Министерство образования и науки РФ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

В.С. Гаврилов
Н.А. Денисова
А.В. Калинин

Функции Бесселя в задачах математической физики

Учебно–методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией механико–математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по специальностям 010100 «Математика», 010400 «Прикладная математика и информатика», 010800 «Механика и математическое моделирование», 010200 «Математика и компьютерные науки».

Нижний Новгород
2014

УДК 517.95:517.97
ББК В181
Г-12

Г-12 Гаврилов В.С., Денисова Н.А., Калинин А.В. Функции Бесселя в задачах математической физики: Учебно–методическое пособие. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2014. – 40с.

Рецензент: профессор **М.И. Сумин**,

В настоящем учебно-методическом пособии рассматривается уравнение Бесселя, его решение и задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя.

Пособие предназначено для студентов старших курсов механико-математического факультета и соответствует программе курсов "Уравнение математической физики" и "Уравнения с частными производными".

1. Уравнение Бесселя

Уравнение Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0, \tag{1.1}$$

возникает при решении задач математической физики для круглых и цилиндрических тел методом разделения переменных в цилиндрических и полярных координатах (задача о колебаниях круглой мембраны, о стационарной температуре круглого цилиндра, об остывании бесконечного круглого стержня, и др.). Уравнение (1.1) можно записать в следующих эквивалентных формах:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{1.2}$$

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + (x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{1.3}$$

Любое нетривиальное решение уравнения Бесселя называется цилиндрической функцией. Частными примерами цилиндрических функций являются функции Бесселя и Неймана, а также функции Ханкеля первого и второго рода.

2. Функции Бесселя

Функцию Бесселя индекса ν можно определить рядом

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \tag{2.1}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма–функция Эйлера (см. определение и свойства гамма–функции в приложении А).

Функция Бесселя (2.1) представима в виде

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu f_\nu\left(\frac{x^2}{4}\right),$$

где

$$f_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}. \tag{2.2}$$

По признаку Даламбера ряд (2.2) сходится равномерно при всех $|z| \leqslant R$, $|\nu| \leqslant N$, где R и N — произвольные числа. Так как члены ряда представляют собой целые функции по переменной z при фиксированном ν и по переменной ν при фиксированном z, то $f_\nu(z)$ является целой функцией z при любом комплексном ν и целой функцией ν при любом фиксированном комплексном z. Все производные от функции $f_\nu(z)$ как по переменной z, так и по переменной ν могут вычисляться перестановкой суммирования и дифференцирования.

Покажем, что функция $J_\nu(x)$ удовлетворяет уравнению (1.3). Для этого почленно продифференцируем ряд (2.1) и вычислим выражения, содержащие производные функции Бесселя:

$$xJ'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

$$x\frac{d}{dx}(xJ'_\nu(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+\nu)^2}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Тогда

$$x\frac{d}{dx}(xJ'_\nu(x)) - \nu^2 J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k[(2k+\nu)^2 - \nu^2]}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \qquad (2.3)$$

В силу свойства (A.2) гамма–функции,

$$\Gamma(k+\nu+1) = (k+\nu)\Gamma(k+\nu), \;\; \Gamma(k+1) = k\Gamma(k),$$

ряд (2.3) упрощается:

$$x\frac{d}{dx}(xJ'_\nu(x)) - \nu^2 J_\nu(x) = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Меняя переменную суммирования $k-1=m$, получим

$$x\frac{d}{dx}(xJ'_\nu(x)) - \nu^2 J_\nu(x) =$$

$$= 4\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(m+\nu+1)\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu+2} =$$

$$= -x^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+\nu+1)\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} = -x^2 J_\nu(x),$$

что и требовалось показать.

Поскольку уравнение (1.1) не меняется при замене ν на $-\nu$, функция $J_{-\nu}(x)$ также является решением уравнения (1.1).

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}. \qquad (2.4)$$

Как следует из формул (2.1), (2.4), для нецелых ν функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ по разному ведут себя в окрестности точки

$x = 0$:

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}[1 + O(x^2)],\ x \to 0; \tag{2.5}$$

$$J_{-\nu}(x) = \frac{2^\nu}{x^\nu \Gamma(1-\nu)}[1 + O(x^2)],\ x \to 0. \tag{2.6}$$

Одна функция ограничена в окрестности точки $x = 0$, другая неограниченна. Поэтому при нецелых ν функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.1). В силу этого общее решения уравнения (1.1) при нецелых ν может быть записано в виде линейной комбинации функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$:

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

При целом $\nu = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, формула (2.4) должна быть уточнена, а асимптотическое разложение (2.6) неверно. Как показано в следующем параграфе, функции Бесселя с индексами n и $-n$ линейно зависимы. Поэтому требуется ввести ещё одну цилиндрическую функцию, линейно независимую с $J_n(x)$.

3. Основные формулы, рекуррентные соотношения, интегралы для функций Бесселя

Следующая лемма посвящена основным формулам с функциями Бесселя, используемым на практических занятиях по курсу „Уравнения математической физики“.

Лемма 3.1. *Справедливы следующие соотношения:*

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \in Z; \tag{3.1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}; \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x); \tag{3.3}$$

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J'_\nu(x); \tag{3.4}$$

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J'_\nu(x); \tag{3.5}$$

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x); \tag{3.6}$$

$$J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) = -2J'_\nu(x); \tag{3.7}$$

$$\int x^{\nu+1} J_\nu(x)dx = x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x) + C; \tag{3.8}$$

$$\int x J_0(x)dx = x J_1(x) + C; \tag{3.9}$$

$$\int x^2 J_1(x)dx = -x^2 J_0(x) + 2x J_1(x) + C; \tag{3.10}$$

$$\int x^3 J_0(x)dx = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x) + C; \tag{3.11}$$

$$\int x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x)dx = \tag{3.12}$$

$$= \frac{\beta x J_\nu(\alpha x) J'_\nu(\beta x) - \alpha x J'_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x)}{\alpha^2 - \beta^2} + C,$$

где $\alpha \neq \beta$*;*

$$\int x J_\nu^2(\alpha x)dx = \frac{1}{2}\Big[x^2 (J'_\nu(\alpha x))^2 + \tag{3.13}$$

$$+\Big(x^2 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\Big)(J_\nu(\alpha x))^2\Big] + C;$$

$$\int_0^{x_0} x J_\nu\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right) J_\nu\left(\frac{\mu_m x}{x_0}\right) dx = 0, \quad k \neq m; \tag{3.14}$$

где μ_k и μ_m — положительные корни уравнения

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0. \tag{3.15}$$

Доказательство. Ниже последовательно проведём доказательство формул (3.1)–(3.14).

1) Докажем равенство (3.1). Без ограничения общности можем считать, что $n > 0$. Рассмотрим ряд (2.4), полагая $\nu = n$. Первые n слагаемых ряда (2.4) исчезают, т.к. $\frac{1}{\Gamma(k-n+1)} = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (свойство 8) гамма–функции), в результате чего формула (2.4) принимает вид

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}.$$

Введя новый индекс суммирования $k - n = m$, получаем

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(m+n)-n} =$$

$$= (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n J_n(x).$$

Равенство (3.1) доказано.

2) Чтобы проверить соотношение (3.2), распишем левую и правую части формулы (3.2), используя ряд (2.1). Диф-

ференцируя ряд

$$\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

будем иметь

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}.$$

После замены индекса суммирования $k-1=m$, получим

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1} =$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}. \quad (3.16)$$

Функция, стоящая в правой части формулы (3.2), раскладывается в ряд

$$\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}. \quad (3.17)$$

Из (3.16) и (3.17) следует (3.2).

3) Соотношение (3.3) доказывается аналогично.

4) Формула (3.4) получается из (3.2), если в левой части расписать производную от произведения

$$\frac{J'_\nu(x)}{x^\nu} - \frac{\nu J_\nu(x)}{x^{\nu+1}} = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$$

и умножить затем на x^ν

$$J'_\nu(x) - \frac{\nu J_\nu(x)}{x} = -J_{\nu+1}(x).$$

5) Формула (3.5) следует из (3.3).

6) Складывая и вычитая (3.4) и (3.5), получим соотношения (3.6) и (3.7).

7) С помощью формулы (3.3) вычисляется интеграл

$$\int x^{\nu+1} J_\nu(x) dx.$$

Заменяя в (3.3) ν на $\nu+1$, будем иметь

$$x^{\nu+1} J_\nu(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)\right).$$

Отсюда

$$\int x^{\nu+1} J_\nu(x) dx = \int \frac{d}{dx}\left(x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)\right) dx =$$
$$= x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x) + C.$$

8) Интеграл (3.9) — частный случай интеграла (3.8) при $\nu = 0$.

9) Докажем равенство (3.10). Интеграл (3.8) при $\nu = 1$ имеет вид

$$\int x^2 J_1(x) dx = x^2 J_2(x) + C.$$

Функцию Бесселя с индексом 2, $J_2(x)$, выразим по рекуррентной формуле (3.6) через функции Бесселя с меньшим индексом:

$$J_2(x) = -J_0(x) + \frac{2}{x} J_1(x).$$

Тогда

$$\int x^2 J_1(x) dx = -x^2 J_0(x) + 2x J_1(x) + C,$$

что и требовалось доказать.

10) Для вычисления интеграла

$$\int x^3 J_0(x) dx$$

воспользуемся формулой (3.3) при $\nu = 0$,

$$x J_0(x) = \frac{d}{dx} \left[x J_1(x) \right].$$

Тогда

$$\int x^3 J_0(x) dx = \int x^2 \frac{d}{dx} \left[x J_1(x) \right] dx.$$

Последний интеграл интегрируем по частям, полагая

$$u = x^2, \;\; du = 2x dx, \;\; dv = \frac{d}{dx} \left[x J_1(x) \right] dx, \;\; v = x J_1(x).$$

В результате выводим

$$\int x^3 J_0(x) dx = x^3 J_1(x) - 2 \int x^2 J_1(x) dx.$$

Применив затем формулу (3.10), получим требуемое.

11) Докажем (3.12). Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dx}(xy') + \left(\alpha^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) y = 0. \tag{3.18}$$

Введём новую независимую переменную

$$\xi = \alpha x \ \ (\alpha > 0)$$

и новую функцию $y(x) = \tilde{y}(\xi)$.

Пересчитывая производные, будем иметь

$$y'(x) = \tilde{y}'(\xi)\alpha, \ \ xy'(x) = \xi\tilde{y}'(\xi), \ \ \frac{d}{dx}(xy'(x)) = \frac{d}{d\xi}(\xi\tilde{y}'(\xi))\alpha.$$

Подставляя производные и функцию в уравнение (3.18), получим уравнение Бесселя:

$$\frac{d}{d\xi}(\xi\tilde{y}'(\xi)) + \left(\xi - \frac{\nu^2}{\xi}\right)\tilde{y} = 0. \tag{3.19}$$

Одним из решений уравнения (3.19) является функция Бесселя

$$\tilde{y}(\xi) = J_\nu(\xi).$$

Возвращаясь к старым переменным, найдём решение уравнения (3.18): $y(x) = J_\nu(\alpha x)$.

Таким образом, функция $J_\nu(\alpha x)$ удовлетворяет уравнению (3.19) и обращает его в тождество

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx}\right) + \left(\alpha^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(\alpha x) \equiv 0.$$

Аналогичное тождество справедливо для $J_\nu(\beta x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx}\right) + \left(\beta^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(\beta x) \equiv 0.$$

Умножим первое из этих равенств на $J_\nu(\beta x)$, второе — на $J_\nu(\alpha x)$ и вычтем одно из другого. В результате будем иметь

$$J_\nu(\beta x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx}\right)-J_\nu(\alpha x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx}\right)-$$
$$-(\alpha^2-\beta^2)xJ_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)=0.$$

Интегрируя данное соотношение, получим

$$\int J_\nu(\beta x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx}\right)dx-$$
$$-\int J_\nu(\alpha x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx}\right)dx-$$
$$-(\alpha^2-\beta^2)\int xJ_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)dx=C,$$

где C — произвольная постоянная. Проинтегрируем первые два слагаемых по частям:

$$J_\nu(\beta x)x\frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx}-\int x\frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx}\frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx}dx-$$
$$-J_\nu(\alpha x)x\frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx}+\int x\frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx}\frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx}dx-$$
$$-(\alpha^2-\beta^2)\int xJ_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)dx=C.$$

Из последнего соотношения выводим искомое равенство (3.12).

12) Для доказательства (3.13) найдём предел равенства (3.12) при $\beta\to\alpha$.

Ясно, что предел левой части равен

$$\int xJ_\nu^2(\alpha x)dx. \tag{3.20}$$

Найдём предел правой части. Ввиду того, что правая часть равенства (3.12) при $\beta \to \alpha$ представляет собой неопределённость вида $\frac{0}{0}$, для вычисления предела будем использовать правило Лопиталя. В результате получаем, что

$$\begin{gathered}
\lim_{\beta\to\alpha} \frac{\beta xJ_\nu(\alpha x)J'_\nu(\beta x) - \alpha xJ'_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)}{\alpha^2-\beta^2} = \qquad (3.21)\\
= \lim_{\beta\to\alpha} \frac{\frac{d}{d\beta}[\beta xJ_\nu(\alpha x)J'_\nu(\beta x) - \alpha xJ'_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)]}{-2\beta} = \\
= -\frac{1}{2\alpha}\lim_{\beta\to\alpha}[xJ_\nu(\alpha x)J'_\nu(\beta x) + \beta x^2 J_\nu(\alpha x)J''_\nu(\beta x) - \\
-\alpha x^2 J'_\nu(\alpha x)J'_\nu(\beta x)] = \\
= -\frac{1}{2\alpha}\lim_{\beta\to\alpha}[xJ_\nu(\alpha x)J'_\nu(\beta x) - \alpha x^2 J'_\nu(\alpha x)J'_\nu(\beta x) + \\
+\frac{1}{\beta}J_\nu(\alpha x)(\beta x)^2 J''_\nu(\beta x)].
\end{gathered}$$

Поскольку функция $J_\nu(z)$ удовлетворяет уравнению (1.2), то

$$(\beta x)^2 J''_\nu(\beta x) = -\beta xJ'_\nu(\beta x) + (\nu^2 - (\beta x)^2)J_\nu(\beta x).$$

Подставляя $J''_\nu(\beta x)$ в соотношение (3.21), будем иметь

$$\begin{gathered}
\lim_{\beta\to\alpha} \frac{\beta xJ_\nu(\alpha x)J'_\nu(\beta x) - \alpha xJ'_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)}{\alpha^2-\beta^2} = \\
= -\frac{1}{2\alpha}\lim_{\beta\to\alpha}[xJ_\nu(\alpha x)J'_\nu(\beta x) - \alpha x^2 J'_\nu(\alpha x)J'_\nu(\beta x) +
\end{gathered}$$

$$+\frac{1}{\beta}J_\nu(\alpha x)[-\beta x J'_\nu(\beta x) + (\nu^2 - (\beta x)^2)J_\nu(\beta x)]] =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\lim_{\beta\to\alpha}[\alpha x^2 J'_\nu(\alpha x)J'_\nu(\beta x) + \frac{(\beta x)^2 - \nu^2}{\beta}J_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[x^2(J'_\nu(\alpha x))^2 + \Big(x^2 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\Big)J_\nu^2(\alpha x)\Big]. \qquad (3.22)$$

Из соотношений (3.20) и (3.22) следует (3.13).

13) Докажем равенство (3.14). В самом деле, согласно (3.12),

$$\int\limits_0^{r_0} xJ_\nu\left(\frac{\mu_k x}{r_0}\right)J_\nu\left(\frac{\mu_m x}{r_0}\right)dx =$$

$$= \left.\frac{\frac{\mu_m}{r_0}xJ_\nu\left(\frac{\mu_k x}{r_0}\right)J'_\nu\left(\frac{\mu_m x}{r_0}\right) - \frac{\mu_k}{r_0}xJ'_\nu\left(\frac{\mu_k x}{r_0}\right)J_\nu\left(\frac{\mu_m x}{r_0}\right)}{\left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2 - \left(\frac{\mu_m}{r_0}\right)^2}\right|_0^{r_0} =$$

$$= \frac{\mu_m J_\nu(\mu_k)J'_\nu(\mu_m) - \mu_k J'_\nu(\mu_k)J_\nu(\mu_m)}{\mu_k^2 - \mu_m^2}r_0^2. \qquad (3.23)$$

Так как μ_k и μ_m — положительные корни уравнения (4.14), то

$$\alpha J_\nu(\mu_k) + \beta\mu_k J'_\nu(\mu_k) = 0; \qquad (3.24)$$

$$\alpha J_\nu(\mu_m) + \beta\mu_m J'_\nu(\mu_m) = 0.$$

Поскольку числа α и β не обращаются в нуль одновременно, то определитель системы (3.24) равен нулю, то есть

$$0 = \begin{vmatrix} J_\nu(\mu_k) & \mu_k J'_\nu(\mu_k) \\ J_\nu(\mu_m) & \mu_m J'_\nu(\mu_m) \end{vmatrix} =$$

$$= \mu_m J_\nu(\mu_k)J'_\nu(\mu_m) - \mu_k J'_\nu(\mu_k)J_\nu(\mu_m).$$

Это совместно с (3.23) даёт (3.14).

4. Функции Неймана

Определим функцию Неймана индекса ν при нецелых ν по формуле

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}, \quad \nu \neq n. \tag{4.1}$$

Очевидно, что функция Неймана является решением уравнения (1.1), как линейная комбинация решений $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$.

Покажем, что при нецелых $\nu > 0$ функции Неймана и Бесселя линейно независимы. Для этого достаточно привести асимптотические формулы этих функций при малых значениях аргумента x. Для функции Бесселя — это формула (2.5), для функции Неймана — следует из (2.5), (2.6), (4.1)

$$N_\nu(x) \sim \frac{J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu} \sim \frac{2^\nu}{x^\nu \sin\pi\nu\Gamma(1-\nu)}, \quad x \to 0.$$

Таким образом, в окрестности точки $x = 0$ функция Бесселя ограничена, а функция Неймана — неограничена. Такие функции не могут быть линейно зависимы. Поэтому при нецелых ν общее решение уравнения (1.1) может быть записано в виде

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x). \tag{4.2}$$

Подстановка в правую часть формулы (4.1) $\nu = n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, даёт неопределённость типа $\frac{0}{0}$, так как $\cos\pi n =$

$(-1)^n$, $\sin \pi n = 0$, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. Однако эта неопределённость раскрывается по правилу Лопиталя. Поэтому определим функцию Неймана с индексом n как предел

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} N_\nu(x). \tag{4.3}$$

Найдём выражение для функции Неймана $N_n(x)$, используя правило Лопиталя:

$$\begin{gathered} N_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu} = \\ = \lim_{\nu \to n} \frac{\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \cos \pi\nu - J_\nu(x) \pi \sin \pi\nu - \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}}{\pi \cos \pi\nu} = \\ = \frac{1}{\pi} \left(\left. \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right|_{\nu=n} - (-1)^n \left. \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right|_{\nu=n} \right). \end{gathered} \tag{4.4}$$

Пусть $n \geqslant 1$. Продифференцируем ряды (2.1) и (2.4) по параметру ν:

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \ln \left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} +$$

$$+ \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{d}{dt} \left. \left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right) \right|_{t=k+\nu+1} =$$

$$= \ln \left(\frac{x}{2}\right) J_\nu(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{d}{dt} \left. \left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right) \right|_{t=k+\nu+1};$$

$$\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} = -\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \ln \left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} -$$

$$- \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{d}{dt} \left. \left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right) \right|_{t=k-\nu+1} =$$

$$= -\ln\left(\frac{x}{2}\right) J_{-\nu}(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)\bigg|_{t=k-\nu+1}.$$

Полагая в последних формулах $\nu = n$, получим, что

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=n} = \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_n(x) + \tag{4.5}$$

$$+ \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)\bigg|_{t=k+n+1};$$

$$\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=n} = -\ln\left(\frac{x}{2}\right) J_{-n}(x) - \tag{4.6}$$

$$- \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)\bigg|_{t=k-n+1}.$$

В формуле (4.6) выделим первые n членов ряда и воспользуемся (3.1). В результате будем иметь

$$\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=n} = -(-1)^n \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_n(x) -$$

$$- \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)\bigg|_{t=k-n+1} -$$

$$- \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)\bigg|_{t=k-n+1}.$$

Заменяя переменную суммирования $k - n = m$, заключаем, что

$$\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=n} = -(-1)^n \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_n(x) - \tag{4.7}$$

$$- \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)\bigg|_{t=k-n+1} -$$

$$-\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)\bigg|_{t=m+1}.$$

Пользуясь формулами (A.6) и (A.7), запишем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)\bigg|_{t=k-n+1} = (-1)^{k-n+1}\Gamma(n-k); \qquad (4.8)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)\bigg|_{t=m+1} = -\left.\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma^2(t)}\right|_{t=m+1} = \qquad (4.9)$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(m+1)}\left(-\mathbf{C} + \sum_{p=1}^{m}\frac{1}{p}\right), \quad m = 1, 2, \ldots;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)\bigg|_{t=1} = \mathbf{C}; \qquad (4.10)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)\bigg|_{t=k+n+1} = -\frac{1}{\Gamma(k+n+1)}\left(-\mathbf{C} + \sum_{p=1}^{k+n}\frac{1}{p}\right). \quad (4.11)$$

После подстановки (4.11) в (4.5), а (4.8)–(4.10) — в (4.7), окончательно получим

$$\left.\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_n(x) + \mathbf{C}J_n(x) -$$

$$-\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \sum_{p=1}^{k+n}\frac{1}{p};$$

$$\left.\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = -(-1)^n \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_n(x) +$$

$$+(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} - (-1)^n \mathbf{C} J_n(x) +$$

$$+(-1)^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(m+1)} \sum_{p=1}^{m}\frac{1}{p}.$$

Подставляя последние формулы в (4.4), найдём, что

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left\{2\left(\ln\frac{x}{2} + \mathbf{C}\right)J_n(x) - \right. \tag{4.12}$$

$$- \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} - \left(\frac{x}{2}\right)^{n}\frac{1}{\Gamma(n+1)}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} -$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+1)}\left[\sum_{p=1}^{k+n}\frac{1}{p} + \sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p}\right]\right\}.$$

Разложение функции $N_0(x)$ получается аналогично. Формально оно получается из (4.12), если в этой формуле положить $n = 0$ и отбросить конечные суммы:

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\left\{\left[\ln\frac{x}{2} + \mathbf{C}\right]J_0(x) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma^2(k+1)}\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p}\right\}. \tag{4.13}$$

Из формул (4.12), (4.13) следуют асимптотические формулы для функции Неймана при $x \to 0$:

$$N_n(x) \sim -\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\frac{\Gamma(n)}{\pi}, \ \ n \geqslant 1;$$
$$N_0(x) \sim \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}.$$

Как видим, функция Неймана в окрестности точки $x = 0$ неограниченна. Поэтому общее решение уравнения Бесселя (1.1) можно записать в виде (4.2) при любых ν.

Из представленных ниже графиков видно, что функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ имеют бесчисленное множество корней.

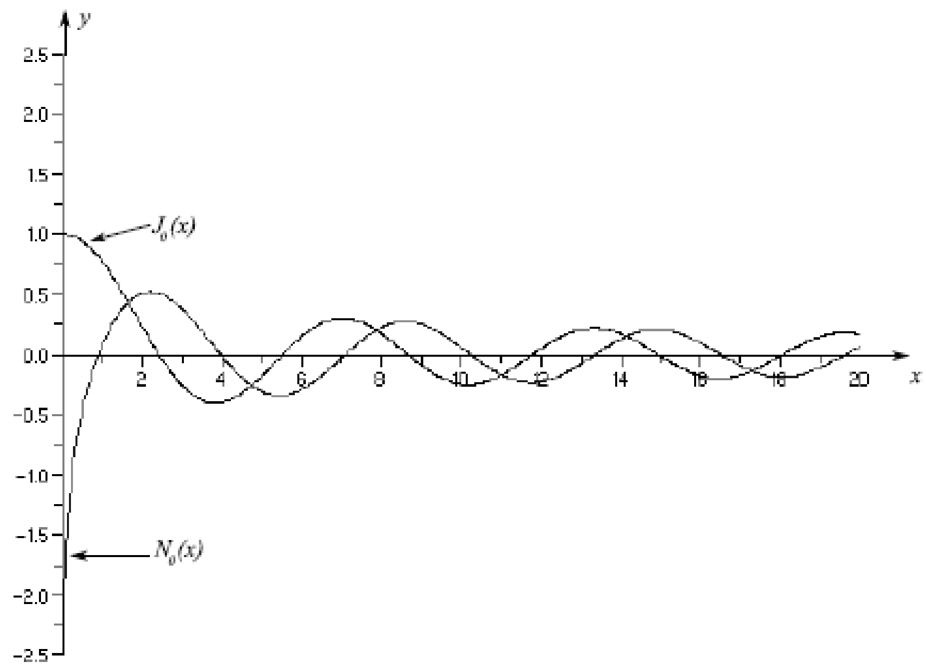

Рис. 4.1. Графики функций $J_0(x)$ и $N_0(x)$ при положительном x.

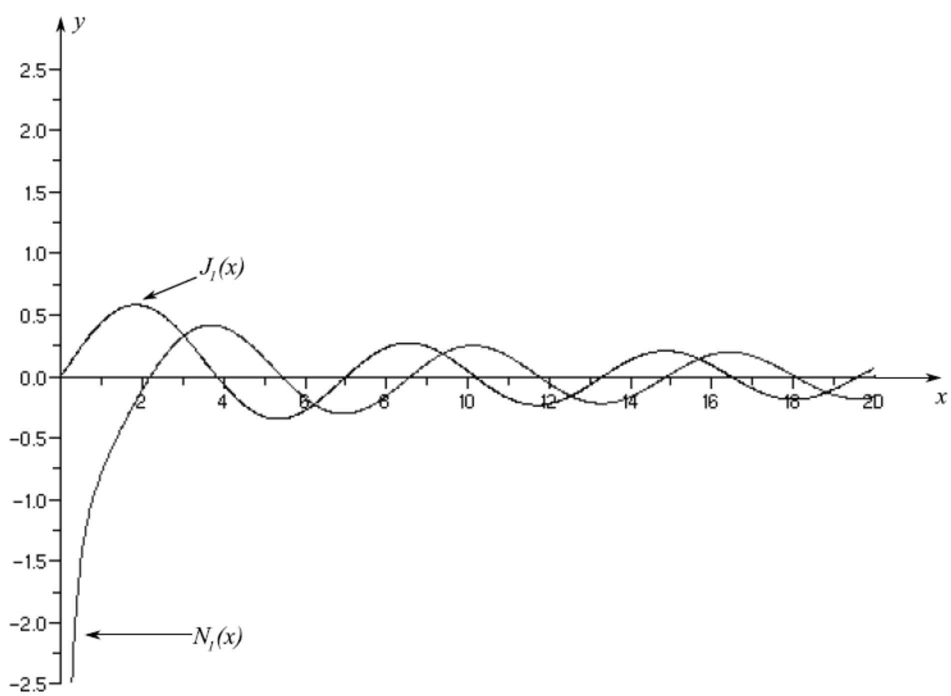

Рис. 4.2. Графики функций $J_1(x)$ и $N_1(x)$ при положительном x.

Более того, справедлива следующая

Теорема 4.1. *Пусть* $\alpha,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta > 0$. *Существует* *счётное множество положительных корней уравнения*

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J'_\nu(\mu) = 0. \tag{4.14}$$

Предельная точка их находится на бесконечности.

5. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя

Одномерное уравнение Штурма–Лиувилля для функции $y(x)$ имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] + (\lambda\rho(x) - q(x))y(x) = 0. \tag{5.1}$$

Рассмотрим частный случай этого уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy(x)}{dx}\right] + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x}\right)y(x) = 0. \tag{5.2}$$

на интервале $(0, x_0)$.

Точка $x = 0$ является особой для уравнения (5.2). В этой точке будем требовать ограниченности решения

$$|y|_{x=0}| < \infty. \tag{5.3}$$

Так как $x = x_0$ — точка, не являющаяся особой для уравнения (5.2), то граничное условие при $x = x_0$ запишем в стандартном виде

$$\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0. \tag{5.4}$$

Здесь постоянные α и β одновременно в нуль не обращаются. Те значения параметра λ, при которых уравнение (5.2) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие условиям (5.3), (5.4), называются собственными значениями, а соответствующие решения — собственными функциями. Известно [3], что все собственные значения задачи (5.2)–(5.4) — вещественны, неотрицательны и образуют счётное множество.

Приведём решение этой задачи для уравнений с параметрами $\nu > 0$ и $\nu = 0$ для трёх типов граничных условий. Собственные числа задачи будем искать при $\lambda \geqslant 0$.

Задача 5.1.

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0, \;\; 0 < x < x_0, \tag{5.5}$$

$$|y(0)| < \infty, \;\; y(x_0) = 0, \tag{5.6}$$

где $\nu > 0$.

Рассмотрим случай $\lambda = 0$. Тогда уравнение (5.5) перепишется в виде

$$xy'' + y' - \frac{\nu^2}{x}y = 0, \;\; y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{\nu^2}{x^2}y = 0 \tag{5.7}$$

Данное уравнение после замены независимой переменной $z = \ln x$ переходит в уравнение

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \nu^2 y = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$y = C_1 e^{\nu z} + C_2 e^{-\nu z}.$$

Возвращаясь к старой переменной, будем иметь

$$y = C_1 x^{\nu} + C_2 x^{-\nu}. \tag{5.8}$$

Чтобы удовлетворить первому условию (5.6), коэффициент перед функцией, неограниченной в нуле, полагаем равным нулю, $C_2 = 0$. Подстановка функции $y(x) = C_1 x^{\nu}$ во второе граничное условие (5.6) даёт

$$C_1 x_0^{\nu} = 0.$$

Так как $x_0 > 0$, то отсюда следует, что $C_1 = 0$. Таким образом, при $\lambda = 0$ существует только тривиальное решение уравнения, удовлетворяющее условию (5.6). Поэтому $\lambda = 0$ не является собственным числом задачи (5.5)–(5.6).

Пусть $\lambda > 0$. Сделав в уравнении (5.5) замену $z = x\sqrt{\lambda}$, выводим, что функция $\omega(z) = y(\frac{z}{\sqrt{\lambda}})$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\omega}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)\omega = 0. \tag{5.9}$$

Согласно (4.2), общее решение уравнения (5.9) имеет вид

$$\omega(z) = C_1 J_{\nu}(z) + C_2 N_{\nu}(z).$$

Переходя к старым переменным, запишем общее решение уравнения (5.5):

$$y(x) = C_1 J_{\nu}(x\sqrt{\lambda}) + C_2 N_{\nu}(x\sqrt{\lambda}). \tag{5.10}$$

Поскольку функция $N_\nu(x)$ неограниченна в нуле (доказано в разделе 4), то из условия ограниченности (5.6) найдём $C_2 = 0$.

Используя второе граничное условие (5.6), имеем, что

$$C_1 J_\nu(x_0\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Отсюда либо $C_1 = 0$, что соответствует тривиальному решению $y(x) \equiv 0$, либо

$$J_\nu(x_0\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Делая замену

$$\mu = x_0\sqrt{\lambda}, \;\; \mu > 0, \tag{5.11}$$

получим уравнение

$$J_\nu(\mu) = 0. \tag{5.12}$$

Обозначим через μ_k положительные корни уравнения (5.12). В соответствии с (5.11), собственные числа $\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{x_0}\right)^2$, $k = 1, 2, \dots$, а собственные функции определяются с точностью до произвольного постоянного множителя C_1. Во всех рассматриваемых задачах будем полагать $C_1 = 1$. Подставив в (5.10) коэффициенты C_1, C_2 и найденные собственные значения λ_k, выпишем соответствующие этим λ_k собственные функции:

$$y_k(x) = J_\nu\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right), \;\; k = 1, 2, \dots,$$

где $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \mu_{k+1} < \dots$ — корни уравнения (5.12).

Вычислим нормы собственных функций. Согласно формуле (3.13),

$$\|y_k\|^2 = \int\limits_0^{x_0} x y_k^2(x) dx = \int\limits_0^{x_0} x J_\nu^2\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right) dx = \tag{5.13}$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\Big[J_\nu'\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right)\Big]^2 + \left(x^2 - \frac{\nu^2}{\mu_k^2}\right)\Big[J_\nu\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right)\Big]^2\right]\Bigg|_0^{x_0}.$$

В силу обращения в ноль функций $J_\nu(x)$ и $xJ_\nu'(x)$ при $x = 0$, а также тождества $J_\nu(\mu_k) = 0$,

$$\|y_k\|^2 = \frac{x_0^2}{2}[J_\nu'(\mu_k)]^2.$$

Согласно равенству (3.4),

$$J_\nu'(\mu_k) = \frac{\nu}{\mu_k} J_\nu(\mu_k) - J_{\nu+1}(\mu_k).$$

Поскольку $J_\nu(\mu_k) = 0$, то $J_\nu'(\mu_k) = -J_{\nu+1}(\mu_k)$. Таким образом,

$$\|y_k\|^2 = \frac{x_0^2}{2}[J_{\nu+1}(\mu_k)]^2, \;\; k = 1, 2, \ldots.$$

Задача 5.2.

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0, \;\; 0 < x < x_0, \tag{5.14}$$

$$|y(0)| < \infty, \;\; y'(x_0) = 0, \tag{5.15}$$

где $\nu > 0$.

Пусть $\lambda = 0$. Тогда, как показано в задаче 5.1, общее решение уравнения (5.7) имеет вид

$$y(x) = C_1 x^\nu + C_2 x^{-\nu}.$$

Из условия ограниченности в нуле функции $y(x)$ следует, что $C_2 = 0$. Подставляя $y(x)$ во второе граничное условие (5.15), получим

$$\nu C_1 x_0^{\nu-1} = 0.$$

Отсюда $C_1 = 0$, и, следовательно, $y(x) \equiv 0$. Поэтому $\lambda = 0$ не является собственным числом задачи (5.14)–(5.15).

При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (5.14) имеет вид (5.10). Поскольку при любом $C_2 \neq 0$ решение (5.10) неограниченно при $x = 0$, то полагаем $C_2 = 0$. Тогда $y(x) = C_1 J_\nu(x\sqrt{\lambda})$. Подставив $y(x)$ в граничное условие, найдём, что

$$C_1 J_\nu'(x_0\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Используя замену (5.11), запишем уравнение

$$J_\nu'(\mu) = 0.$$

Обозначим через μ_k положительные корни этого уравнения. Согласно (5.11), собственные числа связаны с положительными нулями функции $J_\nu'(\mu)$ формулой

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{x_0}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Подставляя в (5.10) $C_2 = 0$, $C_1 = 1$ и собственные числа λ_k, получаем собственные функции

$$y_k(x) = J_\nu\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \mu_{k+1} < \dots$ — нули функции $J'_\nu(\mu)$.

Вычислим нормы собственных функций. Подстановка в нижнем пределе формулы (5.13) зануляется, так как $J_\nu(x)$ и $xJ'_\nu(x)$ обращаются в ноль при $x = 0$. Учитывая, что $J'_\nu(\mu_k) = 0$, окончательно найдём

$$\|y_k\|^2 = \frac{1}{2}\left(x_0^2 - \frac{\nu^2}{\mu_k^2}\right)[J_\nu(\mu_k)]^2, \ \ k = 1, 2, \dots .$$

Задача 5.3.

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0, \ \ 0 < x < x_0, \tag{5.16}$$

$$|y(0)| < \infty, \ \ y'(x_0) + hy(x_0) = 0, \tag{5.17}$$

где $\nu > 0$, $h > 0$ — константы.

Пусть $\lambda = 0$. Используем общее решение уравнения (5.16) при $\lambda = 0$

$$y(x) = C_1 x^\nu + C_2 x^{-\nu}.$$

Условию ограниченности в нуле удовлетворяет только функция $y(x) = C_1 x^\nu$. Подставив $y(x)$ во второе из условий (5.17), заключаем, что

$$C_1[\nu x_0^{\nu-1} + h x_0^\nu] = 0.$$

Так как $h > 0$, $x_0 > 0$, то $C_1 = 0$. Таким образом, $y(x) \equiv 0$, в силу чего $\lambda = 0$ не является собственным числом задачи (5.16)–(5.17).

Рассмотрим случай $\lambda > 0$. Тогда общее решение уравнения (5.16) имеет вид (5.10).

Из условия ограниченности в нуле следует, что $C_2 = 0$. Поэтому $y(x) = C_1 J_\nu(x\sqrt{\lambda})$. Полагая $C_1 = 1$, после подстановки $y(x)$ в условие (5.17) на правом конце, получим уравнение на собственные значения:

$$J'_\nu(x_0\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda} + hJ_\nu(x_0\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Сделав замену (5.11), заключаем, что

$$J'_\nu(\mu)\mu + hx_0 J_\nu(\mu) = 0. \tag{5.18}$$

По теореме 4.1 уравнение (5.18) имеет счётное множество положительных корней $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \mu_{k+1} < \dots$. В соответствии с (5.11), собственные числа

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{x_0}\right)^2, \;\; k = 1, 2, \dots,$$

а собственные функции

$$y_k(x) = J_\nu\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right), \;\; k = 1, 2, \dots.$$

Для вычисления нормы собственных функций используем формулу (5.13). Так как подстановка в нижнем пределе зануляется, то

$$\|y_k\|^2 = \frac{1}{2}\left[[x_0 J'_\nu(\mu_k)]^2 + \left(x_0^2 - \frac{\nu^2}{\mu_k^2}\right)[J_\nu(\mu_k)]^2\right].$$

Исключим из последней формулы производную от функции Бесселя. Для этого воспользуемся уравнением (5.18). Поскольку μ_k — корень уравнения (5.18), то

$$J'_\nu(\mu_k) = -\frac{hx_0}{\mu_k} J_\nu(\mu_k).$$

Поэтому

$$\|y_k\|^2 = \frac{x_0^2}{2}\left[1 + \frac{h^2x_0^4 - \nu^2}{\mu_k^2 x_0^2}\right][J_\nu(\mu_k)]^2, \ \ k = 1, 2, \ldots .$$

Задача 5.4.

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \lambda xy = 0, \ \ 0 < x < x_0, \tag{5.19}$$

$$|y(0)| < \infty, \ \ y(x_0) = 0. \tag{5.20}$$

Пусть $\lambda = 0$. Тогда уравнение (5.19) принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] = 0,$$

откуда

$$x\frac{dy}{dx} = C_1, \ \ \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x},$$

$$y = C_1 \ln x + C_2. \tag{5.21}$$

Условию ограниченности в нуле удовлетворяет лишь $y(x) \equiv C_2$. Подставив $y(x)$ во второе условие (5.20), находим, что $C_2 = 0$. Нулевые коэффициенты в (5.21) дают тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, в силу чего $\lambda = 0$ не является собственным числом задачи (5.19)–(5.20).

Рассмотрим случай $\lambda > 0$. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (5.19) имеет вид

$$y(x) = C_1 J_0(x\sqrt{\lambda}) + C_2 N_0(x\sqrt{\lambda}). \tag{5.22}$$

Так как функция Неймана $N_0(x\sqrt{\lambda})$ неограниченна в нуле, то $C_2 = 0$. Поэтому $y(x) = C_1 J_0(x\sqrt{\lambda})$. Подставив $y(x)$ в условие на правом конце (5.20), получим, что

$$C_1 J_0(x_0\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Положим $C_1 = 1$ и сделаем замену (5.11). Тогда

$$J_0(\mu) = 0. \tag{5.23}$$

Обозначим через μ_k положительные корни уравнения (5.23). В соответствии с (5.11), собственные числа определяются положительными нулями $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \mu_{k+1} < \dots$ функции $J_0(\mu)$:

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{x_0}\right)^2, \ \ k = 1, 2, \dots .$$

Собственные функции имеют вид

$$y_k(x) = J_0\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right), \ \ k = 1, 2, \dots .$$

Вычислим нормы собственных функций по формуле (3.13), полагая $\nu = 0$:

$$\|y_k\|^2 = \int\limits_0^{x_0} x y_k^2(x) dx = \int\limits_0^{x_0} x J_0^2\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right) dx = \tag{5.24}$$

$$= \frac{x^2}{2}\left[\left(J_0'\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right)\right)^2 + \left(J_0\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right)\right)^2\right]\Bigg|_0^{x_0}.$$

Учитывая, что $J_0(0) = 1$, $J_0'(0) = 0$, $J_0(\mu_k) = 0$, получим

$$\|y_k\|^2 = \frac{x_0^2}{2}[J_0'(\mu_k)]^2, \ \ k = 1, 2, \ldots.$$

Согласно равенству (3.4),

$$J_0'(\mu_k) = -J_1(\mu_k).$$

Таким образом,

$$\|y_k\|^2 = \frac{x_0^2}{2}[J_1(\mu_k)]^2, \ \ k = 1, 2, \ldots.$$

Задача 5.5.

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \lambda xy = 0, \ \ 0 < x < x_0, \tag{5.25}$$

$$|y(0)| < \infty, \ \ y'(x_0) = 0. \tag{5.26}$$

В случае $\lambda = 0$ общее решение уравнения (5.25) имеет вид (5.21). Из условия ограниченности в нуле вытекает, что $C_1 = 0$ и $y(x) \equiv C_2$. Подставив $y(x)$ во второе условие (5.26), убеждаемся, что оно выполнено при любом C_2. Полагая $C_2 = 1$, получим нетривиальное решение $y(x) \equiv 1$. Поэтому $\lambda = 0$ является собственным числом задачи (5.25)–(5.26), а соответствующая собственная функция имеет вид $y_0(x) = 1$. Найдём норму функции y_0:

$$\|y_0\|^2 = \int\limits_0^{x_0} x y_0^2(x) dx = \int\limits_0^{x_0} x dx = \frac{x_0^2}{2}, \ \ \|y_0\|^2 = \frac{x_0^2}{2}.$$

Рассмотрим случай $\lambda > 0$. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (5.25) имеет вид (5.22).

Из условия ограниченности в нуле следует, что $C_2 = 0$. Поэтому $y(x) = C_1 J_0(x\sqrt{\lambda})$. Используя второе граничное условие (5.26), получим уравнение на собственные значения:

$$J_0'(x_0\sqrt{\lambda}) = 0.$$

С учётом замены (5.11), запишем

$$J_0'(\mu) = 0. \tag{5.27}$$

Обозначим через μ_k положительные корни уравнения (5.27). В соответствии с (5.11), собственные числа выглядят как

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{x_0}\right)^2, \ \ k = 1, 2, \dots .$$

Собственные функции

$$y_k(x) = J_0\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right) \ \ k = 1, 2, \dots,$$

получаются из (5.22) подстановкой $C_2 = 0$, $C_1 = 1$ и $\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{x_0}\right)^2$. Здесь $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \mu_{k+1} < \dots$ — корни уравнения (5.27).

Найдём нормы собственных функций. По формуле (5.24),

$$\|y_k\|^2 = \frac{x_0^2}{2}[J_0(\mu_k)]^2, \ \ k = 1, 2, \dots .$$

Задача 5.6.

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \lambda xy = 0, \;\; 0 < x < x_0, \tag{5.28}$$

$$|y(0)| < \infty, \;\; y'(x_0) + hy(x_0) = 0, \tag{5.29}$$

где $h > 0$ — положительная константа.

В случае $\lambda = 0$ общее решение уравнения (5.25) имеет вид (5.21). Условию ограниченности в нуле удовлетворяет лишь функция $y(x) = C_2$. Подставив $y(x)$ в условие (5.29), заключаем, что

$$hC_2 = 0.$$

Поскольку $h > 0$, то $C_2 = 0$. Таким образом, $y(x) \equiv 0$. Т.к. нетривиальных решений задачи (5.28)–(5.29) при $\lambda = 0$ нет, то $\lambda = 0$ не является собственным числом.

При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (5.28) имеет вид (5.22).

Так как функция Неймана неограниченна в нуле, то $C_2 = 0$. Поэтому $y(x) = C_1 J_0(x\sqrt{\lambda})$. Подставляя $y(x)$ в условие (5.29) на правом конце, будем иметь

$$C_1[J_0'(x_0\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda} + hJ_0(x_0\sqrt{\lambda})] = 0.$$

Полагая $C_1 = 1$, после замены (5.11) получим уравнение

$$J_0'(\mu)\mu + hx_0 J_0(\mu) = 0. \tag{5.30}$$

Обозначим через μ_k положительные корни уравнения (5.30). Согласно (5.11), собственные числа определяются соотноше-

ниями
$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{x_0}\right)^2, \;\; k = 1, 2, \dots .$$
Собственные функции имеют вид
$$y_k(x) = J_0\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right) \;\; k = 1, 2, \dots ,$$
где $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \mu_{k+1} < \dots$ — корни уравнения (5.30).

По формуле (5.24) вычислим нормы собственных функций:
$$\|y_k\|^2 = \frac{x_0^2}{2}\left[[J_0'(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2\right].$$
Так как μ_k — корень уравнения (5.30), то
$$J_0'(\mu_k) = -\frac{hx_0}{\mu_k}J_0(\mu_k).$$
Поэтому
$$\|y_k\|^2 = \frac{x_0^2}{2}\left[1 + \frac{h^2x_0^2}{\mu_k^2}\right][J_0(\mu_k)]^2, \;\; k = 1, 2, \dots .$$

Приложение А. Свойства гамма–функции

1) В комплексной полуплоскости $Rez > 0$ гамма–функция определяется интегралом
$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{A.1}$$
Гамма–функция аналитична в области $Rez > 0$ и $\Gamma(1) = 1$.

2) Гамма–функция удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{A.2}$$

3) При всех целых положительных $z = n$ имеет место соотношение

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{A.3}$$

4) Функциональное уравнение (A.2) можно обобщить следующим образом:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \tag{A.4}$$

5) Справедлива формула

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{A.5}$$

6) Функцию $\Gamma(z)$ с помощью формулы (A.4) можно аналитически продолжить на всю плоскость комплексной переменной z, кроме точек $z = 0, -1, -2, \ldots$, в которых $\Gamma(z)$ имеет полюса первого порядка.

7) Функция $\Gamma(z)$ не имеет нулей.

8) Функция $\frac{1}{\Gamma(z)}$ — целая функция. В точках $z = -k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, функция $\frac{1}{\Gamma(z)}$ обращается в нуль.

9) Справедливо соотношение

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = -\mathbf{C} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{A.6}$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная Эйлера, $\mathbf{C} = -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\Gamma'(1)$. Приближённое значение постоянной Эйлера равно 0,577215665.

10) Используя формулу (A.5), можно вычислить

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{\Gamma(z)}\bigg|_{z=-n} = (-1)^n\Gamma(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (A.7)$$

Приложение В. Историческая справка

Интерес к дифференциальному уравнению Бесселя

$$z^2\frac{d^2Z(z)}{dz^2} + z\frac{dZ(z)}{dz} + (z^2 - \nu^2)Z(z) = 0$$

и его решениям $Z_\nu(z)$, называемым цилиндрическими или бесселевыми функциями, оформился в виде систематических исследований ещё в XVIII веке. Это было вызвано тем, что уравнение Бесселя естественным образом возникало при решении различных физических задач.

Немецкий астроном, геодезист и математик Ф.В.Бессель (1784–1846) систематически исследовал один тип цилиндрических функций — цилиндрические функции I рода, обозначаемые $J_\nu(z)$. В связи с этим название „функции Бесселя“ иногда относят лишь к этому типу цилиндрических функций. Им было получено новое интегральное представление для $J_\nu(z)$, рекуррентные соотношения, доказано наличие бесконечного множества нулей уравнения $J_0(z) = 0$, составлены таблицы для $J_0(z)$, $J_1(z)$, $J_2(z)$.

Следует отметить, однако, что многие существенные результаты теории цилиндрических функций были получены ранее в работах Д.Бернулли, Л.Эйлера, Ж.Лагранжа.

Выражение для $J_0(z)$ ($\nu = 0$) было приведено в одной из работ Д.Бернулли, в которой изучались колебания тяжёлых цепей (1732г.). Им же было установлено, что уравнение $J_0(z) = 0$ имеет бесчисленное множество действительных корней.

В работах Л.Эйлера (1738г.), посвящённых задаче о колебаниях круглой мембраны, было выведено уравнение цилиндрических функций для целых значений ν. В этих же работах им были получены основные результаты для цилиндрических функций, играющие первостепенную роль в математической физике. В частности, им было получено интегральное представление $J_\nu(z)$ и представление $J_0(z)$ в виде ряда по степеням z, доказана бесконечность множества действительных корней уравнения $J_\nu(z) = 0$ при действительных значениях ν. Им же позже были получены выражения для линейно независимых от $J_\nu(z)$ решений для $\nu = 0$ и $\nu = 1$.

Впоследствии были введены цилиндрические функции второго рода, обозначаемые обычно $Y_\nu(z)$ или $N_\nu(z)$ и называемые функциями Вебера или функциями Неймана.

Эти функции линейно независимы от цилиндрических функций I рода $J_\nu(z)$ при всех ν и линейная комбинация $AJ_\nu(z) + BN_\nu(z)$ даёт общее решение уравнения Бесселя. Считается, что цилиндрические функции II рода были предложены К.Нейманом в 1867 году и их теория получила развитие в работах Г.Вебера в 1879 году.

Цилиндрические функции III рода, дающие два линейно независимых решения уравнения Бесселя, были предложены немецким математиком Г.Ханкелем в 1869 году. Эти функции связаны с цилиндрическими функциями первого и второго рода соотношениями

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z),$$
$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z),$$

и также носят его имя.

Список литературы

[1] Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции: Учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений. М.: Наука, 1984. — 383с.

[2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебник для физико–мат. специальностей. М.: изд–во Моск. ун–та: Наука, 2004. — 798с.

[3] В.С. Владимиров. Уравнения математической физики: Учебное пособие для студентов физических и математических специальностей высших учебных заведений. М.: Наука, 1971. — 512с.

[4] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного: Учебное пособие для студентов университетов. М.: Наука, 1973. — 736с.

Содержание

1 Уравнение Бесселя **3**

2 Функции Бесселя **3**

3 Основные формулы, рекуррентные соотношения, интегралы для функций Бесселя **6**

4 Функции Неймана **16**

5 Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя **22**

A Свойства гамма–функции **35**

B Историческая справка **37**

Список литературы **39**