МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Методы решения задач по векторному анализу и поверхностным интегралам

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ для студентов ННГУ,
обучающихся по направлению подготовки 01.03.02
«Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2016

УДК 517.987 (077)
ББК В162р
М-54

М-54 Методы решения задач по векторному анализу и поверхностным интегралам. Составители: Калашников А.Л., Фокина В.Н., Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 38 с.

Рецензент: к.ф.-м.н, доцент **О.Е. Галкин**

В пособии содержатся задачи и методические указания для их решения по разделу курса “Математический анализ” и темы “Кратные интегралы”. Здесь рассмотрены криволинейные и поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода, а также способы их вычисления и приложения. Приведены, кроме того, методы решения задач по векторному анализу (теории поля).

Работа будет полезна при проведении практических занятий по математическому анализу и его изучения в ходе самостоятельной работе студентов ИИТММ ННГУ.

УДК 517.987 (077)
ББК В162р

ОГЛАВЛЕНИЕ **стр.**

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие составлено на основе опыта проведения практических занятий и лекций по математическому анализу на ИИТММ и посвящено теме "Кратные интегралы". Её цель помочь студентам лучше усвоить теоретический материал и привить навыки его использования к решению конкретных прикладных задач.

Материал разбит на 3 главы, в которых представлены необходимая теория и примеры решения типовых задач.

Глава 1 посвящена криволинейным интегралам 1-го и 2-го рода и формулам их вычисления. Приведены также геометрические и механические приложения этих интегралов.

Глава 2 содержит основные понятия для поверхностных интегралов 1-го и 2-го рода и способы сведение к двойным интегралам. Имеются также их геометрические и механические приложения.

В главе 3 представлены основные понятия векторного анализа и их связь с криволинейными и поверхностными интегралами.

Отметим, что пособие может быть полезным и студентам других факультетов университета ННГУ, а также при проведении практических занятий и самостоятельной работе студентов.

.

ГЛАВА 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1. Криволинейный интеграл 1-го рода

Пусть на некоторой плоской гладкой или кусочно-гладкой кривой $L = AB$, соединяющей точки A и B задана функция $z = f(x, y)$, а T_n — произвольное разбиение этой кривой на части $A_i A_{i+1}$ точками $A_0 = A, A_1, A_2, ..., A_n = B$. Обозначим через $d(T_n) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta l_i$, где Δl_i - длина дуги $A_i A_{i+1}$. Как известно, гладкая или кусочно-гладкая кривая спрямляема и для нее всегда можно осуществить такое разбиение. На каждой из дуг $A_i A_{i+1}$ выберем произвольную точку $M_i = (x_i, y_i)$ и составим сумму $\sigma_n(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta l_i$, называемую ещё интегральной.

Определение 1. Если для любой последовательности разбиений T_n при $d(T_n) \to 0$, числа σ_n имеют конечный предел J, не зависящий от выбора последовательности T_n и точек M_k, то число J называют криволинейным интегралом первого рода от функции $f(M)$ по кривой L и обозначают

$$J = \int\limits_{AB} f(x, y)dl \text{ или } J = \int\limits_{L} f(x, y)dl.$$

Замечание 1. Определение 1 аналогично определению интеграла Римана. Нетрудно записать его через ε, δ, то есть по Коши. Для AB — пространственной кривой определение криволинейного интеграла первого рода аналогично приведенному выше для гладкой или кусочно-гладкой кривой. Тогда для функции $u = f(x, y, z)$ криволинейный интеграл

$$J = \int\limits_{AB} f(x, y, z)dl \text{ или } J = \int\limits_{L} f(x, y, z)dl,$$

где $u = f(x, y, z)$ задана на кривой L.Далее криволинейный интеграл первого рода записываем в виде: $J = \int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{L} f(M)dl$ для пространственной или плоской кривой, где $M = (x, y, z)$ или $M = (x, y)$ соответственно.

1.2. Основные свойства криволинейного интеграла 1-го рода

Свойство 1. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от выбора направления на кривой L, то есть

$$\int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{BA} f(M)dl$$

как для плоской, так и для пространственной кривой.

Свойство 2. (линейность интеграла) Если $f(M)$ и $g(M)$ интегрируемы на кривой L, то функции $f(M)*g(M)$ и $\alpha f(M)+\beta g(M)$ тоже интегрируемы на L при любых числах α, β и при этом

$$\int\limits_{L} (\alpha f(M) + \beta g(M))dl = \alpha \int\limits_{L} f(M)dl + \beta \int\limits_{L} g(M)dl .$$

Свойство 3. (аддитивность интеграла) Если функция $f(M)$ интегрируема по двум не перекрывающимся кривым L_1 и L_2, то $f(M)$ интегрируема на $L = L_1 \cup L_2$ и

$$\int\limits_{L} f(M)dl = \int\limits_{L_1} f(M)dl + \int\limits_{L_2} f(M)dl$$

Здесь две кривые L_1 и L_2 называются не перекрывающимися, если $L_1 \cap L_2$ содержит конечное число точек или пустое множество.

Свойство 4. $\int\limits_{L} 1dl = |L|$, где $|L|$ - длина кривой L.

Свойство 5. Если функция $f(M)$ интегрируема на L, то $|f(M)|$ тоже интегрируем на L и $\left|\int\limits_{L} f(M)dl\right| \le \int\limits_{L} |f(M)|dl$.

Свойство 6. (монотонность интеграла)Если $f(M)$ и $g(M)$ интегрируемы на L и $f(M) \le g(M)$ для всех точек $M \in L$, то $\int\limits_{L} f(M)dl \le \int\limits_{L} g(M)dl$.

1.3. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода

Покажем способ вычисления криволинейного интеграла 1-го рода как в плоском, так и в пространственном случае через определенный интеграл.

Теорема 1. Если кривая AB задана параметрическим уравнением $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$, где функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывные, а $x'(t)$, $y'(y)$, $z'(t)$ непрерывные или кусочно-непрерывны и $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 > 0$ для $t \in [\alpha, \beta]$, то справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

Для кривой L в полярной замене: $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$ при $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$, полагая φ за параметр t, нетрудно получить равенство:

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

Для кривой L, заданной в декартовой системе координат как $y = p(x)$ при $x \in [a,b]$ и непрерывно дифференцируемой функции $p(x)$ имеем

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx = \int\limits_a^b f(x,p(x))\sqrt{1+(p'(x))^2}\,dx.$$

Эта формула получается из общей параметрической замены при параметре $t = x$. Дифференциалы

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

для пространственной кривой, а также

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

для плоской кривой. При полярной замене и декартовой системе координат dl записывается аналогично. Отметим, что если кривая L представляет собой замкнутый контур, то, разбивая ее на конечное число неперекрывающихся кривых $L_1, L_2, ..., L_k$ и $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup ... \cup L_k$, интеграл

$$\int\limits_L f(M)dl = \sum_{m=1}^{k} \int\limits_{L_m} f(M)dl.$$

Пример 1. Найти $J = \int\limits_L (x+y)dl$, где L - контур треугольника с вершинами O(0,0), A(1,0), B(0,1).

Решение. Для вычисления интеграла используем способ его подсчета через определенный интеграл. Поскольку интеграл первого рода не зависит от выбора направления на кривой, то по аддитивности этого интеграла

$$\int\limits_L (x+y)dl = \int\limits_{OB} (x+y)dl + \int\limits_{OA} (x+y)dl + \int\limits_{BA} (x+y)dl.$$

На OB имеем $x = 0$, $0 \le y \le 1$, $dl = dy$ и $\int\limits_{OB} (x+y)dl = \int\limits_0^1 ydy = \frac{1}{2}$. На отрезке OA имеем $y = 0$, $0 \le x \le 1$ и $dl = dx$. Тогда $\int\limits_{OA} (x+y)dl = \int\limits_0^1 xdx = \frac{1}{2}$. Отрезок BA лежит на прямой $x + y = 1$. Поэтому $y = 1 - x$ и $dl = \sqrt{2}dx$ при $x \in [0,1]$. Следовательно, $\int\limits_{BA} (x+y)dl = \sqrt{2}\int\limits_0^1 dx = \sqrt{2}$ и $J = 1 + \sqrt{2}$.

Пример 2. Найти $J = \int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$ по окружности L: $x^2 + y^2 = ax$.

Решение. Введём полярную замену: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тогда $\rho(\varphi)=a\cos\varphi$ для $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Отсюда

$$J=\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,dl=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho(\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

После преобразований $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos\varphi a d\varphi=a^2\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2a^2$.

Пример 3. Вычислить $J=\int_L(x+y)dl$, где L - дуга циклоиды от точек A до B: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(t-\cos t)$, A=(0,0), B=($4a\pi$,0). **Решение**. Кривая L состоит из двух гладких кусков-дуг циклоиды: $L_1=AC$ и $L_2=CB$, где $C=(2a\pi,0)$. Поскольку для L_1 параметр $t\in[0,2\pi]$, а для L_2 параметр $t\in[2\pi,4\pi]$ и L_1,L_2 неперекрывающиеся, то по аддитивности криволинейного интеграла первого рода $\int_L(x+y)dl=\int_{L_1}(x+y)dl+\int_{L_2}(x+y)dl$ при одинаковом $x=x(t)$, $y=y(t)$ для L_1 и L_2. Дифференциал дуги $dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=a\sqrt{2-2\cos t}=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$. Далее после преобразований имеем равенство $(x+y)dl=2a^2(t-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2})\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$.Отсюда интеграл $\int_{L_1}(x+y)dl=2a\int_0^{2\pi}(t-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2})\sin\frac{t}{2}dt$, а также $\int_{L_2}(x+y)dl=-2a\int_{2\pi}^{4\pi}(t-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2})\sin\frac{t}{2}dt$.Складывая и осуществляя замену переменной в этих интегралах для перехода к отрезку $[0,\pi]$, получаем

$$\int_{L_1}(x+y)dl+\int_{L_2}(x+y)dl=8a^2\Big[\int_0^{\pi}2z\sin zdz-2\int_0^{\pi}\sin^2 z\cos zdz+$$

$$+\int_0^{\pi}(1-\cos^2 z)\sin zdz\Big]+16\pi a^2=8a^2(2\pi+\frac{4}{3})+16\pi a^2.$$

Пример 4. Вычислить $J = \int\limits_L z dl$, где L — коническая винтовая линия $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ при $t \in [0;2]$.

Решение. Очевидно, имеем

$$x_t'(t) = (\cos t - t\sin t),\ y_t'(t) = (\sin t + t\cos t),\ z_t' = 1.$$

Тогда $dl = \sqrt{t^2 + 2dt}$ и интеграл

$$J = \int\limits_L z dl = \int_0^2 t\sqrt{t^2 + 2dt} = \frac{(t^2+2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}(6^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}).$$

Пример 5. Найти $J = \int\limits_L \sqrt{z} dl$, где дуга L определена как пересечение поверхностей: $x + y = 1$, $z = x^2$ и проходит через A=(0,1,0) и B=(1,0,1).

Решение. Введем параметр t: $x = t$, $y = 1 - t$, $z = t^2$ при $t \in [0{,}1]$. Тогда нетрудно свести криволинейный интеграл 1-го рода к определенному. Поскольку $x_t' = 1$, $y_t' = -1$, $z_t' = 2t$, то

$$J = \int\limits_0^1 \sqrt{t^2}\sqrt{2 + 4t^2}dt = \sqrt{2}\int\limits_0^1 t\sqrt{1 + 2t^2}dt.$$

Но интеграл

$$\int\limits_0^1 t\sqrt{1+2t^2}dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \sqrt{1+2t^2}d(1+2t^2) = \frac{2}{4\cdot 3}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\cdot 3}.$$

Тогда $J = \sqrt{\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3\sqrt{2}}}$. Используем и другую параметрическую замену. Возьмем $z = t$. Тогда $x = \sqrt{t}$, $g = 1 - \sqrt{t}$. и $x_t' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, $y_t' = \dfrac{-1}{2\sqrt{t}}$, $z_t' = 1$. Отсюда

$$J = \int\limits_0^1 \sqrt{t}\sqrt{\frac{1}{4t} + \frac{1}{4t} + 1}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{t}\sqrt{\frac{2+4t}{t}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 \sqrt{1+2t}dt.$$

Интеграл

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1+2t}dt = \frac{2}{2*3}\int\limits_0^1 d(1+2t)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(1+2t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \sqrt{3} - \frac{1}{3}.$$

Поэтому, окончательно, $J = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - \dfrac{1}{3}) = \sqrt{\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3\sqrt{2}}}$ и совпадает с прежде найденным решением. Но вторая замена более упрощает подинтегральное выражение.

1.4. Криволинейный интеграл 2-го рода

Пусть на гладкой плоской кривой L заданы функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, а T_n есть произвольное разбиение этой кривой на части A_iA_{i+1} точками $A_0 = A, A_1, A_2, ..., A_n = B$, где A – начало кривой L, а B - ее конец. Обозначим $d(T_n) = \max\limits_{i=1,n} \Delta l_i$, где Δl_i - длина дуги A_iA_{i+1}. Выберем на каждой дуге A_iA_{i+1} произвольную точку $M_i = (x_i, y_i)$ и составим две интегральные суммы:

$$\sigma_n(P) = \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\Delta x_i, \qquad \sigma_n(Q) = \sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i, y_i)\Delta y_i,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. Рассмотрим последовательность разбиений $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ кривой AB, таких, чтобы $d(T_n) \to 0$.

Определение 2. Если для произвольной последовательности разбиений T_n числа $\wp_n(P)$, $\wp_n(Q)$ имеют при $d(T_n) \to 0$ конечные пределы, не зависящие от выбора T_n и точек M_k, то их называют криволинейными интегралами второго рода от функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и обозначают как

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx, \ \int\limits_{AB} Q(x, y)dy \quad \text{или} \quad \int\limits_{L} P(x, y)dx, \ \int\limits_{L} Q(x, y)dy.$$

Определяют также и сумму

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{AB} P(x, y)dx + \int\limits_{AB} Q(x, y)dy,$$

которую называют общим криволинейным интегралом второго рода.

Для случая гладкой пространственной кривой по аналогии с предыдущим плоским случаем определяют криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx, \ \int\limits_{AB} Q(x, y, z)dy, \ \int\limits_{AB} R(x, y, z)dz$$

а также их сумму $\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$.

1.5. Основные свойства криволинейного интеграла 2-го рода

Свойство 1. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл второго рода меняет свой знак на противоположный.

Свойство 2. Если функции

$$P(x, y) = \alpha P_1(x, y) + \beta P_2(x, y), \ Q(x, y) = \alpha Q_1(x, y) + \beta Q_2(x, y),$$

то имеем линейность криволинейного интеграла:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \alpha \int\limits_{AB} P_1(x,y)dx + \beta \int\limits_{AB} P_2(x,y)dx,$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dx = \alpha \int\limits_{AB} Q_1(x,y)dx + \beta \int\limits_{AB} Q_2(x,y)dx.$$

Путём параметрической замены криволинейный интеграл 2-го рода сводится к определенному интегралу.

Теорема 2. Если гладкая плоская кривая L задана уравнением $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$, то верна формула:

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt.$$

В частности для $y = f(x)$ при $a \le x \le b$ имеем

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x))dx.$$

Теорема 3. Если L - пространственная гладкая кривая, заданная параметрически как $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$, то интеграл

$$\int\limits_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) +$$

$$+ Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt$$

Замечание 2.Отметим, что все эти интегралы в теоремах 1,2 существуют для непрерывных функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$.

Сформулируем теорему, называемую еще как условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования .

Теорема 4. Если 1) G - односвязная область(квадрируемая для E_2 и кубируемая для E_3); 2) функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны в G вместе со своими первыми производными, то следующие утверждения эквивалентны:

I) $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ - не зависит от пути интегрирования по гладкой кривой L;

II) $\oint\limits_{C} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$ для любого замкнутого гладкого контура;

III) Выражения $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = dU(x,y,z)$ - полный дифференциал от некоторой функции $U(x,y,z)$ и при этом

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = U(B) - U(A);$$

IV) В области G имеем равенства:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};\ \ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y};\ \ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Замечание 3. Для плоского случая в односвязной области G теорема 4 легко переформулируется, полагая L - плоской кривой и $R(x, y.z) \equiv 0$.

Приведем формулы вычисления $U(x,y,z)$ в случае полного дифференциала (пункт III) теоремы 4), которые имеют вид:

$$U(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y,z)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,t,z)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,t)dt + C.$$

Здесь $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, а $M = (x,y,z)$ и $C = const$. Для случая двух переменных $U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt + C$.

Отметим, что функцию $U(x,y,z)$ можно найти, беря любую кривую L, соединяющую точки M_0 и M. При этом для подсчета $U(x,y,z)$ используют теорему 3 для параметрически заданной L. Возможны и другие виды формул для $U(x,y,z)$ с учётом разных путей интегрирования. Например

$$U(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt + C,$$

$$U(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y,z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,t,z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt + C.$$

Переход к 2-мерному случаю здесь очевиден. При подсчете интеграла по замкнутому плоскому контуру направление движения положительно, если область, ограничиваемая контуром, остается слева. При отрицательном направлении движения интеграл меняет знак на противоположный.

Пример 6. Вычислить $J = \int\limits_{L} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, где L - парабола $y = x^2$ при $-1 \le x \le 1$.

Решение. Здесь криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется на основе теоремы 2 после вычисления интеграла:

$$J = \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 + (x^4 - 2x^3)2x)dx = -\frac{14}{15}.$$

Пример 7. Вычислить $J = \int\limits_L (2a - y)dx + xdy$, где L — арка циклоида $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, где $t \in [0, 2\pi]$.

Решение. Используем теорему 2 для параметрической кривой. Здесь дифференциалы $dx = a(1 - \cos t)dt$, $dy = a \sin t dt$ и после подстановок в интегральное выражение и преобразования, получаем

$$J = \int\limits_0^{2\pi} a^2 t \sin t dt = a^2 (t \cos t \Big|_{2\pi}^{0} + \sin t \Big|_0^{2\pi}) = -2\pi a^2$$

Пример 8. Вычислить $J = \oint\limits_C (x + y)dx + (x - y)dy$, где C - контур эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемый против часовой стрелки.

Решение. Параметризуем уравнение эллипса: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ при $t \in [0, 2\pi]$ и применим теорему 2. Здесь имеем положительное движение по кривой. Очевидно, дифференцралы $dx = -a \sin t dt$, $dy = b \cos t dt$. Подставляя $x(t)$, $y(t)$, dx, dy в подинтегральное выражение, получаем

$$J = \int\limits_0^{2\pi} (ab \cos 2t - \frac{(a^2 + b^2)}{2} \sin 2t) dt = 0 .$$

При решении примеров на криволинейной можно использовать теорему о независимости его от пути интегрирования. Тогда, если подинтегральное выражение в односвязной области полный дифференциал и функция $U(x, y)$ известна, то

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = U(x, y)\Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} ,$$

В случае же, когда $U(x, y)$ не известна, то интеграл вычисляем как:

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)dy .$$

Пример 9. Вычислить интеграл $J = \int\limits_{(0,1)}^{(1,2)} xdy + ydx$.

Решение. Так как $ydx + xdy = d(xy)$ в любой области G, содержащей точки (0,1) и (1,2), то $J = \int\limits_{(0,1)}^{(1,2)} d(xy) = xy\Big|_{(0,1)}^{(1,2)} = 1 \cdot 2 = 2$. Здесь, очевидно, функция $U(x, y) = xy$.

Пример 10. Вычислить $J = \int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$ вдоль путей, не пересекающих ось OY.

Решение. Здесь $P(x,y) = \frac{y}{x^2}$, $Q(x,y) = -\frac{1}{x}$, (при $x \neq 0$). Очевидно $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$. Следовательно, в любой односвязной области, не содержащей точек оси OY, подынтегральная функция – полный дифференциал. Тогда подсчет J осуществляем по формуле $J = \int\limits_2^1 \frac{dx}{x^2} - \int\limits_1^2 dy = -\frac{3}{2}$.

Далее найти первообразную функцию от полных дифференцалов.

Пример 11. Найти $U(x,y)$, если $dU(x,y) = x^2dx + y^2dy$.

Решение. Возьмем для удобства $M_0 = (0,0)$. Тогда, используя выше приведенные формулы для подсчета $U(x,y)$ в 2-мерном случае, имеем

$$U(x,y) = \int\limits_0^x t^2dt + \int\limits_0^y y^2dt + C = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + C.$$

Пример 12. При

$$dU(x,y) = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$$

найти $U(x,y)$.

Решение. Восстановливая $U(x,y)$, имеем для $M_0 = (0,0)$:

$$U(x,y) = \int\limits_0^x t^2dt + \int\limits_0^y (x^2 - 2xt - t^2)dt + C = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^2}{3} + C.$$

Далее вычислить интегралы по пространственным кривым.

Пример 13. Вычислить интеграл $J = \int\limits_L (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$,

где L - кривая $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ при $0 \le t \le 1$, пробегаемая в направлении возрастания параметра.

Решение. Из теоремы 3, получаем, сводя J к определенному интегралу, равенство: $J = \int\limits_0^1 ((t^4 - t^6) + 2t^2t^3 2t - t^2 3t^2)dt$.

Далее, после преобразований получаем $J = \int\limits_0^1 (3t^6 - 2t^4)dt = \frac{1}{35}$.

Пример 14. Вычислить $J = \int\limits_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, где C - окружность, получаемая пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и плоскости $y = xtg\alpha$, $(0 < \alpha < \pi)$, пробегаемая в направлении против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительных x.

Решение. Окружность C лежит в плоскости $y = xtg\alpha$, и ее радиус равен a. Запишем ее параметрическое уравнение в виде: $z = a\sin\varphi$, $\overline{y} = a\cos\varphi$ при $0 \le \varphi \le 2\pi$, где $\overline{y} = xtg\alpha$, а φ - угол, образованный радиусом окружности с прямой и отсчитываемый в направлении движения против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительных x. В системе $0xyz$ параметрические уравнения окружности имеют вид: $x = a\cos\alpha\cos\varphi$,
$y = a\sin\alpha\cos\varphi$, $z = a\sin\varphi$ при $0 \le \varphi \le 2\pi$. По теореме 3 после всех параметрических замен и преобразований сводим криволинейный интеграл к определенномн:

$$J = \int\limits_0^{2\pi} a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)d\varphi = 2(\cos\alpha - \sin\alpha)a^2\pi .$$

Здесь использованы равенства:

$$x'(\varphi) = -a\cos\alpha\sin\varphi,\ y'(\varphi) = -a\sin\alpha\sin\varphi,\ z'(\varphi) = a\cos\varphi .$$

и применения формул, приведённых в теореме 3, где параметр $t = \varphi$.

Далее найти криволинейные интегралы от полных дифференциалов.

Пример 15. Вычислить $J = \int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} (xdx + y^2dy - z^3dz$.

Решение. В силу равенства

$$d(\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{z^4}{4}) = xdx + y^2dy - z^3dz .$$

Нетрудно убедиться здесь выполнение заключения III) теоремы 4 для функции $U(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{z^4}{4}$. Тогда

$$J = \int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} (xdx + y^2dy - z^3dz = (\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{z^4}{4})\Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} = -53\frac{7}{12}$$

Пример 16. При

$$dU = (1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z})dx + (\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2})dy - \frac{xy}{z^2}dz$$

найти $U(x,y,z)$.

Решение. Выражение dU является полным дифференциалом в любой области, не содержащей (0,0,0) и точек плоскостей *0xy*, *0xz*. Тогда на основе формул восстановления функции $U(x,y,z)$, получаем

$$U(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}(1-\frac{1}{y_0}+\frac{y_0}{z_0})dt+\int_{y_0}^{y}(\frac{x}{z_0}+\frac{x}{t^2})dt+\int_{z_0}^{z}\frac{-xy}{t^2}dt+C,$$

где (x_0,y_0,z_0) — любая точка. Полагая $x_0=y_0=z_0=1$, имеем

$$U(x,y,z)=\int_1^x dt+\int_1^y(x+\frac{x}{t^2})dt+\int_1^z\frac{-xy}{t^2}dt+C.$$

После интегрирования получаем: $U(x,y,z)=x-\dfrac{x}{y}+\dfrac{xy}{z}+C_1$, где C_1 - произвольная постоянная.

Интеграл 2-го рода можно вычислять также и по формуле Грина:

$$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_G(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy,$$

где C - замкнутый контур, ограничивающий область G.

Пример 17. Вычислить по формуле Грина $J=\oint_C xy^2dy-x^2ydx$, где C - окружность $x^2+y^2=a^2$.

Решение. Обозначим через G замкнутую область $x^2+y^2\le a^2$.Тогда

$$J=\iint_G(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_G(x^2+y^2)dxdy.$$

Здесь $P(x,y)=-x^2y$, $Q(x,y)=xy^2$. Переходя к полярным координатам, получаем $\iint_G(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho^2\rho d\rho=\dfrac{\pi a^4}{2}$ или $J=\dfrac{\pi a^4}{2}$.

1.6. Применение криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода

1. Вычисление длины кривой L по формуле $|L|=\int_L dl$.

Пример 18. Найти длину кривой винтовой линии L, заданной параметрически $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$ при $t\in[0,4\pi]$ и $a>0$.

Решение. Используем теорему 1 о сведении криволинейного интеграла 1-го рода к определенному интегралу. Тогда длина

$$|L| = \int_L dl = \int_0^{4\pi} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{4\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2}\,dt = \int_0^{4\pi} a\sqrt{1+1}\,dt = 4\pi a\sqrt{2}.$$

Аналогично можно вычислять и длину плоской кривой L, заданной $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ по формуле $\int_L dl = \int_\alpha^\beta \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$.

2. Вычисление площади ΔG плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла 2-го рода по формулам:

$$\Delta G = \oint_C xdx = -\oint_C ydy = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx).$$

В зависимости от задачи выбирается та или иная формула. Здесь C - контур, ограничивающий квадрируемую область G и пробегаемый в положительном направлении, то есть область G остаётся слева.

Пример 19. Вычислить площадь эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$.

Решение. Введем параметрическое представление эллипса: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, при $t \in [0, 2\pi]$. Тогда при возрастании параметра область остается слева, то есть имеем положительное движение. Применим здесь три формулы площади. Имеем

$$\Delta S = \oint_C xdy = ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)dt = \pi ab + \frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi} = \pi ab.$$

Аналогично, и с другой формулой

$$\Delta S = -\oint_C ydx = -\int_0^{2\pi} -ab\sin^2 t dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)dt = \pi ab - \sin 2t\Big|_0^{2\pi} = \pi ab$$

Отметим, что третья формула есть среднее арифметическое первых двух. Имеем

$$\Delta S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

Отсюда видим, что по третьей формуле вычисление быстрее и проще.

3. Вычисление массы кривой и центра масс. Если $\rho = \rho(x, y, z)$ - линейная плотность кривой L в точке (x, y, z), то масса пространственной кривой L вычисляется по формуле $M = \int_L \rho(x, y, z)dl$. Соответственно для плоской кривой L масса $M = \int_L \rho(x, y)dl$.

Координаты центра масс (x_0, y_0, z_0) пространственной кривой вычисляются по формулам:

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_L x\rho(x,y,z)dl\,,\ y_0 = \frac{1}{M}\int_L y\rho(x,y,z)dl\,,\ \ z_0 = \frac{1}{M}\int_L z\rho(x,y,z)dl$$

Нетрудно их записать и для плоской кривой с плотностью $\rho = \rho(x, y)$.

Пример 20. Найти координаты центра масс винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$ при $t \in [0,4\pi]$ и для $\rho(x,y,z) = x^2$.

Решение. Найдем сначала массу кривой. Имеем

$$M = \int_L x^2 dl = \int_0^{4\pi} a^2\cos^2 t\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2}\,dt = \int_0^{4\pi} a^3\cos^2 t\sqrt{2}dt =$$

$$= \frac{a^3\sqrt{2}}{2}\int_0^{4\pi}(1+\cos 2t)dt = 2\pi a^3\sqrt{2}\,.$$

Найдем теперь координаты центра масс: координата

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_L x^3 dl = \frac{a^3}{M}\int_0^{4\pi}\cos^3 t\sqrt{2}dt = \frac{a^3\sqrt{2}}{M}\int_0^{4\pi}(1-\sin^2 t)d(\sin t)dt = 0$$

и координата

$$y_0 = \frac{1}{M}\int_L yx^2 dl = \frac{a^3}{M}\int_0^{4\pi}\sin t\cos^2 t\sqrt{2}dt = \frac{a^3\sqrt{2}}{M}\int_0^{4\pi}-\cos^2 t d(\cos t)dt = 0\,.$$

Координата же центра масс по OZ равна

$$z_0 = \frac{1}{M}\int_L zx^2 dl = \frac{a^3}{M}\int_0^{4\pi} t\cos^2 t\sqrt{2}dt = \frac{a^3\sqrt{2}}{2M}\int_0^{4\pi} t(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^3}{M\sqrt{2}}\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^{4\pi} + \int_0^{4\pi} t\cos 2t dt\right) = \frac{8\pi^2 a^3}{M\sqrt{2}} = 2\pi\,.$$

Здесь $\int_0^{4\pi} t\cos 2t dt = 0$ после интегрирования по частям. Итак $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 2\pi$ и $M_0 = (0,0,2\pi)$ – центр масс.

ГЛАВА 2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1. Способы задания поверхности

Рассмотрим способы задания поверхности в трёхмерном пространстве.

1. Параметрическое задание. Пусть поверхность $S=\{s\}$ точек s задана непрерывным отображением:

$$(x,y)\to(x,y,z=f(x,y)).$$

Рассмотрим на этой поверхности семейство кривых, зависящих от параметра u. При этом через каждую точку поверхности проходит только одна кривая этого семейства. Далее рассмотрим также ещё одно семейство, зависящее от параметра v. Линии семейств, пересекаясь в одной точке поверхности, образуют координатную сеть. Таким образом, x,y,z являются функциями параметров u,v:

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v).$$

2. Явный способ задания. Пусть на плоскости (x,y) имеется область D и в ней определена непрерывная функция $z=f(x,y)$.Рассмотрим отображение плоской области D в область $S=\{s\}$ трёхмерного пространства

$$(x,y)\to(x,y,z=f(x,y)).$$

Совокупность точек $\{s\}$ трёхмерного пространства образует поверхность.

2.2. Сторона поверхности и её ориентация

Рассмотрим гладкую поверхность $\{s\}$, на которой выберем замкнутый кусочно-гладкий контур. Возьмём на нём точку и проведём в ней нормаль к поверхности, которой припишем одно из двух возможных направлений. Будем двигаться по этому контуру. Возможны следующие ситуации:

1. Движение по любому замкнутому контуру приводит к тому, что нормаль возвращается в исходное положение.

2. Существует замкнутый контур, при обходе которого, направление нормали меняется на противоположное.

Мы будем в первом случае называть поверхность двусторонней, а во втором − односторонней. Подчеркнём, что на двусторонней поверхности выбор направления нормали в одной точке однозначно определяет это направление в других точках. Примером двусторонней поверхности является гладкая поверхность, заданная параметрически.

Определим, теперь, ориентацию поверхности. Пусть поверхность $\{s\}$− двусторонняя и ограничена простым замкнутым контуром L. Пусть наблюдатель двигается по L так, что нормаль направлена от ног к голове. Если он всё время видит $\{s\}$ слева от себя, то направление обхода назовём положительным, а в противном случае − отрицательным.

Выбранное положительное (отрицательное) направление обхода контура, ограничивающего поверхность, назовём ориентацией поверхности.

2.3. Поверхностный интеграл 1-го рода

Пусть имеется гладкая (кусочно-гладкая) поверхность S. В точках этой поверхности задана функция $f(x,y,z)$. Интеграл вида $\iint\limits_S f(x,y,z)dS$ называется поверхностным интегралом I рода от функции $f(x,y,z)$ по поверхности S. С физической точки зрения он представляет массу поверхности в точках которой задана плотность $f(x,y,z)$.

Приведём основные свойства поверхностного интеграла первого рода.

Свойство 1. Если $u = f(x,y,z)$ непрерывна на S, то $f(x,y,z)$ интегрируема.

Свойство 2. (линейность).Если $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ интегрируемы на S, то их произведение и сумма $\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)$ тоже интегрируемы на S для любых α,β

Свойство 3. Для неперекрывающихся гладких (кусочно-гладких) поверхностей S_1 и S_2 при интегрируемой $f(x,y,z)$ будет существовать

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{S_1} f(x,y,z)dS_1 + \iint\limits_{S_2} f(x,y,z)dS_2,$$

где $S = S_1 \cup S_2$. Здесь S_1 и S_2 называются неперекрывающимися, если $S_1 \cap S_2$ содержит конечное число кусочно-гладких кривых (может быть и пустое). Это свойство 3 называется аддитивностью интеграла по области.

Свойство 4. $\iint\limits_S 1dS = \Delta S$ - площадь поверхности S.

Свойство 5. Если $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ на S и функции интегрируемы, то

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS \le \iint\limits_S g(x,y,z)dS$$

(монотонность интеграла).

Свойство 6. Если $f(x,y,z)$ интегрируема на S, то $|f(x,y,z)|$ тоже интегрируема на S и

$$\left|\iint\limits_S f(x,y,z)dS\right| \le \iint\limits_S |f(x,y,z)|dS.$$

2.4. Сведение поверхностного интеграла 1-го рода к двойному

Случай 1. Параметрически заданная поверхность. Пусть поверхность S кусочно-гладкая, задана как $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, где $(u,v) \in D$ – квадрируемая область и $f(x,y,z)$ - непрерывна на S. Тогда существует

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

Здесь в интеграле 1-го рода коэффициенты Гаусса E, G, F имеет вид:

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2, \qquad G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2, \qquad F = x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v'$$

и поверхностный интеграл 1-го рода существует, если существует двойной интеграл. Оба интеграла существуют, если $f(x,y,z)$ непрерывна на S.

Случай 2. Явное задание поверхности S. Если S - гладкая поверхность, заданная уравнением $z = z(x,y)$ при $(x,y) \in D$ - квадрируемой области, и $f(x,y,z)$ – ограниченная функция на S, то интеграл 1-го рода

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$$

и существует, если существует двойной интеграл. Для гладкой S и непрерывной $f(x,y,z)$, оба интеграла существуют одновременно.

В случае поверхности, заданной уравнением $x = x(y,z)$

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_1} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\,dydz,$$

где $(y,z) \in D_1$ - квадрируемая область, а также при $y = y(x,z)$ имеем

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_2} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}\,dxdz$$

для $(x,z) \in D_2$ - квадрируемой области. Отметим, что все эти формулы получаются как частные для параметрически заданной S.

Пример 21. Вычислить $\iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ для S - части цилиндрической поверхности : $x = a\cos u$, $y = a\sin u$, $z = v$, $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le h$.

Решение. Применим формулу для вычисления интеграла для параметрически заданной поверхности. Имеем $E = a^2$, $G = 1$, $F = 0$. Поэтому

$$\iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{h} \frac{adudv}{\sqrt{a^2 + v^2}} = 2\pi a\int_0^h \frac{dv}{\sqrt{a^2 + v^2}} = 2\pi a \ln\frac{h + \sqrt{a^2 + h^2}}{a}.$$

.

Здесь область D - квадрируемый прямоугольник $[0, 2\pi] \times [0, h]$.

Пример 22. Вычислить $J = \iint\limits_S z^2 dS$ по полной поверхности конуса: $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2$.

Решение. Пусть S_1 - боковая поверхность конуса, а S_2 – его основание. По аддитивности поверхностного интеграла 1-го рода получаем $\iint\limits_S z^2 dS = \iint\limits_{S_1} z^2 dS_1 + \iint\limits_{S_2} z^2 dS_2$. К первому интегралу применим формулу для явного задания поверхности: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Поскольку же $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, то интеграл

$$\iint\limits_{S_1} z^2 dS_1 = \iint\limits_{D_1} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy = \iint\limits_{D_1} (x^2 + y^2)\sqrt{2}dxdy =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2} \rho^3 d\rho d\varphi = 8\sqrt{2}\pi .$$

Здесь $D_1 = \{x^2 + y^2 \le 4\}$ и в двойном интеграле осуществлен переход к полярным координатам. На основании конуса $z = 2$. Поэтому $\iint\limits_{S_2} z^2 dS_2 = = \iint\limits_{S_2} 4dS_2 = 4\Delta S_2$. Но $\Delta S_2 = 4\pi r^2$, так как основание конуса – круг радиуса равного 2. Окончательно $J = 8\sqrt{2}\pi + 16\pi$.

2.5. Поверхностный интеграл 2-го рода

Пусть S − квадрируемая, гладкая двусторонняя поверхность. Фиксируем одну из её сторон и $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ - функции, определенные на S. Тогда интеграл $J = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$ называется поверхностным интегралом 2-го рода по выбранной стороне поверхности. Здесь $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - косинусы нормали к поверхности, направление которой согласовано с выбранной стороной. Поверхностный интеграл 2-го рода записывают еще как $J = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$. При переходе к другой стороне поверхности J меняет знак на противоположный. Отметим, что основные свойства поверхностного интеграла 2-го рода такие же, как у поверхностного интеграла 1-го рода. Это линейность относительно подынтегральной функции и аддитивность по области при $S = S_1 \cup S_2$ для неперекрывающихся поверхностей S_1 и S_2. Также, если подынтегральная функция непрерывна, то поверхностный интеграл 2-го рода существует.

2.6. Сведение поверхностного интеграла 2-го рода к двойному

Случай 1. Явное задание поверхности. Пусть гладкая (или кусочно-гладкая) поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$ и взята верхняя часть этой поверхности, а $R(x, y, z)$ - ограниченная на S функция. Тогда справедливо равенство $\iint\limits_S R(x, y, z)dxdy = \iint\limits_D R(x, y, z(x, y))dxdy$, где D - проекция поверхности S на плоскость 0xy. Интеграл слева существует, если существует двойной интеграл. Если же берется нижняя сторона поверхности, то

$$\iint\limits_S R(x, y, z)dxdy = -\iint\limits_D R(x, y, z(x, y))dxdy$$

Здесь нижняя и верхняя стороны поверхности S отличаются противоположным направлением нормали. Отсюда и противоположные знаки в двойном интеграле. Аналогично получаем формулы

$$\iint\limits_S R(x, y, z)dydz = \pm\iint\limits_{D_1} P(x(y, z), y, z)dydz$$

$$\iint\limits_S Q(x, y, z)dzdx = \pm\iint\limits_{D_2} Q(x, y(z, x), z)dzdx$$

Здесь D_1 и D_2 проекции S на плоскость *0yz* и *0zx* соответственно и оба интеграла – поверхностный и двойной существуют для непрерывных P, Q, R.

Случай 2. Параметрическое задание поверхностей. Пусть гладкая (или кусочно-гладкая) поверхность S задана равенствами:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in D,$$

а $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ ограниченные на S функции. Тогда для выбранной стороны поверхности S верно равенство:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_D (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\sqrt{EG - F^2}\,dudv,$$

где E, G, F - коэффициенты Гаусса, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, P, Q, R берутся в точке $M = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Здесь косинусы нормали имеют вид:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где величины

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

и $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2}$. Знаки $\pm$ в косинусах нормали соответствуют выбранной стороне поверхности S. При этом имеем значение

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint\limits_D (PA + QB + RC)dudv,$$

где подинтегральные функции в двойном интеграле берутся в точке $M = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ и $\pm$ соответствует стороне поверхности.

Пример 23. Вычислить $\iint\limits_S zdxdy$, где S - нижняя сторона части конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, где $0 \le z \le h$.

Решение. Поверхность S ориентирована нормалями, составляющими тупой угол с осью *0z*. Тогда $\cos\gamma$ будет отрицательный и в формуле для явного задания поверхности надо брать знак « - ». При этом сводим интеграл к двойному по формуле

$$\iint\limits_S zdxdy = -\iint\limits_{x^2+y^2 \le h^2} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h \rho^2 d\rho = -\frac{2}{3}\pi h^2,$$

который вычисляется через полярную замену. Область D здесь есть круг $x^2 + y^2 \le h^2$ и является проекцией поверхности S на плоскость *0xy*.

Пример 24. Вычислить $J = \iint\limits_S \dfrac{dydz}{x} + \dfrac{dxdz}{y} + \dfrac{dxdy}{z}$, где S – часть эллипсоида

$$x(u,v) = a\cos u\cos v,\ y(u,v) = b\cos u\cos v,\ z(u,v) = c\sin v$$

при

$$u \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right],\ v \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$$

и ориентированного внешней нормалью.

Решение. Здесь подинтегральные функции положительные, а углы, образованные внешней нормалью с осями координат, острые. Поэтому все косинусы положительные. Следовательно, перед интегралом надо ставить знак «+». Далее используем формулу для подсчета поверхностного интеграла второго родадля параметрически заданной поверхности. Здесь:

$$x'_u = -a\sin u\cos v,\quad y'_u = b\cos u\cos v,\ z'_u = 0;$$

$$x'_v = -a\sin u\sin v,\quad y'_v = -b\sin u\sin v,\ z'_v = c\cos v,$$

а функции $P = \frac{1}{x}$, $Q = \frac{1}{y}$, $R = \frac{1}{z}$. Тогда нетрудно показать, что функция $PA + QB + CR = (\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a})\cos v$. Преобразуя поверхностный интеграл к двойному, получаем:

$$J = k\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} du \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos v dv = k\frac{\pi}{12}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}),$$

где $k = \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}$.

Пример 25. Вычислить $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, где S - внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Решение. Здесь $P = x$, $Q = y$, $R = z$. Поверхность $S = S_1 \cup S_2$, где S_1 - верхняя полусфера, а S_2 - нижняя полусфера. Поверхность S_1 задана уравнением $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, а S_2 уравнением $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.Из аддитивности поверхностного интеграла 2-го рода

$$J = \iint\limits_{S_1} xdydz + ydzdx + zdxdy + \iint\limits_{S_2} xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

Подсчитаем эти интегралы отдельно. Для явного задания поверхности $z = z(x, y)$ косинусы нормали:

$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\pm\Delta}, \quad \cos\beta = \frac{-z'_y}{\pm\Delta}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\pm\Delta},$$

при $\Delta = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ для обеих полусферных поверхностей S_1 и S_2. Поскольку нормаль к поверхности S_1 составляет с осью $0z$ острый угол, то $\cos\gamma > 0$ (так как здесь берется верхняя сторона полусферы S_1). Тогда в $\cos\alpha$, $\cos\beta$ берется перед Δзнак «+». имеем для S_1:

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Отсюда для S_1 косинусы

$$\cos\alpha = \frac{x}{a}, \quad \cos\beta = \frac{y}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{a}.$$

Рассмотрим интеграл $J_1 = \iint\limits_{S_1} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds$. Для поверхности S_1 при $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ значение

$$J_1 = \iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} (\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a} + \frac{(a^2 - x^2 - y^2)}{a}) \cdot \frac{adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Далее, при замене $x = a\rho\cos\varphi$, $y = a\rho\sin\varphi$ получаем

$$J_1 = \iint\limits_{x^2+y \ \le a^2} \frac{a^2 dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = a^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 2\pi a^2 .$$

Поскольку для S_2 (нижней полусферы) нормаль составляет по нижней ее стороне тупой угол, то в косинусах нормали перед Δ надо брать знак «-», так как $\cos\varphi < 0$. Для S_2 имеем $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, а производные

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} .$$

Отсюда для S_2, с учетом значения Δ, косинусы

$$\cos\alpha = \frac{x}{a}, \quad \cos\beta = \frac{y}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{a} .$$

Рассмотрим $J_2 = \iint\limits_{S_2} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds$. Тогда для поверхности S_2 при $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ значение

$$J_2 = \iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} (\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a} + \frac{(a^2 - x^2 - y^2)}{a}) \cdot \frac{adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 2\pi a^2 .$$

который вычисляется так же как и J_1 при переходе в двойном интеграле к полярным координатам. Отсюда $J = J_1 + J_2 = 4\pi a^2$.

2.7. Формула Стокса

Эта формула связывает поверхностный и криволинейный интегралы:

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_C Pdx+Qdy+Rdz\,,$$

где S - ограниченная кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность с кусочно-гладкой границе C, а функции P,Q,R в некоторой окрестности поверхности S непрерывны вместе со своими частными производными 1-го порядка. Направление обхода по контуру C таково, чтобы с учетом выбора стороны поверхности поверхность S оставалась слева. Формулу Стокса обычно применяют для вычисления криволинейного интеграла 2-го рода. При этом выбирают подходящую поверхность, где лежит контур C, чтобы вычисление поверхностного интеграла в этой формуле было сравнительно просто.

Пример 26. Вычислить интеграл $J=\oint_C ydx+zdy+xdz$ по формуле Стокса, где C - окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси *0x*. Ее радиус равен a.

Решение. Для применения формулы Стокса удобнее из двух поверхностей (сферы и плоскости), где лежит контур C, взять плоскость, поскольку это дает упрощение подынтегрального выражения и подсчета косинусов нормали. Имеем по формуле Стокса при $P=y$, $Q=z$, $R=x$ интеграл

$$J=-\iint_S dydz+dzdx+dxdy=-\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)ds\,.$$

Здесь $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ направляющие косинусы нормали к плоскости $x+y+z=0$, выбранной за поверхность S. Так как нормаль к этой плоскости образует с положительным направлением оси 0z острый угол, то $\cos\gamma>0$. Поэтому в каждом из $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (см. пример 25) перед радикалом $\Delta=\sqrt{1+z_x^{'2}+z_y^{'2}}$ надо брать знак «+». Очевидно, после несложных подсчетов для $z=-x-y$, получаем $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Тогда $J=-\sqrt{3}\iint_S dS=-\sqrt{3}\Delta S=-\sqrt{3}\pi a^2$, так как площадь круга C, лежащего в плоскости S, равна πa^2.

Пример 27. Вычислить $J=\oint_C(y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)+(x^2+y^2)$,

где C - кривая $x^2+y^2+z^2=4x$, $x^2+y^2=2x$ (с $z>0$), пробегаемая так, что ограниченная на внешней стороны сферы $x^2+y^2+z^2=4x$ её наименьшая область остается слева.

Решение. Применим формулу Стокса для функций $P = y^2 + x^2$, $Q = x^2 + z^2$, $P = x^2 + y^2$. Тогда

$$J = 2\iint_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy =$$

$$= 2\iint_S ((y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma)dS,$$

где S — кусок сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$, вырезанный из нее цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы нормали к поверхности S. Вычислим эти косинусы с учетом того, что нормаль образует с положительным направлением оси 0z острый угол и $z = \sqrt{4x - x^2 - y^2}$.

Используя формулу для косинусов (см. пример 25) и, беря перед радикалом знак «+», получаем $\cos\alpha = \dfrac{x-2}{z\Delta}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{z\Delta}$, $\cos\gamma = \dfrac{1}{\Delta}$, где $\Delta = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}$. Так как поверхность S, ограниченная контуром C, проецируется на плоскость *0xy* в замкнутый круг $x^2 + y^2 \le 2x$, то поверхностный интеграл по этому кругу D:

$$J = 2\iint_D \left(\frac{(y-z)(x-2) + (z-x)y}{z} + x - y\right)dxdy = 4\iint_D \left(1 - \frac{y}{z}\right)dxdy = 4\pi,$$

поскольку $\iint_D \frac{y}{x}dxdy = 0$, что нетрудно подсчитать при полярной замене.

2.8. Формула Остроградского-Гаусса

Пусть S — кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая замкнутую трехмерную область V, а функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ - непрерывны в V вместе с частными производными 1-го порядка. При существовании тройного интеграла по V верна формула Остроградского - Гаусса:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS =$$

$$= \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S. В частности, для вычисления объема *JV* тела *V* при соответствующем выборе функций P, Q, R получаем

$$JV = \frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds = \iint\limits_S x\cos\alpha ds = \iint\limits_S y\cos\beta ds =$$

$$= \iint\limits_S z\cos\gamma ds .$$

Пример 28. Вычислить $J = \iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где S есть внешняя сторона границы куба K: $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a$.

Решение. Используя формулу Остроградского - Гаусса, получаем

$$J = 2\iiint\limits_K (x+y+z)dxdydz = 2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x+y+z)dz =$$

$$= 2\int_0^a dx\int_0^a (a(x+y) + \frac{a^2}{2})dy = 2\int_0^a (a^2 x + a^3)dx = 3a^4 .$$

Пример 29. Вычислить $J_1 = \iint\limits_{S_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2 d\cos\gamma)dS_1$, где S_1 - часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, ($0 \le z \le h$), а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы внешней нормали к S_1. **Решение.** Поскольку поверхность S_1 не замкнута, то сразу использовать формулу Остроградского - Гаусса здесь нельзя. С этой целью замкнем ее, присоединив к ней S_2 - круг $x^2 + y^2 \le h^2$, лежащий в плоскости $z = h$. Очевидно имеем:

$$J = \iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)ds = 2\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz ,$$

где поверхность $S = S_1 \cup S_2$, а V — тело, ограниченное поверхностью S. В тройном интеграле перейдем к цилиндрическим координатам. Тогда

$$J = 2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^h \rho d\rho\int_\rho^h (\rho(\cos\varphi + \sin\varphi) + z)dz =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^h (\rho(h-\rho)(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{h^2}{2} - \frac{\rho^2}{2})\rho d\rho = \frac{\pi}{2}h^4 .$$

По аддитивности поверхностного интеграла 2-го рода $J_1 = J - J_2$, где $J_2 = \iint\limits_{S_2} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)ds = h^2\iint\limits_{S_2} ds = h^2\iint\limits_{D_2} dxdy = \pi h^4$,

поскольку на S_2 косинусы $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, а $\cos\gamma = 1$ и $z=h$. Область D_2 - круг $x^2 + y^2 \le h^2$ в плоскости $0xy$. Отсюда $J_1 = \frac{\pi}{2}h^4 - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2}h^4$.

2.9. Приложение поверхностных интегралов

1. Вычисление площади поверхности S. Так как $\Delta S = \iint\limits_S dS$, то площадь ΔS вычисляется через поверхностный интеграл первого рода.

Пример 30. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, расположенной в цилиндре: $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. Поверхность S здесь вырезается цилиндром из конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Цилиндр пересекается с плоскостью $0xy$ по окружности $(x-1)^2 + y^2 = 1$, а S проецируется на $0xy$ в круг $(x-1)^2 + y^2 \le 1$. Для $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеем $1 + z_x'^2 + z_y'^2 = 2$, а

$$\Delta S = \iint\limits_S dS = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy = \sqrt{2}\iint\limits_D dxdy = \pi\sqrt{2},$$

ибо $\iint\limits_D dxdy = \Delta D$ - площадь круга $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ с радиусом 1.

2. Вычисление массы поверхности. Если $\rho = \rho(x, y, z)$ - поверхностная плотность на поверхности S, то масса $M = \iint\limits_S \rho(x, y, z)ds$.

Пример 31. Найти массу полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ при $z \ge 0$,если поверхностная плотность $\rho(x, y, z) = \dfrac{z}{a}$.

Решение. Поскольку $M = \dfrac{1}{a}\iint\limits_S zdS$, где S - заданная полусфера, то преобразуем поверхностный интеграл 1-го рода в двойной. На S функция $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ и $ds = \dfrac{adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$. Ее проекция на $0xy$ есть область D — круг $x^2 + y^2 \le a^2$. Тогда масса

$$M = \frac{1}{a}\iint\limits_S zds = \frac{1}{a}\iint\limits_D adxdy = \iint\limits_D dxdy = \pi a^2,$$

то есть площади круга $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le a^2\}$.

3. Вычисление координат центра масс. Известо, что

$$x_C = \frac{\iint\limits_S x\rho(x, y, z)ds}{M}, \quad y_C = \frac{\iint\limits_S y\rho(x, y, z)ds}{M}, \quad z_C = \frac{\iint\limits_S z\rho(x, y, z)ds}{M},$$

где M - масса поверхности.

Пример 32. Найти центр масс полусферы из примера 31.

Решение. В примере 31 получили $M = \pi a^2$. Тогда при $\rho = \dfrac{z}{a}$

$$x_C = \frac{\iint\limits_S xzds}{\pi a^3}, \quad y_C = \frac{\iint\limits_S yzds}{\pi a^3}, \quad z_C = \frac{\iint\limits_S z^2 ds}{\pi a^3}.$$

Найдем по отдельности интегралы в числителях. Используя здесь сведение поверхностного интеграла 1-го рода к двойному интегралу и полярную замену, получаем при $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $ds = \dfrac{adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ значение

$$\iint\limits_S xzds = a\iint\limits_D xdxdy = a\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho^2 \cos\varphi d\rho = 0, \quad (\text{ибо} \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0).$$

Аналогично

$$\iint\limits_S yzds = a\iint\limits_D ydxdy = a\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho^2 \sin\varphi d\varphi = 0,$$

так как $\int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 0$. Здесь D — круг $x^2 + y^2 \le a^2$. Таким образом, координаты $x_C = 0$, $y_C = 0$. Найдем теперь координату z_C. Интеграл

$$\iint\limits_S z^2 ds = a\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy = a\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho\sqrt{a^2 - \rho^2}\, d\rho =$$

$$= 2\pi a\int\limits_0^a \rho\sqrt{a^2 - \rho^2}\, d\rho = -2\pi a(a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{3}\Big|_0^a = 2\pi a\frac{a^3}{3}.$$

Отсюда $z_C = \dfrac{2a}{3}$.

ГЛАВА 3. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

3.1. Основные понятия векторного анализа

Пусть в некоторой области $D \subset R_3$ (или $D \subset R_2$) задано векторное поле $A = Pi + Qj + Rk$, где функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ определены в D. Далее, обозначим вектор $A = (P, Q, R)$.

Определение 4. Если P, Q, R гладкие функции, то

1) скаляр $divA = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ называется дивергенцией поля A в D.

2)вектор (определяемый векторным произведением) есть **ротор:**

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = i(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) + j(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) + k(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = rotA,$$

3) $\nabla = i\dfrac{\partial}{\partial x} + j\dfrac{\partial}{\partial y} + k\dfrac{\partial}{\partial z}$ - вектор **набла** (оператор Гамильтона) .

Определение 5. Для векторного поля A в D и гладкой (или кусочно-гладкой) кривой L криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ называется работой поля A вдоль кривой L. Если же L - замкнутая (контур C), то этот интеграл называется **циркуляцией поля** A по контуру C и обозначается как $\oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz$.

Определение 6. Для векторного поля A в D и ориентированной двусторонней поверхности S поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds = \iint\limits_S A_n ds$$

называется **потоком поля** A через S. Здесь A_n - проекция A на нормаль n.

Определение 7. Векторное поле A в D называется потенциальным, если существует функция $U = U(x, y, z)$ - **потенциал поля** A.такая, что

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x}i + \frac{\partial U}{\partial y}j + \frac{\partial U}{\partial z}k = A$$

Определение 8. Поле A в D называется **соленоидальным,** если в D существует векторное поле W такое, что $A = rotW$. Поле W в этом случае называется **векторным потенциалом поля** A.

В терминах теории поля формула Остроградского-Гаусса записывается как $\oiint\limits_S A_n ds = \iiint\limits_V divAdxdydz$, где $\oiint\limits_S$ — поверхностный интеграл второго рода по замкнутой поверхности, ограничивающей тело V.Формула же Стокса имеет вид: $\oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S (rotA)_n ds$, где C - замкнутый гладкий (или кусочно-гладкий) контур, ограничивающий двустороннюю поверхность S, причем направление нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности выбрано так, что бы для наблюдателя, стоящего на поверхности S головой по направлению нормали обход контура C был бы против часовой стрелки (положительный).

Имеются утверждения (основанные на прежних теоремах о криволинейных и поверхностных интегралах) связывающие основные понятия векторного анализа (теории поля). Приведём одно из них.

Утверждение. Необходимым и достаточным условием потенциальности поля A в поверхностно односвязной области D является равенство $rotA = \overline{0}$ в D. При этом поле называют **безвихревым** и работа поля равна $\int\limits_{AB} Pdx + qdy + Rdz = U(B) - U(A)$,где A- начало, а B- конец кривой AB.
На основе теоремы 4 о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования получаем, что для **потенциальности поля** A необходимо и достаточно равенства нулю циркуляции по любому замкнутому контуру.

Пример 33. Найти поток вектора $A = zk$ через верхнюю полусферу S $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ при $z \geq 0$ в направлении внешней нормали.

Решение. По определению поток равен $\iint\limits_S A_n ds$, где A_n- проекция на внешнюю нормаль к полусфере. Очевидно, $A_n = z$, где $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.
Имеем

$$\iint\limits_S A_n ds = \iint\limits_S zds = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

где область D- проекция S на плоскость OXY. Здесь D есть круг: $x^2 + y^2 \leq a^2$. Отсюда $\iint\limits_S A_n ds = a\iint\limits_D dxdy = a\Delta D = \pi a^3$, где ΔD- площадь круга, равная πa^2.

Пример 34. Найти поток вектора $A = x^3 i + y^3 j + z^3 k$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

Решение. Здесь поверхность S замкнута и ограничивает тело V в виде шара: $x^2 + y^2 + z^2 \leq x$. Воспользуемся здесь связью потока и дивергенцией (по формуле Остроградского-Гаусса). Очевидно, $divA = 3(x^2 + y^2 + z^2)$. Тогда поток

$$\oiint\limits_S A_n ds = \iiint\limits_V divA dxdydz = 3\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = J \ .$$

Переходя к сферическим координатам в тройном интеграле, получаем

$$J = 3\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\varphi\cos\theta} \rho^4 d\rho = \frac{3}{5}\int_0^{\pi} \sin^6 \varphi d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta =$$

$$= \frac{12}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta = \frac{\pi}{5}$$

Здесь для подсчета определенных интегралов от $\sin^6 \varphi$ и $\cos^5 \theta$ использован переход при замене переменных к *Бета-функции.*

Пример 35.Для вектора $A = (y+z)i + (z+x)j + (x+y)k$ найти работу поля вдоль меньшей дуги окружности большего круга сферы S $x^2 + y^2 + z^2 = 25$,если дуга соединяет точки $M(3,4,0)$, $N(0,0,5)$.

Решение. Эта дуга лежит в плоскости $y = \frac{4}{3}x$ и есть четверть окружности радиуса 5. Параметризуем её при параметре φ равного углу, образованного радиус-вектором точки кривой, лежащей в плоскости $y = \frac{4}{5}x$ с его проекцией на плоскость OXY. Тогда параметрическое уравнение данной дуги имеет вид: $x = 3\cos\varphi, y = 4\cos\varphi, z = 5\sin\varphi$ при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Здесь функции $P = (y+x), Q = (z+x), R = (x+y)$. Тогда работа равна

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} (7\cos 2\varphi - \frac{12}{5}\sin 2\varphi)d\varphi =$$

$$= 5(\frac{7}{2}\sin 2\varphi + \frac{6}{5}\cos 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -12$$

Здесь $dx = -3\sin\varphi d\varphi, dy = -4\sin\varphi d\varphi, dz = 5\cos\varphi d\varphi$, а P, Q, R вычислены для параметрически заданных $x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)$ и применена формула вычисления криволинейного интеграла 2-го рода через определенный интеграл.

Пример 36. Найти циркуляцию $J = \oint\limits_C ydx + zdy + xdz$, где C окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси OX.

Решение. Применим здесь связь циркуляции с ротором векторного поля. Очевидно здесь вектор $A = yi + zj + xk$. Тогда имеем $J = \oint\limits_C ydx + zdy + xdz = \iint\limits_S (rotA)_n dS$, где в качестве поверхности S взят круг радиуса a, лежащий в плоскости $x + y + z = 0$. Нетрудно подсчитать, что поток ротора вычисляется как

$$\iint\limits_S (rotA)_n dS = -\iint\limits_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) dS,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы нормали к поверхности S - плоскости $x + y + z = 0$. Угол между нормалью и OZ острый. Тогда

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и интеграл

$$\oint\limits_C ydx + zdy + xdz = -\iint\limits_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) dS =$$

$$= -\sqrt{3}\iint\limits_S dS = -\sqrt{3}\Delta S = -\sqrt{3}\pi a^2,$$

где ΔS - площадь круга радиуса a, лежащего на поверхности S.

Пример 37. Показать, что поле $A = xi + y^2 j - z^3 k$ потенциально и найти его потенциал.

Решение. Покажем, что $rotA = 0$. Здесь $P = x, Q = y^2, R = -z^3$. Тогда

$$rotA = i\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = oi + oj + ok = \overline{0}.$$

Следовательно, согласно утверждению, поле A потенциально и **безвихревое.** Найдём потенциал $U(x, y, z)$ используя формулу:

$$U(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0) dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, t, z_0) dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, t) dt + C,$$

где (x_0, y_0, z_0) фиксированная точка (по теореме 4 о независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования). Возьмем для удобства вычислений значения $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Тогда потенциал

$$U(x, y, z) = \int\limits_0^x tdt + \int\limits_0^y t^2 dt - \int\limits_0^z t^3 dt + C = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{z^4}{4} + C$$

Используя потенциал $U(x, y, z)$ для любой пары точек M и N , найдем, согласно определению, работу поля A равную интегралу

$$\int_{MN} xdx + y^2 dy - z^3 dz = U(N) - U(M).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. – М.: Физматгиз, 1962. – Т.3. – 657 с.

2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 2 т. – М.: Высшая школа, 1981. − Т.2. – 584 с.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: в 2 ч. – М.: Наука, 1980. – Ч.2. – 464 с.

4. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды: – М.: Наука, 1965. – 608 с.

Методы решению задач по векторному анализу и поверхностным интегралам

Составители:
Александр Львович **Калашников**
Валентина Николаевна **Фокина**

Учебно-методическое пособие