

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

**БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА-ХОПФА
ДЛЯ ПОТОКОВ И ОТОБРАЖЕНИЙ**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2017

УДК 517.938
ББК 22.161.6
Б-66

Б-66 Бифуркация Андронова-Хопфа для потоков и отображений: Учебно-методическое пособие. Авторы: Болотов М.И., Гонченко С.В., Гонченко А.С., Гринес Е.А., Казаков А.О., Леванова Т.А., Лукьянов В.И. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. - 73 с.

Рецензент: д.ф.-м.н. **Г.В. Осипов**

Одной из самых важных бифуркаций для потоков и отображений в нелинейной динамике является бифуркация Андронова-Хопфа, часто встречающаяся в математических моделях реальных систем. Цель данного пособия – дать представление о современном состоянии теории нелинейных динамических систем в приложении к изучению конкретных бифуркационных сценариев, а также показать их роль в возникновении нетривиальных динамических режимов в конкретных математических моделях различных систем.

Пособие предназначено для студентов дневного отделения Института информационных технологий, математики и механики (в частности, для студентов магистерской программы «Математическое моделирование») и рекомендуется при изучении дисциплины «Математическая теория динамического хаоса». Для успешного усвоения материала необходимо предварительное изучение дисциплин «Дифференциальные уравнения» и «Концепции современного естествознания».

Учебно-методическое пособие подготовлено в соответствии с Планом мероприятий по реализации программы повышения конкурентоспособности ННГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2013-2020 годы, при поддержке Минобрнауки (Госзадание 1.539.2016/ФПМ).

УДК 517.938
ББК 22.161.6

© М.И. Болотов, С.В. Гонченко, А.С. Гонченко, Е.А. Гринес,
А.О. Казаков, Т.А. Леванова, В.И. Лукьянов, 2017
© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Принцип сведения и центральное многообразие	10
2. Бифуркация Андронова-Хопфа сложного фокуса	13
2.1. Нормальная форма бифуркации Андронова-Хопфа сложного фокуса	14
2.2. Основная теорема о бифуркации Андронова-Хопфа в случае двумерных потоков	23
2.3. Бифуркация Андронова-Хопфа в критическом случае $G = 0$	25
2.4. Примеры систем с бифуркацией Андронова-Хопфа для потоков	27
2.4.1. Бифуркация Андронова-Хопфа в модели колебательного контура с жестким возбуждением автоколебаний	27
2.4.2. О сценарии Шильникова возникновения спирального хаоса	31
2.4.3. Бифуркация Андронова-Хопфа и сценарий возникновения аттрактора Лоренца	35
2.4.4. Бифуркация Андронова-Хопфа в модели Шимицу-Мориока	38
2.4.5. Реакция Белоусова-Жаботинского и колебания в химических реакциях	38
3. Бифуркация Андронова-Хопфа периодической траектории (бифуркация рождения инвариантного тора)	42
3.1. Нормальная форма бифуркации рождения инвариантного тора	43
3.2. Формула для первой ляпуновской величины	48
3.3. Бифуркация в основном случае нормальной формы	49
3.4. Теорема о рождении инвариантной кривой из неподвижной точки	51
3.5. Примеры систем с бифуркацией Андронова-Хопфа для отображений	53
3.5.1. О сценарии возникновения дискретного аттрактора Шильникова	53
3.5.2. Бифуркация Андронова-Хопфа для отображений в живых системах	56
4. Теорема о существовании инвариантного тора. Принцип кольца	61
Литература	69

Введение

Это пособие посвящено теории бифуркаций динамических систем, роль которой в нелинейной динамике трудно переоценить. Причина этого очевидна – методы теории бифуркаций эффективно работают при изучении динамических моделей из самых разных областей естествознания. Кроме того, теория бифуркаций предоставляет исследователям из разных областей науки универсальный язык для общения и обмена идеями.

Если не вдаваться в детали, то можно сказать, что теория бифуркаций изучает качественные перестройки траекторий в фазовом пространстве при изменении параметров системы. По существу, это определение восходит к Анри Пуанкаре – оно полностью адекватно, когда речь идет о системах с простой динамикой, в частности, о гамильтоновых системах с одной степенью свободы, которыми он первоначально занимался. Надо, впрочем, заметить, что это интуитивно очевидное определение не всегда приемлемо на современном этапе развития теории. Как сейчас хорошо известно, у систем со сложной хаотической динамикой (например, у многомерных систем, у которых инвариантные многообразия седловых периодических траекторий пересекаются нетрансверсально) существуют «скрытые параметры», т.н. модули, и их бесконечно много, см., например, [14, 15, 31, 16]. А это означает, что полностью изучить бифуркации таких систем невозможно, поэтому приходится ограничиваться исследованием каких-либо в определенном смысле основных бифуркаций или основных характеристических свойств динамики. При этом часто то, что нужно считать «основным», зависит от самого исследователя, от того, какие свойства рассматриваемой математической модели наиболее важны в контексте рассматриваемой естественно-научной проблемы (как говорят, физически, биологически и т.п. релевантны). Таким образом, современную теорию бифуркаций нужно рассматривать, по-существу, как некоторую междисциплинарную науку, которая, с одной стороны, является преимущественно важным разделом математики и может использовать весь ее арсенал (от топологии до теории чисел), а с другой – дает определенную свободу исследователю, позволяя ему изучать то, что он считает интересным, и теми методами (например, компьютерными), которые он рассматривает здесь адекватными. Все это делает теорию бифуркаций одним из самых интересных и значительных разделов теории динамических систем.

В действительности, чтобы сформулировать понятие структуры фазового пространства и ее изменений, необходимо иметь определенное математическое основание. Первая попытка такой формализации была сделана в 1937 году Андроном и Понтрягиным [2], которые ввели понятие грубой системы, т.е. такой системы, которая не изменяет своих качественных свойств при малых возмущениях.

Свойство динамической системы быть грубой представляется особенно важным, когда речь идет о системах, возникающих в связи с приложениями. Значения параметров, входящих в правые части такой системы, связаны с данной задачей и по существу дела известны только приближенно. Если малые изменения этих параметров (в пределах точности измерений) приводят к изменению топологической структуры динамической системы, т.е. если система является *негрубой*, то ясно, что топологическая структура системы не дает возможности непосредственно судить о рассматриваемых явлениях. Напротив, если система является грубой, то ее структура может находиться в прямой связи со свойствами (физических) явлений. Сам термин грубые системы возник из противопоставления с тонкими (негрубыми) системами, топологическая структура которых нарушается под влиянием сколь угодно малых изменений.

В той же работе [2] Андроном и Понтрягин предложили необходимые и достаточные условия грубости для систем на плоскости. Благодаря этому многие задачи нелинейной динамики, которые можно смоделировать при помощи двумерных динамических систем, получили необходимое математическое обоснование.

В основу понятия грубости по Андронову-Понтрягину была положена восходящая к Пуанкаре идея качественного изучения динамических систем, т.е. с точностью до топологической эквивалентности. С этой точки зрения, две системы являются одинаковыми, или, как правильно говорить, *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм их фазовых пространств, который переводит траектории одной системы (полные траектории, полутраектории, отрезки траекторий) в траектории другой с сохранением ориентации (направлений траекторий). Система называется *грубой*, если она топологически эквивалентна любой достаточно близкой к ней системе, и, кроме того, соответствующий сопрягающий гомеоморфизм близок к тождественному. Другими словами, фазовые портреты обеих систем должны совпадать (топологически), а сопрягаемые траектории могут различаться весьма незначительно. Хотя в работе [2] рассматривались в основном двумерные системы, это определение вполне подходит и для многомерного случая. Нужно иметь в виду только, что здесь речь идет о гладких системах (по крайней мере, C^1 -гладких), за-

данных на компактных фазовых пространствах, и близость систем тоже предполагается в C^1 -топологии. Это предполагает, например, что если система задана в виде $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$, где (x, y) принадлежат некоторой ограниченной области G в \mathbb{R}^2 , то близкая система $\dot{x} = \tilde{P}(x, y)$, $\dot{y} = \tilde{Q}(x, y)$ также определена на G , и правые части этих двух систем также близки вместе с первыми производными. Другими словами, для некоторого $\varepsilon > 0$ должны выполняться условия

$$\|\tilde{P}(x, y) - P(x, y)\|_{C^1} < \varepsilon, \quad \|\tilde{Q}(x, y) - Q(x, y)\|_{C^1} < \varepsilon,$$

где $\|\varphi(x, y)\|_{C^1} = \sup_{(x,y) \in G} \left\{ |\varphi| + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| \right\}$.

Заметим, что C^0 -близость возмущений здесь не рассматривается, так как любая система становится в этом случае негрубой: легко, например, из одного состояния равновесия сделать сколь угодно большое их число за счёт сохраняющего гладкость C^0 -возмущения. С другой стороны, нельзя заменить также топологическую эквивалентность на гладкую (т.е. вместо гомеоморфизмов фазового пространства рассматривать диффеоморфизмы), так как при гладкой эквивалентности характеристические корни состояний равновесия становятся инвариантами, и, тем самым, здесь возникают модули.

Основные положения теории Андронова и Понтрягина представлены в монографии [5], см. также [26]. Наряду с грубостью в теории динамических систем рассматривается также близкое понятие *структурной устойчивости*, введенное Пейшото [36]. Различие между понятиями структурной устойчивости и грубости состоит в том, что для первого из них не предполагается, что сопрягающий гомеоморфизм близок к тождественному. В настоящее время неизвестно, чем они отличаются – во всяком случае, во всех известных примерах это одно и то же.

В той же работе [2] Андронов и Понтрягин предложили необходимые и достаточные условия грубости для систем на плоскости. В частности, двумерная система на G грубая тогда и только тогда, когда

- она имеет конечное число состояний равновесия, и все они грубые, т.е. не имеют собственных значений, лежащих на мнимой оси;
- она имеет конечное число предельных циклов, и все они грубые, т.е. их мультипликатор не равен 1;¹

¹Мультипликаторы предельного цикла – это собственные значения матрицы линеаризации отображения Пуанкаре в неподвижной точке, отвечающей какой-либо точке цикла. В двумерном случае отображение Пуанкаре одномерно, и оно имеет один мультипликатор λ . В случае плоскости λ положительно, и если $0 < \lambda < 1$, то цикл устойчивый, а если $\lambda > 1$ – неустойчивый. В случае неориентируемой поверхности (например, листа Мёбиуса)

- нет траекторий (сепаратрис), выходящих из одного седлового состояния равновесия и входящих в другое или в то же самое.

Благодаря этому, многие задачи нелинейной динамики, которые можно смоделировать при помощи двумерных динамических систем, получили необходимое математическое обоснование. Во всяком случае, понятие бифуркации, т.е. качественного изменения фазового портрета системы при сколь угодно малом изменении параметра(ов), наполнилось точным математическим содержанием, по крайней мере, в случае двумерных систем. Бифуркации отвечает переход в пространстве динамических систем между открытыми множествами грубых систем разных топологических типов. В общем случае такой переход происходит через бифуркационную поверхность коразмерности один, которой принадлежат негрубые системы, у которых одно из условий грубости нарушено.

Одна из самых известных бифуркаций двумерных систем на плоскости — это бифуркация состояния равновесия типа *сложный фокус*. Здесь в момент бифуркации система имеет состояние равновесия с собственными значениями $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, принадлежащими мнимой оси. По-видимому, впервые такая бифуркация была описана А.А. Андроновым в его докладе [1] на Всесоюзной конференции по колебаниям в 1931 году. Её математическая теория, а также теория основных (коразмерности один) бифуркаций систем на плоскости, была представлена в работе А.А. Андропова и Е.А. Леонтович [3] 1937 года. Также в первом издании книги «Теория колебаний» А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин (1937), бифуркация рождения предельного цикла из сложного фокуса на плоскости изложена с математическим доказательством, и там же рассмотрены примеры. Многомерный аналог бифуркации сложного фокуса был изучен Т. Хопфом [32] в 1942 г. После работы [32] эта бифуркация стала известна большому числу зарубежных математиков², и поэтому долгое время на Западе такая бифуркация называлась «бифуркацией Хопфа». Сейчас её обычно называют «*бифуркацией Андропова-Хопфа*», что, конечно, более справедливо. В настоящем пособии мы также будем использовать этот термин, поскольку оригинальное название «бифуркация сложного фокуса» или «рождение предельного цикла из сложного фокуса» по разным причинам используется не очень часто.

Сам Андронов отмечал прежде всего важное значение этой бифуркации для физики. В частности, она позволила ответить на важные в то время во-

отображение Пуанкаре в окрестности предельного цикла может быть неориентируемым, и тогда его мультипликатор будет отрицательным.

²Работы А.А. Андропова и его сотрудников долгое время оставались неизвестными для широкой математической общественности, как впрочем и многие другие работы советских ученых.

просы о природе возникновения автоколебаний и их разрушений. Сейчас известно большое число конкретных систем, в которых наблюдается бифуркация Андронова-Хопфа. В настоящем пособии мы рассмотрим несколько таких примеров, показывающих, в частности (см. примеры 2.4.2 и 2.4.3), что достаточно простая бифуркация Андронова-Хопфа играет фундаментальную роль в теории динамического хаоса.

Другая бифуркация, которая рассматривается в пособии – это дискретный аналог бифуркации Андронова-Хопфа. Мы ее называем «бифуркацией Андронова-Хопфа для отображений», хотя у неё существуют и другие общепринятые названия: бифуркация рождения тора, бифуркация Неймарка-Сакера и даже бифуркация Андронова-Хопфа-Неймарка-Сакера. С потоковой бифуркацией Андронова-Хопфа эту бифуркацию роднит то, что в случае двумерных отображений она связана с рождением замкнутой инвариантной кривой из неподвижной точки с собственными значениями $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\omega}$ ($0 < \omega < \pi$), лежащими на единичной окружности в комплексной плоскости. Например, вместо двумерного потока в окрестности состояния равновесия с собственными значениями $\pm i\omega$ можно рассмотреть его дискретизацию – отображение по траекториям потока за единицу времени. Тогда это отображение будет иметь неподвижную точку с собственными значениями $e^{\pm i\omega}$, при бифуркации которой естественно родится замкнутая инвариантная кривая (дискретный аналог предельного цикла). Однако, это соответствие только условное и очень поверхностное. Это связано прежде всего с тем, что в такой бифуркации очень важную роль играют резонансы – ситуация, когда ω – рациональное число, т.е. $\omega = 2\pi p/q$. В случаях, когда эти резонансы слабые ($q \geq 5$) или ω иррационально, то аналогия очень большая – здесь в общем случае из неподвижной точки рождается единственная замкнутая инвариантная кривая. В случае же т.н. *сильных резонансов*, когда $\omega = \pi/2$ (резонанс 1:4) и $\omega = 2\pi/3$ (резонанс 1:3), бифуркации совсем другие, см., например, [7, 33]. Бифуркация Андронова-Хопфа для отображений была впервые исследована в работе Ю.И. Неймарка [35], который однако не рассмотрел случай сильных резонансов. Впоследствии этот пробел был устранен Р.Сакером [38]. Термин «бифуркация рождения тора» также вполне подходит для обозначения такой бифуркации, поскольку, если в критический момент предельный цикл трехмерного потока имеет мультипликаторы $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\omega}$, то при соответствующей бифуркации сам цикл меняет свою устойчивость, и от него отрождается двумерный инвариантный тор, имеющий в общем случае (если, например, отсутствуют сильные резонансы и первая ляпуновская величина не равна нулю) тот же тип устойчивости, что и предельный цикл.

Заметим также, что бифуркация рождения тора из предельного цикла возможна в потоковых системах, размерность которых не меньше трех. Только в этом случае у предельного цикла возможно существование двух комплексно-сопряженных мультипликаторов на единичной окружности. Как известно, с физической точки зрения, устойчивому предельному циклу отвечает режим автоколебания, а устойчивому двумерному тору – режим биений. Таким образом, бифуркация рождения тора (в случае, когда цикл теряет устойчивость и из него рождается устойчивый двумерный тор), соответствует переходу от режима автоколебаний (периодический режим) к режиму биений (квазипериодический режим). Такие переходы наблюдаются во многих математических моделях реальных процессов. Таким образом, бифуркация Андронова-Хопфа для потоков и отображений имеет также и важное прикладное значение.

1. Принцип сведения и центральное многообразие

Основной целью пособия является изучение бифуркаций негрубых состояний равновесия и периодических траекторий многомерных динамических систем. Хотя мы здесь ограничимся только исследованием бифуркации Андронова-Хопфа для потоков и отображений, тем не менее, нам понадобятся некоторые факты общей теории, в частности теории центральных многообразий.

Рассмотрим семейство динамических систем

$$\dot{x} = X(u, \mu), \quad (1.1)$$

где $u \in \mathbb{R}^n$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$, а X — C^r -гладкая относительно всех своих аргументов функция, определенная на некоторой области $D \times U$, где $D \subseteq \mathbb{R}^n$ и $U \subseteq \mathbb{R}^p$. Здесь x является вектором фазовых переменных, а μ — вектором параметров. Пусть точка $u = 0$ является состоянием равновесия системы (1.1) при $\mu = 0$, т.е. $X(0, 0) = 0$. Предположим, что у характеристического уравнения

$$\det \left\| \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \Big|_{u=0, \mu=0} - \lambda E_n \right\| = 0 \quad (1.2)$$

есть k корней $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, имеющих нулевую действительную часть ($\operatorname{Re} \lambda_i = 0, i = 1, \dots, k$), а остальные корни, $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$, не лежат на мнимой оси ($\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0, i = k + 1, \dots, n$).

Обозначим через $V_\varepsilon(O)$ некоторую достаточно малую, но фиксированную окрестность точки O в начале координат. Задача состоит в том, чтобы описать качественные изменения топологической структуры траекторий в окрестности $V_\varepsilon(O)$ при изменении значений параметров μ .

Для того, чтобы значительно упростить дальнейшее изложение, воспользуемся следующим принципом сведения [19, 27].

Теорема 1. Семейство (1.1) при всех достаточно малых μ , $\|\mu\| \leq \mu_0$, в окрестности $V_\varepsilon(O)$ топологически эквивалентно семейству

$$\dot{x} = A(\mu)x + f(x, \mu), \quad \dot{y} = B(\mu)y, \quad (1.3)$$

где $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^{n-k}$, $f(0, 0) = 0$, $f'(0, 0) = 0$, матрица $A(0)$ имеет собствен-

ные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_k$; $Re \lambda_i = 0, i = 1, \dots, k$, а матрица $B(0)$ – собственные значения $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$; $Re \lambda_j \neq 0, j = k + 1, \dots, n$.

Замечание 1. В случае отсутствия у состояния равновесия характеристических корней с $Re \lambda_i = 0$ (гиперболический случай) отсюда следует известная теорема Гробмана-Хартмана о топологической эквивалентности системы (1.1) в $V_\varepsilon(O)$ своей линейной части.

Семейство (1.3) является семейством общего положения в том смысле, что оно описывает всевозможные бифуркации семейства (1.1) в $V_\varepsilon(O)$. Суть принципа сведения состоит в том, что вместо бифуркаций семейства (1.1) он позволяет изучать бифуркации в некотором смысле более простого семейства (1.3). Также он сводит изучение бифуркаций n -мерной системы (1.1) к изучению k -мерной системы

$$\dot{x} = A(\mu)x + f(x, \mu) \quad (1.4)$$

на так называемом *центральной многообразии* семейства (1.1).

На самом деле, здесь возникает конкретная задача нахождения функции $f(x, \mu)$ в том случае, когда заданы правые части системы (1.1), которую можно переписать в аналогичном (1.3) виде

$$\dot{x} = A(\mu)x + \tilde{f}(x, y, \mu), \quad \dot{y} = B(\mu)y + \tilde{g}(x, y, \mu), \quad (1.5)$$

выделив линейную часть $\dot{x} = A(\mu)x, \dot{y} = B(\mu)y$. Тогда искомое k -мерное центральное многообразие W^c будет иметь в $V_\varepsilon(O)$ уравнение $y = \Phi(x, \mu)$, где $\Phi(0, 0) = 0, \Phi'(0, 0) = 0$. Это многообразие является C^r -гладким, и все траектории, не покидающие окрестности $V_\varepsilon(O)$ лежат в W^c . Поэтому функцию $f(x, \mu)$ из (1.4) можно определить как $f(x, \mu) = \tilde{f}(x, \Phi(x, \mu), \mu)$. Заметим, что центральное многообразие может быть не определено единственным образом – в этом случае годится любая функция $\Phi(x, \mu)$.

Функция $\Phi(x, \mu)$ должна удовлетворять гомологическому уравнению

$$\Phi'_x(x, \mu) \left(A(\mu)x + \tilde{f}(x, \Phi(x, \mu), \mu) \right) = B(\mu)\Phi(x, \mu) + \tilde{g}(x, \Phi(x, \mu), \mu),$$

и это дает способ вычисления $\Phi(x, \mu)$ с помощью, например, рядов. Например, функцию $\Phi(x, 0)$ можно представить в окрестности $x = 0$ как $\Phi(x, 0) = \beta_1 x^2 + \beta_2 x^3 + \dots$. Обычно для задач теории бифуркации достаточно знать несколько первых коэффициентов этого разложения (в общем случае знание только β_1 или даже знание того, что разложение начинается с квадратичных членов бывает достаточным).

Пример 1. Рассмотрим систему $\dot{x} = xy, \dot{y} = y + x^2$. Её центральное много-

образии имеет вид $y = \beta_1 x^2 + \dots$. Тогда имеем $2\beta_1 x \dot{x} = \beta_1 x^2 + x^2 + \dots$ или $2\beta_1 x(\beta_1 x^3 + \dots) = \beta_1 x^2 + x^2 + \dots$. Откуда вытекает, что $\beta_1 = -1$, и соответственно система на центральном многообразии принимает вид $\dot{x} = -x^3 + \dots$. Это означает, что состояние равновесия $O(0, 0)$ является вырожденным узлом, и для изучения его бифуркаций нужно рассматривать двухпараметрическое семейство. Например, семейство

$$\dot{x} = -x^3 + \mu_1 + \mu_2 x.$$

Более подробно про теорию центрального многообразия см., например, [25].

Аналогично, принцип сведения справедлив и в случае многомерных отображений в окрестности неподвижных точек, в том числе и отображений Пуанкаре в окрестностях периодических траекторий. Таким образом, если k собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ линейной части диффеоморфизма лежат на единичной окружности, а остальные $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ ей не принадлежат, то задача изучения бифуркаций неподвижной точки сводится к исследованию k -мерного отображения

$$\bar{x} = A(\mu)x + F(x, \mu), \tag{1.6}$$

где $F(0, 0) = 0$, $F'(0, 0) = 0$, на центральном многообразии, и в этом случае матрица $A(0)$ имеет собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $|\lambda_i| = 1, i = 1, \dots, k$.

2. Бифуркация Андронова-Хопфа сложного фокуса

Рассмотрим случай, когда многомерная система содержит состояние равновесия O , у которого имеется пара чисто мнимых корней $\lambda_1 = \lambda_2^* = i\omega$, где $\omega > 0$, а остальные корни $\lambda_3, \dots, \lambda_n$ не лежат на мнимой оси, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$, $i = 3, \dots, n$.

При $n = 2$ бифуркация такого состояния равновесия была изучена в работе А.А. Андронова и Е.А. Леонтович [3] в 1937 году, см. также [4, 5], и несколько позднее в работе Е. Хопфа [32] (1942 г.), в которой также был рассмотрен и многомерный случай.¹ В силу принципа сведения в этом случае достаточно рассмотреть двумерную систему

$$\dot{x} = a(\mu)x + b(\mu)y + f(x, y, \mu), \quad \dot{y} = c(\mu)x + d(\mu)y + g(x, y, \mu), \quad (2.1)$$

определенную в некоторой достаточно малой фиксированной окрестности U_ε начала координат $O(0, 0)$. Здесь предполагается, что функции f и g при всех достаточно малых μ обращаются в нуль при $x = y = 0$ вместе с первыми производными, а матрица линеаризации

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} a(\mu) & b(\mu) \\ c(\mu) & d(\mu) \end{pmatrix}$$

имеет при $\mu = 0$ собственные значения $\pm i\omega$. Что касается вхождения параметра μ в (2.1), то прежде всего будем полагать, что действительные части собственных значений матрицы $A(\mu)$ меняются строго монотонно при изменении μ . Это условие будет выполняться, если, например,

$$\frac{d}{d\mu} \operatorname{tr} A(\mu) \neq 0,$$

где $\operatorname{tr} A$ – след матрицы A .

Попробуем привести систему (2.1) к как можно более простому виду. Сначала преобразуем линейные члены. Для этого рассмотрим соответствующую

¹В зарубежной литературе эту бифуркацию обычно называют бифуркацией Хопфа (Hopf bifurcation), правда, в последнее время ее все чаще называют бифуркацией Андронова-Хопфа. У классиков, [5], она называется «бифуркацией сложного фокуса» или «рождением предельного цикла из сложного фокуса»; используется также термин «бифуркация рождения цикла», например, в книге [18], редактором перевода на русский язык которой была Е.А. Леонтович.

линейную систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(\mu)x + b(\mu)y, \\ \dot{y} &= c(\mu)x + d(\mu)y,\end{aligned}\tag{2.2}$$

у которой μ – параметр, а коэффициенты a, b, c, d удовлетворяют следующим условиям (условиям центра):

$$a(0) + d(0) = 0, \quad a(0)d(0) - b(0)c(0) = \omega^2 > 0.\tag{2.3}$$

Задача 1. 1) При $\mu = 0$ с помощью линейной замены координат привести систему (2.2) к виду $\dot{x} = -\omega y, \dot{y} = \omega x$.

2) Привести систему (2.2) к виду $\dot{x} = \mu x - \omega(\mu)y, \dot{y} = \omega(\mu)x + \mu y$, где $\mu = \mu_{new} = a(\mu) + d(\mu)$ и $\omega(\mu)^2 = a(\mu)d(\mu) - b(\mu)c(\mu)$.

3) Заменой времени $t \rightarrow \frac{1}{\omega}t$ и параметра $\mu \rightarrow \frac{1}{\omega}\mu$ привести систему из п.2 к стандартному виду $\dot{x} = \mu x - y, \dot{y} = x + \mu y$. \blacktriangle

Решение. 1) Положим в (2.2) $x_{new} = x, \mu x_{new} - \omega(\mu)y_{new} = a(\mu)x + b(\mu)y$. Тогда получим, что $\dot{x}_{new} = -\omega y_{new}$ и $-\omega \dot{y}_{new} = a(0)\dot{x} + b(0)\dot{y} = a(0)(a(0)x + b(0)y) + b(0)(c(0)x + d(0)y) = (a(0)^2 + b(0)(c(0)) \cdot x + b(0)(a(0) + d(0)) \cdot y$. В силу (2.3) получаем, что коэффициент перед y обращается в нуль, и $a(0)^2 + b(0)c(0) = -a(0)d(0) + b(0)c(0) = -\omega^2$.

2) Решается также как и 1), только замена ищется в виде $x_{new} = x, -\omega y_{new} = a(0)x + b(0)y$.

3) Решается делением обеих частей системы из п. 2) на ω . Тогда, например, $\frac{dx}{\omega dt} = \frac{dx}{d\tau}$, где новое время $\tau = \frac{t}{\omega}$. \square

Теперь, без ограничения общности, будем полагать, что

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

2.1. Нормальная форма бифуркации Андронова-Хопфа сложного фокуса

Для изучения поведения траекторий в достаточно малой фиксированной окрестности $U_\varepsilon(O)$ воспользуемся методом *нормальных форм*. В этой связи будем предполагать, что $f(x, y, \mu)$ и $g(x, y, \mu)$ – аналитические функции в некоторой окрестности начала координат $O(0, 0)$. Разложив f и g в ряды, перепишем систему (2.1) в следующем виде²

$$\dot{x} = \mu x - y + \sum_{m+n \geq 2} a_{mn} x^m y^n, \quad \dot{y} = x + \mu y + \sum_{m+n \geq 2} b_{mn} x^m y^n.\tag{2.4}$$

²В случае, когда f и g являются C^r -гладкими, мы рассматриваем в (2.4) конечные отрезки соответствующих рядов с $2 \leq m + n \leq r - 1$ и остаточные члены вида $O((x^2 + y^2)^{r/2})$ (либо с $2 \leq m + n \leq r$ и $o((x^2 + y^2)^{r/2})$ соответственно). Если $r = \infty$, то ряды в (2.4) являются формальными.

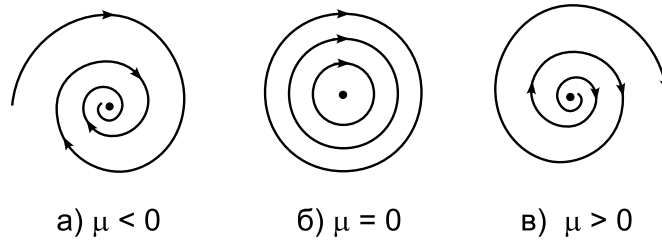


Рис. 1: Динамика линейной системы $\dot{x} = \mu x - y, \dot{y} = x + \mu y$ при изменении μ

Динамика линеаризованной системы (2.4), $\dot{x} = \mu x - y, \dot{y} = x + \mu y$, весьма простая:

Задача 2. Показать, что у линеаризованной системы (2.4) состояние равновесия $O(0, 0)$ является линейным центром при $\mu = 0$, устойчивым фокусом при $\mu < 0$, и неустойчивым фокусом при $\mu > 0$, см. рис. 1. \blacktriangle

Ясно, что учет нелинейных членов должен сильно испортить такое простое поведение траекторий. Чтобы это выяснить, введем вместо x, y некоторые специальные координаты, в которых уравнения (2.4) примут так называемую *нормальную форму*, см. Лемма 1.

Перейдем в системе (2.4) к комплексным переменным $u = x + iy, v = x - iy$. Здесь $v = u^*$, где $*$ означает комплексное сопряжение. Тогда относительно u, v получим следующую систему:

$$\dot{u} = (\mu + i)u + \sum_{m+n \geq 2} A_{mn} u^m v^n, \quad \dot{v} = (\mu - i)v + \sum_{m+n \geq 2} B_{mn} u^m v^n. \quad (2.5)$$

Коэффициенты A_{mn} и B_{mn} будут теперь комплексными величинами, удовлетворяющими, в силу вещественности системы (2.4), соотношениям $A_{mn}^* = B_{nm}$.³

Рассмотрим теперь замену переменных $(u, v) \rightarrow (\xi, \eta)$ вида

$$u = \xi + \sum_{m+n \geq 2} \alpha_{mn} \xi^m \eta^n, \quad v = \eta + \sum_{m+n \geq 2} \beta_{mn} \xi^m \eta^n, \quad (2.6)$$

где α_{mn}, β_{mn} — неопределенные коэффициенты, для которых выполнены соотношения $\alpha_{mn}^* = \beta_{nm}$.

³ Действительно, из (2.5) мы получаем, что $\frac{1}{2}(\dot{u} + \dot{v}) = \dot{x} = \mu x - y + \frac{1}{2} \sum (A_{mn} z^m (z^*)^n + A_{mn}^* (z^*)^m z^n)$, где $z = u, z^* = v$, так уравнение для \dot{x} — вещественное. Отсюда видно, что $A_{mn}^* = B_{nm}$.

В новых переменных система (2.5) принимает вид

$$\dot{\xi} = (\mu + i)\xi + \sum_{m+n \geq 2} \hat{A}_{mn} \xi^m \eta^n, \quad \dot{\eta} = (\mu - i)\eta + \sum_{m+n \geq 2} \hat{B}_{mn} \xi^m \eta^n, \quad (2.7)$$

где $\hat{A}_{mn}^* = \hat{B}_{nm}$.

Лемма 1. При $\mu = 0$ существует формальная замена координат вида (2.5), после которой система (2.7) приводится к формальной нормальной форме вида

$$\dot{\xi} = i\xi + \xi \sum_{n \geq 1} \hat{A}_{n+1, n} |\xi \eta|^n, \quad \dot{\eta} = -i\eta + \eta \sum_{n \geq 1} \hat{A}_{n+1, n}^* |\xi \eta|^n. \quad (2.8)$$

Доказательство. Подставляя (2.6) в первое уравнение из (2.5) и заменяя $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$ на их выражения из (2.7), получим

$$\begin{aligned} & (1 + \sum \alpha_{mn} m \xi^{m-1} \eta^n) \left[(\mu + i)\xi + \sum \hat{A}_{mn} \xi^m \eta^n \right] + \\ & + \sum \alpha_{mn} n \xi^m \eta^{n-1} \left[(\mu - i)\eta + \sum \hat{B}_{mn} \xi^m \eta^n \right] = \\ & = (\mu + i) (\xi + \sum \alpha_{mn} \xi^m \eta^n) + \\ & + \sum A_{mn} \left(\xi + \sum_{i+j \geq 2} \alpha_{ij} \xi^i \eta^j \right)^m \left(\eta + \sum_{i+j \geq 2} \beta_{ij} \xi^i \eta^j \right)^n, \quad m + n \geq 2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Используя это равенство, мы можем теперь последовательно, по мере возрастания $m + n$, найти искомые α_{mn} .

Рассмотрим случай $m + n = 2$. Тогда из (2.9) получаем следующее равенство

$$\begin{aligned} & \alpha_{mn} m \xi^m \eta^n (\mu + i) + \hat{A}_{mn} \xi^m \eta^n + \alpha_{mn} n \xi^m \eta^n (\mu - i) = \\ & = (\mu + i) \alpha_{mn} \xi^m \eta^n + A_{mn} \xi^m \eta^n, \quad m + n \geq 2. \end{aligned}$$

Откуда находим

$$\hat{A}_{mn} = A_{mn} - \alpha_{mn} [(\mu + i)(m - 1) + (\mu - i)n].$$

Таким образом, если $(\mu + i)(m - 1) + (\mu - i)n \neq 0$, то мы можем сделать $\hat{A}_{mn} = 0$, полагая

$$\alpha_{mn} = \frac{A_{mn}}{(\mu + i)(m - 1) + (\mu - i)n}.$$

При $\mu = 0$ это можно сделать, если

$$m - n - 1 \neq 0. \quad (2.10)$$

Для $m + n = 2$ условие (2.10) выполняется всегда. Следовательно, при $\mu = 0$ и при всех достаточно малых μ , можно так подобрать коэффициенты α_{mn} с $m + n = 2$, что $\hat{A}_{mn} = 0$. Автоматически при $\beta_{nm} = \alpha_{mn}^*$ зануляются также все коэффициенты \hat{B}_{mn} с $m + n = 2$. Отметим, что α_{mn} в этом случае гладко зависит от μ . При $\mu = 0$ для α_{mn} с $m + n = 2$ получаем тогда формулы

$$\alpha_{20} = -iA_{20}, \quad \alpha_{11} = iA_{11}, \quad \alpha_{02} = \frac{i}{3}A_{02}. \quad (2.11)$$

Рассмотрим случай $m + n = 3$. Тогда мы выводим из (2.9), так как $\hat{A}_{ij} = \hat{B}_{ij} = 0$ при $i + j = 2$, что

$$\hat{A}_{mn} = A_{mn} - \alpha_{mn} [(\mu + i)(m - 1) + (\mu - i)n] + \dots, \quad m + n = 3,$$

где многоточием обозначены члены, зависящие от α_{ij} с $i + j = 2$, которые уже определены выше. Полагая в этой формуле $\hat{A}_{mn} = 0$, мы опять можем найти соответствующий коэффициент α_{mn} с $m + n = 3$ (который зависит уже от A_{mn} с $m + n = 3$ и известных α_{ij} с $i + j = 2$) при выполнении неравенства (2.10) для $m + n = 3$. Это можно сделать при всех таких m и n , кроме случая $m = 2, n = 1$ (который называется *тождественным (или тривиальным) резонансом*) – здесь мы положим $\alpha_{21} = 0$. Заметим, что при этом в выражение для нового коэффициента \hat{A}_{21} войдут старый коэффициент A_{21} перед кубическим членом u^2v из (2.5) и некоторая уже известная комбинация из коэффициентов A_{20}, A_{11} и A_{02} (см. задачу 3).

Поступая таким же образом с остальными коэффициентами при $m + n > 3$, мы получим при $\mu = 0$ формальные ряды в правой части системы (2.7), у которых можно занулить все коэффициенты, кроме $\hat{A}_{n+1, n}$ и $\hat{B}_{n, n+1} = \hat{A}_{n+1, n}^*$.⁴ \square

Замечание 2. Система (4) имеет неподвижную точку O с собственными значениями $\lambda_1 = \mu + i$ и $\lambda_2 = \mu - i$. Тогда моном $A_{mn}\xi^m\eta^n$ является резонансным, если выполняется условие $\lambda_1 = m\lambda_1 + n\lambda_2$, которое в данном случае имеет вид $(m - 1)(\mu + 1) + n(\mu - i) = 0$. При $\mu = 0$ это соотношение принимает вид $m - 1 = n$. Тогда говорят, что в случае мономов вида $A_{j+1, j}\xi^{j+1}\eta^j$, $j = 1, 2, \dots$ имеет место тождественный (тривиальный) резонанс. Аналогично получаем, что мономы $B_{j, j+1}\xi^j\eta^{j+1}$ являются тождественно резонансными. Таким образом, формальная нормальная форма (2.8) – это та, в которой в правых частях исходной системы (2.5) остаются только лишь тождественно резонансные члены.

Очевидно, что вместо формальной замены координат вида (2.6) на практике удобнее рассматривать полиномиальные замены координат вида

$$u = \xi + \sum_{m+n \geq 2}^N \alpha_{mn} \xi^m \eta^n, \quad v = \eta + \sum_{m+n \geq 2}^N \beta_{mn} \xi^m \eta^n, \quad (2.12)$$

где $\alpha_{mn}^* = \beta_{nm}$ и $N = 2k + 1$. Тогда соответствующая нормальная форма порядка k будет иметь при всех достаточно малых μ следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (\mu + i)\xi + \xi \sum_{j \geq 1}^k \hat{A}_{j+1, j} |\xi\eta|^j + O(\rho^{2k+2}), \\ \dot{\eta} &= (\mu - i)\eta + \eta \sum_{j \geq 1}^k \hat{A}_{j+1, j}^* |\xi\eta|^j + O(\rho^{2k+2}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$. Поскольку указанные замены являются полиномиальными,

⁴Заметим однако, что при $\mu \neq 0$ соответствующие формальные ряды могут расходиться (в заменах появляются малые знаменатели вида $(\mu + i)(m - 1) + (\mu - i)n$).

то нет проблем с их сходимостью, за исключением того, что при $k \rightarrow \infty$ интервал значений параметра μ , при которых эти замены справедливы, должен стягиваться к $\mu = 0$.

Преобразование (2.6) с подходящими α_{mn} при $m + n = 2, 3$, приводит систему (2.7) к виду:

$$\dot{\xi} = (\mu + i)\xi + \hat{A}_{21}\xi^2\eta + \dots, \quad \dot{\eta} = (\mu - i)\eta + \hat{A}_{21}^*\xi\eta^2 + \dots, \quad (2.14)$$

где многоточием обозначены члены четвертого порядка и выше.

На плоскости (ξ, η) введем полярные координаты $\xi = \rho e^{i\varphi}$, $\eta = \rho e^{-i\varphi}$. Тогда получим

$$\dot{\rho}e^{i\varphi} + \rho e^{i\varphi}i\dot{\varphi} = (\mu + i)\rho e^{i\varphi} + \hat{A}_{21}\rho^3 e^{i\varphi} + O(\rho^4),$$

$$\dot{\rho}e^{-i\varphi} - \rho e^{-i\varphi}i\dot{\varphi} = (\mu - i)\rho e^{-i\varphi} + \hat{A}_{21}^*\rho^3 e^{-i\varphi} + O(\rho^4).$$

Поделим первое уравнение на $e^{i\varphi}$, а второе на $e^{-i\varphi}$. Затем, складывая и вычитая полученные уравнения, находим, что система (2.14) в полярных координатах может быть представлена в следующем виде

$$\dot{\rho} = \mu\rho + G\rho^3 + O(\rho^4), \quad \dot{\varphi} = 1 + B\rho^2 + O(\rho^3), \quad (2.15)$$

где $G = \text{Re } \hat{A}_{21}$, $B = \text{Im } \hat{A}_{21}$. Коэффициент G называется *первой ляпуновской величиной*.

Наше основное предположение – это то, что $G(0) \neq 0$. В этом случае мы можем еще упростить систему (2.15). Во-первых, сделаем замену времени

$$t_{new} = t (1 + B\rho^2 + O(\rho^3)).$$

Тогда (2.15) переписется как

$$\dot{\rho} = \mu\rho + (G + B\mu)\rho^3 + O(\rho^4), \quad \dot{\varphi} = 1. \quad (2.16)$$

Далее сделаем еще одну нормировку

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{|G + B\mu|}} \rho_{new}.$$

Тогда (2.16) переписется в следующем виде

$$\dot{\rho} = \mu\rho + L_1\rho^3 + O(\rho^4), \quad \dot{\varphi} = 1, \quad (2.17)$$

где $L_1 = \text{sign } G(0)$. Заметим, что здесь $O(\rho^4)$ -члены зависят, вообще говоря, от

φ . Однако главная часть от φ не зависит, поэтому если $G(0) \neq 0$, то поведение траекторий в достаточно малой окрестности начала координат $\rho = 0$ можно полностью изучить, зная свойства простой одномерной системы

$$\dot{\rho} = \mu\rho + \rho^3 \quad - \quad \text{в случае } G(0) > 0$$

или

$$\dot{\rho} = \mu\rho - \rho^3 \quad - \quad \text{в случае } G(0) < 0,$$

определенной на луче $\rho \geq 0$. При этом очевидно, что нулевому состоянию равновесия $\rho = 0$ этой одномерной системы в (2.17) и (2.15) будет отвечать состояние равновесия в начале координат исходной системы, а ненулевому состоянию равновесия $\rho = \rho_0$ – предельный цикл, близкий к окружности радиуса ρ_0 . В случае $G(0) \neq 0$ знак первой ляпуновской величины определяет тип устойчивости негрубого состояния равновесия при $\mu = 0$. При $G < 0$ в малой окрестности O все траектории системы (2.15) являются спиралями, стремящимися к O при $t \rightarrow +\infty$, а при $G > 0$ они стремятся к O при $t \rightarrow -\infty$.⁵ Такое состояние равновесия называется *сложным фокусом первого порядка*, устойчивым при $G < 0$ и неустойчивым при $G > 0$. Из самой процедуры приведения системы (2.4) к виду (2.15) вытекает, что величина $G \neq 0$ зависит только от коэффициентов a_{mn}, b_{mn} системы (2.4) с $m + n \leq 3$.

Задача 3. Показать, что

$$G = \operatorname{Re} A_{21} - \operatorname{Im} (A_{11} A_{20}),$$

где A_{ij} – коэффициенты системы (2.5). ▲

Решение. Полагая в (2.9) $\alpha_{21} = 0$ и $\hat{B}_{mn} = 0$ при $m + n = 2$, получим следующее соотношение для определения мономов относительно $\xi^2\eta$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{21}\xi^2\eta &= A_{21}\xi^2\eta + A_{20}(\xi + \alpha_{20}\xi^2 + \alpha_{11}\xi\eta)^2 + A_{11}(\xi + \alpha_{20}\xi^2 + \alpha_{11}\xi\eta)(\eta + \beta_{20}\xi^2 + \beta_{11}\xi\eta) + \\ &+ A_{02}(\eta + \beta_{20}\xi^2 + \beta_{11}\xi\eta)^2 + O(|\eta|^2 + |\xi|^3). \end{aligned}$$

Откуда, выделяя члены содержащие только $\xi^2\eta$, получаем

$$\hat{A}_{21} = A_{21} + 2A_{20}\alpha_{11} + A_{11}\beta_{11} + \alpha_{20}A_{11} + 2A_{02}\beta_{20}.$$

Учитывая соотношения (2.11) и то, что $\beta_{11} = \alpha_{11}^*, \beta_{20} = \alpha_{02}^*$, получаем

$$\hat{A}_{21} = A_{21} + iA_{20}A_{11} - i|A_{11}|^2 - \frac{2i}{3}|A_{02}|^2.$$

⁵При это для решения $\rho = \rho(t)$ с начальной точкой вблизи $\rho = 0$, как легко видеть, будет иметь место асимптотика $\rho \sim |t|^{-1/2}$ при $|t| \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow +\infty$ в случае $G < 0$ и $t \rightarrow -\infty$ в случае $G > 0$). То есть, здесь имеет место степенной по времени, $\sim |t|^{-1/2}$, характер стремления к нулю, а не экспоненциальный, как в грубом случае, где $\rho(t) \sim e^{\mu t}$ для системы $\dot{\rho} = \mu\rho + \dots$

Так как $G = \operatorname{Re} \hat{A}_{21}$, отсюда вытекает, что $G = \operatorname{Re} A_{21} - \operatorname{Im} (A_{11}A_{20})$. \square

Явный вид величины G , как функции от a_{mn}, b_{mn} , был получен Н.Н. Баутиным [12]. Мы приведем формулу Баутина для случая системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots, \\ \dot{y} &= cx + dy + P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots,\end{aligned}$$

где $ad - bc > 0$, $a + d = 0$ и

$$\begin{aligned}P_2(x, y) &= a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ Q_2(x, y) &= b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \\ P_3(x, y) &= a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \\ Q_3(x, y) &= b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}G &= -\frac{\pi}{4b\omega^3} \left\{ ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{20}) + \right. \\ &+ c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) - \\ &- b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20}) - \\ &\left. - (a^2 + bc) [3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - bb_{21})] \right\},\end{aligned}\tag{2.18}$$

где $\omega^2 = ad - bc$.

Для случая системы (2.4) формула (2.18) немного упрощается (здесь $a = 0, b = -1, c = 1, d = 0$):

$$\begin{aligned}G &= \frac{\pi}{4} [a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02} - 2a_{20}b_{20} - b_{11}b_{20} - b_{11}b_{02} + \\ &+ a_{11}a_{20} + 3(b_{03} + a_{30}) + a_{12} + b_{21}].\end{aligned}\tag{2.19}$$

Задача 4. Исследовать устойчивость нулевого состояния равновесия и найти критический случай, когда $G = 0$, для следующих систем:

а) $\dot{x} = -y + ax^2 + bxy, \quad \dot{y} = x + cx^2 + dxy.$

б) $\dot{x} = x - 2y + ax^2, \quad \dot{y} = x - y + by^2.$ \blacktriangle

Замечание 3. Пусть система $\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y)$ имеет состояние равновесия $S(x_0, y_0)$. Рассмотрим матрицу линеаризации этого состояния равновесия

$$A = \begin{pmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Тогда, если выполняются следующие условия

$$\det A = \omega^2 > 0 \text{ и } \operatorname{tr} A = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = 0, \quad (2.20)$$

состояние равновесия $S(x_0, y_0)$ будет иметь чисто мнимые характеристические корни $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Соответственно, условия (2.20) нужно рассматривать как необходимые условия для осуществимости бифуркации Андронова-Хопфа.

В невырожденном случае $G \neq 0$ нормальная форма (2.15) позволяет сравнительно легко описать бифуркации состояния равновесия O при изменении параметра μ . Мы дадим описание этих бифуркаций как в двумерном случае, так и в трехмерном, когда исходное состояние равновесия имеет характеристические корни $\lambda_1 = \lambda_2^* = i\omega, \lambda_3 < 0$.

Случай 1. $G < 0$.

Двумерный случай. Если $\mu \leq 0$, то все траектории стремятся к состоянию равновесия – устойчивому фокусу (рис. 2а). При $\mu > 0$ состояние равновесия становится неустойчивым фокусом, и из него рождается устойчивый предельный цикл L_μ (рис. 2б).

Трехмерный случай. Если $\mu \leq 0$, то все траектории стремятся к устойчивому состоянию равновесия (рис. 2в). При $\mu > 0$ состояние равновесия становится седло-фокусом типа (1,2), и из него рождается устойчивый предельный цикл L_μ (рис. 2г). Здесь центральное инвариантное многообразие W_μ^c двумерно, и состояние равновесия O_μ и предельный цикл L_μ лежат на нем.

В случае $G < 0$ такую бифуркацию называют *прямой бифуркацией Андронова-Хопфа*, часто используются также термины *мягкая* или *суперкритическая* бифуркация Андронова-Хопфа. Она приводит к рождению устойчивого предельного цикла, и на физическом языке, эта бифуркация отвечает мягкому возбуждению автоколебаний. Соответствующая граница устойчивости состояния равновесия является в этом случае *безопасной*, т.к. при потере устойчивости состоянием равновесия траектории не покинут его достаточно малой (порядка $\sqrt{|\mu|}$) окрестности.

Случай 2. $G > 0$.

Двумерный случай. При $\mu < 0$ состояние равновесия устойчиво, его окружает неустойчивый предельный цикл L_μ (рис. 3а). При $\mu \geq 0$ состояние

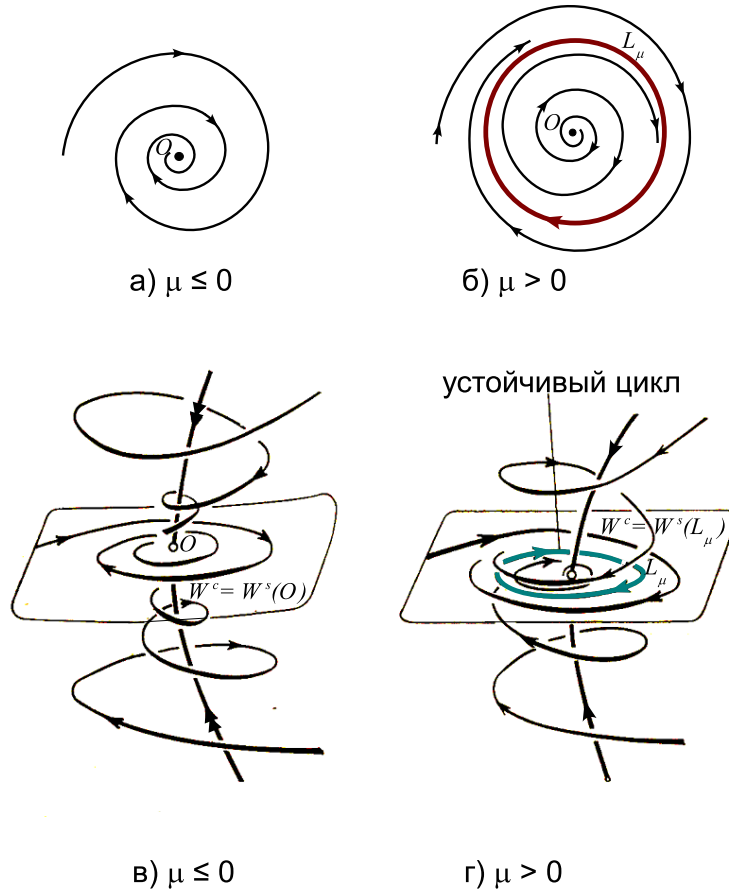


Рис. 2: Случай $G < 0$. Прямая бифуркация Андронова-Хопфа

равновесия неустойчиво, и все траектории выходят из окрестности точки O (рис. 3б).

Трехмерный случай. При $\mu < 0$ состояние равновесия устойчиво, его окружает седловой предельный цикл L_μ , лежащий в W^c (рис. 3в). При $\mu = 0$ цикл «влипает» в состояние равновесия, которое становится при $\mu \geq 0$ седлового типа – при $\mu = 0$ оно негрубое (на W^c – это сложный неустойчивый фокус), а при $\mu > 0$ точка $O(0, 0, 0)$ является седло-фокусом типа (1,2). При $\mu \geq 0$ все траектории выходят из окрестности V точки $O(0, 0, 0)$ (рис. 3г).

В случае $G > 0$ такую бифуркацию называют *обратной бифуркацией Андронова-Хопфа*, используются также термины *жесткая* или *субкритическая* бифуркация Андронова-Хопфа. В результате такой бифуркации в устойчивое равновесие влипает неустойчивый предельный цикл, после чего само равновесие становится полностью неустойчивым. Такая бифуркация приводит к жесткой

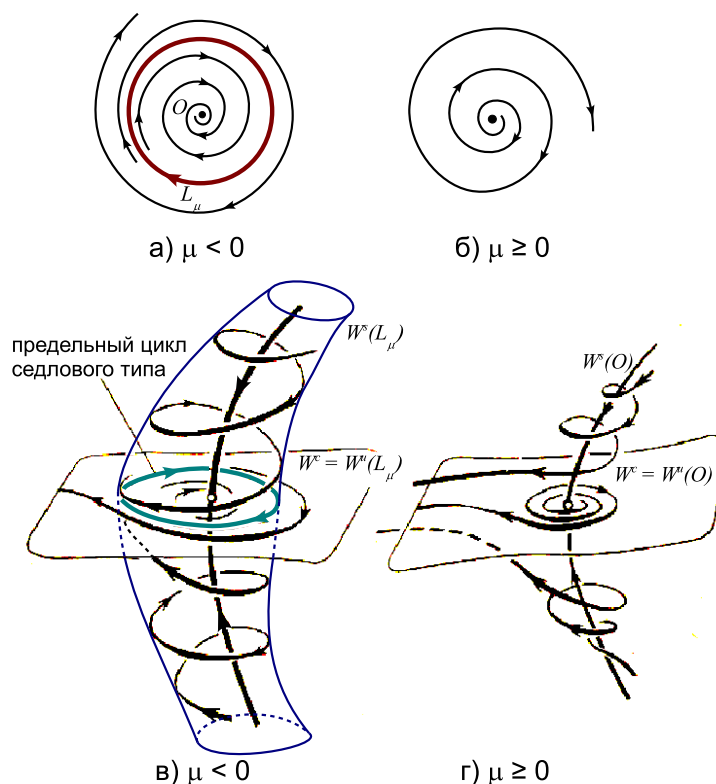


Рис. 3: Случай $G > 0$. Обратная бифуркация Андронова-Хопфа

потере устойчивости. Соответствующая граница устойчивости состояния равновесия является в этом случае *опасной*, т.к. при потере устойчивости состоянием равновесия все траектории (кроме самого состояния равновесия) покидают его окрестность.

Задача 5. Исследовать поведение траекторий укороченной системы $\dot{\rho} = \mu\rho + G\rho^3$, $\dot{\varphi} = 1$ в случаях (а) $G < 0$ и (б) $G > 0$. ▲

Задача 6. Нарисовать качественные картины поведения траекторий при изменении μ в случаях, когда трехмерная система имеет при $\mu = 0$ состояние равновесия с собственными значениями $\lambda_1 = \lambda_2^* = i$, $\lambda_3 > 0$ и (а) $G < 0$; (б) $G > 0$. ▲

2.2. Основная теорема о бифуркации Андронова-Хопфа в случае двумерных потоков

Выше мы изучили бифуркацию Андронова-Хопфа на основе анализа нормальной формы (2.17). Следующая теорема показывает, что результаты остаются верными и в общем случае системы (2.1) или этой же системы, записан-

ной в развернутом виде (2.4). Мы также показали, что система (2.4) с помощью полиномиальных замен координат и невырожденной замены времени может быть записана в полярных координатах в форме (2.17), где $L_1 = -1$, если первая ляпуновская величина G отрицательна, и $L_1 = +1$, если она положительна.

Теорема 2 (О структуре бифуркации Андронова-Хопфа двумерных систем). *Если первая ляпуновская величина G отрицательна, т.е. $L_1 = -1$ у системы (2.17), то для малых $\mu \leq 0$ состояние равновесия O устойчиво, и все траектории в некоторой окрестности U точки O стремятся к O (рис. 2а). Когда $\mu > 0$, состояние равновесия становится неустойчивым и возникает устойчивая периодическая орбита диаметра $\sim \sqrt{\mu}$ такая, что все траектории из U , за исключением O , стремятся к ней (рис. 2б).*

Если первая ляпуновская величина G положительна (т.е. $L_1 = +1$ у системы (2.17)), то для малых $\mu \geq 0$ состояние равновесия O неустойчиво, и все остальные траектории покидают ее некоторую окрестность U (рис. 3а). Когда $\mu < 0$, состояние равновесия становится устойчивым, его область притяжения ограничена неустойчивой периодической орбитой диаметра диаметра $\sim \sqrt{-\mu}$, которая стягивается к O при $\mu = 0$ (рис. 3б).

Доказательство. Так как $\dot{\varphi} = 1$ в случае системы (2.17), любая траектория, отличная от точки O , должна пересекать луч $R : \varphi = 0, \rho > 0$. Поэтому здесь (при малых ρ) будет определено отображение луча R в себя по траекториям системы (2.17). Для нахождения вида этого отображения перепишем систему (2.17) в форме дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \mu\rho + L_1\rho^3 + O(\rho^4). \quad (2.21)$$

Найдем решение $\rho = \rho(\varphi)$, которое начинается в точке $\rho = \rho_0$ при $\varphi = 0$. Пусть

$$\rho(\varphi) = \alpha_1(\varphi)\rho_0 + \alpha_2(\varphi)\rho_0^2 + \alpha_3(\varphi)\rho_0^3 + O(\rho_0^4). \quad (2.22)$$

Поскольку $\rho(0) = \rho_0$, то

$$\alpha_1(0) = 1, \quad \alpha_2(0) = 0, \quad \alpha_3(0) = 0. \quad (2.23)$$

Подставив (2.22) в (2.21), мы получим следующие дифференциальные уравнения для определения коэффициентов $\alpha_i(\varphi)$, $i = 1, 2, 3$,

$$\frac{d\alpha_1}{d\varphi} = \mu\alpha_1; \quad \frac{d\alpha_2}{d\varphi} = \mu\alpha_2; \quad \frac{d\alpha_3}{d\varphi} = \mu\alpha_3 + L_1\alpha_1^3.$$

Отсюда, учитывая условия (2.23), находим

$$\alpha_1(\varphi) = e^{\mu\varphi}; \quad \alpha_2(\varphi) = 0; \quad \alpha_3(\varphi) = \frac{L_1}{2\mu} e^{\mu\varphi} (e^{2\mu\varphi} - 1).$$

Таким образом,

$$\rho(\varphi) = e^{\mu\varphi}\rho(0) + \frac{L_1}{2\mu} e^{\mu\varphi} (e^{2\mu\varphi} - 1)\rho^3(0) + O(\rho^4(0)).$$

Подставляя $\varphi = 2\pi$, мы получаем отсюда выражение для отображения луча R на себя: $\rho = \rho(0) \rightarrow$

$\rho(2\pi) = \bar{\rho}$:

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= e^{2\pi\mu}\rho + \frac{L_1}{2\mu}e^{i\mu\varphi}(e^{2\mu\varphi} - 1)\rho^3 + O(\rho^4) = \\ &= e^{2\pi\mu}\rho + 2\pi L_1(1 + O(\mu))\rho^3 + O(\rho^4).\end{aligned}\quad (2.24)$$

Анализ динамики этого отображения вблизи неподвижной точки $\rho = 0$ достаточно прост. Для координаты ρ неподвижных точек отображения (2.24) получаем следующее уравнение

$$\rho [(e^{2\pi\mu} - 1) / 2\pi + L_1(1 + O(\mu))\rho^2 + O(\rho^3)] = 0.$$

Отсюда получаем, что при $L_1\mu \geq 0$ отображение (2.24) имеет одну неподвижную точку $\rho = 0$, и при $L_1\mu < 0$ возникает еще одна неподвижная точка $\rho = \sqrt{-\mu/L_1} + O(\mu)$, которая отражается от исходной неподвижной точки (напомним, что отображение (2.24) определено только для $\rho \geq 0$, его отрицательные корни не учитываются). Из (2.24) мы получаем следующее выражение для мультипликатора нетривиальной неподвижной точки

$$\nu(\mu) = 1 - 4\pi\mu + O(\mu^2).$$

Как мы видим, эта неподвижная точка устойчива, если $L_1 < 0$ (т.к. она существует при $\mu > 0$) и неустойчива, если $L_1 > 0$ (существует при $\mu < 0$). Это доказывает теорему 2. \square

2.3. Бифуркация Андронова-Хопфа в критическом случае $G = 0$

Рассмотрим случай, когда состояние равновесия O является сложным фокусом (т.е., оно имеет пару чисто мнимых корней), у которого первая ляпуновская величина G равна нулю. Тогда полиномиальная замена координат (2.12) с $N = 5$ и подходящими $\alpha_{mn}, \beta_{mn} = \alpha_{nm}^*$ при $m+n = 2, 3, 4, 5$ приводит систему (2.5) к нормальной форме (2.13) до членов пятой степени

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= (\mu + i)\xi + \hat{A}_{21}(\mu)\xi^2\eta + \hat{A}_{32}(\mu)\xi^3\eta^2 + O(\rho^6), \\ \dot{\eta} &= (\mu - i)\eta + \hat{A}_{21}^*(\mu)\xi\eta^2 + \hat{A}_{32}^*(\mu)\xi^2\eta^3 + O(\rho^6),\end{aligned}\quad (2.25)$$

где $\text{Re}\hat{A}_{21}(0) = 0$. Теперь система (2.25) в полярных координатах $\xi = \rho e^{i\varphi}, \eta = \rho e^{-i\varphi}$ запишется в таком виде

$$\dot{\rho} = \mu\rho + G_1(\mu)\rho^3 + G_2(\mu)\rho^5 + O(\rho^6), \quad \dot{\varphi} = 1 + \text{Im}\hat{A}_{21}\rho^2 + O(\rho^3), \quad (2.26)$$

где $G_1(\mu) = \text{Re} A_{21}(\mu), G_2(\mu) = \text{Re} A_{32}(\mu)$ и $G_1(0) = 0, G_2(0) \neq 0$.

Систему (2.26) можно немного упростить. Сделаем замену $\rho \rightarrow |G_2(\mu)|^{-1/4}\rho$. Тогда (2.26) переписывается как

$$\dot{\rho} = \mu\rho + \frac{G_1(\mu)}{\sqrt{|G_2(\mu)|}}\rho^3 + \text{sign} G_2\rho^5 + O(\rho^6), \quad \dot{\varphi} = 1 + O(\rho^2). \quad (2.27)$$

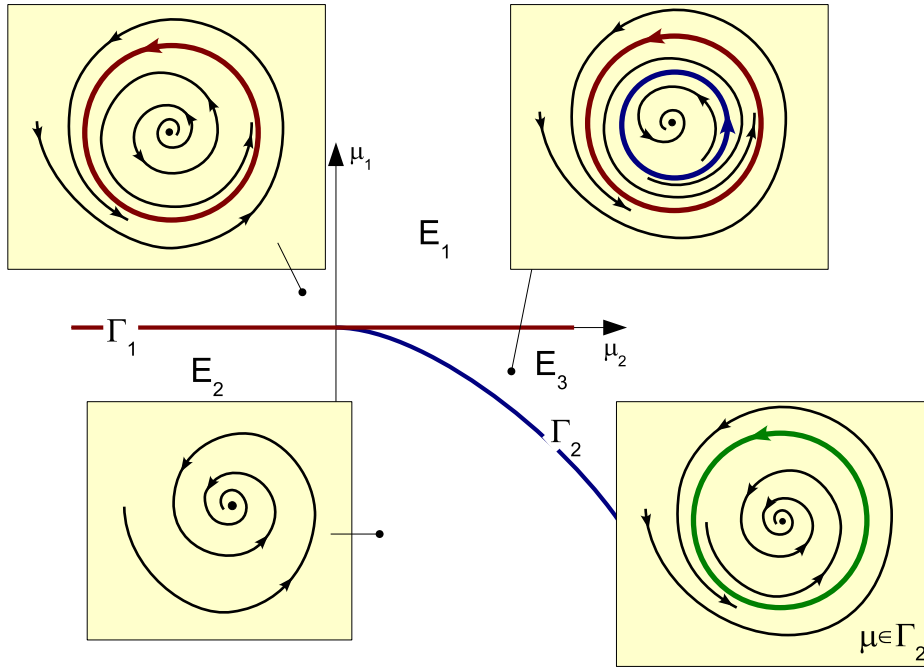


Рис. 4: Бифуркационная диаграмма в случае вырожденной бифуркации Андронова-Хопфа

Теперь задача изучения бифуркаций сложного фокуса второго порядка сводится к анализу двухпараметрического семейства (2.26), в котором полагаем $\mu_1 = \mu$ и $\mu_2 = \frac{G_1(\mu)}{\sqrt{|G_2(\mu)|}}$. Рассмотрим для определенности случай $G_2(0) < 0$ (случай $G_2(0) > 0$ очевидно сводится к рассматриваемому заменой t на $-t$). Тогда получаем следующую следующую двухпараметрическую нормальную форму

$$\dot{\rho} = \mu_1 \rho + \mu_2 \rho^3 - \rho^5 + O(\rho^6), \quad \dot{\varphi} = 1 + O(\rho^2). \quad (2.28)$$

На плоскости параметров (μ_1, μ_2) есть три бифуркационные кривые семейства (2.28) – это $\Gamma_1: \{\mu_1 = 0, \mu_2 < 0\}$, $\Gamma_2: \{\mu_1 = 0, \mu_2 > 0\}$ и $\Gamma_3: \{\mu_1 = -\frac{\mu_2^2}{4}(1 + \dots), \mu_2 > 0\}$. На Γ_1 и Γ_2 состояние равновесия имеет пару чисто мнимых корней и $G = \mu_2$. Таким образом, при переходе через эти кривые происходит невырожденная бифуркация Андронова-Хопфа – прямая на Γ_1 и обратная на Γ_2 . На кривой Γ_3 система имеет двойной предельный цикл, получившийся из слияния двух грубых предельных циклов. Кривыми Γ_1, Γ_2 и Γ_3 окрестность точки $\mu_1 = \mu_2 = 0$ разбивается на три области $E_i, i = 1, 2, 3$. В каждой из областей E_i система при всех $\mu \in E_i$ будет иметь одинаковую топологическую структуру (рис. 4).

Точка O является неустойчивым фокусом в области E_1 (при $\mu_1 > 0$) и

неустойчивым фокусом при $\mu_1 < 0$. В области $E_1 \cup E_2$ существует устойчивый предельный цикл, который стягивается в O при $\mu \in \Gamma_1$. В области E_3 существуют два предельных цикла: устойчивый (внешний) и неустойчивый (внутренний) – последний стягивается в O при $\mu \in \Gamma_2$. В области E_2 нет предельных циклов.

Задача 7. Изучить случай $G_1(0) = 0, G_2(0) > 0$. Построить бифуркационную диаграмму для семейства

$$\dot{\rho} = \mu_1 \rho + \mu_2 \rho^3 + \rho^5, \quad \dot{\varphi} = 1. \quad \blacktriangle$$

2.4. Примеры систем с бифуркацией Андронова-Хопфа для потоков

Отметим, что хотя математическая теория бифуркации Андронова-Хопфа была построена в работе А.А. Андронова и Е.А. Леонтович [3] 1937 года, сама эта бифуркация была описана и изучена А.А. Андроновым несколько ранее, также как и бифуркации рождения устойчивых предельных циклов из двукратного цикла и из гомоклинической петли седло-узла (см., например, [1]). Также в первом издании книги «Теория колебаний» А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин, 1937, бифуркация рождения предельного цикла из сложного фокуса на плоскости изложена уже с математическим доказательством и рассмотрены примеры. Сам Андронов отмечал прежде всего важное значение этой бифуркации для физики. В частности, она позволила ответить на важные в то время вопросы о природе возникновения автоколебаний и их разрушений. Сейчас известно большое число конкретных систем, в которых наблюдается бифуркация Андронова-Хопфа. В настоящем пособии мы рассмотрим несколько таких примеров, показывающих, в частности (см. примеры 2.4.2 и 2.4.3), что достаточно простая бифуркация Андронова-Хопфа играет фундаментальную роль в теории динамического хаоса.

2.4.1. Бифуркация Андронова-Хопфа в модели колебательного контура с жестким возбуждением автоколебаний

В данном примере рассматривается линейный автоколебательный контур, в который включен элемент, обладающий нелинейной проводимостью (рис. 5) [6]. Вольт-амперная характеристика данного элемента представлена на рисунке 6. Выведем уравнение рассматриваемого генератора. Вольт-амперную

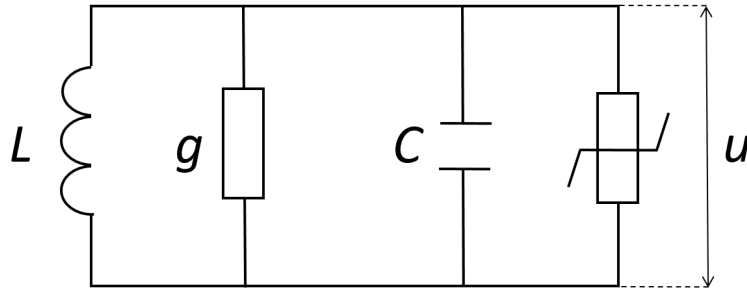


Рис. 5: Схема генератора с активным нелинейным элементом

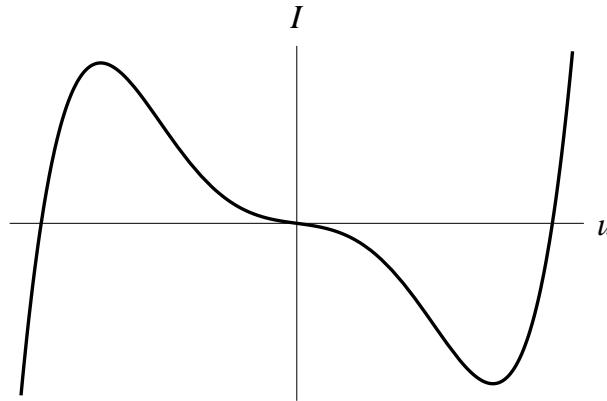


Рис. 6: Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента генератора с активным нелинейным элементом

характеристику нелинейного элемента аппроксимируем функцией

$$I = -g_0u - g_1u^3 + g_2u^5,$$

где коэффициенты g_0, g_1, g_2 принимают положительные значения. Используя правила Кирхгофа, для колебательного контура можно записать следующие уравнения относительно тока через индуктивность i_L и напряжения u на каждом из элементов контура:

$$L \frac{di_L}{dt} = u,$$

$$C \frac{du}{dt} + gu + I + i_L = 0,$$

из которых следует уравнение

$$C \frac{du}{dt} + gu - g_0u - g_1u^3 + g_2u^5 + \frac{1}{L} \int u dt = 0.$$

Дифференцируя уравнение 2.4.1 по времени, запишем уравнение в осцилляторной форме:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \left[\frac{g_0 - g}{C} + \frac{3g_1}{C}u^2 - \frac{5g_2}{C}u^4 \right] \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0,$$

где $\omega_0^2 = 1/LC$. Введем безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ и произведем следующую замену переменных и параметров $x = u \left(5g_2 \sqrt{\frac{L}{C}} \right)^{1/4}$, $\varepsilon_0 = (g_0 - g) \sqrt{\frac{L}{C}}$,

$\varepsilon_1 = \frac{3g_1 \sqrt{L/C}}{\sqrt{5g_2 \sqrt{L/C}}}$. В результате получим уравнение в безразмерной форме:

$$\ddot{x} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0. \quad (2.29)$$

Уравнение 2.29 описывает динамику генератора с жестким возбуждением автоколебаний. Поведение данного осциллятора зависит от двух управляющих параметров ε_0 и ε_1 . С учетом того, что $g_0, g_1, g_2 > 0$, параметр возбуждения ε_0 может принимать любые значения, когда как параметр нелинейной диссипации $\varepsilon_1 > 0$.

Исследуем динамику генератора, для чего проведем анализ устойчивости состояний равновесия уравнения 2.29. Перепишем (2.29) в виде двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 - x^4)y - x. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Система (2.30) имеет единственное состояние равновесия O : $x_0 = 0, y_0 = 0$. Собственные значения данного состояния равновесия имеют вид: $\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \pm$

$\sqrt{\frac{\varepsilon_0^2}{4} - 1}$. Таким образом устойчивость состояния равновесия O зависит от одного управляющего параметра ε_0 . При $\varepsilon_0 < -2$ состояние равновесия представляет собой устойчивый узел, при $-2 < \varepsilon_0 < 0$ – устойчивый фокус, при $0 < \varepsilon_0 < 2$ – неустойчивый фокус, при $\varepsilon_0 > 2$ – неустойчивый узел.

Исследуем бифуркационные переходы в данной системе. Для этого воспользуемся методом Ван-дер-Поля, позволяющим получить укороченные уравнения для амплитуды и фазы автоколебаний в генераторе. Будем полагать, что управляющие параметры ε_0 и ε_1 близки к нулю, и система представляет собой квазигармонический осциллятор, т.е. правая часть уравнения (2.29) есть слабое возмущение гармонического осциллятора. В данном случае решение

можно искать в виде гармонической функции с медленно меняющимися во времени амплитудой и фазой, а именно

$$x(t) = \operatorname{Re} (a(t)e^{it}), \quad (2.31)$$

где $a(t)$ – комплексная амплитуда. Подставим (2.31) в уравнение осциллятора (2.29) и, предполагая, что $a(t)$ и $\dot{a}(t)$ являются медленно меняющимися во времени функциями, т.е. остающимися практически постоянными величинами на периоде колебаний 2π , получим *укороченное уравнение для комплексной амплитуды*

$$\dot{a} = \left(\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_1}{8}|a|^2 - \frac{1}{16}|a|^4 \right) a. \quad (2.32)$$

Представляя комплексную величину $a(t)$ в показательном виде $a(t) = \rho(t)e^{i\phi(t)}$, перепишем уравнение (2.32) в виде системы уравнений для амплитуды и фазы

$$\dot{\rho} = \left(\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_1}{8}\rho^2 - \frac{1}{16}\rho^4 \right) \rho, \quad (2.33)$$

$$\dot{\phi} = 0. \quad (2.34)$$

Таким образом, с помощью метода Ван-дер-Поля мы получили систему укороченных уравнений (2.33), (2.34), которая представляет собой двухпараметрическую нормальную форму бифуркации Андронова-Хопфа. Эти уравнения аналогичны уравнению (2.28), анализ которого приведен в разделе 2.3.

Из системы (2.33), (2.34) видно, что в рассматриваемом приближении уравнение для амплитуды и уравнение для фазы полностью разделены: первое не зависит от фазы, второе не зависит от амплитуды. Фаза $\phi(t)$ не меняется во времени, ее величина зависит от начальных условий. Таким образом задача о существовании периодических движений в генераторе с жестким возбуждением колебаний (2.29) в квазигармоническом приближении сводится к изучению амплитудного уравнения (2.33).

Для амплитудного уравнения (2.33) получаем три состояния равновесия с координатами

$$\rho_1^0 = 0, \quad (2.35)$$

$$\rho_2^0 = \sqrt{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0}}, \quad (2.36)$$

$$\rho_3^0 = \sqrt{\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 + 8\varepsilon_0}}. \quad (2.37)$$

В результате анализа устойчивости состояний равновесия генератора с жест-

ким возбуждением колебаний получается бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 7. Динамика системы зависит от управляющего параметра ε_0 , значения которого отложены на оси абсцисс. По оси ординат отложены стационарные значения амплитуды $\rho(t)$. Для исходного уравнения генератора (2.29) точки $\rho = 0$ на бифуркационной диаграмме соответствуют неподвижной точке O на фазовой плоскости. Точки с ординатой $\rho > 0$ соответствуют предельному циклу радиуса ρ на фазовой плоскости с центром в начале координат.

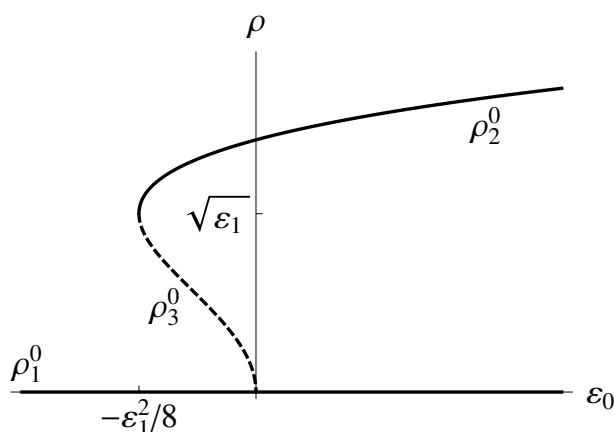


Рис. 7: Бифуркационная диаграмма генератора с жестким возбуждением

В генераторе с жестким возбуждением (2.29) при $\varepsilon_0 < -\varepsilon_1^2/8$ существует единственный аттрактор — устойчивая особая точка в начале координат. При переходе через значение $\varepsilon_0 = -\varepsilon_1^2/8$ происходит бифуркация рождения пары циклов — устойчивого с радиусом ρ_2^0 и неустойчивого с радиусом ρ_3^0 . При достижении значения $\varepsilon_0 = 0$ неподвижный устойчивый цикл стягивается в неподвижную устойчивую точку, происходит субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, состояние равновесия $\rho_1^0 = 0$ становится неустойчивым.

Существенной особенностью генератора с жестким возбуждением является наличие бистабильности, т.е. явление сосуществования нескольких аттракторов: при значениях параметров $-\varepsilon_1^2/8 < \varepsilon_0 < 0$ в фазовом пространстве есть устойчивая особая точка O и устойчивый предельный цикл радиуса ρ_2^0 . Вследствие мультистабильности в генераторе с жестким возбуждением также демонстрируется явление гистерезиса.

2.4.2. О сценарии Шильникова возникновения спирального хаоса

Со случаем 1 при $G < 0$ (прямая бифуркация Андронова-Хопфа) непосредственно связан один очень интересный универсальный сценарий возникновения хаоса у трехмерных потоков. Этот сценарий был предложен Л.П. Шильни-

ковым в работе [22]. На рис. 8 представлены основные этапы этого сценария – сценария возникновения аттрактора Шильникова.

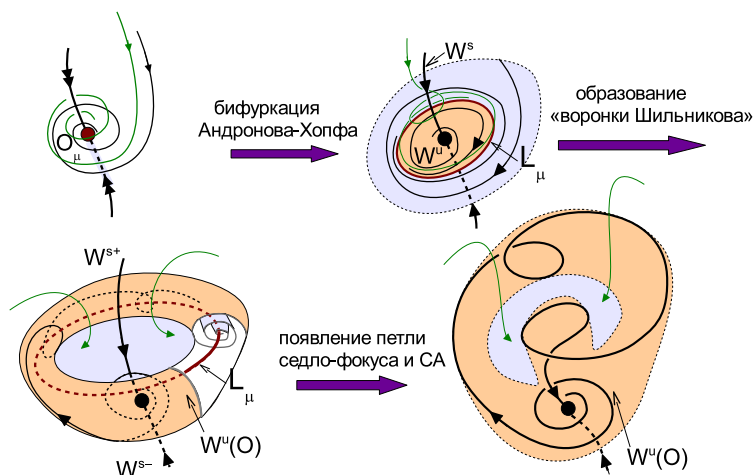


Рис. 8: Основные этапы сценария возникновения аттрактора Шильникова. Одним из критериев такого аттрактора является существование двоякоасимптотической (гомоклинической) траектории у седло-фокуса O_μ

Для того, чтобы описать этот сценарий, рассмотрим однопараметрическое семейство X_μ трехмерных систем таких, что при $\mu < 0$ система X_μ имеет единственное асимптотически устойчивое состояние равновесия O_μ (все его собственные значения лежат слева от мнимой оси). Другими словами, глобальным аттрактором системы X_μ при $\mu < 0$ является устойчивое состояние равновесия O_μ . Предположим, что при $\mu = 0$ в системе происходит прямая бифуркация Андронова-Хопфа (случай $G < 0$). То есть, при $\mu > 0$ состояние равновесия O_μ становится седло-фокусом типа $(1, 2)$, а в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл L_μ . Соответственно, глобальным аттрактором системы при всех достаточно малых $\mu > 0$ является этот асимптотически устойчивый предельный цикл L_μ . Характер устойчивости этого цикла определяется его мультипликаторами $\rho_1(\mu)$ и $\rho_2(\mu)$, которые при малых $\mu > 0$ оба положительны и меньше единицы (при этом $1 > \rho_1(\mu) > \rho_2(\mu) > 0$, условно можно сказать, что $\rho_1(\mu) \rightarrow 1, \rho_2(\mu) \rightarrow e^{\lambda_3}$ при $\mu \rightarrow +0$). В этом случае неустойчивое многообразие точки O_μ является двумерным диском с краем L_μ . Также предположим, что при дальнейшем изменении μ мультипликаторы $\rho_1(\mu)$ и $\rho_2(\mu)$ при некотором $\mu = \mu^*$ становятся равными ($1 > \rho_1(\mu^*) = \rho_2(\mu^*) > 0$), а при $\mu > \mu^*$ – комплексно сопряженными. Другими словами, здесь происходит «гладкая бифуркация», в результате которой неустойчивое многообразие $W^u(L_\mu)$ начинает навиваться на цикл L_μ . Образуется т.н. «воронка Шильникова», в которую втягиваются все траектории системы X_μ (строго говоря, кроме

одной траектории – устойчивой сепаратрисы $W^{s-}(O_\mu)$ состояния равновесия O_μ , см. рис. 8). При дальнейшем изменении μ «воронка» может сохраниться, а предельный цикл может потерять свою устойчивость. На его месте может образоваться странный аттрактор⁶, который, в свою очередь может трансформироваться в спиральный аттрактор Шильникова, т.е. странный аттрактор, который содержит седло-фокус O_μ .

Описанный сценарий Шильникова может реализовываться в системах различной природы. В качестве примера рассмотрим систему А.Арно́до, П.Колле, К.Трессе, описывающую динамику колебательной системы

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + x = \eta \quad (2.38)$$

с внешним воздействием $\eta(x)$, задаваемым уравнением $\dot{\eta} = \mu x(1 - x)$ [28, 29]. Для исследования бифуркаций приведем систему (2.38) к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y - \beta z + \mu x(1 - x). \end{cases} \quad (2.39)$$

При любых значениях параметров β и μ в системе (2.39) существует два состояния равновесия: $O_1 = (0, 0, 0)$ и $O_2 = (1, 0, 0)$.

Далее зафиксируем параметр $\beta = 0.4$ и проследим эволюцию аттракторов в системе при изменении параметра μ в диапазоне ($\mu_0 = 0, \mu_{\text{loop}_1} \approx 0.86311445$). Заметим, что на всем рассматриваемом диапазоне состояние равновесие O_1 является седло-фокусом (2,1). При $\mu < \mu_1 = 0.4$ траектории в системе притягиваются к состоянию равновесия O_2 (рис. 9а). При $\mu = \mu_1$ состояние равновесия O_2 претерпевает прямую бифуркацию Андронова-Хопфа (случай $G < 0$), становясь седло-фокусом (1,2). После чего, при $\mu_1 < \mu < \mu_2 \approx 0.72$ аттрактором является устойчивый предельный цикл (см. рис. 9б). Начиная с $\mu = \mu_2$ цикл начинает удваиваться (см. рис. 9в и 9г после первого и второго удвоений). При $\mu = 0.782$ в результате бифуркаций удвоения периода в системе рождается хаотический аттрактор типа Эно (см. рис. 9д). С дальнейшим увеличением параметра μ аттрактор качественно не меняется (см. рис., например, 9е при $\mu = 0.8$) вплоть до $\mu = \mu_{\text{loop}_1}$, пока траектории не начинают посещать сколь угодно малую окрестность седло-фокуса O_2 .

Оказывается, что двумерное неустойчивое многообразие седло-фокуса (1,2) с ростом параметра μ (после бифуркации Андронова-Хопфа) образует воронку Шильникова, а при $\mu = \mu_{\text{loop}_1} \approx 0.86311445$ устойчивое многообразие (выпу-

⁶например, типа «тор-хаос» [11], см. также главу 2.

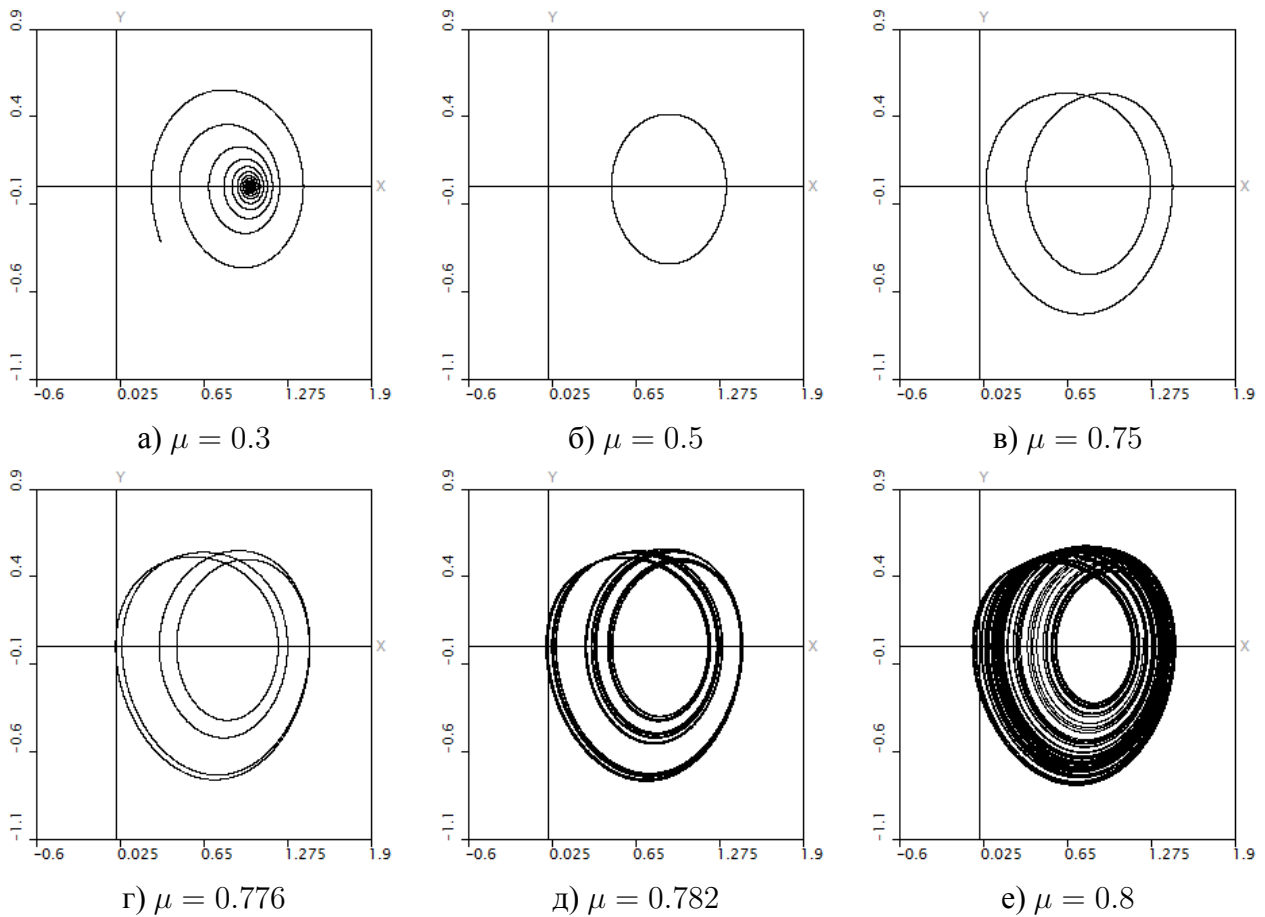
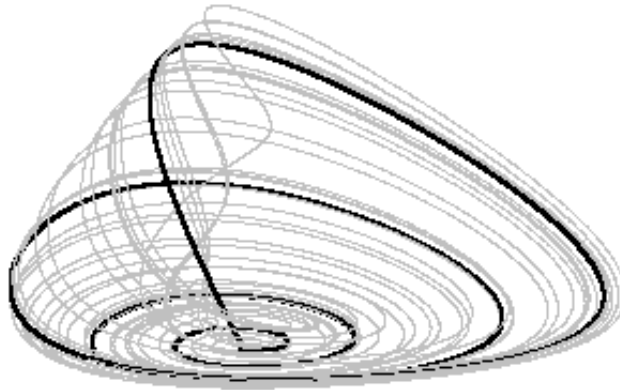


Рис. 9: Сценарий возникновения странных аттракторов в системе Арнеодо (2.39)

щенное в обратном времени), покидает окрестность O_2 , обходит вокруг аттрактора, после чего возвращается к O_2 (см. рис. 10а). Таким образом, при $\mu = \mu_{\text{loop}_1}$ выполняются условия теоремы Шильникова [21], и поэтому здесь возникает аттрактор Шильникова (см. рис. 10).



$$\text{b) } \mu = 0.86311445$$

Рис. 10: $\mu = \mu_{loop_1} \approx 0.86311445$. Жирная линия – петля седло-фокуса O_2 . Серая линия – траектория на аттракторе

2.4.3. Бифуркация Андронова-Хопфа и сценарий возникновения аттрактора Лоренца

Известно много примеров конкретных систем, в которых обратная бифуркация Андронова-Хопфа играет принципиально важную роль при возникновении новых предельных множеств и даже странных аттракторов. Одна из таких систем – это модель Лоренца (или Зальцмана-Лоренца), которая имеет следующий вид⁷

$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \quad \dot{y} = -xz + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz. \quad (2.40)$$

При $b = 8/3, r = 28, \sigma = 10$ Э. Лоренц с помощью ЭВМ обнаружил хаотическое поведение траекторий [34]. На рис. 5.1(a) показано типичное поведение одной из неустойчивых сепаратрис седлового состояния равновесия, принадлежащего аттрактору. Поведение другой неустойчивой сепаратрисы будет симметричным, т.к. система (2.40) допускает симметрию $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$. Рис. 11а дает адекватное представление о форме аттрактора Лоренца, т.к. в типичном случае этот аттрактор является замыканием любой из неустойчивых

⁷ Система (2.40) представляет собой сильно упрощенную модель задачи Релея о конвективном течении в слое жидкости постоянной толщины при условии, что разность температур между нижней и верхней границами слоя фиксирована. Здесь параметры σ, r и b имеют вполне определенный физический смысл (например, σ – это число Прандтля, r – число Релея, а b – параметр, характеризующий частоту внешних возмущений в задаче Релея).

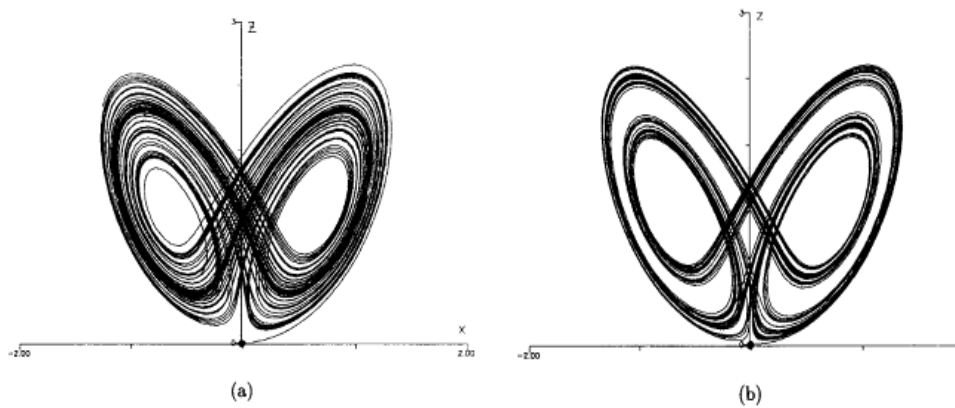


Рис. 11: Два типа аттракторов Лоренца (a) стандартный и (b) с лакуной, содержащей седловое периодическое движение

сепаратрис седлового равновесия.⁸ Заметим, что в работах Афраймовича, Быкова и Шильникова [9, 23, 10] были также исследованы бифуркации аттрактора Лоренца, приводящие к его рождению и изменению структуры, в частности, с образованием лакун, содержащих седловые периодические траектории (на рис. 11b показан пример аттрактора Лоренца с лакуной).

Однако, «главная бифуркация», в результате которой жестким образом рождается аттрактор Лоренца в системе (2.40) является весьма простой – это обратная бифуркация Андронова-Хопфа. На рис. 12 схематически показаны основные этапы образования аттрактора Лоренца в модели (2.40) при изменении r от 10 до 28 для фиксированных $\sigma = 10, b = 8/3$ – здесь мы следуем работе Л.П. Шильникова [23].

При $r \in [10, r_1]$, где $r_1 \approx 13.92$, система имеет три состояния равновесия $O(0, 0, 0)$, O_1 и O_2 , из которых O является седлом, имеющим двумерное устойчивое инвариантное многообразие W^s и две выходящие траектории Γ_1 и Γ_2 , которые будем называть сепаратрисами. Одна из них, для определенности Γ_1 , стремится к устойчивому состоянию равновесия O_1 , а другая Γ_2 – к O_2 (рис. 12a).

При $r = r_1$ каждая из сепаратрис Γ_1 и Γ_2 становится двоякоасимптотической к седлу O (рис. 12б). При переходе r через r_1 из каждой петли сепаратрисы рождается по седловому периодическому движению L_1 и L_2 . Более того, вместе с рождением L_1 и L_2 появляется инвариантное предельное множество

⁸В общем же случае, аттрактор Лоренца – пролонгация сепаратрисы седла (т.е. множество точек, достижимых из седла ε -траекториями про сколь угодно малом ε).

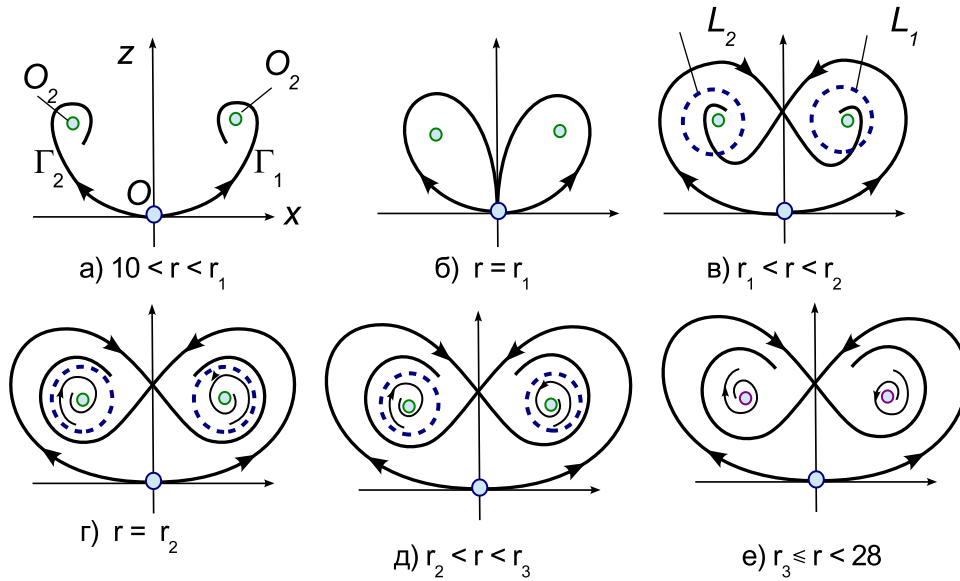


Рис. 12: Основные этапы развития аттрактора Лоренца в системе (2.40) при фиксированных $b = 8/3, \sigma = 10$ и изменении r

Ω_1 сложной структуры. Однако это множество не является притягивающим, и, следовательно, устойчивыми предельными множествами остаются O_1 и O_2 . Такая ситуация будет иметь место для $r \in [r_1, r_2]$, где $r_2 \simeq 24.06$, только теперь Γ_1 будет стремиться к O_2 , а Γ_2 – к O_1 (рис. 12в).

Момент $r = r_2$ является бифуркационным. Он характерен тем, что если раньше Γ_1 и Γ_2 шли в устойчивые фокусы O_2 и O_1 , то при $r_1 = r_2$, Γ_1 и Γ_2 ложатся на устойчивые многообразия седловых циклов L_2 и L_1 соответственно (рис. 12г) и стремятся к ним. Это приводит к тому, что на месте Ω_1 при $r_2 < r < 28$ возникает уже двумерное предельное множество Ω_2 (двумерные неустойчивые многообразия седловых циклов L_2 и L_1 «включаются в динамику»).

При $r = r_3$ происходит обратная бифуркация Андронова-Хопфа: седловые предельные циклы L_2 и L_1 влипают в устойчивые равновесия O_1 и O_2 (рис. 12д и 12е), сравни с рис. 3в и 3г. Соответственно при $r > r_3$ равновесия O_1 и O_2 теряют устойчивость – становятся седло-фокусами, и именно в этот момент в модели и возникает аттрактор Лоренца.

Задача 8. Для системы Лоренца (2.40)

1) Вывести уравнение бифуркационной поверхности (в пространстве параметров (σ, r, b)), отвечающей бифуркации Андронова-Хопфа ненулевого состояния равновесия.

2*)⁹ Показать, что при $\sigma > 1 + b$ первая ляпуновская величина G здесь положительна, т.е. имеет место случай обратной (субкритической) бифуркации Андронова-Хопфа.

Подсказка: см. Приложение С.5 из [26], в частности, задачи С.5.62 и С.5.63.



2.4.4. Бифуркация Андронова-Хопфа в модели Шимицу-Мориока

В модели Шимицу-Мориока [39]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \quad \dot{y} = x - \lambda y - xz, \quad \dot{z} = -\alpha z + x^2; \\ \alpha &> 0, \quad \lambda > 0, \end{aligned} \quad (2.41)$$

также в некоторой области параметров наблюдается аттрактор Лоренца. Однако, в отличие от системы Лоренца, здесь бифуркация Андронова-Хопфа несимметричных состояний равновесия в сценарии возникновения аттрактора Лоренца может быть прямой (мягкой), [24, 40], см. рис. 13.

Задача 9. Для системы (2.41)

1) Вывести уравнение бифуркационной кривой АН (на плоскости параметров (α, λ) при $\alpha + \lambda > 0$), отвечающей бифуркации Андронова-Хопфа ненулевого состояния равновесия.

2*) Показать, что на кривой АН первая ляпуновская величина G может менять знак.

Подсказка: см. Приложение С.5 из [26], в частности, задачи С.5.62 и С.5.65.



2.4.5. Реакция Белоусова-Жаботинского и колебания в химических реакциях

История исследования реакции Белоусова-Жаботинского и колебаний в химических реакциях довольно поучительна. Несмотря на то, что колебательные реакции наблюдались химиками ещё до работ Белоусова и Жаботинского, долгое время считалось, что в гомогенных реакциях (то есть, реакциях, в которых участвуют вещества, находящиеся в одной фазе) колебания невозможны. Если они наблюдаются в экспериментах, то это связано либо с процессами переноса, либо с тем, что в механизме реакции всё же присутствует гетерогенная стадия. Это мнение было распространённым, несмотря на работы Лотки и Брея,

⁹Задачи, отмеченные знаком *, это, как правило, настоящие исследовательские задачи, решение которых составляло в свое время предмет соответствующей статьи. Так, например, задача 8.2*) была решена в [20].

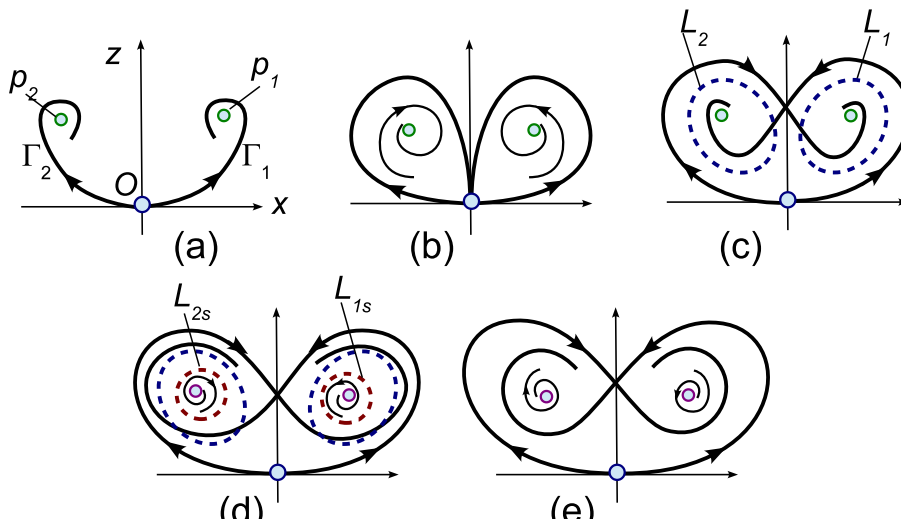


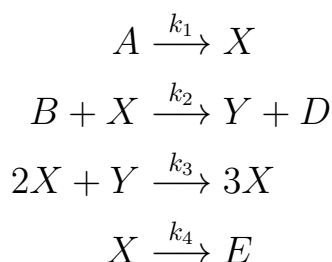
Рис. 13: Основные этапы возникновения аттрактора Лоренца в модели Шимицу-Мориока а)–с) также как и в системе Лоренца; при переходе от с) к д) происходит прямая бифуркация Андронова-Хопфа у ненулевых состояний равновесия, а затем, при переходе от д) к е), устойчивые и седловые циклы сливаются и исчезают и жестким образом рождается аттрактор Лоренца. Таким образом, в модели Шимицу-Мориока граница существования аттрактора Лоренца является также опасной, но ей соответствует седло-узловая бифуркация при слиянии устойчивого и седлового предельных циклов

в которых показывалось, что возникновение колебаний в гомогенных химических реакциях возможно. Принятию другой точки зрения на это явление в том числе препятствовало ошибочное убеждение, что даже вдали от равновесия такие колебания запрещены вторым началом термодинамики. В 1951 г. Б. П. Белоусов обнаружил, что в одной из исследуемых им реакций раствор регулярно меняет свою окраску от бесцветной к жёлтой, затем снова к бесцветной и так далее. Несмотря на достаточно подробное проведённое исследование, открытие было встречено крайне скептически, и его статью дважды отклоняли редакции химических журналов. Результаты Белоусова оставались неизвестными мировому химическому сообществу вплоть до пражского симпозиума по биохимическим и биологическим осцилляторам 1968 г., где А.М. Жаботинский представил свои исследования этой реакции. В итоге эти работы, а также работы Тьюринга по химическим основам морфогенеза и работы Пригожина по термодинамике открытых систем вызвали глубокий интерес к колебаниям в химических реакциях.¹⁰

Исходная реакция Белоусова-Жаботинского довольно сложна: наиболее пол-

¹⁰Более подробное изложение истории исследований колебаний в химических реакциях можно найти, например, в [17].

ный известный на сегодня реакционный механизм включает в себя порядка 80 элементарных реакций, что делает прямой анализ системы затруднительным. Существует несколько распространённых моделей реакции: например, модель Жаботинского-Корзухина, брюсселятор, орегонатор. Эти модели пытаются объяснить наблюдаемое явление с помощью небольшого числа элементарных реакций. Мы рассмотрим модель брюсселятора, предложенную Пригожиным и Лефевром. Это гипотетическая реакция следующего вида:



В этой реакции шесть действующих веществ, и изменение их концентраций должна была бы описывать система из шести дифференциальных уравнений. Однако, за счёт упрощающих предположений можно понизить размерность этой системы. Заметим, что в этой реакции вещества D и E участвуют только в качестве продуктов элементарных реакций. Это позволяет исключить уравнения для них из системы. Также будем считать, что концентрации веществ A и B поддерживаются постоянными. Тогда система уравнений химической кинетики для этого набора реакций имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= k_1 A - k_2 B X + k_3 X^2 Y - k_4 X, \\ \frac{dY}{dt} &= k_2 B X - k_3 X^2 Y. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Заменой $\tau = k_4 t$, $x = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} X$, $y = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} Y$ её можно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a - (b + 1)x + x^2 y, \\ \dot{y} &= bx - x^2 y, \end{aligned} \tag{2.43}$$

где $a = \sqrt{\frac{k_1 k_3}{k_4^3}} A$, $b = \frac{k_2}{k_4} B$. Исходя из задачи, переменные x , y и параметры a и b могут принимать только положительные значения.

Проанализируем состояния равновесия данной системы. Эта система обладает единственным состоянием равновесия, координаты которого равны $\left(a, \frac{b}{a} \right)$.

Определим, при каких значениях параметров возможна смена его устойчивости. Матрица Якоби J , вычисленная в состоянии равновесия, равна

$$\begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}.$$

Согласно формуле (2.20), условия $\text{tr } J = 0$, $\det J > 0$ выделяют точки в пространстве параметров, в которых происходит бифуркация Андронова-Хопфа. Условие $\text{tr } J = 0$ задаёт кривую $b = 1 + a^2$. Вдоль неё $\det J = a^2 > 0$, а это значит, что фрагмент кривой $b = a^2 + 1$, $a > 0$ отвечает кривой бифуркаций Андронова-Хопфа. Первую ляпуновскую величину G можно вычислить, приведя систему (2.43) с помощью замены координат $x = \xi + a$, $y = \eta + \frac{b}{a}$ к виду

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= [(b-1)\xi + a^2\eta] + \left[\frac{b}{a}\xi^2 + 2a\xi\eta \right] + [\xi^2\eta], \\ \dot{\eta} &= [-b\xi - a^2\eta] + \left[-\frac{b}{a}\xi^2 - 2a\xi\eta \right] + [-\xi^2\eta] \end{aligned} \quad (2.44)$$

и воспользовавшись формулой (2.18). Вдоль кривой $b = a^2 + 1$ первая ляпуновская величина G отрицательна, что соответствует суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа: при $b < a^2 + 1$ состояние равновесия является устойчивым гиперболическим фокусом, при $b = a^2 + 1$ состояние равновесия становится устойчивым сложным фокусом, а при $b > a^2 + 1$ состояние равновесия становится неустойчивым гиперболическим фокусом и от него отделяется устойчивый предельный цикл. Таким образом, возникновение колебаний концентраций веществ в брюсселяторе может быть объяснено посредством бифуркации Андронова-Хопфа.

Задача 10. Для системы (2.44) вычислите первую ляпуновскую величину G состояния равновесия в начале координат, используя формулу (2.18). Покажите, что вдоль кривой $b = a^2 + 1$, $a > 0$ знак первой ляпуновской величины совпадает со знаком выражения $-a^2(a^2 + 2)$.

3. Бифуркация Андронова-Хопфа периодической траектории (бифуркация рождения инвариантного тора)

Здесь мы рассмотрим случай локальной бифуркации периодической траектории многомерного потока в случае, когда два мультипликатора этой траектории являются комплексно-сопряженными числами и лежат на единичной окружности, т.е. $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$, $\varphi \notin \{0, \pi\}$, а все остальные мультипликаторы λ_i , $i = 3, \dots, n$, не равны по модулю единице, $|\lambda_i| \neq 1$. По теореме сведения исследование бифуркаций такой негрубой периодической траектории сводится к изучению локальных бифуркаций диффеоморфизма плоскости T , имеющего негрубую неподвижную точку O с мультипликаторами $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$, $\varphi \notin \{0, \pi\}$. В окрестности этой точки можно ввести такие координаты (x, y) , что неподвижная точка находится в начале координат и матрица линейной части диффеоморфизма T является матрицей поворота на угол φ :

$$T: \begin{cases} \bar{x} = x \cos \varphi - y \sin \varphi + \sum a_{ij} x^i y^j, \\ \bar{y} = x \sin \varphi + y \cos \varphi + \sum b_{ij} x^i y^j. \end{cases} \quad (3.1)$$

Заметим, что линейное отображение

$$\bar{x} = ax + by, \quad \bar{y} = cx + dy \quad (3.2)$$

имеет неподвижную точку $O(0, 0)$ с собственными значениями (мультипликаторами) $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$, $\varphi \notin \{0, \pi\}$, если след матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ равен $2 \cos \varphi$, а ее определитель равен 1, т.е.

$$-2 < a + d = 2 \cos \varphi < 2, \quad \text{и} \quad ad - bc = 1. \quad (3.3)$$

Задача 11. С помощью линейной замены координат привести систему (3.2), для которой выполнены условия (3.3), к линейному повороту на угол φ :

$$\bar{x} = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad \bar{y} = x \sin \varphi + y \cos \varphi. \quad (3.4)$$

Подсказка: положить в (3.2) $x_{new} = x$, $x_{new} \cos \varphi - y_{new} \sin \varphi = ax + by$.



3.1. Нормальная форма бифуркации рождения инвариантного тора

Аналогично задаче о бифуркациях состояния равновесия типа сложный фокус (см. главу 2), воспользуемся методами теории нормальных форм. Рассмотрим сначала отображение T в форме (3.1). Введем комплексные переменные $z = x + iy$ и $z^* = x - iy$, и запишем (3.1) в виде

$$\bar{z} = e^{i\varphi} z + \sum_{m,n} A_{mn} z^m (z^*)^n, \quad (3.5)$$

где, например,

$$\begin{aligned} A_{20} &= (a_{20} + b_{11} - a_{02}) / 4 + i (b_{20} - a_{11} - b_{02}) / 4, \\ A_{11} &= (a_{20} + a_{02}) / 2 + i (b_{20} + b_{02}) / 2, \\ A_{02} &= (a_{20} - b_{11} - a_{02}) / 4 + i (b_{20} + a_{11} - b_{02}) / 4, \\ A_{21} &= (3a_{30} + b_{21} + b_{21} + 3b_{03}) / 8 + (3b_{30} - a_{21} + b_{12} - 3a_{03}) / 8, \end{aligned} \quad (3.6)$$

и т.д.

Введем теперь новую комплексную координату w по формуле

$$z = w + \sum_{s,t} \alpha_{st} w^s (w^*)^t. \quad (3.7)$$

Пусть в новых координатах отображение (3.5) принимает вид

$$\bar{w} = e^{i\varphi} \left(w + \sum_{m,n} \tilde{A}_{mn} w^m (w^*)^n \right). \quad (3.8)$$

Как обычно, при такой замене координат мы преследуем цель, чтобы в правых частях отображения (3.8) было как можно больше нулевых членов \tilde{A}_{mn} .

Лемма 2. *Существует формальная замена координат вида (3.7), приводящая систему (3.5) к формальной нормальной форме вида (3.8), где $\tilde{A}_{mn} \equiv 0$ для всех таких целых $m + n \geq 2$, при которых*

$$e^{i\varphi(m-n-1)} \neq 1. \quad (3.9)$$

Доказательство. Подставим (3.7) в (3.5), получим такое представление отображения (3.8)

$$\begin{aligned} \bar{w} + \sum_{s,t} \alpha_{st} e^{i\varphi(s-t)} \left(w + \sum_{p,q} \tilde{A}_{pq} w^p (w^*)^q \right)^s \left(w^* + \sum_{p,q} \tilde{A}_{pq}^* (w^*)^p w^q \right)^t = \\ = e^{i\varphi} \left(w + \sum_{s,t} \alpha_{st} w^s (w^*)^t \right) + \\ + \sum_{m,n} A_{mn} \left(w + \sum_{s,t} \alpha_{st} w^s (w^*)^t \right)^m \left(w^* + \sum_{s,t} \alpha_{st}^* (w^*)^s w^t \right)^n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Сначала соберем в (3.10) члены с $m + n = 2$. Тогда (3.10) можно переписать как

$$\begin{aligned} \bar{w} + \sum_{m+n=2} \alpha_{mn} e^{i\varphi(m-n)} w^m (w^*)^n = \\ = e^{i\varphi} \left(w + \sum_{m+n=2} \alpha_{mn} w^m (w^*)^n \right) + \sum_{m+n=2} A_{mn} w^m (w^*)^n + O(|w|^3). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Сравнивая квадратичные члены этой системы и (3.8), получим

$$\tilde{A}_{mn} = A_{mn} + e^{i\varphi} \alpha_{mn} - \alpha_{mn} e^{i\varphi(m-n)}, \quad m + n = 2.$$

Положим теперь

$$\alpha_{mn} = \frac{A_{mn}}{e^{i\varphi} (e^{i\varphi(m-n-1)} - 1)}. \quad (3.12)$$

Тогда, если (3.9) выполнено, то получим, что $\tilde{A}_{mn} \equiv 0$ при $m + n = 2$.

Очевидно, при $m + n = 2$ неравенство (3.9) выполняется при всех $0 < \varphi < \pi$ кроме $\varphi = 2\pi/3$ – здесь условие (3.9) нарушается при $m = 0, n = 2$, т.е. моном $\tilde{A}_{02}(z^*)^2$ является резонансным при $\varphi = 2\pi/3$. Случай $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ называется *сильным резонансом 1 : 3*, и в настоящем пособии мы его не будем касаться.

Рассмотрим теперь члены с $m + n = 3$. Теперь мы можем положить в (3.8), что $\tilde{A}_{mn} \equiv 0$ при $m + n = 2$ (кроме \tilde{A}_{02} при $\varphi = 2\pi/3$). Тогда из (3.8) для соответствующих коэффициентов \tilde{A}_{mn} получим следующие выражения

$$\tilde{A}_{mn} = A_{mn} + e^{i\varphi} \alpha_{mn} - \alpha_{mn} e^{i\varphi(m-n)} + H_{mn}(\alpha_{ij}, A_{ij}|_{i+j=2}), \quad m + n = 3,$$

где H_{mn} – некоторая известная функция коэффициентов α_{ij} и A_{ij} с $i + j = 2$. Тогда, положив

$$\alpha_{mn} = \frac{A_{mn} + H_{mn}}{e^{i\varphi} (e^{i\varphi(m-n-1)} - 1)}, \quad m + n = 3,$$

мы зануляем в (3.8) соответствующие \tilde{A}_{mn} . Однако это опять можно сделать только при тех $m + n = 3$, при которых выполняется неравенство (3.9). Исключением являются два случая:

- случай $m = 2, n = 1$ т.н. тривиального резонанса – здесь моном $\tilde{A}_{21} z^2 z^*$ является резонансным при всех φ , и мы полагаем в (3.7) $\alpha_{21} = 0$;
- случай $\varphi = \frac{\pi}{2}, m = 0, n = 3$ сильного резонанса 1:4 – здесь резонансным (кроме монома $\tilde{A}_{21} z^2 z^*$) также является и моном $\tilde{A}_{03}(z^*)^3$.

Теперь по индукции нетрудно вывести из (3.10), что для коэффициентов \tilde{A}_{mn} с $m + n = k, k > 3$,

будут иметь место следующие выражения

$$\tilde{A}_{mn} = A_{mn} + e^{i\varphi} \alpha_{mn} - \alpha_{mn} e^{i\varphi(m-n)} + H_{mn}^k (\alpha_{ij}, A_{ij} |_{2 \leq i+j \leq k-1}), \quad m+n = k,$$

где H_{mn}^k – некоторая известная функция коэффициентов α_{ij} и A_{ij} с $2 \leq i+j \leq k-1$. Тогда, положив

$$\alpha_{mn} = \frac{A_{mn} + H_{mn}^k}{e^{i\varphi} (e^{i\varphi(m-n-1)} - 1)}, \quad m+n = k,$$

мы зануляем в (3.8) соответствующие \tilde{A}_{mn} , опять при условии (3.8) для $m+n = k$. В случае тождественных резонансов мы полагаем в (3.7), что $\alpha_{n+1n} = 0$. \square

Рассмотрим случай, когда $\varphi/2\pi$ иррационально. Сразу заметим, что из леммы 2 вытекает следующее

Следствие 1. Пусть $\varphi/2\pi$ – иррационально, тогда формальная нормальная форма имеет вид

$$\bar{w} = e^{i\varphi} \left(w + \sum_{m \geq 1} \tilde{A}_{m+1,m} w^{m+1} w^{*m} \right). \quad (3.13)$$

Отсюда, в частности, получаем, что подходящее полиномиальное преобразование (степени $2m+1$) приводит отображение (3.5) к виду

$$\bar{w} = e^{i\varphi} w \left(1 + \tilde{A}_{21} |w|^2 + \dots + \tilde{A}_{m+1,m} |w|^{2m} \right) + O(|w|^{2m+2}) \quad (3.14)$$

для произвольно заданного m (вообще говоря, не превышающего $(r-1)/2$, где r – гладкость отображения).

Рассмотрим отображение (3.14) и перейдем в нем к полярным координатам (R, θ) , где $w = Re^{i\theta}$. Тогда (3.14) переписется в виде

$$\bar{R}e^{i\bar{\theta}} = e^{i\varphi} Re^{i\theta} \left(1 + \tilde{A}_{21} R^2 + \dots + \tilde{A}_{m+1,m} R^{2m} \right) + O(R^{2m+2}).$$

Добавим к этому уравнению еще и уравнение для \bar{w}^* :

$$\bar{R}e^{-i\bar{\theta}} = e^{-i\varphi} Re^{-i\theta} \left(1 + \tilde{A}_{21}^* R^2 + \dots + \tilde{A}_{m+1,m}^* R^{2m} \right) + O(R^{2m+2}).$$

Умножим и поделим эти уравнения одно на другое, получим

$$\bar{R}^2 = R^2 \left(1 + \tilde{A}_{21}R^2 + \dots + \tilde{A}_{m+1,m}R^{2m} \right) \left(1 + \tilde{A}_{21}^*R^2 + \dots + \tilde{A}_{m+1,m}^*R^{2m} \right) + o(R^{2m+3}),$$

$$e^{2i(\bar{\theta}-\theta-\varphi)} = \frac{1 + \tilde{A}_{21}R^2 + \dots + \tilde{A}_{m+1,m}R^{2m} + O(R^{2m+2})}{1 + \tilde{A}_{21}^*R^2 + \dots + \tilde{A}_{m+1,m}^*R^{2m} + O(R^{2m+2})}.$$

Эти соотношения позволяют записать отображение T в явном виде

$$\begin{aligned} \bar{R} &= R + L_1R^3 + \dots + L_mR^{2m+1} + O(R^{2m+2}), \\ \bar{\theta} &= \theta + \varphi + B_1R^2 + \dots + B_mR^{2m} + O(R^{2m+1}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где величины L_k и B_k выражаются через коэффициенты $\tilde{A}_{j+1j} = a_j + ib_j$ при $j = 1, \dots, k$. Например,

$$\begin{aligned} L_1 &= a_1, \quad B_1 = b_1, \\ L_2 &= a_2 + b_1^2/2, \quad B_2 = b_2 - a_1b_1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Числа L_k называются *ляпуновскими величинами*.

Лемма 3. Пусть $\varphi/2\pi$ иррационально, и пусть L_k – первая отличная от нуля ляпуновская величина ($L_k \neq 0$, $L_i = 0$ при $i < k$). Тогда неподвижная точка O асимптотически устойчива, когда $L_k < 0$, и неустойчива, когда $L_k > 0$.

Доказательство. Из (3.15) имеем

$$\bar{R} = R \left(1 + L_k R^{2k} + o(R^{2k}) \right). \quad (3.17)$$

Следовательно, если $L_k < 0$, то $\bar{R} < R$, т.е. $V(R, \varphi) \equiv R$ – функция Ляпунова, и поэтому неподвижная точка асимптотически устойчива. В случае $L_k > 0$ мы имеем

$$R = \bar{R} \left(1 - L_k \bar{R}^{2k} + o(\bar{R}^{2k}) \right),$$

откуда $\bar{R} > R$. Таким образом, $V(R, \varphi) \equiv R$ – функция Ляпунова для обратного отображения, из чего следует неустойчивость неподвижной точки. \square

Рассмотрим теперь случай, когда $\frac{\varphi}{2\pi}$ рационально, то есть $\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{p}{q}$, где p и q – взаимно простые натуральные числа и $q \geq 3$.¹ Очевидно, резонансные соотношения

$$e^{i2\pi \frac{p}{q}(m-n-1)} = 1$$

¹Формально говоря, случаи $q = 1$ и $q = 2$ отвечают $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ соответственно. Эти случаи относят к сильным резонансам 1:1 и 1:2, но обычно не связывают с дискретной бифуркацией Андронова-Хопфа. Так, основной случай бифуркации с $\varphi = 0$ называется дискретным вариантом бифуркации Богданова-Такенса, а в случае $\varphi = \pi$ говорят о дискретном варианте бифуркации Хорозова-Такенса, см. [8].

выполняются здесь, когда

$$m - n - 1 = kq \text{ при } k = 0, \pm 1, \dots$$

Случай $k = 0$ отвечает тривиальным резонансам, которые существуют при всех φ , рациональных и иррациональных. Однако здесь существуют также *нетривиальные резонансы*, отвечающие соотношениям вида $m = n + 1 + kq$ при $k \neq 0$. Среди бесконечного множества таких резонансов нас в первую очередь интересуют, конечно, главные нетривиальные резонансы, т.е. члены $\tilde{A}_{mn} z^m (z^*)^n$, отвечающие минимальному значению $m + n$ при $m, n \geq 0$. Нетрудно показать, что главный нетривиальный резонанс при $q \geq 3$ всегда один – это член вида $\tilde{A}_{0, q-1} (z^*)^{q-1}$.

Действительно, при $m = 0$ мы получаем, что $n = -1 - kq \geq 0$. При $k = -1$ отсюда получаем, что $m = 0, n = q - 1$. Это показывает, что нормальная форма (3.13) справедлива и в рациональном случае $\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{p}{q}$ при $2n < q - 2$. Соответственно, лемма 3 в этом случае может быть переформулирована следующим образом.

Лемма 4. Пусть $\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{p}{q}$, где p и q – взаимно простые натуральные числа и $q \geq 5$, и пусть L_k – первая отличная от нуля ляпуновская величина ($L_k \neq 0, L_i = 0$ при $i < k$) и

$$k < \frac{q - 2}{2}. \quad (3.18)$$

Тогда неподвижная точка O асимптотически устойчива, когда $L_k < 0$, и неустойчива, когда $L_k > 0$.

Заметим, что случаи $q = 3$ и $q = 4$ отвечают *сильным резонансам*, и в этих случаях нормальная форма (3.13) или (3.14) в общем случае несправедлива, так как здесь появляются нетривиальные резонансные члены – квадратичный $\tilde{A}_{02} (z^*)^2$ при $q = 3$, и кубический $\tilde{A}_{03} (z^*)^3$ при $q = 4$. Таким образом, мы можем сейчас представить основные комплексные нормальные формы отображений в окрестности неподвижной точки с мультипликаторами $e^{\pm i\varphi}$, где $0 < \varphi < \pi$:

- *Основной случай*, при $0 < \varphi < \pi$ и $\varphi \notin \{\pi/2, 2\pi/3\}$

$$\bar{z} = e^{i\varphi} \left(z + \tilde{A}_{21} |z|^2 z \right) + O(|z|^4). \quad (3.19)$$

- *Резонанс 1:4*, при $\varphi = \pi/2$,

$$\bar{z} = e^{i\pi/2} \left(z + \tilde{A}_{21} |z|^2 z + \tilde{A}_{03} (z^*)^3 \right) + O(|z|^4). \quad (3.20)$$

- Резонанс 1:3, при $\varphi = 2\pi/3$,

$$\bar{z} = e^{i2\pi/3} \left(z + \tilde{A}_{02}(z^*)^2 \right) + O(|z|^3). \quad (3.21)$$

В силу лемм 3 и 4, в общем случае (когда $\varphi \notin \{\pi/2, 2\pi/3\}$ и $L_1 \neq 0$) устойчивость неподвижной точки определяется первой ляпуновской величиной $L_1 = \operatorname{Re} \tilde{A}_{21}$. Если $L_1 < 0$, то неподвижная точка устойчива. В противном случае, когда $L_1 > 0$, неподвижная точка неустойчива. Далее мы будем рассматривать бифуркацию Андронова-Хопфа в основном случае. Особенности этой бифуркации в случае сильных резонансов 1:3 и 1:4 предполагается рассмотреть во второй части пособия.

3.2. Формула для первой ляпуновской величины

Пусть отображение (3.5) приведено к нормальной форме (3.19). Можно показать, что в этом случае

$$\tilde{A}_{21} = e^{-i\varphi} A_{21} + A_{20} A_{11} \frac{2e^{i\varphi} - 1}{1 - e^{i\varphi}} e^{-2i\varphi} - \frac{|A_{11}|^2}{1 - e^{i\varphi}} - \frac{|A_{02}|^2}{1 - e^{3i\varphi}}. \quad (3.22)$$

Рассмотрим формулу (3.10) при условии, что $\tilde{A}_{mn} = 0$ при $m + n = 2$ и $\alpha_{21} = 0$. Тогда по лемме 3 получим

$$\begin{aligned} \bar{w} = & e^{i\varphi} w + A_{21} w^2 w^* + A_{20} \left(w + \alpha_{20} w^2 + \alpha_{11} w w^* + \alpha_{02} w^{*2} \right)^2 + \\ & + A_{11} \left(w + \alpha_{20} w^2 + \alpha_{11} w w^* + \alpha_{02} w^{*2} \right) \left(w^* + \alpha_{20}^* w^{*2} + \alpha_{11}^* w w^* + \alpha_{02}^* w^2 \right) + \\ & + A_{02} \left(w^* + \alpha_{20}^* w^{*2} + \alpha_{11}^* w w^* + \alpha_{02}^* w^2 \right)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где многоточиями обозначены члены вида $O(|z|^3)$, не содержащие мономов $w^2 w^*$. Выделив из (3.23) члены с $w^2 w^*$, получим в силу леммы 3 следующее выражение

$$\bar{w} = e^{i\varphi} w + (A_{21} + 2A_{20}\alpha_{11} + A_{11}[\alpha_{20} + \alpha_{11}^*] + 2A_{02}\alpha_{02}^*) w^2 w^* + O(|z|^4).$$

Сравнивая эту формулу с (3.8), получим, что

$$\tilde{A}_{21} = e^{-i\varphi} (A_{21} + 2A_{20}\alpha_{11} + A_{11}[\alpha_{20} + \alpha_{11}^*] + 2A_{02}\alpha_{02}^*).$$

Тогда из (3.12) получим

$$\tilde{A}_{21} = e^{-i\varphi} A_{21} + A_{20} A_{11} \frac{2e^{i\varphi} - 1}{1 - e^{i\varphi}} e^{-2i\varphi} - \frac{|A_{11}|^2}{1 - e^{i\varphi}} - \frac{2|A_{02}|^2}{1 - e^{3i\varphi}},$$

где A_{ij} – коэффициенты из (3.5). Таким образом, для первой ляпуновской величины $L_1 = \operatorname{Re} \tilde{A}_{21}$ получаем такую формулу

$$\begin{aligned} L_1 = & \operatorname{Re} (A_{20}A_{11}) \frac{\cos 3\varphi - 3 \cos 2\varphi + 2 \cos \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} + \\ & + \operatorname{Im} (A_{20}A_{11}) \frac{\sin 3\varphi - 3 \sin 2\varphi + 2 \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} - \\ & - |A_{02}|^2 - \frac{1}{2}|A_{11}|^2 + \operatorname{Re} A_{21} \cdot \cos \varphi + \operatorname{Im} C_{21} \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Мы можем также использовать эту формулу непосредственно для исходного отображения (3.1), учитывая связь (3.6) между соответствующими коэффициентами.

3.3. Бифуркация в основном случае нормальной формы

Аналогично задаче о бифуркациях состояния равновесия типа сложный фокус (см. главу 2) рассмотрим однопараметрическое семейство T_μ двумерных диффеоморфизмов, непрерывно зависящих от параметра μ , таких, что

- при всех достаточно малых μ диффеоморфизм T_μ имеет неподвижную точку $O_\mu(0, 0)$ в начале координат;
- при $\mu = 0$ точка O имеет собственные значения $e^{\pm i\varphi}$, где $0 < \varphi < \pi$ и $\varphi \notin \{0, \pi, 2\pi/3, \pi/2\}$;
- первая ляпуновская величина L_1 не равна нулю;
- модуль собственных значений меняется монотонно при изменении μ .

В этом случае, не ограничивая общности, мы можем представить семейство T_μ в комплексных координатах следующим образом

$$\bar{z} = (1 + \mu)e^{i\varphi} \left(z + \tilde{A}_{21}|z|^2 z \right) + O(|z|^4). \quad (3.25)$$

После перехода к полярным координатам $z = Re^{i\theta}$ система (3.25) перепишется в таком виде (см. (3.15))

$$\begin{aligned} \bar{R} &= (1 + \mu)R + L_1(\mu)R^3 + O(R^4), \\ \bar{\theta} &= \theta + \varphi + B_1(\mu)R^2 + O(R^3), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $L_1(0) \neq 0$.

После стандартной нормировки L_1 к единице ($R \rightarrow \frac{1}{\sqrt{|L_1|}}R$) отображение (3.26) переписывается в виде

$$\begin{aligned}\bar{R} &= (1 + \mu)R + \text{sign } L_1 R^3 + O(R^4), \\ \bar{\theta} &= \theta + \varphi + B(\mu)R^2 + O(R^3),\end{aligned}\tag{3.27}$$

где $B = B_1/L_1$.

Для определенности, рассмотрим случай $L_1 < 0$, так как случай $L_1 > 0$ сводится также к нему для обратного отображения.

Если в (3.27) отбросить O -члены, то анализ бифуркаций соответствующего укороченного отображения \tilde{T}_μ в малой окрестности точки $R = 0$ достаточно прост, и он сводится к исследованию бифуркаций неподвижных точек одномерного отображения $\tau_\mu : \bar{R} = (1 + \mu)R - R^3$ полупрямой $R \geq 0$ в себя. Легко видеть, что при всех $\mu \leq 0$ отображение τ_μ имеет единственную неподвижную точку $R = 0$, которая асимптотически устойчива (экспоненциально устойчива при $\mu < 0$ и «полиномиально» устойчива при $\mu = 0$, см. Леммы 3 и 4). При $\mu > 0$ точка $R = 0$ становится неустойчивой, а в ее окрестности появляется асимптотически устойчивая неподвижная точка $O^*(R = \sqrt{\mu})$. Соответственно, для отображения \tilde{T}_μ это означает следующее: при $\mu \leq 0$ отображение \tilde{T}_μ имеет единственную неподвижную точку $O_\mu(R = 0)$ типа устойчивый фокус при $\mu < 0$ и сложный устойчивый фокус при $\mu = 0$; при $\mu > 0$ точка $O_\mu(R = 0)$ становится неустойчивым фокусом, а в ее окрестности появляется асимптотически устойчивая замкнутая инвариантная кривая $C^*(\mu)$ радиуса $R = \sqrt{\mu}$. См. рис. 14, который иллюстрирует основные особенности этой бифуркации при $L_1 < 0$ (рис. 14а и 14б) и $L_1 > 0$ (рис. 14в и 14г).

Для системы дифференциальных уравнений появление замкнутой инвариантной кривой у отображения Пуанкаре соответствует рождению из периодической траектории инвариантного двумерного тора, см. рис. 15. С физической точки зрения, это соответствует смене режима автоколебаний на режим биений. Последний режим может быть квазипериодическим или периодическим, в зависимости от того является число вращения ν на инвариантной кривой $C^*(\mu)$ иррациональным или рациональным. В этом случае отображение (3.27) можно рассматривать как отображение Пуанкаре вблизи периодической траектории соответствующей трехмерной системы. Пусть инвариантная кривая отображения (3.27) имеет уравнение $C^*(\mu) : R = h_\mu(\theta)$, где $h_\mu(\theta)$ – гладкая периодическая по θ функция. Тогда число вращения ν вычисляется по диффеоморфизму окружности $\tilde{T}_\mu|_{C^*(\mu)} : \bar{\theta} = \theta + \varphi + B(\mu)h_\mu(\theta)^2 + O(h_\mu^3)$. Заметим,

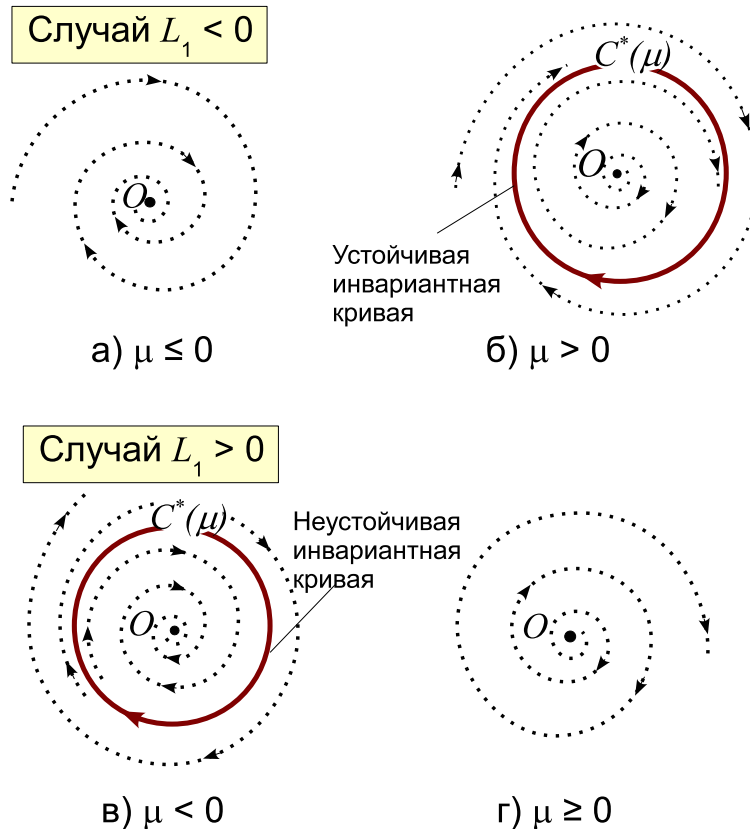


Рис. 14: Основные элементы дискретной бифуркации Андронова-Хопфа при $L_1 < 0$ и $L_1 > 0$

что в случае, когда ν рационально, $\nu = p/q$, но q достаточно большое, то соответствующий периодический режим на торе будет практически не отличим от квазипериодического. Поэтому такие режимы на практике относят также к квазипериодическим. В случае, когда q не слишком большое, инвариантный тор становится резонансным, и на нем в общем случае лежат две периодические траектории, устойчивая и седловая.

3.4. Теорема о рождении инвариантной кривой из неподвижной точки

Как мы видели, анализ нормальной формы, т.е. отображения (3.27) без O -членов, сравнительно прост. Однако доказательство факта рождения из неподвижной точки единственной замкнутой инвариантной кривой для полного отображения (3.27) является достаточно сложным. Оно проводится с помощью т.н. *принципа кольца*, который мы будем рассматривать в § 4 А здесь мы только воспользуемся соответствующим результатом, теорема 4 из § 4, о достаточных условиях существования и единственности замкнутой инвариантной кривой у

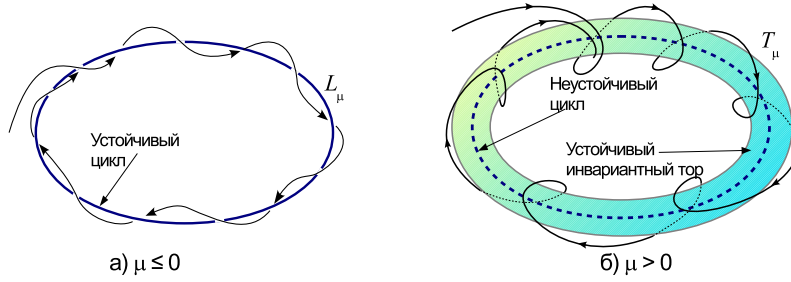


Рис. 15: Рождение устойчивого двумерного инвариантного тора T_μ из устойчивой периодической траектории L_μ

отображения кольца в себя.

Как было показано выше, отображение в окрестности негрубой неподвижной точки с собственными значениями $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$, $\varphi \notin \{0, \pi, 2\pi/3, \pi/2\}$, приводится к виду

$$\begin{aligned}\bar{R} &= (1 + \mu)R - R^3 + R^4 F(R, \theta), \\ \bar{\theta} &= \theta + \varphi + BR^2 + R^3 G(R, \theta).\end{aligned}\tag{3.28}$$

Покажем, что при $\mu > 0$ в окрестности начала координат существует кольцо \mathcal{K}_μ , которое стягивается к нулю при $\mu \rightarrow +0$ и отображается внутрь себя относительно отображения (3.28).

Рассмотрим кольцо

$$\mathcal{K}_\mu = \left\{ (R, \theta) \mid \frac{2}{3}\sqrt{\mu} < R < \frac{4}{3}\sqrt{\mu}, 0 \leq \theta < 2\pi \right\}.$$

В силу (3.28), получаем, что при $\mu > 0$

$$\begin{aligned}R = \frac{2}{3}\sqrt{\mu} &\Rightarrow \bar{R} = (1 + \mu)\frac{2}{3}\sqrt{\mu} - \frac{8}{27}\mu\sqrt{\mu} + O(\mu^2) = \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\mu} + \frac{10}{27}\mu\sqrt{\mu} + O(\mu^2) > \frac{2}{3}\sqrt{\mu}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}R = \frac{4}{3}\sqrt{\mu} &\Rightarrow \bar{R} = (1 + \mu)\frac{4}{3}\sqrt{\mu} - \frac{64}{27}\mu\sqrt{\mu} + O(\mu^2) = \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{\mu} - \frac{28}{27}\mu\sqrt{\mu} + O(\mu^2) < \frac{4}{3}\sqrt{\mu}\end{aligned}$$

при достаточно малых μ .

Таким образом, (3.28) отображает кольцо \mathcal{K}_μ внутрь себя.

Нетрудно проверить, что при $\mu > 0$ отображение (3.28) на кольце \mathcal{K}_μ удовлетворяет условию (4.4). Очевидно, отображение (3.28) можно записать в виде

(4.4), тогда нужно положить $x = R - \sqrt{\mu}$ и $r_0 = \frac{1}{3}\sqrt{\mu}$. Тогда из (3.28) выводим, что

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = 1 + O(\mu^{3/2}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \mu - 3R^2 + O(R^3) < 1 - \frac{\mu}{3} + O(\mu^{3/2}),$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2BR + O(R^2) = O(\sqrt{\mu}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = O(R^4) = O(\mu^2).$$

Тогда неравенство (4.4) очевидно выполнено при достаточно малых μ , так как его левая часть оценивается снизу как $\frac{\mu}{3}$, а правая часть не меньше, чем $C\mu^{5/4}$, где C – некоторая константа.

Полученный результат может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 3. *Существуют такие $\mu_0 > 0, \rho_0 > 0$ такие, что отображение (3.28) при $|\mu| \leq \mu_0$ имеет в окрестности $D_{\rho_0} = |R| \leq \rho_0$ единственную неподвижную точку $R = 0$. При $-\mu_0 \leq \mu < 0$ точка $R = 0$ является устойчивым фокусом, при $\mu = 0$ – устойчивым сложным фокусом, при $0 < \mu \leq \mu_0$ – неустойчивым фокусом. При $0 < \mu_0 \leq \mu_0$ в окрестности D_{ρ_0} существует единственная устойчивая замкнутая инвариантная кривая $C^*(\mu)$, которая рождается из точки $R = 0$ при $\mu > 0$. Кривая $C^*(\mu)$ имеет уравнение $R = h_\mu(\theta)$, где функция $h_\mu(\theta)$ является периодической по θ , она непрерывно зависит от μ и удовлетворяет условию Липшица по координате θ .*

3.5. Примеры систем с бифуркацией Андронова-Хопфа для отображений

3.5.1. О сценарии возникновения дискретного аттрактора Шильникова

Со случаем $L_1 < 0$ дискретной бифуркации Андронова-Хопфа, см. рис. 14а и 14б, непосредственно сценарий возникновения дискретного спирального аттрактора Шильникова у трехмерных отображений. Этот сценарий был предложен в работе [13]. На рис. 16 представлены основные этапы этого сценария.

Этот сценарий может наблюдаться в однопараметрических семействах T_μ трехмерных диффеоморфизмов таких, что T_μ имеет неподвижную точку O_μ , которая асимптотически устойчива при $\mu \in [\mu_0, \mu_1]$, становится седловой при

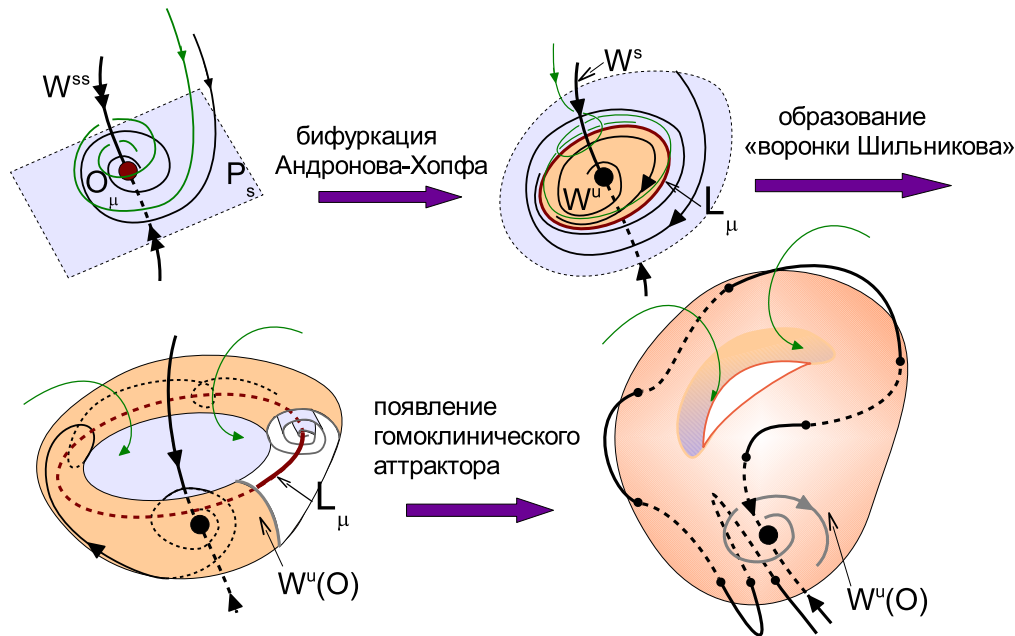


Рис. 16: К сценарию возникновения дискретного аттрактора Шильникова

$\mu > \mu_1$, а при $\mu > \mu_2 > \mu_1$ у точки O_μ появляются гомоклинические траектории, и соответственно здесь может наблюдаться странный аттрактор спирального типа.

Для сценария возникновения дискретного аттрактора Шильникова характерны следующие этапы (см. рис. 16). При $\mu = \mu_1$ точка O_μ теряет устойчивость в результате мягкой (суперкритической) бифуркации Неймарка-Сакера – при $\mu > \mu_1$ эта точка становится седло-фокусом типа (1,2), т.е. с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым инвариантными многообразиями, а в ее окрестности рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая L_μ . Соответственно, при $\mu > \mu_1$ сначала аттрактором является эта кривая L_μ , а затем при дальнейшем изменении μ она теряет устойчивость (каким способом – здесь неважно). При $\mu > \mu_2 > \mu_1$ формируется странный гомоклинический аттрактор, содержащий седло-фокус O_μ и его неустойчивое двумерное многообразие. Заметим, что подобный сценарий возникновения спирального аттрактора у трехмерных потоков был рассмотрен еще в работе Л.П.Шильникова [22]. Фактически, в работе [13] была предложена его модификация для случая трехмерных отображений, более подробно этот сценарий рассматривается в работе [30].

Как мы сказали выше, такой сценарий может наблюдаться в трехмерных

отображений. Рассмотрим конкретный пример отображения следующего вида

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Ay + Cz - y^2. \quad (3.29)$$

Отображение (3.29) имеет постоянный якобиан B , и поэтому оно называется обычно *трехмерным обобщенным отображением Эно*. Точка с координатами $O(0,0,0)$ является неподвижной точкой для отображения (3.29) при всех параметрах A, B, C . Зафиксируем параметры B и A и будем исследовать динамику отображения в зависимости от параметра C .

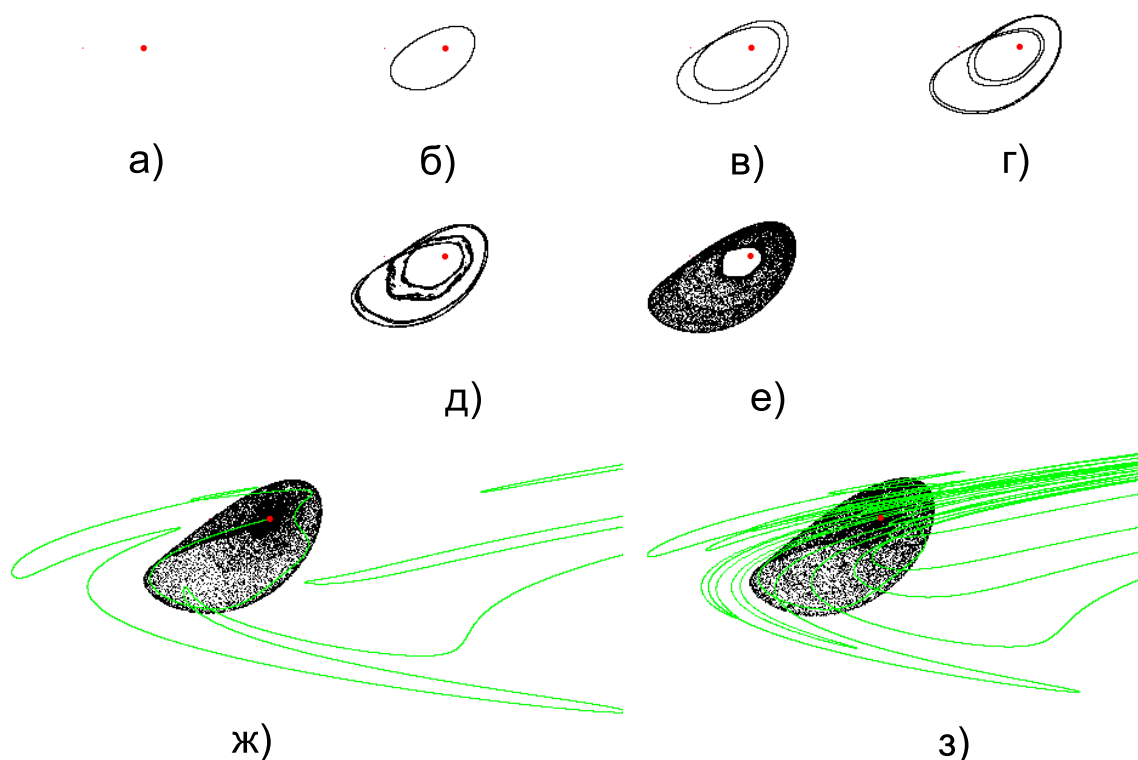


Рис. 17: Эволюция аттракторов в (3.29) при фиксированных $B = 0.5$ и $A = 1.43$: (а) $C = -1.4$ (неподвижная точка); (б) $C = -1.66$ (замкнутая инвариантная кривая); (в) $C = -1.72$ (инвариантная кривая «удвоилась»); (г) $C = -1.75$ (второе удвоение); (д) $C = -1.76$ (тор-хаос); (е) $C = -1.77$ (развитие тор-хаоса); (ж) $C = -1.83$ (тор-хаос, нет гомоклинических пересечений многообразий седла O); (з) $C = -1.84$ (аттрактор Шильникова, гомоклинические пересечения многообразий седла O присутствуют)

На рисунке 17 черным цветом показана проекция аттрактора отображения (3.29) на плоскость XOY при различных значениях параметра C , также на рисунке 17ж и 17з построена устойчивая сепаратриса седла O в обратном времени зеленым цветом.

3.5.2. Бифуркация Андронова-Хопфа для отображений в живых системах

Указанный бифуркационный сценарий также является характерным для ансамблей нейроноподобных элементов, связанных химическими (синаптическими) тормозящими связями. Рассмотрим пример ансамбля дискретных нейронов Рулькова[37], где каждый элемент задается системой

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, z_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + \mu(-x_n - 1 + \sigma), \\ z_{n+1} = x_n, \end{cases} \quad (3.30)$$

где

$$f(x, z, y) = \begin{cases} \alpha/(1-x) + y, & x \leq 0, \\ \alpha + y, & (0 < x < \alpha + y) \ \& \ (z \leq 0), \\ -1, & (x \geq \alpha + y) \ || \ (z > 0). \end{cases} \quad (3.31)$$

Переменная x качественно описывает изменение мембранного потенциала на поверхности нейрона. Посредством переменной y в систему вводится нелинейная обратная связь. Последовательность переменных z_n получена из последовательности x_n сдвигом на единицу назад по времени. Таким образом, система (3.30) позволяет моделировать нейрон с дискретным временным шагом, сравнимым со временем генерации нейроном одиночного импульса. Значения параметров индивидуального элемента $\alpha = 3.9$ и $\sigma = 1$. Малый параметр $\mu = 0.001$ обеспечивает медленные изменения переменной y . Связь между элементами задается с помощью добавочных членов в правых частях уравнений (3.30)

$$I_n^{ji} = \gamma_{ji} I_{n-1}^{ji} + g_{ji}(x_{rp} - x_n^i)\xi(x_n^j). \quad (3.32)$$

Здесь j — номер воздействующего элемента, i — номер элемента, на который направлено воздействие. Параметры γ_{ji} соответствуют скорости связи, $0 \leq \gamma_{ji} \leq 1$. Значение $\gamma_{ji} = 0$ соответствует быстрым тормозящим связям, значение $\gamma_{ji} = 1$ соответствует медленным тормозящим связям. Параметры g_{ji} соответствуют силе связи между элементами j и i , $g_{ji} \geq 0$. Константа x_{rp} — реверсивный потенциал, который определяет тип связи (при моделировании обычно выбирают значение -1.5 для тормозящей связи и значение $+1$ для возбуждающей связи). Функция $\xi(x)$ — ступенчатая функция вида

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & x > x_{th}, \\ 0, & x \leq x_{th}, \end{cases} \quad (3.33)$$

с пороговым значением x_{th} , которая реализует принцип тормозящей связи. Если значение мембранного потенциала x превышает пороговое значение x_{th} , воздействующий элемент полностью подавляет активность в элементе, на который он воздействует.

В итоге дискретные уравнения, которые описывают сеть трех систем Рутькова со взаимными тормозящими связями, определяемыми уравнением (3.32), имеют следующий вид

$$\begin{cases} x_{n+1}^i = f(x_n^i, x_{n-1}^i, y_n^i + \frac{\beta_{syn}}{2} \sum_{j \neq i} I_n^{ji}), \\ y_{n+1}^i = y_n^i + \mu_i(-x_n^i - 1 + \sigma_i + \frac{\sigma_{syn}}{2} \sum_{j \neq i} I_n^{ji}), \\ z_{n+1}^i = x_n^i, \\ i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (3.34)$$

В данном исследовании примем равными все значения параметров связей, направленных по часовой стрелке, т.е. $g_{12} = g_{23} = g_{31} = g_1$ и $\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = \gamma_1$, а также примем равными все значения параметров связей, направленных против часовой стрелки, т.е. $g_{21} = g_{32} = g_{13} = g_2$ и $\gamma_{21} = \gamma_{32} = \gamma_{13} = \gamma_2$. Также примем $x_{rp} = -1.5$, $\beta_{syn} = 0.0001$, $\sigma_{syn} = 1$.

В данном случае нас будет интересовать бифуркационный переход от сосуществующих в фазовом пространстве системы устойчивых периодических точек периода 4, 5 и 6 к хаосу. Для проведения бифуркационного анализа были вычислены мультипликаторы периодических решений. Их эволюция представлена на рисунке 19.

Был проведен следующий эксперимент: значение силы связи $g_2 = 7$ зафиксировано, а значение связи g_1 уменьшалось от начального значения 7. Было показано, что в этом случае тройки устойчивых периодических точек периодов 4, 5 и 6 последовательно бифурцируют через субкритические бифуркации Андронова—Хопфа, когда значение параметра связи g_1 достигает порогового значения для каждой тройки периодических точек. Тройка периодических точек периода 4 исчезает первой при достижении порогового значения $g_1 \approx 4.99$ (рис. 19а). Вместо неё после бифуркации появляется тройка неустойчивых циклов, которые невозможно наблюдать в численном эксперименте из-за отсутствия явного выражения для системы, обратной к системе (3.34). Далее при достижении порогового значения $g_1 \approx 4.85$ по аналогичному сценарию происходит бифуркация тройки устойчивых периодических точек периода 5. Когда величина g_1 достигает третьего порогового значения $g_1 \approx 4.49$, последняя тройка устойчивых периодических точек периода 6 раз-

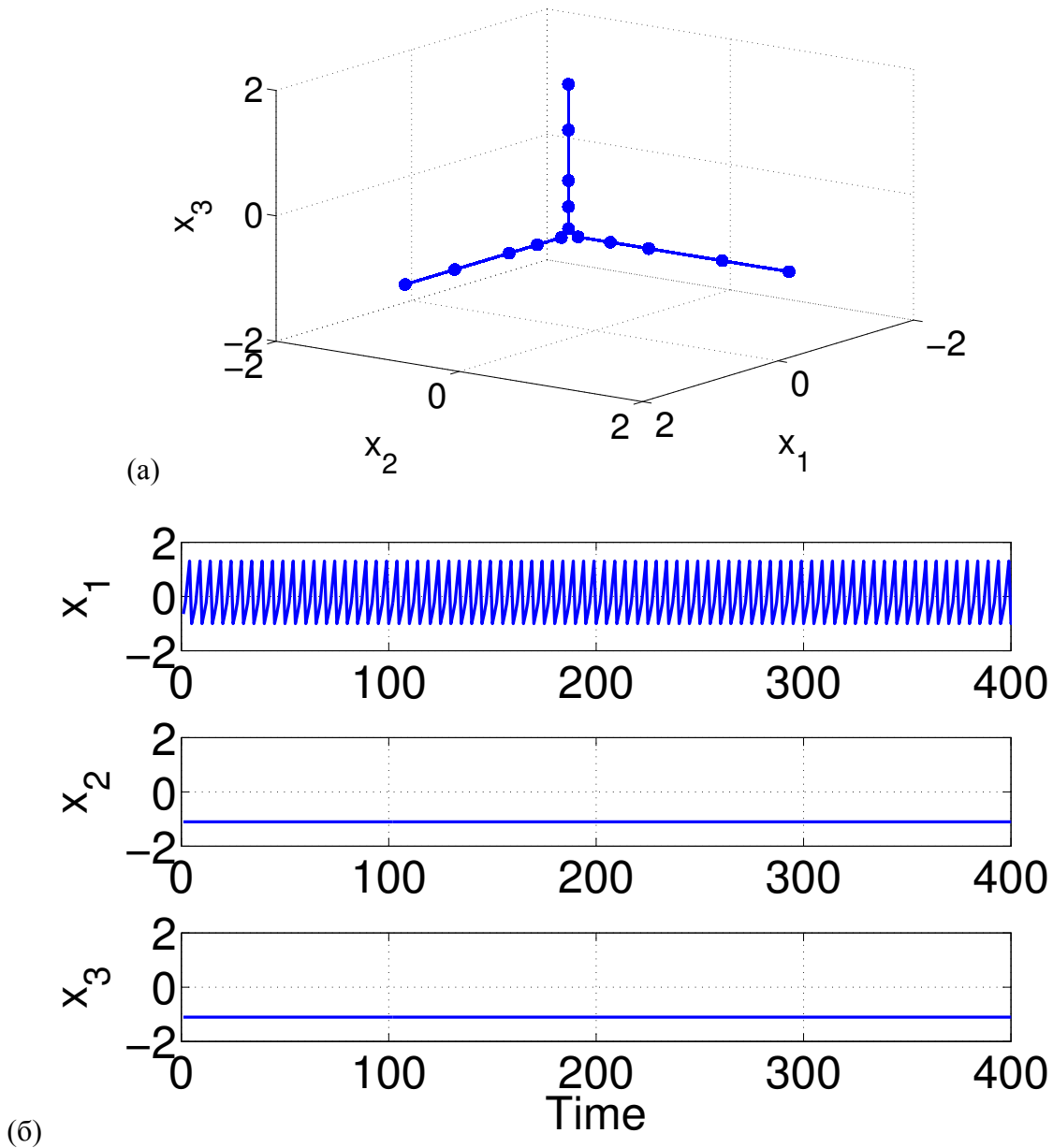


Рис. 18: Сосуществование троек устойчивых периодических точек периодов 4, 5, 6 в фазовом пространстве системы (3.34). (а) Тройка периодических точек периода 5 (б) Временные реализации динамического режима, соответствующего периодической точке периода 5

рушается вследствие субкритической бифуркации Андронова—Хопфа, на ее месте образуется тройка неустойчивых циклов. После этой последней бифуркации режим «один подавляет всех» исчезает, и в системе наблюдается хаотическая динамика. Этот результат инвариантен относительно замены $(g_1 \rightarrow g_2)$ и $(g_2 \rightarrow g_1)$ вследствие симметрии системы (3.34).

Субкритическая бифуркация Андронова—Хопфа коразмерности 2 (рис. 19б) наблюдается в случае одновременного достижения значениями связей g_1 и

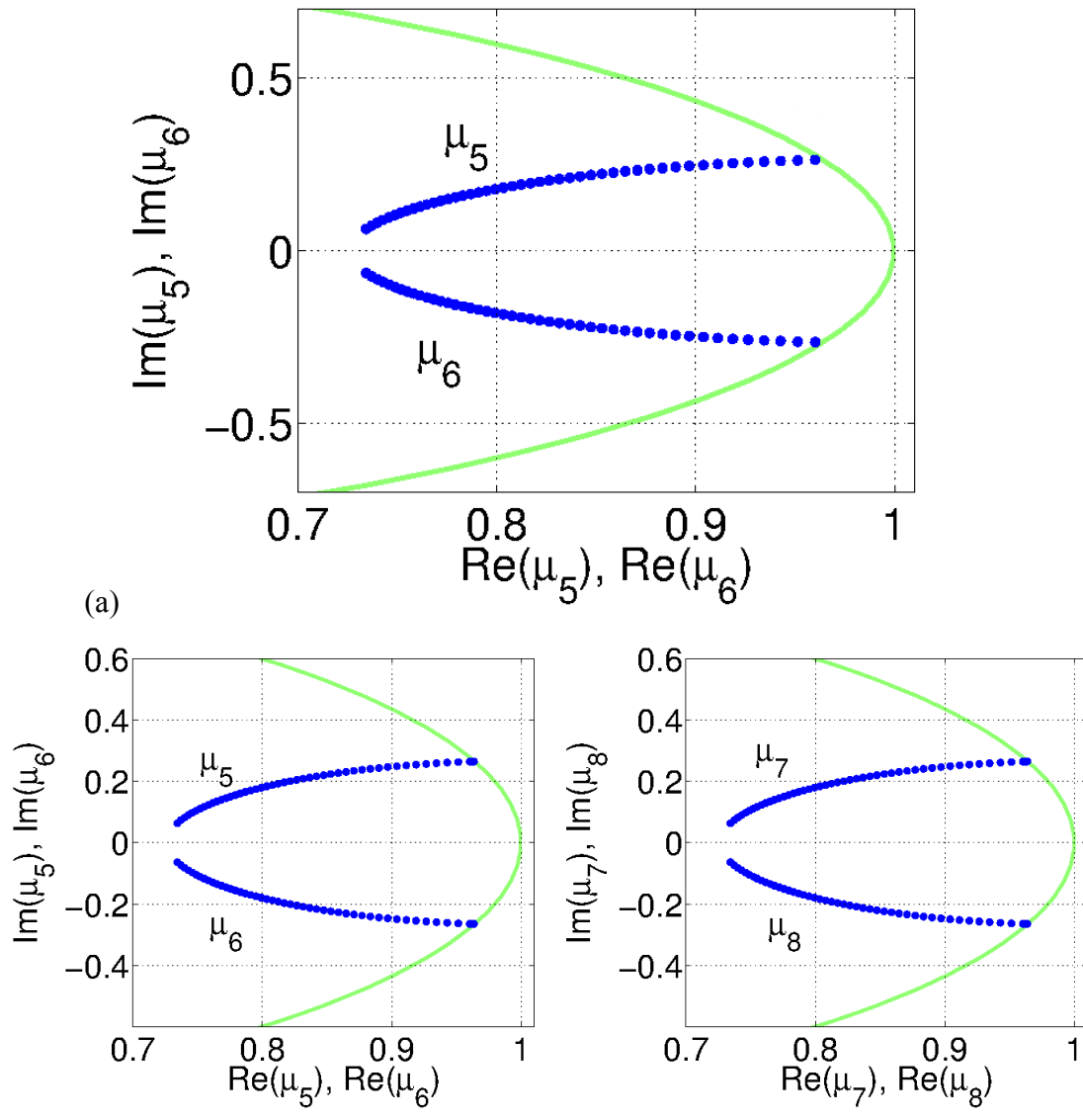


Рис. 19: Положение мультипликаторов (синий маркер) на комплексной плоскости по отношению к единичной окружности (зеленый маркер). Индекс означает номер мультипликатора. (а) Субкритическая бифуркация Андронова—Хопфа тройки периодических точек: два комплексно-сопряженных мультипликатора периодической точки периода 4 выходят на единичную окружность, $g_2 = g_2 \approx 7$, g_1 варьируется от 7 до 4.99. (б) Двойная субкритическая бифуркация Андронова—Хопфа тройки периодических точек периода 4: две пары комплексно-сопряженных мультипликаторов соответствующей периодической точки выходят на единичную окружность, $g_2 = g_1$ варьируются от 7 до 4.99. В обоих случаях все остальные мультипликаторы остаются внутри единичной окружности

g_2 бифуркационных значений при переходе из области сосуществующих режимов «один подавляет всех» в область хаотической активности по линии $g_1 = g_2$. Бифуркационные значения сил связей для троек периодических точек периодов 4, 5, 6 такие же, как и в предыдущем случае.

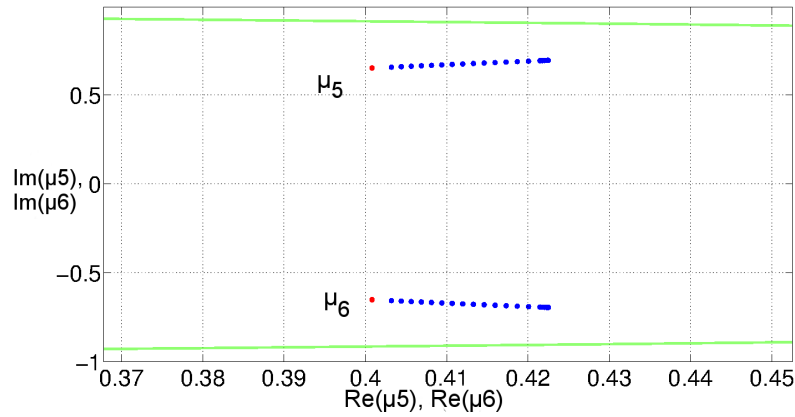


Рис. 20: Бифуркационный переход вблизи границы окна регулярности (область существования устойчивой периодической точки периода 19) внутри области хаоса. Значения параметров связей $g_2 \approx 3.9$, g_1 варьируется от 3.556 до 4.698. Положение мультипликаторов (синий маркер) на комплексной плоскости по отношению к единичной окружности (зеленый маркер). Красным маркером отмечена начальное значение мультипликаторов. Индекс означает номер мультипликатора. Два комплексно-сопряженных мультипликатора устойчивой периодической точки имеют тенденцию к выходу на единичную окружность на левой границе окна регулярности

Бифуркационные переходы вблизи границ окон регулярности внутри области хаоса также были численно исследованы. В этом случае бассейны притяжения устойчивых периодических точек вблизи бифуркационных значений сил связей (при которых рождаются и разрушаются периодические точки) очень малы, что сильно затрудняет численное исследование бифуркационных переходов. В этом случае два комплексно-сопряженных мультипликатора периодической точки вблизи бифуркационных значений параметров связи имеют тенденцию к выходу на единичную окружность на левой границе окон регулярности (рис. 20).

4. Теорема о существовании инвариантного тора. Принцип кольца

Рассмотрим отображение T :

$$\bar{x} = f(x, \theta), \quad \bar{\theta} = \theta + g_0(x, \theta) \equiv g(x, \theta) \pmod{2\pi}, \quad (4.1)$$

где $\theta \in \mathbb{T}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $m \geq 1, n \geq 1$, вектор-функции $f(x, \theta)$, $g(x, \theta)$ являются гладкими и 2π -периодическими по $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$.

Пусть \mathbb{K} – кольцо, задаваемое как

$$\mathbb{K} = \{(x, \theta) : \|x\| \leq r_0, \theta \in \mathbb{T}^m\}.$$

Предположим, что T переводит кольцо \mathbb{K} в себя. Введем следующее обозначение для векторнозначной или матричнозначной функции $\varphi(x, \theta)$:

$$\|\varphi\|_0 = \sup_{(x, \theta) \in \mathbb{K}} \|\varphi(x, \theta)\|,$$

где $\|(\cdot)\|$ – стандартная евклидова норма.

Предположение 1. *Отображение*

$$\bar{x} = f(x, \theta)$$

является сжимающим для любого фиксированного θ , то есть

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_0 < 1. \quad (4.2)$$

Предположение 2. *Отображение*

$$\bar{\theta} = \theta + g_0(x, \theta) \equiv g(x, \theta)$$

является диффеоморфизмом для любого фиксированного x . В частности, из этого следует, что

$$\left\| \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_0 \leq C < \infty. \quad (4.3)$$

Теорема 4 (Принцип кольца). При сделанных выше предположениях, если

$$1 - \left\| \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_{\circ} \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{\circ} > 2 \sqrt{\left\| \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_{\circ} \cdot \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_{\circ}}, \quad (4.4)$$

то диффеоморфизм (4.1) имеет в кольце \mathbb{K} инвариантный m -мерный тор \mathbb{T}^m , который содержит ω -предельные точки всех положительных полутраекторий, лежащих в \mathbb{K} . Тор \mathbb{T}^m является графиком $x = h^*(\theta)$, где h^* – периодическая по θ с периодом 2π и удовлетворяющая условию Липшица вектор-функция.

Так как якобиан матрицы $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \theta} = E_m + \frac{\partial g_0}{\partial \theta}$ не равен нулю в силу предположения 2, то по теореме о неявной функции равенства (4.1) можно переписать в перекрестном виде:

$$\bar{x} = F(x, \bar{\theta}), \quad \theta = G(x, \bar{\theta}) \pmod{2\pi}. \quad (4.5)$$

Заметим, что при этом имеют место тождества

$$F(x, \bar{\theta}) \equiv f(x, G(x, \bar{\theta})), \quad \bar{\theta} \equiv g(x, G(x, \bar{\theta})), \quad (4.6)$$

из которых для производных функций F и G получаем следующие оценки

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ} &= \left\| \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_{\circ}, \\ \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} &= \left\| \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_{\circ} \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot \left\| \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_{\circ}, \\ \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ} &= \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_{\circ}, \\ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} &\leq \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{\circ} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_{\circ}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Доказательство оценок (4.7). Дифференцируя по $\bar{\theta}$ второе тождество из (4.6), получаем

$$E_m = \frac{\partial g}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} = \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1}.$$

Дифференцируя по x второе тождество из (4.7), получаем

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial x} = - \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Дифференцируя по $\bar{\theta}$ первое тождество из (4.7), получаем

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1}.$$

Наконец, дифференцируя по x первое тождество из (4.7), получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}.$$

□

Задача 12. Проверить, что из оценок (4.7) и общего неравенства (4.4) вытекает неравенство

$$\sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ}} + \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ}} < 1. \quad (4.8)$$

Решение. Обозначив через a и b соответствующие члены в неравенстве (4.4), его можно переписать как

$$a + 2\sqrt{b} < 1.$$

Используя оценки (4.7), неравенство (4.8) можно записать в таком виде

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b} < 1,$$

или $(\sqrt{a+b})^2 < (1 - \sqrt{b})^2$, что влечет $a + 2\sqrt{b} < 1$.

Тем не менее заметим, что $\sqrt{a+b} + \sqrt{b} \geq a + 2\sqrt{b}$, если $a + 2\sqrt{b} \leq 1$. □

Из (4.8) получаем, в частности, что

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ} < 1.$$

В соответствии с предположением 2, для каждого фиксированного x отображение $\theta = G(x, \bar{\theta})$ является диффеоморфизмом тора \mathbb{T}^m на себя и, следовательно, оно не может быть сжимающим. Таким образом, максимум нормы его матрицы Якоби обязательно больше 1:

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ} \geq 1.$$

Из этого, в свою очередь, следует, что

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} < 1.$$

Тогда из неравенства (4.8) также вытекает, что

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} + \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ}} < 1. \quad (4.9)$$

Введем обозначение

$$L = \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ} \left(\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} \right)^{-1}} \quad (4.10)$$

(в частном случае, когда $\frac{\partial G}{\partial x} \equiv 0$, в качестве L выбирается достаточно большое число).

Следующие оценки вытекают из (4.8):

$$L \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} < 1, \quad (4.11)$$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ} < \left(1 - L \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} \right) \left(1 - \frac{1}{L} \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ} \right), \quad (4.12)$$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ} < \left(1 - L \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} \right)^2. \quad (4.13)$$

Из неравенства (4.9) получаем

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} < 1 - L \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ}. \quad (4.14)$$

Вывод неравенств (4.11) – (4.14). • Неравенство (4.11):

$$L \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} = \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ} \left(\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} \right)^{-1}} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} = \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ}} < 1 \text{ в силу (4.8).}$$

- Неравенство (4.12): перепишем неравенство (4.8) в виде

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ} &< \left(1 - \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ}} \right)^2 = \\ &= \left(1 - \|G_x\|_{\circ} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\|F_{\bar{\theta}}\|_{\circ}}}{\sqrt{\|G_x\|_{\circ}}} \right\} \right) \left(1 - \|F_{\bar{\theta}}\|_{\circ} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\|F_{\bar{\theta}}\|_{\circ}}}{\sqrt{\|G_x\|_{\circ}}} \right\}^{-1} \right), \end{aligned}$$

где в фигурных скобках стоит L .

- Неравенство (4.13): выводится аналогично.
- Неравенство (4.14): перепишем неравенство (4.9) в виде

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} < 1 - \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_{\circ} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ}} = 1 - \|G_x\|_{\circ} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\|F_{\bar{\theta}}\|_{\circ}}}{\sqrt{\|G_x\|_{\circ}}} \right\}.$$

□

Обозначим через $H(L)$ пространство вектор-функций $x = h(\theta)$, график которых лежит в кольце \mathbb{K} , т.е. справедливо неравенство $\|h\| \leq r_0$, и, кроме того, h удовлетворяет условию Липшица:

$$\|h(\theta + \Delta\theta) - h(\theta)\| \leq L\|\Delta\theta\|. \quad (4.15)$$

Хорошо известно, что $H(L)$ является банаховым (полным метрическим) подпространством в пространстве ограниченных непрерывных функций.

Лемма 5. Пусть неравенства (4.11) и (4.12) выполнены. Тогда отображение T порождает оператор $\mathcal{T} : H(L) \rightarrow H(L)$ (то есть, образ графика функции $x = h(\theta)$ с константой Липшица L при отображении T представляет собой график функции $\bar{x} = \tilde{h}(\bar{\theta})$, которая удовлетворяет условию Липшица с той же константой L).

Доказательство. Пусть $h \in H(L)$. Сначала покажем, что образ $T\{x = h(\theta)\}$ является поверхностью вида $\bar{x} = \tilde{h}(\bar{\theta})$ с некоторой однозначной функцией \tilde{h} . Другими словами, нам нужно показать, что для любого $\bar{\theta}$ существует такое значение \bar{x} (которое и дает $\tilde{h}(\bar{\theta})$), что $(\bar{x}, \bar{\theta}) = T(h(\theta), \theta)$ при некотором значении θ . В силу (4.5), это эквивалентно существованию единственного решения следующего уравнения для θ при любом фиксированном значении $\bar{\theta}$:

$$\theta = G(h(\theta), \bar{\theta}). \quad (4.16)$$

При каждом фиксированном $\bar{\theta}$ это уравнение можно рассматривать как уравнение на неподвижную точку отображения тора в себя:

$$\theta \mapsto G(h(\theta), \bar{\theta}). \quad (4.17)$$

Существование и единственность искомой неподвижной точки будет следовать из принципа Банаха, если мы докажем, что данное отображение является сжатием. Однако это – простое следствие условий

(4.11) и (4.15):

$$\|G(h(\theta_1), \bar{\theta}) - G(h(\theta_2), \bar{\theta})\| \leq \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_o \cdot L \|\theta_1 - \theta_2\| < q \|\theta_1 - \theta_2\|,$$

где $0 < q < 1$ в силу (4.11).

Образ $T\{x = h(\theta)\}$ записывается в виде

$$\bar{x} = F(h(\theta), \bar{\theta}), \quad \theta = G(h(\theta), \bar{\theta}).$$

Возьмем две точки (x_1, θ_1) и (x_2, θ_2) на поверхности h , т.е. $x_i = h(\theta_i)$, $i = 1, 2$. Образы этих точек относительно T – это точки $(\bar{x}_1, \bar{\theta}_1)$ и $(\bar{x}_2, \bar{\theta}_2)$, координаты которых удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= F(h(\theta_1), \bar{\theta}_1), \quad \theta_1 = G(h(\theta_1), \bar{\theta}_1), \\ \bar{x}_2 &= F(h(\theta_2), \bar{\theta}_2), \quad \theta_2 = G(h(\theta_2), \bar{\theta}_2), \end{aligned}$$

из которых получаем следующие неравенства

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| &\leq \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_o \cdot \|h(\theta_1) - h(\theta_2)\| + \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o \cdot \|\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2\| \leq \\ &\leq \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_o \cdot L \cdot \|\theta_1 - \theta_2\| + \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o \cdot \|\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2\|, \\ \|\theta_1 - \theta_2\| &\leq \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_o \cdot \|h(\theta_1) - h(\theta_2)\| + \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o \cdot \|\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2\| \leq \\ &\leq \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_o \cdot L \cdot \|\theta_1 - \theta_2\| + \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o \cdot \|\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2\|. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Последнее неравенство можно переписать в следующем виде

$$\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \frac{\left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o}{1 - \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_o \cdot L} \cdot \|\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2\|.$$

Тогда, подставив это выражение в первое неравенство из (4.18), получим

$$\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \leq L \left\{ \frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_o \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o}{1 - \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_o \cdot L} + \frac{1}{L} \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o \right\} \cdot \|\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2\|.$$

Здесь выражение в фигурных скобках меньше 1 в силу неравенства (4.12). Таким образом, функция $\bar{x} = \tilde{h}(\bar{\theta})$ удовлетворяет условию Липшица с константой L , что и требовалось доказать. \square

Лемма 6. Пусть выполнено неравенство (4.14). Тогда оператор $\mathcal{T} : H(L) \rightarrow H(L)$ является сжимающим.

Доказательство. Рассмотрим поверхности $x = h_1(\theta)$ и $x = h_2(\theta)$, принадлежащие $H(L)$. Их образы относительно T , поверхности $\bar{x} = \bar{h}_1(\bar{\theta})$ и $\bar{x} = \bar{h}_2(\bar{\theta})$ задаются уравнениями

$$\bar{x} = F(h_1(\theta), \bar{\theta}), \quad \theta = G(h_1(\theta), \bar{\theta})$$

и

$$\bar{x} = F(h_2(\theta), \bar{\theta}), \quad \theta = G(h_2(\theta), \bar{\theta}),$$

соответственно.

Определим расстояние между поверхностями h_1 и h_2 как

$$\text{dist} \{h_1, h_2\} = \max_{\theta} \|h_1(\theta) - h_2(\theta)\|.$$

Соответственно,

$$\text{dist} \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\} = \max_{\bar{\theta}} \|\bar{h}_1(\bar{\theta}) - \bar{h}_2(\bar{\theta})\|.$$

Поэтому, чтобы оценить расстояние между \bar{h}_1 и \bar{h}_2 , мы будем полагать в формулах, что $\bar{\theta}$ одно и то же (однако начальные точки θ_1 на кривой h_1 и θ_2 на кривой h_2 могут быть различными). Тогда запишем уравнение поверхностей \bar{h}_1 и \bar{h}_2 в следующем виде

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = F(h_1(\theta_1), \bar{\theta}), \\ \theta_1 = G(h_1(\theta_1), \bar{\theta}), \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}_2 = F(h_2(\theta_2), \bar{\theta}), \\ \theta_2 = G(h_2(\theta_2), \bar{\theta}). \end{cases} \quad (4.19)$$

Используя эти соотношения, получим следующие оценки

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| &= \|F(h_1(\theta_1), \bar{\theta}) - F(h_2(\theta_2), \bar{\theta})\| = \\ &= \|F(h_1(\theta_1), \bar{\theta}) - F(h_1(\theta_2), \bar{\theta}) + F(h_1(\theta_2), \bar{\theta}) - F(h_2(\theta_2), \bar{\theta})\| \leq \\ &\leq \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot L \|\theta_1 - \theta_2\| + \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot \|h_1 - h_2\|, \\ \|\theta_1 - \theta_2\| &= \|G(h_1(\theta_1), \bar{\theta}) - G(h_1(\theta_2), \bar{\theta}) + G(h_1(\theta_2), \bar{\theta}) - G(h_2(\theta_2), \bar{\theta})\| \leq \\ &\leq \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot L \|\theta_1 - \theta_2\| + \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot \|h_1 - h_2\|. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Перепишем второе неравенство в (4.20) как

$$\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \frac{\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ}}{1 - \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot L} \|h_1 - h_2\|$$

и подставим его в первое из (4.20), тогда получим

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| &= \|\bar{h}_1 - \bar{h}_2\| \leq \left(\frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot L}{1 - \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot L} + \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} \right) \cdot \|h_1 - h_2\| = \\ &= \left(\frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ}}{1 - \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} \cdot L} \right) \cdot \|h_1 - h_2\|. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу условия (4.14), оператор $\mathcal{T} : H(L) \rightarrow H(L)$ является сжимающим. \square

Итак, мы доказали существование и единственность инвариантного липшицева многообразия $M^* : \{x = h^*(\theta)\}$. Поскольку неподвижная точка сжимающего оператора (в нашем случае, оператора $\mathcal{T} : H(L) \rightarrow H(L)$) является пределом последовательных приближений, стартующих с произвольных начальных условий, для любой липшицируемой функции h_0 имеем $h^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}^k h_0$ или, что то же самое, образы положительных итераций отображения T любой липшицевой поверхности $\{x = h_0(\theta)\}$ сходятся к инвариантному многообразию M^* . Тем самым доказано утверждение теоремы, что предельное множество итераций всех точек кольца \mathbb{K} лежит в многообразии M^* .

Литература

- [1] Андронов А.А. Математические проблемы теории автоколебаний (доклад на Всесоюзной конференции по колебаниям, 1931).- в кн. «А.А. Андронов Собрание трудов», 1956, Изд-во АН СССР.
- [2] Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // ДАН СССР. - 1937. - Т. 14, No 5.
- [3] Андронов А.А., Леонтович Е.А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра.- Уч. записки Горьк. ун-та, 1937, вып. 5, с. 3-24.
- [4] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний.- М., Наука, 1937.
- [5] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.- М., Наука, 1967.
- [6] Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций. М.: Изд-во «Интеллект», 2009.
- [7] Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.- М., Наука, 1978.
- [8] Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // в кн. Динамические системы - 5, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 5, ВИНТИ, М., 1986, 5-218
- [9] Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца.// ДАН СССР, 1977, т.234(2), 336-339.
- [10] Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О притягивающих негрубых множествах типа аттрактора Лоренца.// Труды ММО, 1982, т.44, с.150-212.
- [11] Афраймович В.С., Шильников Л.П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность.// Межвуз. сб. “Методы КТДУ”, Горький, 1983, 3-26.

- [12] Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ устойчивости.- М.-Л., Гостехиздат, 1949.
- [13] Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П. *К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений* // Нелинейная Динамика, 2012, т.8, №1, 3-28.
- [14] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. О моделях с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // ДАН СССР, 1991, т.320, No.2, с.269-272.
- [15] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. О моделях с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // в кн. “Методы качественной теории и теории бифуркаций”, Н.Новгород, 1991, с. 36-61.
- [16] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса // Proc. of Int. Conf. Dedicated to 90th Anniversary of L.S.Pontryagin (August, 31 - September, 6, 1998, Moscow), v.6 (Dynamical systems) [в кн. “Итоги науки и техники, современная математика и ее приложения; тематические обзоры, т.67, 1999, с.69-128.]
- [17] Жаботинский А. М., Отмер Х. Колебания и бегущие волны в химических системах. – М., Мир, 1988.
- [18] Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения.- М., Мир, 1980.
- [19] Плисс В.А. Принцип сведения в теории устойчивости движения. // Известия АН СССР, серия матем., 1964, т.28, №6.
- [20] Рошин Н.В. Опасные границы устойчивости в модели Лоренца // Прикладная математика и механика, 1978, № 5, 950-952.
- [21] Шильников Л. П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений // ДАН СССР. - 1965. - Т. 160. - №. 3. - С. 558-561.
- [22] Шильников Л.П. Теория бифуркаций и турбулентность - I.// “Межвузовский сб. Методы КТДУ”, Горький, 1986, 150-163.
- [23] Шильников Л.П. Теория бифуркаций и модель Лоренца.// Дополнение I к книге Дж.Марсдена и М.Мак- Кракена “Бифуркация рождения цикла и ее приложения.” М., Мир, 1980, 19с.

- [24] Шильников А.Л. Бифуркации и хаос в системе Мориока-Шимицу // “Межвузовский сб. Методы КТДУ”, Горький, 1986, 180-183.
- [25] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1. Москва - Ижевск, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, ИКИ, 2004, 415 стр.
- [26] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. Москва - Ижевск, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, ИКИ, 2009, 548 стр.
- [27] Шошитайшвили А.Н. О бифуркации топологического типа векторных полей, зависящих от параметра. // Труды семинара им. И.Г. Петровского, 1975, т.1, 279-300.
- [28] A. Arneodo, P. Couillet, C. Tresser. Transition to stochasticity for a class of forced oscillators // *Physics letters A*. 1979. Vol. 72, No. 4-5. – pp. 268-270.
- [29] A. Arneodo, P. Couillet, C. Tresser. Possible New Strange Attractors With Spiral Structure // *Commun. Math. Phys.* 79, 573-579 (1981)
- [30] Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O. and Turaev D. ”Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps”.- *Int. J. Bif. And Chaos*, 2014, **24**(8), 25 pages.
- [31] Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. On models with non-rough Poincare homoclinic curves // *Physica D*, 1993, v.62, Nos.1-4, pp. 1-14
- [32] Hopf T.- *Ber. Mfth.-Phys. Sachsische Academie der Wissenschaften Leipzig* 99 (1942), 1-22.
- [33] Kuznetsov Yu.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 1995, Springer-Verlag.
- [34] Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // *J. of the Atmospheric Sciences*, 1963, 20, 130-141 [Перевод на русский язык: Эдвард Н. Лоренц *Детерминированное непериодическое течение* – в кн. “Странные аттракторы”, М.: Мир, 1981, с. 88-116]
- [35] Ju.I. Neimark (1959) On some cases of periodic motions depending on parameters. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 129, 736-739 [in Russian].
- [36] Peixoto M.M. Structural stability on two-dimensional manifolds // *Topology*, 1962, v.1, 101-120.

- [37] Rulkov N. F. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map //Physical Review E. – 2002. – T. 65. – №. 4. – C. 041922.
- [38] R. Sacker (1964) On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations. Report IMM-NYU 333, New York University.
- [39] Shimizu T., Morioka N. Chaos and limit cycles in the Lorenz model // Physics letters, (1978) Vol. 66A, No. 3, 182-184.
- [40] Shilnikov A.L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu-Morioka model // Physica D 62 (1993), 338–346.

БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА-ХОПФА ДЛЯ ПОТОКОВ И ОТОБРАЖЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Авторы:

Максим Ильич Болотов

Сергей Владимирович Гонченко

Александр Сергеевич Гонченко и др.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.