$ на $[a,b]$ с шагом h. Найти погрешность кусочно-линейной интерполяции.

<u>Решение:</u> Так как $|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2!}h^2$. где $M_2 = \max\left|\sin^2 x\right| = \max|\sin x| \le 1$ на $[a,b]$, то имеем оценку $|R_1(x)| \le \frac{h^2}{2}$.

<u>Пример 2.</u> В условиях примера 1 найти h, чтобы наибольшая погрешность была меньше 10^{-4}.

<u>Решение:</u> При $|R_1(x)| \le \frac{h^2}{2}$ из $\frac{h^2}{2} < 10^{-4}$, находим $h < \sqrt{2}\cdot 10^{-2}$.

Задачи на многочлены Лагранжа и Ньютона

1. Зная значения $\sin x$ при $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, найти $\sin x$ при величинах

$x=\dfrac{\pi}{12},\dfrac{3\pi}{8}$. Оценить погрешность интерполяции.

2. Зная значения $\cos x$ при $x=0,\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}$, найти $\cos x$ при величинах $x=\dfrac{\pi}{12},\dfrac{3\pi}{8}$. Оценить погрешность интерполяции.
3. Даны значения $Lgx: Lg340=2{,}531;\ Lg350=2{,}544;\ Lg360=2{,}556;$ $Lg370=2{,}568$. Найти $Lg345$ и $Lg365$. Оценить погрешность интерполяции.
4. Даны значения $arctgx$: $arctg0{,}167=10^\circ$, $arctg0{,}268=15^\circ$, $arctg0{,}364=20^\circ$, $arctg0{,}466=25^\circ$. Найти $arctg0{,}3$ и оценить погрешность интерполяции.
5. Зная значения tgx при $x=0,\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}$ найти tgx при величинах $x=\dfrac{\pi}{10},\dfrac{4\pi}{15}$. Оценить погрешность интерполяции.
6. Для функции $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{12}x$ построить интерполяционный полином, выбрав узлы $x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$. Вычислить $\cos\dfrac{\pi}{10}$ и оценить погрешность.
7. Для функции $f(x)=Lnx$ построить интерполяционный полином, выбрав узлы $x_0=9, x_1=10, x_2=12, x_3=15,$ используя значения $Ln2=0{,}693,$ $Ln3=1{,}099,$ $Ln5=1{,}609.$ Вычислить $Ln11$ и оценить погрешность.
8. Вычислить значения интегрального синуса $Si(x)=\int\limits_0^{\pi}\dfrac{\sin t}{t}dt$ при $x=0{,}26;\ 0{,}35$, используя его значения: $Si0{,}22=0{,}219$, $Si0{,}27=0{,}269$, $Si0{,}32=0{,}318$, $Si0{,}37=0{,}367$. Оценить погрешность интерполяции.
9. Вычислить значения интеграла вероятностей: $\Phi(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{x}e^{-t^2}dt$ при $x=0{,}27$ и $x=0{,}58$, используя его значения: $\Phi(0{,}15)=0{,}168;$ $\Phi(0{,}25)=0{,}276;\ \Phi(0{,}35)=0{,}379;\ \Phi(0{,}45)=0{,}475;\ \Phi(0{,}55)=0{,}563.$ Оценить погрешность интерполяции.
10. Дана таблица Lnx от 1000 до 10000. Какова наибольшая погрешность линейной и кусочно-квадратичной интерполяции при $h=1$. Какой надо взять шаг, чтобы погрешность была меньше 10^{-8}, 10^{-6}, 10^{-4}.
11. Требуется составить четырёхзначную таблицу $f(x)=\sin x$ в интервале

$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Какой при этом должен быть шаг таблицы при интерполяции кусочно-линейной, кусочно-квадратичной и кусочно-кубичной.

12. Дана таблица $\sqrt[3]{x}$ от 1 до 1000. Какова наибольшая погрешность кусочно-линейной, кусочно-квадратичной и кусочно-кубичной интерполяции при $h=1$. Какой надо взять шаг, чтобы погрешность была меньше 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}.
13. Для интеграла вероятностей $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ на $[0,10]$ найти шаг h, чтобы кусочно-линейная, квадратичная интерполяция имели наибольшую погрешность меньше 10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-7}.
14. Дана таблица $\sin 2x$ от 0 до π с шагом $h=\dfrac{\pi}{100}$. Подсчитать наибольшую погрешность линейной интерполяции. Какой надо взять шаг h, чтобы погрешность была меньше 10^{-4}, 10^{-6}.
15. Построить интерполяционные многочлены для $f(x)=Lgx-\dfrac{(x-1)}{x}$ по узлам $x=1;2;4;8;$ с учетом $Lg2=0{,}301$. Вычислить приближенно $Lg5{,}25$ и оценить погрешность.

3. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ РАЗНОСТЯМИ

Для интерполирования внутри таблицы используются интерполяционные многочлены с центральными разностями. Пусть функция $f(x)$ задана таблицей значений $f(x_k)$ в равноотстоящих точках: $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n$. Если точка интерполирования лежит вблизи точки x_0, то для приближенного вычисления $f(x)$ при $\tau = \frac{(x - x_0)}{h}$ берутся следующие формулы [2]:

а) формула Гаусса интерполирования вперед с центральными разностями $f_{\frac{1}{2}}^{k}, f_0^{m}$:

$$L(x_0 + \tau h) = y_0 + \tau \cdot f_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{\tau(\tau - 1)\cdot f_0^2}{2!} + \frac{\tau(\tau^2 - 1)\cdot f_{\frac{1}{2}}^{3}}{3!} + ... +$$

$$+ \frac{\tau(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 4)\cdots\left[(\tau^2 - (n-1)^2)\right]}{(2n-1)!} f_{\frac{1}{2}}^{2n-1} + \frac{\tau(\tau^2 - 1)\cdots\left[(\tau^2 - (n-1)^2)\right](\tau - n)}{(2n)!} f_{\frac{1}{2}}^{2n}.$$

б) формула Гаусса интерполирования назад с центральными разностями $f_{-\frac{1}{2}}^{k}, f_0^{m}$:

$$L(x_0 + \tau h) = y_0 + \tau \cdot f_{-\frac{1}{2}}^{1} + \frac{\tau(\tau + 1)\cdot f_0^2}{2!} + \frac{\tau(\tau^2 - 1)\cdot f_{-\frac{1}{2}}^{3}}{3!} + ... +$$

$$\frac{\tau(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 4)\cdots\left[(\tau^2 - (n-1)^2)\right]}{(2n-1)!} f_{-\frac{1}{2}}^{2n-1} + \frac{\tau(\tau^2 - 1)\cdots\left[(\tau^2 - (n-1)^2)\right](\tau - n)}{(2n)!} f_0^{2n}$$

в) полусуммаа 2-х формул а) и б) приводит к формуле Стирлинга:

$$L(x_0 + \tau h) = y_0 + \tau \cdot f_0^{1} + \frac{\tau^2 \cdot f_0^2}{2!} + ... +$$

$$\frac{\tau(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 4)\cdots\left[(\tau^2 - (n-1)^2)\right]}{(2n-1)!} f_0^{2n-1} + \frac{\tau(\tau^2 - 1)\cdots\left[(\tau^2 - (n-1)^2)\right](\tau - n)}{(2n)!} f_0^{2n}$$

с разностями: $f(x_0, x_0 + h, x_0 - h, \ldots, x_0 - (k-1)h, x_0 + kh) = \frac{f_{\frac{1}{2}}^{2k-1}}{(2k-1)!\,h^{2k-1}}$ и

$$f(x_0, x_0 - h, x_0 + h, \ldots, x_0 - (k+1)h, x_0 - kh) = \frac{f_{-\frac{1}{2}}^{2k-1}}{(2k-1)!\,h^{2k-1}},$$

$$f(x_0, x+h, x_0-h, ..., x_0+kh, x_0-kh) =$$
$$= f(x_0, x-h, x_0+h, ..., x_0-kh, x_0+kh) = \frac{f_0^{2k}}{(2k)!h^{2k}},$$

$$f_0^{2k-1} = \frac{1}{2}\left(f_{\frac{1}{2}}^{2k-1} + f_{-\frac{1}{2}}^{2k-1} \right).$$

Эти формулы обычно используют, когда x находится вблизи x_0.

Пример. Дана таблица значений функции:

x	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22
y	6,27	6,405	6,487	6,505	6,436	6,259

Найти приближенно значение $f(x)$ при $x = 0{,}168$.

Решение. Для $f(0{,}168)$ примем $x_0 = 0{,}16$. Тогда $t = \frac{(x-x_0)}{h} = 0{,}4$. Воспользуемся таблицей более укороченной и соответственно разностями:

x	0,12	0,14	0,16	0,18	0,2
y	6,278	6,405	6,487	6,505	6,436
f_k^1		0,126	0,083	0,018	-0,069
f_k^2			-0,043	-0,065	-0,087
f_k^3				-0,022	-0,022

Используем здесь первую формулу Гаусса (вперед). Тогда, поскольку $f_{\frac{1}{2}}^1 = 0{,}018$, $f_0^2 = -0{,}065$, $f_{\frac{1}{2}}^3 = -0{,}022$, то для $y_0 = 6{,}487$ получаем приближённо:

$$f(0{,}168) \approx 6{,}487 + 0{,}4 \cdot 0{,}018 + \frac{0{,}4 \cdot (-0{,}6)}{2!}(-0{,}065) + \frac{1{,}4 \cdot 0{,}4(-0{,}6)}{3!}(-0{,}022).$$

После вычислений получаем приближённо $f(0{,}168) \approx 6{,}503$.

Задача. Дана таблица

x	1,415	1,420	1,425	1,430	1,435	1,440	1,445
y	0,87	0,88	0,85	0,86	0,89	0,90	0,92

Найти приближенно $f(1{,}428)$, $f(1{,}432)$, $f(1{,}438)$, используя формулы Гаусса (вперед, назад) и Стирлинга. Сравнить результаты.

4. ОБРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ

1. <u>Обратное интерполирование.</u> На практике возникает задача об отыскании по заданному значению функции $\overline{Y}$ значение аргумента, то есть требуется найти $\overline{X}$. Тогда применяем формулу Лагранжа или Ньютона на участках монотонности, что достаточно для однозначности $\overline{X}$.

<u>Пример 1</u>. По таблице функции найти значение $\overline{X}$ для которого $\overline{Y}=0$.

x	1	2	2,5	3
y	-6	-1	5,625	16

<u>Решение</u>. По значениям функции можно предположить, что функция монотонная на отрезке $[1;3]$ (здесь даже может быть строгая монотонность). Применяя формулу Лагранжа, получаем $\overline{X} \approx L_3(0)$. Составим $L_3(y)$ по значениям $y: -6; -1; 5.625; 16$. Тогда после вычисления $L_3(0)=2{,}122$. Итак, $\overline{\mathrm{X}} \approx 2{,}122$.

<u>Замечание.</u> Если $y=f(x)$ не монотонна на отрезке $[a,b]$, то для применения обратного интерполирования данный отрезок (если это возможно) разбиваем на отрезки монотонности заданной функции. Далее проводим на каждом таком отрезке обратное интерполирование. Обратное интерполирование удобно для решения уравнения $f(x)=0$. В случае непрерывной функции $f(x)$ находим интервал перемены знака. Далее табулируем функцию (составляем таблицу ее значений) и применяем обратное интерполирование.

<u>Пример 2</u>. Решить $xLnx-1=0$, применяя обратное интерполирование.

<u>Решение.</u> Используя таблицу значений Lnx, находим отрезок $[1{,}6;1{,}9]$ перемены знака функции $f(x)=xLnx-1$. Далее строим таблицу:

x	1.6	1.7	1.8	1.9
y	-0,24799	-0.09793	0.05801	0,21952

Функция $f(x)=xLnx-1$ на $[1{,}6;1{,}9]$ возрастает, т.к. $y'=Lnx+1>0$ здесь. Тогда существует обратная функция $x=\varphi(y)$, для которой строим $L_3(y)$ (или $N_3(y)$- многочлен Ньютона). Далее, полагая $y=0$, находим $x=L_3(0)=1{,}76322$. Точность вычисления здесь, если брать многочлен $N_3(y)$ определяется величиной последнего слагаемого для $x_3(0)$ и в данном случае с точностью 0.000038, где значение

$$x_3(0)=1.6+0.16526-0.00199-0.000038=1.76322.$$

Задачи на обратное интерполирование

1. Используя таблицу, решить $shx=4.9370$ обратной интерполяцией.

x	2	2.2	2.4	2.6
y	3.6269	4.4571	5.4662	9.6947

Оценить погрешность (см. пример 2).

2. Используя таблицу, методом обратной интерполяции решить $tgx=1.767$:

x	60°	61°	62°
y	1.732	1.804	1.881

3. Используя значения $Lgx = y$, данные в таблице:

x	20	25	30
y	1.3010	1.3979	1.4771

Найти точное x, что $y = Lgx = 1.35$.

4. Функция $f(x)$ задана таблицей:

x	10	15	17	20
y	3	7	11	17

Найти x, для которого значение $f(x) = 10$.

5. Решить уравнение $F(x) = 20$ для $F(x)$, заданной таблицей:

x	4	6	8	10
y	11	27	50	83

6. Найти x для значения $f(x) = 10$, $f(x) = 0$ при таблице:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	12	11	9	4	1	-1	-2	1	2	3

7. Применяя обратное интерполирование, найти корень уравнения в $[a, b]$:

а) $f(x) = x^2 - \cos \pi x = 0$ $a = 0.4;$ $b = 0.5;$

б) $f(x) = x - \cos^2 \pi x = 0$ $a = 0.5;$ $b = 0.4;$

в) $f(x) = (x-1)^2 - \frac{1}{2} e^x = 0$ $a = 0.2;$ $b = 0.3;$

г) $f(x) = (x-1)^2 - e^x = 0$ $a = 1.4;$ $b = 1.5;$

д) $f(x) = e^x - \left(2 - x^2\right) = 0$ $a = 1.3;$ $b = 1.4;$

е) $f(x) = 2\sqrt{x} - \cos \frac{\pi}{2} x = 0$ $a = 0.2;$ $b = 0.3;$

ж) $f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{1}{x} = 0$ $a = 0.7;$ $b = 0.8;$

з) $f(x) = \sqrt{x} - 2\cos \frac{\pi}{2} x = 0$ $a = 0.7;$ $b = 0.8;$

и) $f(x) = x^2 - tg \frac{\pi}{4} x = 0$ $a = 1.5;$ $b = 1.8;$

к) $f(x) = x^2 - ctg \frac{\pi}{3} x = 0$ $a = 0.8;$ $b = 0.9;$

л) $f(x) = x^2 - \cos^2 \pi x = 0$ $a = 0.3;$ $b = 0.4;$

м) $f(x) = x^2 - \sin \pi x = 0$ $a = 0.75$ $b = 0.85$

и, подставляя его в уравнение, проверить степень точности равенства. Здесь, кроме концов отрезка, брать еще дополнительно несколько точек.

8. Отделяя участок перемены знака, решить приближенно, применяя обратное интерполирование, следующие уравнения:

а) $x - \sin x = 0$; б) $x^2 - \sin 2x = 0$;

в) $x - Lgx = 0$; д) $e^x - 10x = 0$;

е) $5x^2 - e^x = 0$; ж) $3x - Lg5x = 0$;

з) $tgx - x + 1 = 0$; и) ;$3x - \sin x = 0$.

Указание: см. пример 2 и замечание.

2. Экстраполирование.. На практике часто приходится отыскивать значения функции вне таблицы значений аргумента: для $x < x_0$ или $x_n < x$. Тогда и здесь применяют интерполяционные формулы. Целесообразно использовать для $x < x_0$ и x близко к x_0 формулу Ньютона интерполирования вперед, а для $x_n < x$ и x близко к x_n формулу Ньютона интерполирования назад. Можно также использовать и формулу Лагранжа.

Пример. Дана таблица:

x	1	1.1	1.2	1.3
y	2.78	2.83	2.87	2.91

Составляя таблицу конечных разностей $\Delta^k f$, получаем:

$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0.05	-0.01	0.01
0.04	0	

Найти $f(x)$ при $x = 0.9$ и $x = 1.4$.

Решение. Составляем многочлен $N_3(x)$ для вычисления в точке $x \approx 0.9$. Имеем, беря верхние разности (то есть вперед), многочлен Ньютона

$$\overline{N}3(x) = 2{,}78 + 0{,}5(x-1) - 0{,}5(x-1)(x-1{,}1) + 1{,}66(x-1)(x-1{,}1)(x-1{,}2).$$

Отсюда $f(0{,}9) \approx N_3(0{,}9)$. Практически абсолютная погрешность $\overline{\Delta}$, если неизвестна производная $f^{(n)}(x)$, определяется по модулю последнего слагаемого в $\overline{N}3(0{,}9)$. Тогда, в этом случае, имеем: $\overline{\Delta} = 1{,}66 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}0996$. Для вычисления $f(1{,}4)$ строим интерполяционный многочлен Ньютона $\widetilde{N}_3(x)$ назад:

$$\widetilde{N}_3(x) = 2{,}91 + 0{,}4(x-1{,}3) + 1{,}66(x-1{,}3)(x-1{,}2)(x-1{,}1).$$

Отсюда приближённо $f(1{,}4) \approx \widetilde{N}_3(1{,}4)$. Здесь погрешность определяется практически так же, как и выше: $\widetilde{\Delta} = 1{,}66 \cdot 0{,}1 \cdot 0.2 \cdot 0{,}3 = 0{,}0996$.

Приведём, теперь, задачи на экстраполирование, где в зависимости от точек, в которых надо найти значение функция (до узлов или после узлов) следует применить для сравнения формулы Лагранжа или Ньютона. Оценить погрешность экстраполяции, сравнивая с точным значением функции.

Задачи на экстраполирование

1. Дана таблица значений shx:

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
shx	1.17520	1.33565	1.50946	1.69838	1.90430

Найти приближенно значения $sh0.95$; $sh0.8$; $sh1.45$; $sh1.5$. Оценить погрешность экстраполяции.

2. Дана таблица значений tgx. Найти приближенно значения $tg50^\circ$; $tg55^\circ$; $tg65^\circ$; $tg70^\circ$, используя таблицу. Оценить погрешность.

x	60°	61°	62°
tgx	1.732	1.804	1.881

3. Дана таблица значений интеграла вероятностей $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$:

x	0.05	0.15	0.35	0.45
$\Phi(x)$	0,05637	1.6800	0.37938	0.47548

Найти приближенно значения $\Phi(0{,}01)$; $\Phi(0{,}03)$; $\Phi(0{,}5)$; $\Phi(0{,}55)$. Оценить погрешность экстраполяции.

4. Дана таблица значений Lgx:

x	340	350	360	370
Lgx	2.5315	2.5441	2.5563	2.5682

Найти приближенно $Lg300$; $Lg320$; $Lg380$; $Lg375$. Оценить погрешность.

5. Дана таблица значений $arctgx$:

x	0.176327	0.267949	0.363970	0.466308
$arctgx$	10°	15°	20°	25°

Найти приближенно значения $arctg0.17$; $arctg0{,}12$; $arctg0{,}5$. Оценить погрешность экстраполяции.

6. Дана таблица значений chx:

x	0.30	0.35	0.45	0.50	0.55
chx	1.04534	1.06188	1.10297	1.12763	1.15510

Найти приближенно $ch0.2$; $ch0{,}6$. Оценить погрешность.

5. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $z = f(x, y)$ задана на системе точек x_k, y_j при $k = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$ таблицей своих значений $z_{kj} = f(x_k, y_j)$. Требуется найти значение функции $f(x, y)$ в некоторой промежуточной точке $(\overline{x}, \overline{y})$ - внутренней по отношению к узлам. Так как интерполяционные многочлены здесь громоздки, то используют практический прием: метод последовательного интерполирования по каждой переменной отдельно. Именно: сначала находят значения $f(x, y)$, интерполируя по x, например, по интерполяционной формуле Лагранжа или Ньютона для одной переменной, используя значения $f(x, y)$ в точках: $(x_0, y_0), (x_1, y_0), \ldots, (x_N, y_0)$. Затем, опять интерполируя по x, находят $f(\overline{x}, y_1)$ и так далее. Итак, получая приближенные значения $f(\overline{x}, y_0), f(\overline{x}, y_1), \ldots, f(\overline{x}, y_m)$, строим по ним таблицу:

y	y_0	y_1	…………	y_m
z	$f(\overline{x}, y_0)$	$f(\overline{x}, y_1)$	…………	$f(\overline{x}, y_m)$

и по этой таблице осуществляем интерполирование по переменной y. Тогда полученный результат $\overline{z} \approx L_m(\overline{y})$, где $L_m(y)$ многочлен Лагранжа (или многочлен Ньютона), построенный по узлам y_j и значениям $f(\overline{x}, y_j)$, $j = \overline{0, m}$. Отметим, что в результате такого последовательного интерполирования получаем приближенное значение $f(\overline{x}, \overline{y})$, где погрешность определяется интерполяцией по x, а затем и по y.

Пример. По таблице значений $f(x, y))$ найти $f(3{,}6; 2{,}15)$.

y / x	3,5	4.0
2.0	0.60	0.62
2.1	0,58	0.60
2.2	0.55	0.58

Решение. Строим сначала интерполяционный многочлен $L_{1,0}(x)$ по таблице:

x	3.5	4.0
z	0.60	0.62

Здесь $y_0 = 2.0$. Очевидно, многочлен Лагранжа

$$L_{1,0}(x) = (x-4)/(3.5-4) \cdot 0.6 + (x-3.5)/(4-3.5) \cdot 0.62.$$

Далее при $y_1 = 2.1$ строим многочлен Лагранжа $L_{1,1}(x)$, используя таблицу:

x	3.5	4.0
z	0.58	0.6

Тогда $L_{1,1}(x) = (x-4)/(3.5-4) \cdot 0.58 + (x-3.5)/(4-3.5) \cdot 0.6$.

Аналогично, используя третью строку при $y_2 = 2.2$, получаем:

$$L_{1,2}(x)=(x-4)/(3.5-4)\cdot 0.55+(x-3.5)/(4-3.5)\cdot 0.58.$$

Найдем теперь $L_{1,0}(3.6)=a_0$, $L_{1,1}(3.6)=a_1$, $L_{1,2}(3.6)=a_2$. После этого строим таблицу по числам a_0, a_1, a_2:

y	2.0	2.1	2.2
$L_{1,j}(x)$	a_0	a_1	a_2.

По этой таблице строим многочлен $L_3(y)$:

$$L_3(y)=a_0\frac{(y-2.1)(y-2.2)}{(2.0-2.1)(2.0-2.2)}+a_1\frac{(y-2.0)(y-2.2)}{(2.1-2.0)(2.1-2.2)}+a_2\frac{(y-2.0)(y-2.1)}{(2.2-2.0)(2.2-2.1)}$$

После этого приближенно находим $f(3.6;2.15)\approx L_3(2.15)$.

Задачи на интерполяцию функций двух переменных

1. Дана таблица:

$y\backslash x$	1.0	1.5	2.0
1.5	0.66	0.68	0.69
1.6	0.62	0.64	0.66
1.7	0.58	0.61	0.62
1.8	0.54	0.57	0.59

Найти значения $f(1.43;1.54)$, $f(1.35;1.63)$, $f(1.26;1.75)$, $f(1.15;1.9)$.

2. Дана таблица:

$y\backslash x$	1.0	1.5	2.5	3.0
1.0	0.841	0.885	0.850	0.9
1.1	0.810	0.845	0.824	0.8
1.3	0.741	0.780	0.760	0.7
1.5	0.664	0.7	0.708	0.6

Найти значения $f(1.34;1.07)$, $f(1.25;1.26)$, $f(1.11;1.46)$, $f(1.45;2.6)$.

6. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пусть на $[a,b]$ имеется система $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_m(x)\}$ линейно-независимых функций. Здесь $m=1,2,\ldots$. Отметим, что система функций на $[a,b]$ называется линейно-независимой, если тождество $c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_m\varphi_m(x)\equiv 0$ на $[a,b]$ выполняется тогда и только тогда, когда $c_0=c_1=\ldots c_m=0$, где c_k – некоторые постоянные. Имеется достаточное условие линейной независимости для непрерывно дифференцируемых функций: определитель Вронского

$$W(x)=\begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_m(x) \\ \varphi_0'(x) & \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_m'(x) \\ . & . & \ldots & . \\ \varphi_0^{(m)}(x) & \varphi_1^{(m)}(x) & \ldots & \varphi_m^{(m)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ на } [a,b].$$

Например, $\varphi_0(x)=1,\ \varphi_0(x)=x,\ldots,\ \varphi_0(x)=x^m$ будут линейно независимы.

По системе строим обобщенный многочлен: $P_m(x)=\sum\limits_{k=0}^{m} a_k\varphi_k(x)$. Пусть $f(x)$ задана таблицей в узлах $x_0, x,\ldots,x_n$. Рассматривается **<u>следующая задача</u>:** найти среди всех обобщенных многочленов $P_m(x)$ с $m\le n$ такой, чтобы сумма $S(a_0,a_1,\ldots,a_m)=\sum\limits_{k=0}^{m}\left(P_m(x_k)-f(x_k)\right)^2$ была минимальной. Для решения этой задачи используем необходимые условия экстремума для $S(a_0,a_1,\ldots,a_m)$ в виде $\operatorname{grad}S(a_0,a_1,\ldots,a_m)=0$. Отсюда получаем систему линейных алгебраических уравнений $B\overline{a}=\vec{c}$, где матрица $B=\left[\left(\varphi_k,\varphi_j\right)\right]$, вектора $\vec{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_m)^T$, вектор $\vec{c}=(f_0,f_1,\ldots,f_m)^T$ и $\left(\varphi_k,\varphi_j\right)=\sum\limits_{i=0}^{n}\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)$, а $f_k=\sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_k(x_i)$.
Здесь матрица B является матрицей Грама и положительно определенная. Тогда существует единственное решение $\vec{a}^*$ и обобщенный многочлен в виде $P_m^*(x)=\sum\limits_{k=0}^{m} a_k^*\varphi_k(x)$, имеющий минимальное квадратичное отклонение.

<u>Пример 1.</u> Пусть $\varphi_0(x)=1,\ \varphi_0(x)=x,\ldots,\ \varphi_0(x)=x^m$ и $y_i=f(x_i)$ значения в узлах x_i. Тогда $\left(\varphi_k,\varphi_j\right)=\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^k x_i^j=\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{k+j}$, а числа $f_k=\sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i^k$.

<u>Пример 2.</u> Построить методом наименьших квадратов полином 2-ой степени по следующим данным:

x	-1	-0.4	0	0.5	1
y	-2	-1	0	1.2	2.05

Решение: Здесь $n = 4, m = 2$. Тогда матрица $B = (3 \times 3)$ и система

$$\begin{pmatrix} 5 & 0.1 & 2.41 \\ 0.1 & 2.41 & 0.061 \\ 2.41 & 0.061 & 2.0881 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 5.05 \\ 0.19 \end{pmatrix}$$

из которой находим приближённо: $a_0 \approx -0.01410$; $a_1 \approx 2.09485$; $a_2 \approx 0.04607$. Тогда $P_2(x) = -0.01410 + 2.09485 \cdot x + 0.04607 \cdot x^2$.

Задачи на метод наименьших квадратов

1. Проверить линейную независимость систем:
а) $\varphi_k(x) = \cos kx$, $k = \overline{0, m}$; б) $\varphi_{k-1}(x) = \sin kx$, $k = \overline{1, (m+1)}$; для конкретных числовых значений m: $m = 2, m = 3$. Записать для случаев а) и б) в общем виде величины (φ_k, φ_j) и f_k на $[0, \pi]$ при $x_i = \frac{\pi}{5} i$, а $i = \overline{0,5}$.

2. Дана таблица значений функции:

x	0	1	2	3	4
y	1	2	1	0	4

Построить многочлен 1-ой степени и сравнить его значение с заданными значениями функции в узлах.

3. Для сетки узлов $x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_0 = 0,$ $x_5 = 1$ и функции $f(x) = (1 + x)^{-1}$ построить многочлены 1-ой, 2-ой, 3-ей, 4-ой степени методом наименьших квадратов. Сравнить значения этих многочленов в узлах со значениями функции.

4. Построить методом наименьших квадратов многочлены 1-ой, 2-ой и 3-ей степени для таблицы:

x	0	1	3	4	4.5
y	1	2	10	17	21

Сравнить значения многочленов со значениями функции в узлах.

5. Для функции, заданной таблицей:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
y	1	2	0	2	3

Построить методом наименьших квадратов обобщенные многочлены 1-ого, 2-ого, 3-его порядка для систем:
а) 1, $\cos x$, $\cos 2x$; б) $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$.

7. СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Для гладкого кусочно-полиномиального интерполирования используются сплайн-функции. Пусть $x_0 < x_1 < ... < x_n$ – узлы разбиения отрезка Δ. Сплайном $S_\Delta^m(f, x)$ для функции $f(x)$, заданной в узлах x_k, называется [3] многочлен m-ой степени на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$:

$$S_\Delta^m(f, x) = P_{mj}(x) = a_{j0} + a_{j1}x + ... + a_{jm}x^m, \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \ j = \overline{1, n}$$

и удовлетворяющий условию непрерывности производных:

$$P_{mj}^{(k)}(x_j) = P_{mj+1}^k(x_j), \ k = \overline{0, (m-1)}, \quad j = \overline{1, (n-1)}.$$

Всего имеем в распоряжении $n(m+1)$ неизвестных a_{jk}, образующих систему из $(n-1)m$ – уравнений. Для $m \geq 2$ требуется добавлять ряд дополнительных условий, например, граничные условия для производных S_Δ^m и так далее. Для $m = 1$ получаем кусочно-линейное интерполирование.

Построим кубический сплайн, рассматриваемый [3] в виде:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{1}{2}c_i(x - x_i)^2 + \frac{1}{6}d_i(x - x_i)^3 = S_i(x)$$

для $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, N}$ и значений $f(x_i) = y_i$ при $i = \overline{0, N}$. Используя условия для производных внутри узлов, получаем [3] для неизвестных a_i, b_i, c_i, d_i равенства:

$$a_i = y_i, \quad d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}. \quad b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i},$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$ при $i = \overline{1, N}$ и полагаем величины $a_0 = y_0$. Для определения же неизвестных c_i получаем систему

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right),$$

где $i = \overline{1, (N-1)}$, а $c_0 = S_1''(x_0)$, $c_N = S_N''(x_N)$. Эта система с трехдиагональной матрицей и решается методом прогонки. Если вторые производные $f(x)$ на концах неизвестны, то обычно считают $S_1''(x_0) = S_N''(x_N) = 0$.

Для нахождения $f(x)$ полагают $f(x) = S_i(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Если $h_i = h$ и функции $f(x)$ четырежды непрерывно дифференцируемой, то погрешность [3]

$$\delta_h = \max|f(x) - S(x)| \leq \max\left|f^{(4)}(x)h^4\right| \quad \text{на } [x_0, x_n].$$

Чтобы $\delta_h < \varepsilon$, то при $\max\left|f^{(4)}(x)\right| \cdot h^4 < \varepsilon$, получаем требуемый шаг h.

Пример 1. Для функции $y = x^3$ и таблицы:

x	1	2	3	4	5
y	1	8	27	64	125

Построить кубический сплайн и подсчитать $f(x)$ при $x = 2.5$.

Решение: Так как $h = 1$ и $x_0 = 1$, а $x_n = 5$ при $n = 4$, то для c_i имеем систему:

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = 6(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}),\ i = \overline{1,3}.$$

Поскольку $f''(x) = 6x$ и $c_0 = S_1''(x_0) = f''(x_0)$, а $c_n = S_n''(x_n) = f''(x_n)$, то $c_0 = 6$ и $c_4 = 30$. Решая систему для c_i, получаем $c_1 = 12, c_2 = 18, c_3 = 24$. Тогда по виду a_i, b_i, d_i получаем $b_1 = 2,\ b_2 = 27,\ b_3 = 8,\ b_4 = 75,\ d_i = 6,\ a_i = y_i$. Отсюда при $x = 2.5$ имеем $2 < x < 3$. Поэтому $x \in [x_1, x_2]$, а индекс $i = 2$ и сплайн $S(x) = 27 + 27(x-3) + 9(x-3)^2 + (x-3)^3$. Отсюда $f(2{,}5) \approx S(2{,}5)$ при $x = 2.5$.

Задачи на сплайны

1. Дана таблица. Построить интерполяционные сплайны 1-ого, 2-ого и 3-его порядков. Найти $S(x)$ при $x = 0.5$; $x = 3.5$.

x	0	2	4
y	1.5	2.3	3.4

2. Используя таблицу для e^x найти $e^{1.05}$ и $e^{1.25}$ с помощью
а) квадратичного сплайна; б) кубического сплайна:

x	1	1.1	1.15	1.3
y	2.718	3.004	3.158	3.67

3. Дана таблица для термопары с показаниями V вольтметра:

T	0	20°	40°	60°
V	-0.67	-0.25	0.17	0.61

Используя кубический сплайн, найти показания вольтметра при температуре в градусах: $T^\circ = 55^\circ$; $T^\circ = 15^\circ$.

4. Для функции $f(x) = \left(1 + x^2\right)^{-1}$ построить а) квадратичный сплайн;
б) кубический сплайн по точкам 0,1,2,3. Найти $f(x)$ при $x = 1.5; 2.2$, используя сплайн -интерполяцию. Оценить погрешность интерполяции для кубического сплайна.

5. Какой шаг h и сколько узлов надо взять, чтобы погрешность интерполяции δ_h не превышала ε. Произвести расчеты для
а) $f(x) = \sin x,\ x \in [0, \pi],\ \varepsilon = 0{,}001.$
б) $f(x) = e^x,\quad x \in [1,3],\ \varepsilon = 0{,}01.$
в) $f(x) = \ln(1+x),\ x \in [5,8],\ \varepsilon = 0{,}001.$

8. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ

Если $f(x)$ задана в узлах не только своим значением, но и производными до некоторого порядка, то этот узел x_k называется кратным, а число γ_k при $k=\overline{0,m}$ есть заданные натуральные числа, называемые кратностью узла. Имеются соответствующие системы чисел

$$y_k = f(x_k),\ y'_k = f(x_k), \ldots, y_k^{(\gamma_k)} = f^{(\gamma_k)}(x_k).$$

Пусть число $n = \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_m + m$, где m – число узлов: $x_0, x_1, \ldots, x_m$. Показывается, что существует единственный многочлен $P_n(x)$ степени n, удовлетворяющий следующим условиям: $P_n^{(l)}(x_k) = y_k^{(l)}$, $k=\overline{0,m}$, $l=\overline{0,\gamma_k}$. Этот многочлен называют многочленом с кратными узлами, или **многочленом Эрмита.** В общем виде [4] имеем

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{\gamma_k} y_k^{(l)} \cdot P_{k,l}(x),\ \ \omega(x) = \prod_{k=0}^{m} (x-x_k)^{\gamma_k+1},$$

где полином

$$P_{k,l}(x) = \frac{\omega(x)}{l!(x-x_k)^{\gamma_k+1-l}} \left\{ \frac{(x-x_k)^{\gamma_k+1}}{\omega(x)} \right\}_{(x_k)}^{(\gamma_k-l)}$$

Здесь выражение в фигурных скобках $\{F(x)\}_{(a)}^{(\lambda)}$ - обозначает сумму членов разложения $F(x)$ в ряд Тейлора в окрестности $x=a$, в которое разность $(x-a)$ входит в степенях, не превышающих натурального числа λ. Полиному Эрмита соответствует общая интерполяционная формула $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, где $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{l=0}^{\gamma_k} y_k^{(l)} \cdot P_{k,l}(x)$, а погрешность многочлена Эрмита равна $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ и имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varsigma)}{(n+1)!} \cdot \omega(x) \ \text{ и } \ \varsigma \in [\alpha, \beta],$$

где числа $\alpha = \min[x, x_0, x_1, \ldots, x_m]$ и $\beta = \max[x, x_0, x_1, \ldots, x_m]$. В частности для равностоящих узлов с шагом h и $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{m+1}|$ на $[a,b]$, включающем узлы имеем:

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| (x-x_0)^{\gamma_0+1} \cdot \ldots \cdot (x-x_m)^{\gamma_m+1} \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1}.|$$

Этой оценкой можно пользоваться для того, чтобы $|R_n(x)| \le \varepsilon|$ и выбора шага h.

Однако, эти формулы практически мало пригодны по их громоздкости. Поэтому удобен практический способ нахождения многочлена Эрмита – метод неопределенных коэффициентов. Ищем его в виде: $P_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ с неопределенными коэффициентами $c_0, c_1, \ldots, c_n$ таким образом, чтобы $P_n^{(s)}(x_k) = y_k^{(s)}$, для $s=\overline{0,\gamma_k}$, $k=\overline{0,m}$,

$n = \gamma_0 + \gamma_1 + ... + \gamma_m + m.$ Получающийся при этом определитель отличен от 0.

Задачи на многочлен Эрмита

1. Пусть заданы y_0, y_1, y_0', y_1' на $[x_0, x_1]$. Построить интерполяционный многочлен Эрмита.

2. Пусть в точке x_0 заданы $y_0, y_0', ..., y_0^{(n)}$. Построить многочлен Эрмита на $[x_0, x_1]$.

Указание: искать его в виде $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} y_0^{(k)} \dfrac{(x - x_0)^k}{k!}$.

3. Построить интерполяционный многочлен Эрмита по данным:
$x = 0,1,2; \quad y = 1,-1,0; \quad y(0) = 0, y'(1) = 0, y''(0) = 2$.

Указание: искать его как $P_S(x) = -\dfrac{37}{8}x^5 + \dfrac{65}{4}x^4 - \dfrac{117}{8}x^3 + x^2 + 1$.

4. Построить интерполяционный многочлен Эрмита по данным:
$x = -1,0,1; \quad y = -1,0,1; \quad y(-1) = 0, y'(0) = 0, y''(1) = 0$.

5. Для функции $\sin x$ на $[0, \pi]$ найти шаг h, чтобы $|R_n(x)| < \varepsilon|$ при значениях $n = 5; 8; 10$ и $\varepsilon = 0.001; 0.0001$, где $R_n(x)$ ─ погрешность многочлена Эрмита.

6. То же самое, что и в задании 5 проделать для функций:

1) $f(x) = \ln(1 + x)$ на $[0,3]$;

2) $f(x) = e^x$ на $[1,5]$;

3) $f(x) = shx$ на $[3,5]$;

4) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$ на $[0,6]$;

5) $f(x) = \cos x$ на $[0, \pi]$.

9. ГРАФИКИ И ПРОГРАММЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Покажем возможность применение пакета [1] SCILAB версии 4.1.2 для программ: многочлена Лагранжа, кубического сплайна и метода наименьших квадратов при полиномиальной системе функций. Приведём графики, в которых точное значение функции изображено непрерывной кривой, а приближённая * в узлах значения функции. Программа позволяет с увеличением числа узлов просмотреть графически и по таблице результатов изменение погрешности. Ограничимся здесь для иллюстрации интерполяции количеством 30-и узлов.

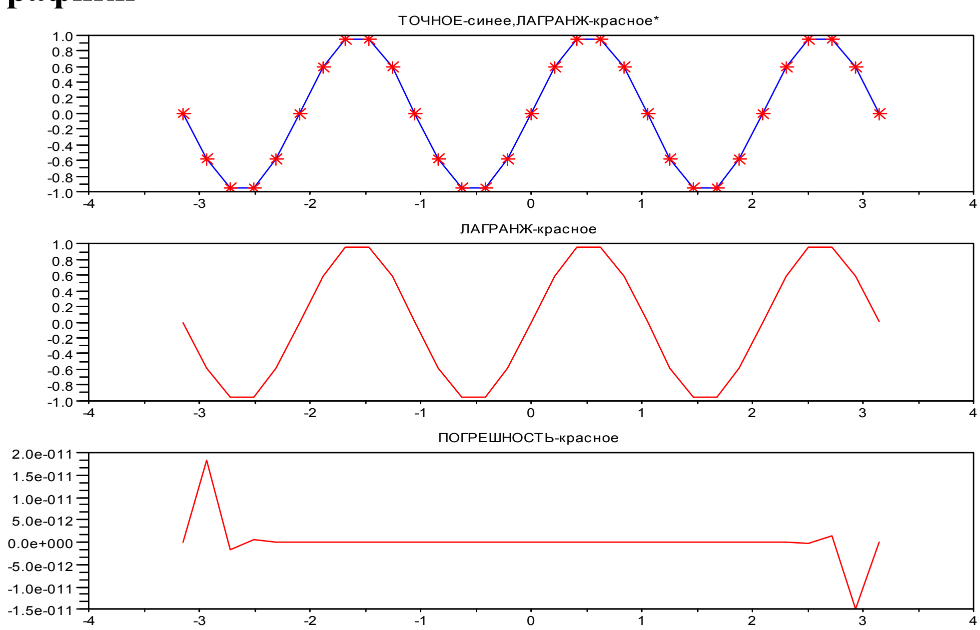
1. Многочлен Лагранжа. Возьмём $f(x)=\sin(3x)$ при $x\in[-\pi,\pi]$. Для сравнения точности интерполяции количество узлов можно увеличивать. Будет приведена программа и графические результаты.

Программа

```
//ИНТЕРПОЛЯЦИЯ МНОГОЧЛЕНОМ ЛАГРАНЖА N-ой степени
//Смена задач:снять //в тест-функциях disp("Example");
clc;clear;
for p=1:5
N=input("N-number knots of interpolation");
a=-%pi;b=%pi;
h=(b-a)/(N-1);
//-----------------------------------
//Функции для интерполяции
disp("Example 1"); function w=F(x),w=sin(3*x),endfunction
//disp("Example 2");function w=F(x),w=abs(x),endfunction
//disp("Example 3");function w=F(x),w=1/(1+x^2),endfunction
//==================================
for i=1:N
//Узлы интерполяции
X(i)=a+(i-1)*h;
//Значения функции в узлах интерполяции
Y(i)=F(X(i));
end
//Для графиков функции и Лагранжа в x(k)
m=31;
for k=1:m
x(k)=a+(b-a)*(k-1)/(m-1);
f(k)=F(x(k));
for i=1:N
L=1;
for j=1:N
  if ~j==i then L=L*(x(k)-X(j))/(X(i)-X(j));
```

```
else
end;    end;
z(i)=L*Y(i);
end;
//Значения Лагранжа в x(k)
Lagr(k)=sum(z);;
end;
DLagr=Lagr-f;
//Графики
subplot(3,1,1)
plot(x,f,x,Lagr,"r*")
xtitle("ТОЧНОЕ-синее,ЛАГРАНЖ-красное*")
subplot(3,1,2)
plot(x,Lagr,"r")
xtitle("ЛАГРАНЖ-красное")
subplot(3,1,3)
plot(x,DLagr,"r")
xtitle("ПОГРЕШНОСТЬ-красное")
end;
m=m
M=input('Enter 1<=M<=m for exit number results'); s=1;
for j=1:M
RES(s,1)=x(j);       RES(s,2)=f(j);
RES(s,3)=Lagr(j);    RES(s,4)= DLagr(j);
s=s+1; end;
disp("   x(k)       F       Lagr     DLagr    ");
format('v',7);           disp(RES);
```

Графики



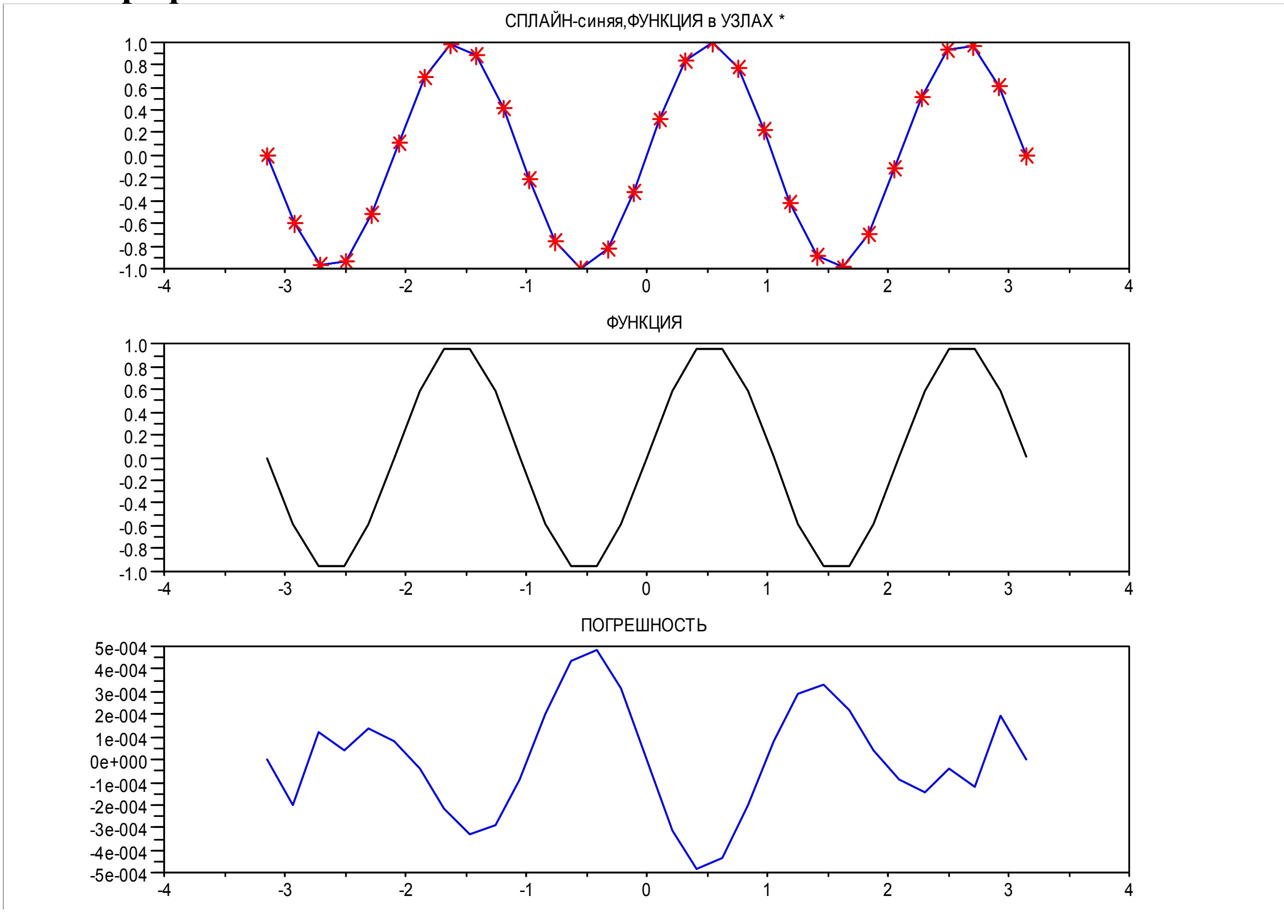
2. Кубический сплайн. Возьмём $f(x)=\sin(3x)$ при $x\in[-\pi,\pi]$. Для сравнения точности сплайн-интерполяции количество узлов здесь необходимо увеличивать. Будет приведена программа и графические результаты.

Программа

```
//КУБИЧЕСКАЯ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ
//Смена примеров снять // перед disp(" ")
clc;clear;
a=-%pi; b=%pi;
//Цикл результатов
for n=1:5
N=input("Enter N for strictly increasing number of knots");
h=(b-a)/(N-1);
//------ФУНКЦИИ---------------------------------------
disp("Example 1");function w=F(x),w=sin(3*x),endfunction
//disp("Example 2");function w=F(x),w=abs(x),endfunction
//disp("Example 3");function w=F(x),w=1/(1+x^2),endfunction
//==========================================================
for i=1:N
 X(i)=a+(i-1)*h;      Y(i)=F(X(i));
end;
K=31;
for k=1:K
x(k)=a+(b-a)*(k-1)/(K-1);
f(k)=F(x(k));
end;
//Коэффициенты Сплайна
d=splin(X',Y');
//Сплайн в узлах X
SPX=interp(X',X',Y',d);
//Сплайн в узлах x
SPx=interp(x,X',Y',d);
//Погрешность в узлах x
DSPx=SPx-f;
//ГРАФИКИ
subplot(3,1,1)
plot(X,SPX,X,Y,"r*")
xtitle("СПЛАЙН-синяя,ФУНКЦИЯ в УЗЛАХ *")
subplot(3,1,2)
plot(x,f,"k")
xtitle("ФУНКЦИЯ")
subplot(3,1,3)
plot(x,DSPx)
xtitle("ПОГРЕШНОСТЬ")
```

```
end;    K=K
M=input('Enter 1<=M<=K for exit number results'); s=1;
for j=1:M
RES(s,1)=x(j);    RES(s,2)=f(j);
RES(s,3)=SPx(j);  RES(s,4)=DSPx(j);
s=s+1; end;
disp("  x(k)      F      SPx      SPx    ");
format('v',7);          disp(RES);
```

Графики



По графику видно, что при одинаковом числе узлов погрешность сплайна меньше по сравнению с погрешность многочлена Лагранжа.

3. Метод наименьших квадратов. Построить полиномы 3-й и 6-ой степени с выводом среднеквадратичной погрешности. Исходные данные

xd	1.32	1.40	1.50	1.62	1.70	1.80	1.90	2.00	2.11	2.20
yd	3.30	3.50	3.85	4.25	4.50	4.85	5.40	6.00	6.60	7.30

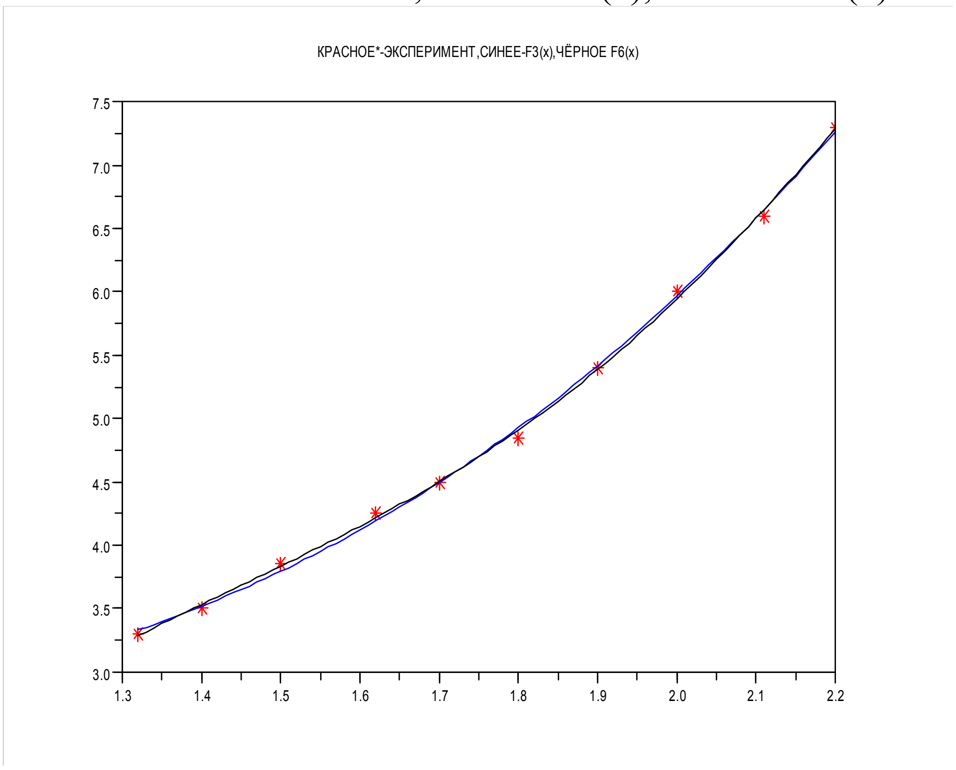
Программа

```
//МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ:
//S({a(j)})=sum(j=1,..,n;(y(j)-F(x(j),a(1),...,a(k))^2
//в min for all {a(j)}
```

```
//err-ошибка,вычисляющая разность между экспериментальными
//и теоретическими значениями,перед использованием необходимо
//определить z=[x;y]-матрицу исходных данных и c-вектор начальных
//значений коэффициентов,размерность вектора должна совпадать
//с количеством искомых коэффициентов.Экспериментальная функция
//F=F(x,a(1),...,a(k))=a(1)+a(2)*x+a(3)*x^2+...+a(k)*x^(k-1);
//В результате опыта имеется зависимость таблиц X и Y.
//Требуется найти полиномиальную эмпирическую функцию
//3-ей и 6-ой степени
clear;clc;
//Функция ошибки для
function [er3]=G3(c3,z),
er3=z(2)-c3(1)-c3(2)*z(1)-c3(3)*z(1)^3,
endfunction
//Функция ошибки для 6-ой степени
function [er6]=G6(c6,z),
er6=z(2)-c6(1)-c6(2)*z(1)-c6(3)*z(1)^2-c6(4)*z(1)^3-c6(5)*z(1)^4-
c6(6)*z(1)^5-c6(7)*z(1)^6,
endfunction
//Исходные данные
xd=[1.32 1.40 1.50 1.62 1.70 1.80 1.90 2.00 2.11 2.20];
yd=[3.30 3.50 3.85 4.25 4.50 4.85 5.40 6.00 6.60 7.30];
//Длины векторов данных
nxd=length(xd);
nyd=length(yd);
//Данные со случайной ошибкой delta
delta=input('Enter delta');
yr=yd+delta*(2*rand(1,nyd)-ones(1,nyd));
//Матрица исходных данных со случайной ошибкой
zd=[xd;yr];
//Вектор начальных приближений для 3-ей степени
c3=[0;0;0];
//Вектор начальных приближений для 6-ой степени
c6=[0;0;0;0;0;0;0];
//Решение задачи для 3-ей степени
disp('err3-error,a3-coefficients of 3-polynom')
[a3,err3]=datafit(G3,zd,c3)
//Решение задачи для 6-ой степени
disp('err6-error,a6-coefficients of 6-polynom')
[a6,err6]=datafit(G6,zd,c6)
//Эмпирический полином 3-ей степени(с 0*x^2)
b3(1)=a3(1);  b3(2)=a3(2);
b3(3)=0;      b3(4)=a3(3);
```

```
F3x=poly(b3,"x","c")
//Эмпирический полином 6-ой степени
b6(1)=a6(1);  b6(2)=a6(2);  b6(3)=a6(3);
b6(4)=a6(4);  b6(5)=a6(5);  b6(6)=a6(6);
b6(7)=a6(7);
F6x=poly(b6,"x","c")
//Построение графиков экспериментальных данных
plot(xd,yr,"r*");
//График подобранных F3(x)и F6(x)для экспериментальных данных
x=xd(1):0.01:xd(nxd);
F3=a3(1)+a3(2)*x+a3(3)*x^3;
F6=a6(1)+a6(2)*x+a6(3)*x^2+a6(4)*x^3+a6(5)*x^4+a6(6)*x^5+a6(7)*x^6;
plot(x,F3,"b",x,F6,"k");
xtitle("КРАСНОЕ*-ЭКСПЕРИМЕНТ,СИНЕЕ-F3(x),ЧЁРНОЕ F6(x)")
```

График
КРАСНОЕ*-ЭКСПЕРИМЕНТ,СИНЕЕ-F3(x),ЧЁРНОЕ F6(x)



Эмпирический полином $F3x = 2.9318631 - 0.6353046x + 0.5381150x^3$
со среднеквадратичной погрешностью err3 = 0.0185999.

Эмпирический полином 6-ой степени

$F6x =- 3.2751577 + 3.3630481x + 4.5479817x^2 - 0.2690177x^3 - 4.7094306x^4 +$
$+ 2.940533x^5 - 0.5045755x^6$

со среднеквадратичной погрешностью err6 = 0.0119311

Замечание. Используя эти программы, можно решать задачи приближения функций.

Практическое задание

Построить по по таблице. многочлен Лагранжа и кубический сплайн и эмпирические кривые 3-го и 6-го порядков и их графики

.

1		2	
x	***y***	***x***	***y***
0,11	9,05421	0,51	9,05421
0,15	6,61659	0,55	6,61659
0,21	4,69170	0,61	4,69170
0,29	3,351069	0,69	3,35106
0,35	2,73951	0,75	2,73951
0,40	2,36522	0,80	2,36522

Литература

1. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В., Рудченко Е.А. Scilab: Решение инженерных и математических задач. − М.: ALT Linux: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. − 269 с.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т.1. ─ М: Физматгиз, 1962. ─ 464 с.
3. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы.─ М: Наука, 1989. ─ 432 с.
4. Молчанов Н.Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций.─ Киев: Наук. Думка, 1987.─ 288 с.

Методические указания к решению задач по интерполяции функций

Учебно-методическое пособие

Составители: Калашников Александр Львович
Потёмин Геннадий Владимирович
Федоткин Андрей Михайлович
Фокина Валентина Николаевна