Министерство образования и науки Российской Федерации

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Т.А. Артамонова
А.Т. Козинова

ОЦЕНКА ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ

Учебное пособие

Рекомендовано методической комиссией финансового факультета
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент»
(бакалавриат)

Нижний Новгород
2014

УДК 336.7
ББК 65.26
А 86

Рецензенты:
д.э.н., профессор, М.Н. Дмитриев
к.ф.-м.н., доцент С.С. Петров

Артамонова Т.А., Козинова А.Т.
А 86 **ОЦЕНКА ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ**: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 84 с.

Учебное пособие предназначено для методической поддержки лекционных и практических занятий по дисциплине «Оценка денежных потоков» для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент» (бакалавриат). В данном издании представлены следующие разделы дисциплины: проценты и процентные ставки, финансовая рента, погашение кредита в рассрочку. По всем темам предлагаются примеры решения типовых задач, задания для самостоятельной работы, вопросы для самоконтроля и подготовки к аттестации.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии финансового факультета ННГУ,
к.э.н., доцент Н.Н. Никулина

Учебное пособие разработано на кафедрах финансового факультета ННГУ: финансы и финансовый менеджмент, заведующий кафедрой – профессор А.С. Кокин; компьютерные информационные системы финансовых расчетов, заведующий кафедрой − профессор В.Н. Ясенев.

ББК 65.26

Введение

Финансовые решения целесообразно принимать на основе количественного анализа финансовых операций, одной из важных частей которого является оценка денежных потоков. Условия финансовых операций включают множество параметров. В ряде случаев связь между этими параметрами может быть описана математическими методами. Математические методы выбора конкретных значений указанных параметров составляют предмет финансовых вычислений, необходимых для выбора рациональных финансовых решений инвестиционных, кредитных и коммерческих проблем.

В данном издании представлены основы финансовых вычислений необходимые для оценки денежных потоков в ходе количественного анализа финансовых операций, а именно, разделы: проценты и процентные ставки, финансовая рента, погашение кредита. В первой главе – проценты и процентные ставки – рассмотрены: основные понятия и определения, оценка параметров операций, с применением фиксированных и плавающих ссудных и учетных процентных ставок (простых, сложных и непрерывных). Во второй главе – финансовая рента – рассмотрены: основные понятия и определения, оценка параметров денежных потоков – постоянных рент постнумерандо и пренумерандо. В третьей главе – погашение кредита в рассрочку – рассмотрены: основные понятия и определения, оценка потоков платежей – планов погашения кредита дифференцированными выплатами и аннуитетными платежами, с учетом наличия или отсутствия льготного периода погашения задолженности в сроке займа.

Особое внимание в данном издании уделено вопросам:

- порядок начисления процентов по операциям, связанным с привлечением и размещением денежных средств банками, согласно положению ЦБ РФ от 26 июня 1998 г. №39-П (в ред. Положения, утв. ЦБ РФ 26.11.2007 N 1931-У);
- расчет эффективной (реальной) годовой процентной ставки по операциям, связанным с привлечением и размещением денежных средств банками;
- эквивалентность процентных ставок, платежей и потоков платежей.

Учебное пособие предназначено для методической поддержки лекционных и практических занятий по дисциплине «Оценка денежных потоков» для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент» (бакалавриат). По всем темам предлагаются примеры решения типовых задач, задания для самостоятельной работы, вопросы для самоконтроля и подготовки к аттестации.

Глава 1. Проценты, процентные ставки

1.1. Основные понятия и определения

Проценты (процентные деньги) – плата банка вкладчику или заемщика кредитору (измеряется в деньгах) за пользование деньгами, взятыми в долг в любой форме (ссуда, депозит, учет векселя, покупка облигации …).

Введем обозначения:

P – текущая, или первоначальная стоимость денег;
I – проценты (процентные деньги), измеряются в деньгах;
$P+I=S$ – наращенная, или конечная стоимость денег;
$i,\ d$ – процентная ставка, показывающая относительную величину дохода за единичный отрезок времени (год, полугодие, квартал, месяц, день), измеряется в процентах (1%=0,01);
t – срок финансовой операции, измеряется в днях;
T – единичный отрезок времени (год, полугодие, квартал, месяц), измеряется в днях;
$n=\dfrac{t}{T}$ – срок финансовой операции, измеряется в единичных периодах (в годах, полугодиях, кварталах, месяцах).

Примечание. Согласно положению ЦБ РФ от 26 июня 1998 г. №39-П «О порядке начисления процентов по операциям, связанным с привлечением и размещением денежных средств банками, и отражения указанных операций по счетам бухгалтерского учета» (в ред. Положения, утв. ЦБ РФ 26.11.2007 N 1931-У) при начислении процентов:

- Банк должен обеспечить программным путем ежедневное начисление процентов по каждому договору нарастающим итогом со дня последнего отражения в бухгалтерском учете банка суммы начисленных процентов (т.е. считают срок с точным количеством дней в году (месяце)).
- Проценты на привлеченные и размещенные денежные средства начисляются банком на остаток задолженности по основному долгу, учитываемой на соответствующем лицевом счете, на начало операционного дня (т.е. не учитывают первый день финансовой операции).
- При закрытии банковских счетов (банковских вкладов) клиентов банков проценты по привлеченным (размещенным) денежным средствам начисляются до дня (даты) фактического закрытия или передачи счета включительно (т.е. учитывают последний день финансовой операции).

В финансовой практике имеют место две операции:

- ***операция наращения первоначальной (современной) стоимости денег***, т.е. определение наращенной (конечной) стоимости денег с помощью известной первоначальной;
- ***операция дисконтирования конечной (будущей) стоимости денег***, т.е. определение первоначальной (современной) стоимости денег с помощью известной наращенной.

При начислении процентов применяются следующие ***виды процентных ставок***:

- ***простая процентная ставка***, если база расчета процентов не меняется на протяжении финансовой операции;
- ***сложная процентная ставка*** в случае, когда база расчета процентов на протяжении финансовой операции последовательно меняется на проценты за предыдущий единичный период времени.

Процентные ставки на протяжении финансовой операции, могут быть и ***фиксированными*** (постоянными)***,*** и ***плавающими*** (меняющимися).

Существуют различные ***способы (принципы) расчета процентов***:

- При расчете процентов в качестве базы, используется первоначальная стоимость денег. При этом процентная ставка называется ***ссудной (декурсивной)***.
- При расчете процентов в качестве базы, используется конечная стоимость денег. При этом процентная ставка называется ***учетной (антисипативной)***.

1.2. Ссудные процентные ставки

При расчете процентов в качестве базы, используется первоначальная стоимость денег. Простая ссудная процентная ставка применяется в расчетах при сроке финансовой операции не большем единичного периода. Сложная ссудная процентная ставка применяется в расчетах при сроке финансовой операции не меньшем единичного периода.

Ссудная фиксированная простая процентная ставка

$n \le 1$ – срок операции, измеряется в единичных периодах;

i_S – простая фиксированная ссудная процентная ставка;

$I = P i_S n$ – простые ссудные проценты;

$S = P + I = P + P i_S n = P(1 + i_S n)$ – наращенная, конечная стоимость денег;

$(1 + i_S n)$ – множитель наращения первоначальной стоимости денег;

$P = S(1 + i_S n)^{-1}$ – текущая, первоначальная стоимость денег;

$(1 + i_S n)^{-1}$ – дисконтный множитель конечной стоимости денег.

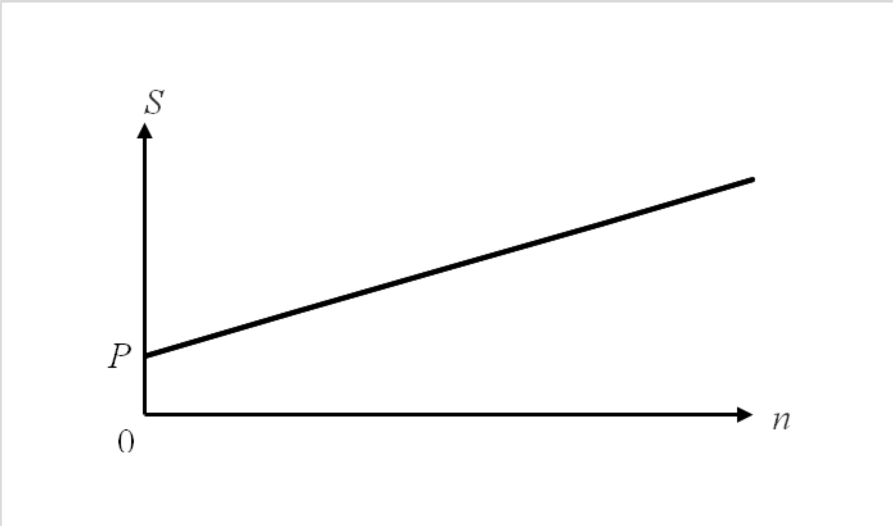

Рис. 1. Зависимость наращенной стоимости денег от срока операции

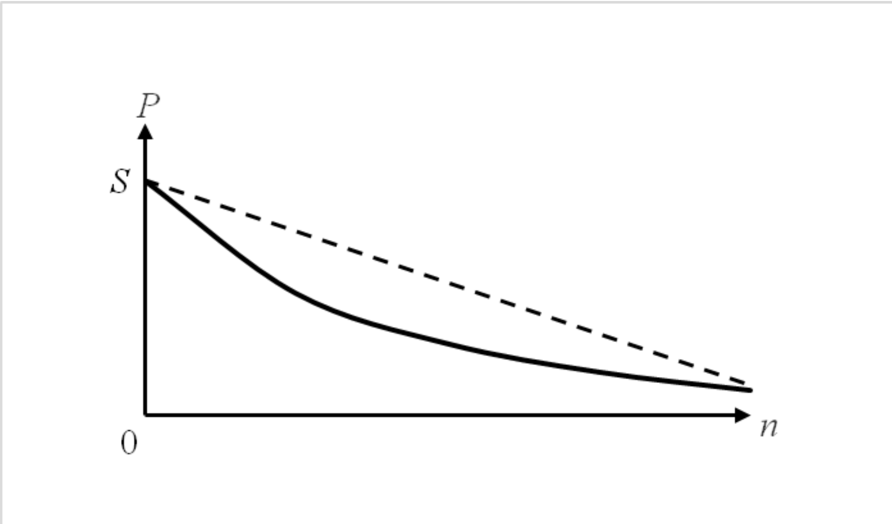

Рис. 2. Зависимость первоначальной стоимости денег от срока операции

Ссудная плавающая простая процентная ставка

$n = \sum_{k=1}^{K} n_k \le 1$ – срок операции в единичных периодах;

i_{sk} – простая плавающая ссудная процентная ставка, соответствующая части срока операции n_k;

$I = \sum_{k=1}^{K} I_k = \sum_{k=1}^{K} P\, i_{sk}\, n_k = P \sum_{k=1}^{K} i_{sk}\, n_k$ – простые ссудные проценты;

$S = P + I = P\left(1 + \sum_{k=1}^{K} i_{sk}\, n_k\right)$ – наращенная, конечная стоимость денег;

$\left(1 + \sum_{k=1}^{K} i_{sk}\, n_k\right)$ – множитель наращения первоначальной стоимости денег;

$$P = S\left(1+\sum_{k=1}^{K} i_{sk}\, n_k\right)^{-1}$$ – текущая, первоначальная стоимость денег;

$$\left(1+\sum_{k=1}^{K} i_{sk}\, n_k\right)^{-1}$$ – дисконтный множитель конечной стоимости денег.

Пример 1. Определить наращенную стоимость денег (накопленную сумму долга) при годовой процентной ставке 24% и первоначальной стоимости денег (первоначальной сумме долга) 20000 руб. за срок (срок займа) не более года. В качестве предполагаемого срока принять 1, 2, 3 и 4 квартала.

Решение. $P = 20000\ руб.;\quad i_s = 24\%;\quad n = \{0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 1\}\,год(а)$

Таблица 1

Анализ операции наращения первоначальной стоимости денег

n (часть года)	P (руб.)	$(1+i_s\, n)$	$S = P + I = P(1+i_s\, n)$ (руб.)
0,25	20000	1,06	21200
0,5	20000	1,12	22400
0,75	20000	1,18	23600
1	20000	1,24	24800

Пример 2. Определить первоначальную стоимость денег (первоначальную сумму долга) при годовой процентной ставке 24% и наращенной стоимости денег (конечной сумме долга) 24800 руб. в операции со сроком (сроком займа) не более года. В качестве предполагаемого срока операции принять 1, 2, 3 и 4 квартала.

Решение. $S = 24800\ руб.;\quad i_s = 24\%;\quad n = \{0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 1\}\,год(а)$

Таблица 2

Анализ операции дисконтирования конечной стоимости денег

n (часть года)	S (руб.)	$(1+i_s\, n)^{-1}$	$P = S(1+i_s\, n)^{-1}$ (руб.)
0,25	24800	0,9433962	23396,23
0,5	24800	0,8928571	22142,86
0,75	24800	0,8474576	21016,95
1	24800	0,8064516	20000,00

Пример 3. Вкладчик открыл счет в банке 20.01.13 и внес на него сумму 65000 руб. Согласно договору между БАНКОМ и ВКЛАДЧИКОМ: неснижаемый остаток суммы вклада составляет 50000 руб., годовая процентная ставка по вкладу 6% и не меняется в течение первого месяца. Ставка процентов по вкладу была снижена банком 11.03.13 и составила 5% годовых. 20.03.13 вкладчик снял со счета сумму 15000 руб. Ставка процентов по вкладу была

снова снижена банком 25.05.13 и составила 4% годовых. ВКЛАДЧИК закрыл счет 30.05.13. Найти полученную сумму.

Решение. Финансовая операция длится менее года. При начислении процентов используется простая плавающая ссудная процентная ставка. В качестве базы расчета процентов по вкладу используется сумма денег, имеющаяся на счете на начало операционного дня. Проценты по вкладу за первый день операции (20.01.13) не начисляются, за последний день (30.05.13) начисляются. В день закрытия счета (до начисления процентов) сумма вклада составляла 50000 руб. ВКЛАДЧИК не нарушил условие по неснижаемому остатку вклада. В табл. 3 приведен анализ операции начисления процентов по вкладу на счете. При начислении процентов с использованием годовой процентной ставки, определяя срок операции в годах, учитывалось точное количество дней (365) в 2013 году.

Таблица 3

Анализ операции начисления процентов по вкладу на счете

Сумма вклада на начало операционного дня (руб.)	Календарный срок	Процентная ставка по вкладу (%)	Количество дней	Проценты (руб.)
$P_1 = 65000$	21.01.13 – 10.03.13	6%	49	523,56
$P_1 = 65000$	11.03.13 – 20.03.13	5%	10	89,04
$P_2 = 50000$	21.03.13 – 24.05.13	5%	65	445,21
$P_2 = 50000$	25.05.13 – 30.05.13	4%	6	32,88
Начисленные проценты по вкладу (с 21.01.13 по 30.05.13)				1090,69
ВКЛАДЧИК, закрывая счет 30.05.13, получил 51090 руб. 69 коп.				

$$I = \sum_{k=1}^{4} I_k = 65000 * 0,06\frac{49}{365} + 65000 * 0,05\frac{10}{365} +$$

$$+ 50000 * 0,05\frac{65}{365} + 50000 * 0,04\frac{6}{365} = 1090,69\ (руб.)$$

$$S = P_2 + I = 50000 + 1090,69 = 51090,69\ (руб.)$$

Примечание. Вкладчик не использовал возможность получения дополнительной суммы процентов. Закрывая счет 20.03.13, он мог получить 65612 руб. 60 коп, оставить себе 15000 руб., открыть новый счет на сумму 50612 руб. 60 коп, и получить 51096 руб. 54 коп, закрывая счет 30.05.13.

$$I = \sum_{k=3}^{4} I_k = 50612,60 * 0,05\frac{65}{365} + 50612,60 * 0,04\frac{6}{365} = 483,94\ (руб.)$$

$$S = P_2 + I = 50612,60 + 483,94 = 51096,54\ (руб.)$$

Ссудная фиксированная сложная процентная ставка

$n > 1$ – срок операции, измеряется в единичных периодах;

i – сложная фиксированная ссудная процентная ставка;

$S = P(1+i)^n$ – наращенная, конечная стоимость денег;

$(1+i)^n$ – множитель наращения первоначальной стоимости денег;

$P = S(1+i)^{-n}$ – текущая, первоначальная стоимость денег;

$(1+i)^{-n}$ – дисконтный множитель конечной стоимости денег.

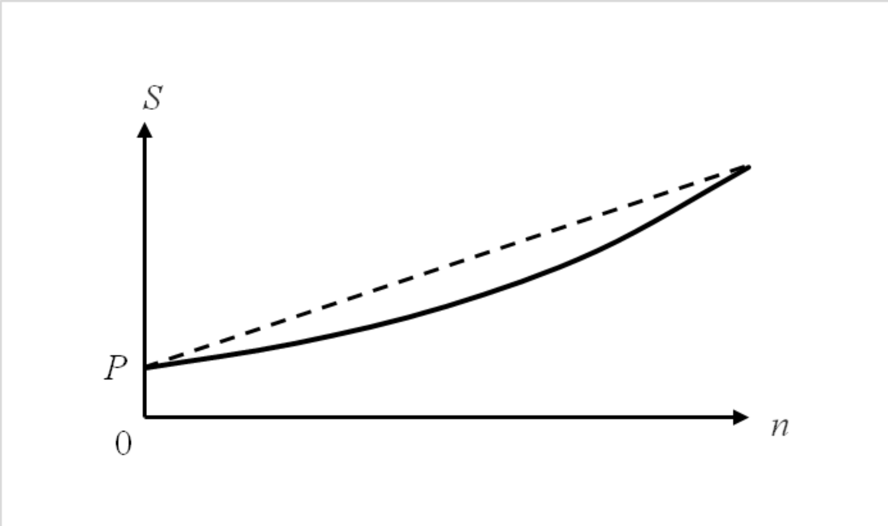

Рис. 3. Зависимость наращенной стоимости денег от срока операции

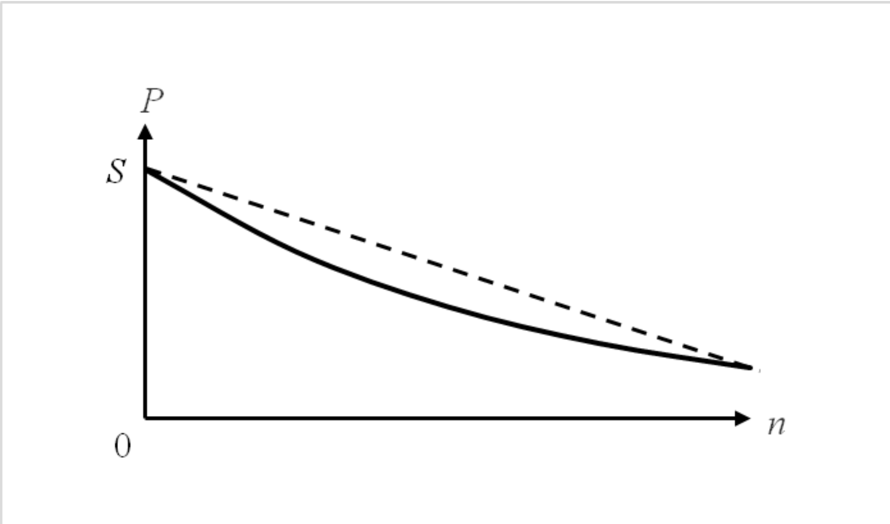

Рис. 4. Зависимость первоначальной стоимости денег от срока операции

Ссудная плавающая сложная процентная ставка

$n = \sum_{k=1}^{K} n_k \; , \forall n_k > 1$ – срок операции, измеряется в единичных периодах;

i_k – сложная плавающая ссудная процентная ставка, соответствующая части срока финансовой операции n_k;

$S = P\prod_{k=1}^{K}(1+i_k)^{n_k}$ – наращенная, конечная стоимость денег;

$\prod_{k=1}^{K}(1+i_k)^{n_k}$ – множитель наращения первоначальной стоимости денег;

$P = S\prod_{k=1}^{K}(1+i_k)^{-n_k}$ – текущая, первоначальная стоимость денег;

$\prod_{k=1}^{K}(1+i_k)^{-n_k}$ – дисконтный множитель конечной стоимости денег.

Ссудная фиксированная номинальная (годовая) процентная ставка

$n\ (лет)$ – срок операции;

j – фиксированная номинальная (годовая) ссудная процентная ставка;

$m = \{12,\ 4,\ 2\}$ – число операций начисления процентов в течение года (ежемесячно, поквартально, по полугодиям);

$\frac{1}{m}\ (года)$ – единичный период (месяц, квартал, полугодие);

$nm > 1$ – срок операции, измеряется в единичных периодах;

$\frac{j}{m}$ – процентная ставка на единичный период;

$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}$ – наращенная, конечная стоимость денег;

$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}$ – множитель наращения первоначальной стоимости денег;

$P = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}$ – текущая, первоначальная стоимость денег;

$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}$ – дисконтный множитель конечной стоимости денег;

$i_{эф} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1$ – эффективная процентная ставка, измеряющая реальный относительный доход за год.

Ссудная плавающая номинальная (годовая) процентная ставка

$n = \sum_{k=1}^{K} n_k\ (лет)$ – срок операции.

Для соответствующей части срока операции n_k:

j_k – номинальная (годовая) ссудная процентная ставка;

$m_k = \{12,\ 4,\ 2\}$ – число операций начисления процентов в течение года (ежемесячно, поквартально, по полугодиям);

$\frac{1}{m_k}\ (года)$ – единичный период (месяц, квартал, полугодие);

$n_k\ m_k > 1$ – срок операции, измеряется в единичных периодах;

$\frac{j_k}{m_k}$ – процентная ставка на единичный период;

$i_{эф_k} = \left(1 + \frac{j_k}{m_k}\right)^{m_k} - 1$ – эффективная процентная ставка наращения.

$S = P\prod_{k=1}^{K}\left(1 + \frac{j_k}{m_k}\right)^{m_k\ n_k}$ – наращенная, конечная стоимость денег;

$\prod_{k=1}^{K}\left(1 + \frac{j_k}{m_k}\right)^{m_k\ n_k}$ – множитель наращения современной стоимости денег;

$P = S\prod_{k=1}^{K}\left(1 + \frac{j_k}{m_k}\right)^{-m_k\ n_k}$ – современная стоимость денег;

$\prod_{k=1}^{K}\left(1 + \frac{j_k}{m_k}\right)^{-m_k\ n_k}$ – дисконтный множитель будущей стоимости денег.

Пример 4. Определить наращенную стоимость денег (накопленную сумму долга) при ежемесячной ставке процентов 2% и первоначальной стоимости денег (первоначальной сумме долга) 20000 руб. В качестве предполагаемого срока принять 1, 2, 3 и 4 квартала.

Решение. $P = 20000\ руб.;\quad i = 2\%;\quad n = \{3;\ 6;\ 9;\ 12\}\ месяца(ев)$

Таблица 4

Анализ операции наращения первоначальной стоимости денег

n (мес.)	P (руб.)	$(1+i)^n$	$S = P(1+i)^n$ (руб.)
3	20000	1,0612080	21224,16
6	20000	1,1261624	22523,25
9	20000	1,1950926	23901,85
12	20000	1,2682418	25364,84

Примечание. Ежемесячная ставка 2% соответствует номинальной (годовой) процентной ставке 24%. Расчет наращенной суммы можно выполнить, используя формулы с номинальной процентной ставкой:

$$j = 24\%,\ m = 12,\ \frac{j}{m} = 2\%;\quad n = \{0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 1\}\,год(а)$$

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} = 20000\left(1 + \frac{0{,}24}{12}\right)^{12\cdot n}$$

Пример 5. Определить первоначальную стоимость денег (первоначальную сумму долга) при ежемесячной процентной ставке 2% и наращенной стоимости денег (конечной сумме долга) 25364,84 руб. В качестве предполагаемого срока операции принять 1, 2, 3 и 4 квартала.

Решение. $S = 25364{,}84\ руб.;\quad i = 2\%;\quad n = \{3;\ 6;\ 9;\ 12\}\,месяца(ев)$

Таблица 5

Анализ операции дисконтирования конечной стоимости денег

n (мес.)	S (руб.)	$(1+i)^{-n}$	$P = S(1+i)^{-n}$ (руб.)
3	25364,84	0,9423223	23901,85
6	25364,84	0,8879714	22523,25
9	25364,84	0,8367553	21224,16
12	25364,84	0,7884932	20000,00

Примечание. Ежемесячная ставка 2% соответствует номинальной (годовой) процентной ставке 24%. Расчет первоначальной суммы можно выполнить, используя формулы с номинальной процентной ставкой:

$$j = 24\%,\ m = 12,\ \frac{j}{m} = 2\%;\quad n = \{0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 1\}\,год(а)$$

$$P = S\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn} = 25364{,}84\left(1 + \frac{0{,}24}{12}\right)^{-12\cdot n}$$

Пример 6. Определить накопленную сумму долга через год, если первоначальная сумма долга составляет 20000 руб. и задолженность ежемесячно увеличивается на проценты, начисленные согласно ежемесячной плавающей процентной ставке. В первом квартале предполагаемого срока займа ежемесячная процентная ставка составляет 2%, а затем она поквартально увеличивается на 0,5%.

Решение. Рассчитать накопленную сумму долга можно, используя формулы со сложной ссудной плавающей процентной ставкой: а) ежемесячной, б) номинальной (годовой).

а) $n = \sum_{k=1}^{4} n_k = 12\ месяцев,\ n_k = 3\,месяца$

$$i_k = (2 + 0{,}5(k-1))\%,\ k = \overline{1{,}4}$$

$$S = P\prod_{k=1}^{4}(1+i_k)^{n_k}$$ – накопленная сумма долга.

б) $n = \sum_{k=1}^{4} n_k = 1\, год,\ n_k = 0{,}25\, года$

$$\frac{j_k}{m_k} = \left(2 + 0{,}5(k-1)\right)\%,\ m_k = 12,\ \forall k = \overline{1{,}4}$$

$$S = P\prod_{k=1}^{K}\left(1+\frac{j_k}{m_k}\right)^{m_k n_k}$$ – накопленная сумма долга.

Примечание. Оба варианта формул приводят к одному результату:

$$\prod_{k=1}^{K}(1+i_k)^{n_k} = \prod_{k=1}^{K}\left(1+\frac{j_k}{m_k}\right)^{m_k n_k} =$$

$$= (1+0{,}02)^3(1+0{,}025)^3(1+0{,}03)^3(1+0{,}035)^3 \approx 1{,}384538$$

Первоначальная сумма долга $P = 20000\ руб.$

Накопленная сумма долга составит $S \approx 27690{,}76\ руб.$

Смешанный способ расчета ссудных процентов применяется при сроке финансовой операции, более единичного периода, с нецелым количеством единичных периодов. Он состоит в использовании процентной ставки, как сложной на части срока с целым количеством единичных периодов, и, как простой на части срока с нецелым количеством единичных периодов.

1. $n = a + b > 1$ – срок операции (нецелое количество единичных периодов);
   i – сложная ссудная процентная ставка на единичный период;
   $a = [n]$ – целое количество единичных периодов;
   $b = n - [n] < 1$ – нецелое количество единичных периодов;
   $S = P(1+i)^a(1+bi)$ – конечная стоимость денег;
   $(1+i)^a(1+bi)$ – множитель наращения;
   $P = S(1+i)^{-a}(1+bi)^{-1}$ – первоначальная стоимость денег;
   $(1+i)^{-a}(1+bi)^{-1}$ – дисконтный множитель.
2. $n\ (лет)$ – срок операции;
   m – число операций начисления процентов в течение года;
   $nm = a + b > 1$ – нецелое количество единичных периодов;
   $\frac{j}{m}$ – процентная ставка на единичный период;
   j – номинальная (годовая) ссудная процентная ставка;
   $a = [nm]$ – целое количество единичных периодов;

$b = nm - [nm] < 1$ – нецелое количество единичных периодов;

$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{a}\left(1+b\frac{j}{m}\right)$ – конечная стоимость денег;

$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{a}\left(1+b\frac{j}{m}\right)$ – множитель наращения;

$P = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-a}\left(1+b\frac{j}{m}\right)^{-1}$ – первоначальная стоимость денег;

$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-a}\left(1+b\frac{j}{m}\right)^{-1}$ – дисконтный множитель.

Примечание. Банки предлагают вкладчикам на части срока меньшем единичного периода более низкую ставку процентов, чем на части срока с целым количеством единичных периодов.

Пример 7. ВКЛАДЧИК 15.01.13 открыл счет в БАНКЕ и внес на него денежные средства в сумме 100000 руб. Согласно договору между БАНКОМ и ВКЛАДЧИКОМ:

1. Вклад вносится на срок с 15.01.13 по 15.07.13.
2. Годовая процентная ставка по вкладу 6% не меняется в течение срока, указанного в п.1. БАНК начисляет проценты по сумме вклада ежемесячно и присоединяет их к сумме вклада.
3. Если вкладчик не предъявит требование о возврате суммы вклада вместе с причитающимися процентами в день окончания срока, и БАНКОМ не принято решение о прекращении открытия счетов по данному виду вклада, то договор считается пролонгированным на тот же срок. Течение очередного срока начинается со дня, следующего за днем окончания предыдущего срока.
4. В случае востребования ВКЛАДЧИКОМ суммы вклада до дня окончания основного (пролонгированного) срока договора, исчисление дохода (процентов) за неполный срок производится исходя из процентной ставки по вкладам до востребования.

ВКЛАДЧИК предъявил требование о возврате суммы вклада вместе с причитающимися процентами 26.07.13. Рассчитать сумму полученную ВКЛАДЧИКОМ 26.07.13, учитывая то, что БАНКОМ не принималось решение о прекращении открытия счетов по данному виду вклада, и процентная ставка по вкладам до востребования 0,01% годовых.

Решение. БАНКОМ не принималось решение о прекращении открытия счетов по данному виду вклада, и договор считался пролонгированным на тот же срок с 16.07.13 по 16.01.14. ВКЛАДЧИК востребовал сумму вклада до дня окончания пролонгированного срока договора. Исчисление дохода за полный (основной) срок (с 15.01.13 по 15.07.13) производится исходя из процентной ставки 6% годовых с ежемесячным начислением и присоединением процентов к сумме вклада. Исчисление дохода за неполный (пролонгированный) срок (с 16.07.13 по 26.07.13) производится исходя из годовой процентной ставки 0,01%.

$P = 100000\ руб.$

$mn = a + b$

$a = [m\,n] = 6$ (месяцев) – основной срок (с 15.01.13 по 15.07.13).

$j = 6\%;\ m = 12;\ \dfrac{j}{m} = 0{,}5\%$ – ежемесячная процентная ставка по вкладу в течение основного срока.

$b = \dfrac{11}{365}$ (года) – часть пролонгированного срока (с 16.07.13 по 26.07.13).

$i = 0{,}01\%$ – годовая процентная ставка по вкладам до востребования.

Согласно смешанному способу расчета ссудных процентов, ВКЛАДЧИК, закрывая счет 26.07.2013, получил сумму:

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{a}(1+bi)$$

$$S = 100000\,(1+0{,}005)^{6}\left(1+\frac{11}{365}0{,}0001\right) \approx 103038{,}06\ руб.$$

Примечание. Если при ежемесячном начислении процентов по номинальной (годовой) процентной ставке 6% использовалось точное количество дней в каждом месяце, то ВКЛАДЧИК 26.07.13, получил сумму:

$$S = P\prod_{k=1}^{a}(1+j\,n_k)(1+bi)$$

$$S = 100000\left(1+0{,}06\frac{31}{365}\right)\left(1+0{,}06\frac{28}{365}\right)\left(1+0{,}06\frac{31}{365}\right)\left(1+0{,}06\frac{30}{365}\right)\times$$

$$\times\left(1+0{,}06\frac{31}{365}\right)\left(1+0{,}06\frac{30}{365}\right)\left(1+\frac{11}{365}0{,}0001\right) \approx 103012{,}77\ руб.$$

Ссудная фиксированная непрерывная (годовая) процентная ставка

$n\ (лет)$ – срок операции;

δ – фиксированная непрерывная (годовая) ссудная процентная ставка;

$m \to \infty$ – база расчета процентов меняется практически непрерывно;

$$S = \lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{\delta}{m}\right)^{\frac{m}{\delta}\delta n} = Pe^{\delta n}$$ –конечная (будущая) стоимость денег;

$e^{\delta n}$ – множитель наращения;

$P = S\,e^{-\delta n}$ –первоначальная (современная) стоимость денег;

$e^{-\delta n}$ – дисконтный множитель;

$i_{эф} = e^{\delta} - 1$ – эффективная процентная ставка наращения, измеряющая реальный относительный доход за год.

Ссудная плавающая непрерывная (годовая) процентная ставка

$n = \sum_{k=1}^{K} n_k \left(лет\right)$ – срок операции.

Для соответствующей части срока операции n_k:

δ_k – непрерывная (годовая) ссудная процентная ставка;

$m_k \to \infty$ – число операций начисления процентов в течение года.

$S = Pe^{\sum_{k=1}^{K} \delta_k n_k}$ – конечная (будущая) стоимость денег;

$e^{\sum_{k=1}^{K} \delta_k n_k}$ – множитель наращения;

$P = Se^{-\sum_{k=1}^{K} \delta_k n_k}$ – первоначальная (современная) стоимость денег;

$e^{-\sum_{k=1}^{K} \delta_k n_k}$ – дисконтный множитель.

Пример 8. Определить накопленную сумму долга через год, если первоначальная сумма долга составляет 20000 руб., если: а) задолженность ежедневно увеличивается на проценты, начисленные по номинальной годовой процентной ставке 12%; б) задолженность непрерывно увеличивается на проценты, начисленные по непрерывной годовой процентной ставке 12%. Найти эффективные ставки процентов.

Решение. $P = 20000\left(руб.\right); \quad n = 1\left(год\right)$

а) Задолженность ежедневно увеличивается на проценты, начисленные по номинальной годовой процентной ставке.

$$j = 12\%; \; m = 365; \; \frac{j}{m} \approx 0{,}03288\%$$

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} \approx 22549{,}49\, руб.; \qquad i_{эф} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1 \approx 12{,}7475\%$$

б) Задолженность непрерывно увеличивается на проценты, начисленные по непрерывной годовой процентной ставке $\delta = 12\%$.

$$S = Pe^{\delta n} \approx 22549{,}94\, руб.; \qquad i_{эф} = e^{\delta} - 1 \approx 12{,}7497\%$$

Результаты увеличения задолженности в вариантах (а) и (б) отличаются незначительно (на 45 коп), на 0,0022% от первоначальной суммы долга.

Пример 9. Определить накопленную сумму долга через год, если первоначальная сумма долга 01.01.13 составляет 20000 руб., если: а) задолженность ежедневно увеличивается на проценты, начисленные по плавающей номинальной годовой процентной ставке, равной в первом квартале 6%, во втором − 9%, в третьем − 12%, в четвертом − 15%; б) задолженность непрерывно увеличивается на проценты, начисленные по плавающей непрерывной годовой процентной ставке, равной в первом квартале 6%, во втором − 9%, в третьем − 12%, в четвертом − 15%.

Решение. $P = 20000\ руб.$

$$T = \sum_{k=1}^{4} t_k = 90 + 91 + 92 + 92 = 365\,(дней\,в\,году)$$

$$n = \sum_{k=1}^{4} n_k = \frac{90}{365} + \frac{91}{365} + \frac{92}{365} + \frac{92}{365} = 1(год)$$

а) Задолженность ежедневно увеличивается на проценты, начисленные по плавающей номинальной годовой процентной ставке.

$j_1 = 6\%;\quad j_2 = 9\%;\quad j_3 = 12\%;\quad j_4 = 15\%$

$$S = P\prod_{k=1}^{K}\left(1 + \frac{j_k}{m_k}\right)^{m_k n_k}$$

$$S = 20000\left(1 + \frac{0{,}06}{365}\right)^{90}\left(1 + \frac{0{,}09}{365}\right)^{91}\left(1 + \frac{0{,}12}{365}\right)^{92}\left(1 + \frac{0{,}15}{365}\right)^{92} \approx 22220{,}23\,руб.$$

б) Задолженность непрерывно увеличивается на проценты, начисленные по плавающей непрерывной годовой процентной ставке.

$\delta_1 = 6\%;\quad \delta_2 = 9\%;\quad \delta_3 = 12\%;\quad \delta_4 = 15\%$

$$S = Pe^{\sum_{k=1}^{K}\delta_k n_k}$$

$$S = 20000\,e^{\left(0{,}06\frac{90}{365} + 0{,}09\frac{91}{365} + 0{,}12\frac{92}{365} + 0{,}15\frac{92}{365}\right)} \approx 22220{,}60\,руб.$$

Результаты увеличения задолженности в вариантах (а) и (б) отличаются незначительно (на 37 коп), на 0,0019% от первоначальной суммы долга.

Определение сроков операций со ссудными процентными ставками

Известны параметры операций: первоначальная стоимость денег, конечная стоимость денег, единичный период начисления процентов, процентная ставка. Для выбора формулы расчета срока операции (табл. 6) необходим предварительный анализ срока операции, будет ли он менее или более единичного периода. Чтобы ответить на этот вопрос достаточно сравнить фактические проценты с процентами за единичный период. Если рассчитанный срок операции включает нецелое количество единичных периодов, то потребуется смешанный способ начисления процентов и корректировка первоначальной или конечной стоимости денег (долга).

Таблица 6

Расчет срока финансовой операции с использованием ссудных процентных ставок

Вид ссудной процентной ставки	Простая (i_S)	Сложная (i)	Номинальная (j,m)	Непрерывная (δ)
Срок операции (число единичных периодов)	$n=\dfrac{\frac{S}{P}-1}{i_S}$	$n=\dfrac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\ln(1+i)}$	$nm=\dfrac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$	$n=\dfrac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\delta}$

Пример 10. Определить время, в течение которого задолженность (имевшаяся у заемщика на 01.01.13) из 20000 руб. увеличится и составит 22000 руб. Для расчета процентов по задолженности используются ссудные процентные ставки: а) годовая 12%; б) номинальная (годовая) 12%, с начислением процентов ежемесячно; в) непрерывная (годовая) 12%. При необходимости выполнить корректировку конечной суммы долга так, чтобы срок финансовой операции был с целым количеством дней.

Решение. Первоначальная задолженность на 01.01.13 $P=20000\,руб.$ Конечная задолженность $S=22000\,руб.$

а) Задолженность увеличивается на проценты, начисленные по годовой процентной ставке $(i=12\%)$.

$Pi=2400\;руб.>(S-P)=2000\,руб.$

Срок операции менее года. Ставка процентов применяется, как простая процентная ставка. Расчет срока операции и конечной задолженности:

$$t=n\cdot 365=\frac{\frac{S}{P}-1}{i_S}\cdot 365;\quad t=\frac{\frac{22000}{20000}-1}{0{,}12}\cdot 365\approx 304{,}17\,(дней)$$

Срок финансовой операции $t=\begin{Bmatrix}304\\305\end{Bmatrix}$ дней.

$$S=P(1+i_S n_S)=P\left(1+i_S\frac{t}{365}\right)$$

Корректировка конечной задолженности:

$$S=20000\cdot\begin{cases}\left(1+0{,}12\dfrac{304}{365}\right)\approx 21998{,}90\,руб.\\[2mm]\left(1+0{,}12\dfrac{305}{365}\right)\approx 22005{,}48\,руб.\end{cases}$$

б) Задолженность увеличивается ежемесячно на проценты, начисленные по номинальной (годовой) процентной ставке $\left(j = 12\%,\ m = 12,\ \dfrac{j}{m} = 1\% \right)$.

$$P\frac{j}{m} = 200\ руб. < (S - P) = 2000\ руб.$$

Срок финансовой операции более месяца. Ежемесячная ставка процентов применяется, как сложная процентная ставка. Расчет срока операции и будущей задолженности:

$$nm = \frac{\ln\left(\dfrac{S}{P}\right)}{\ln\left(1 + \dfrac{j}{m}\right)}; \quad n \cdot 12 = \frac{\ln\left(\dfrac{22000}{20000}\right)}{\ln(1 + 0{,}01)} \approx 9{,}58\,(месяцев)$$

$$9\,(месяцев) = 273\,(дня)$$

$$291\ (день) < t = n365 \approx 291{,}35 < 292\ (дня) = 9\,(месяцев) + 19\,(дней)$$

Срок операции $t = \begin{Bmatrix} 291 \\ 292 \end{Bmatrix}$ дней.

Корректировка конечной задолженности:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^a \left(1 + \frac{j}{m}b\right); \ a = [mn] = 9; \ b = mn - a$$

$$S = 20000 \cdot \begin{cases} (1 + 0{,}01)^9 \left(1 + 0{,}01\dfrac{18}{31}\right) \approx 22000{,}71\,руб. \\ (1 + 0{,}01)^9 \left(1 + 0{,}01\dfrac{19}{31}\right) \approx 22007{,}77\ руб. \end{cases}$$

Примечание. При использовании реального количества дней в году и в каждом месяце расчет конечной задолженности выполняется следующим образом:

$$S = 20000\left(1 + \frac{0{,}12}{365}31\right)\left(1 + \frac{0{,}12}{365}28\right)\left(1 + \frac{0{,}12}{365}31\right)\left(1 + \frac{0{,}12}{365}30\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{0{,}12}{365}31\right)\left(1 + \frac{0{,}12}{365}30\right)\left(1 + \frac{0{,}12}{365}31\right)\left(1 + \frac{0{,}12}{365}31\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{0{,}12}{365}30\right) \begin{cases} \left(1 + \dfrac{0{,}12}{365}18\right) \approx 21997{,}77\ руб. \\ \left(1 + \dfrac{0{,}12}{365}19\right) \approx 22004{,}96\,руб. \end{cases}$$

в) Задолженность непрерывно увеличивается на проценты, начисленные по непрерывной годовой процентной ставке $(\delta = 12\%)$.

Расчет срока операции и корректировка будущей задолженности выполняются следующим образом:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\delta}; \quad n = \frac{\ln\left(\frac{22000}{20000}\right)}{0{,}12} \approx 0{,}79425\,(\textit{года})$$

$$t = n \cdot 365 \approx 289{,}90\,(\textit{дней})$$

Срок операции $t = \begin{Bmatrix} 289 \\ 290 \end{Bmatrix}$ дней.

Корректировка конечной задолженности:

$$S = P e^{\delta n} = P e^{\delta \frac{t}{365}}$$

$$S = 20000 \cdot \begin{cases} e^{0{,}12\frac{289}{365}} \approx 21993{,}48\,\textit{руб.} \\ e^{0{,}12\frac{290}{365}} \approx 22000{,}71\,\textit{руб.} \end{cases}$$

1.3. Учетные процентные ставки

База расчета процентов – конечная стоимость денег. Простая учетная процентная ставка применяется в расчетах дисконта при сроке операции не большем единичного периода. Сложная учетная процентная ставка применяется в расчетах дисконта при сроке операции не меньшем единичного периода.

Учетная фиксированная простая процентная ставка

$n \le 1$ – срок финансовой операции в единичных периодах, от момента учета долгового обязательства (векселя) с номиналом S, по меньшей цене P, т.е. со скидкой (дисконтом) I, до момента погашения задолженности (срок погашения векселя);

d_S – простая фиксированная учетная процентная ставка;

$I = S\,d_S\,n$ – скидка (дисконт) с конечной стоимости денег (долга);

$P = S - I = S - S\,d_S\,n = S(1 - d_S\,n)$ – первоначальная стоимость денег (ссуда, предоставляемая кредитором заемщику при учете векселя);

$(1 - d_S\,n)$ –дисконтный множитель;

$S = P(1 - d_S\,n)^{-1}$ – конечная стоимость денег (номинал векселя);

$(1 - d_S\,n)^{-1}$ – множитель наращения.

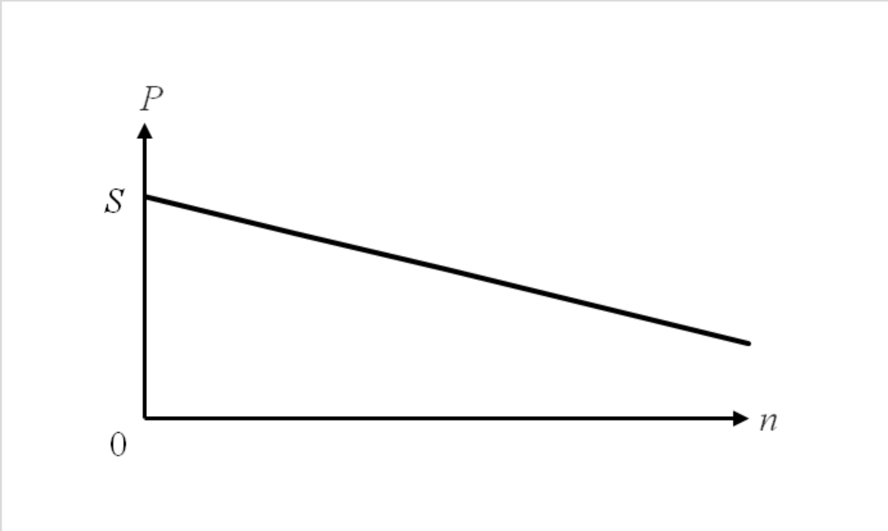

Рис. 5. Зависимость ссуды от срока погашения векселя

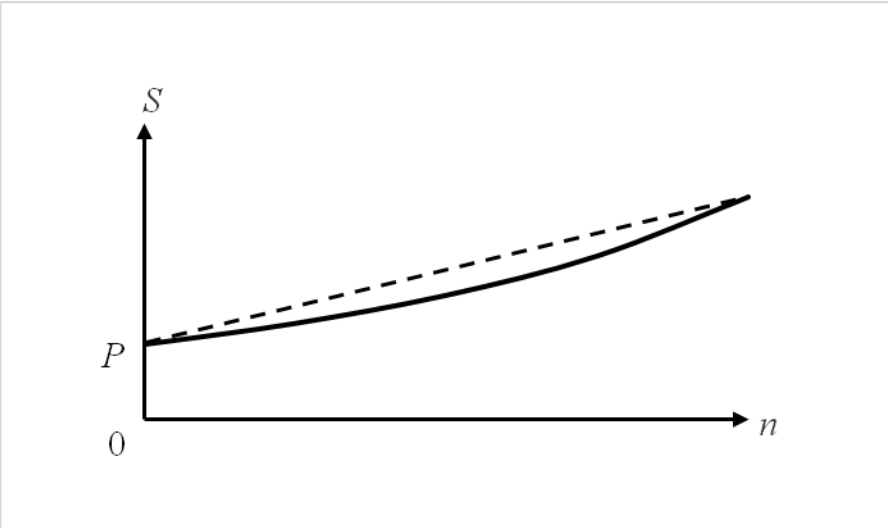

Рис. 6. Зависимость номинала векселя от срока его погашения

Учетная плавающая простая процентная ставка

$n = \sum_{k=1}^{K} n_k \le 1$ – срок операции, измеряется в единичных периодах;

d_{sk} – учетная процентная ставка, соответствующая части срока n_k;

$I = \sum_{k=1}^{K} I_k = \sum_{k=1}^{K} S\, d_{sk}\, n_k = S \sum_{k=1}^{K} d_{sk}\, n_k$ – скидка (дисконт);

$P = S - I = S\left(1 - \sum_{k=1}^{K} d_{sk}\, n_k\right)$ – первоначальная стоимость денег;

$\left(1 - \sum_{k=1}^{K} d_{sk}\, n_k\right)$ – дисконтный множитель;

$$S = P\left(1 - \sum_{k=1}^{K} d_{sk}\, n_k\right)^{-1}$$ – конечная стоимость денег;

$$\left(1 - \sum_{k=1}^{K} d_{sk}\, n_k\right)^{-1}$$ – множитель наращения.

Пример 11. Определить ссуду, которая может быть предоставлена кредитором заемщику при учете векселя с номиналом 26315,79 руб. по годовой учетной процентной ставке 24%. В качестве срока погашения векселя рассмотреть: 1, 2, 3 и 4 квартала.

Решение. $S = 26315{,}79\, руб.;\ d_s = 24\%;\quad n = \{0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 1\}\, год(а)$

Таблица 7

Анализ операции расчета ссуды, предоставляемой при учете векселя

n (часть года)	S (руб.)	$(1 - d_s\, n)$	$P = S - I = S(1 - d_s\, n)$ (руб.)
0,25	26315,79	0,940	24736,84
0,5	26315,79	0,880	23157,9
0,75	26315,79	0,820	21578,95
1	26315,79	0,760	20000

Пример 12. Определить номинал векселя, если при его учете по годовой учетной процентной ставке 24% кредитор предоставил заемщику ссуду 20000 руб. В качестве срока погашения векселя рассмотреть: 1, 2, 3 и 4 квартала.

Решение. $P = 20000\, руб.;\ d_s = 24\%;\quad n = \{0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 1\}\, год(а)$

Таблица 8

Анализ операции расчета номинала векселя, при предоставлении ссуды

n (часть года)	P (руб.)	$(1 - d_s\, n)^{-1}$	$S = P(1 - d_s\, n)^{-1}$ (руб.)
0,25	20000	1,0638298	21276,60
0,5	20000	1,1363636	22727,27
0,75	20000	1,2195122	24390,24
1	20000	1,3157895	26315,79

Пример 13. Определить номинал векселя, если при его учете по плавающей годовой учетной процентной ставке, равной 18% в первом квартале и далее увеличивающейся поквартально на 2%, кредитор предоставил заемщику ссуду 20000 руб. со сроком погашения один год.

Решение. $P = 20000\, руб.;\quad n = \sum_{k=1}^{4} n_k = 1;\ n_k = 0{,}25,\ \ \forall k = \overline{1{,}4}$

$d_{s1} = 18\%;\ d_{s2} = 20\%;\ d_{s3} = 22\%;\ d_{s4} = 24\%$

Расчет номинала векселя по плавающей годовой учетной ставке:

$$S = P\left(1 - \sum_{k=1}^{K} d_{sk}\, n_k\right)^{-1}$$

$$S = 20000\left(1 - (0{,}18 + 0{,}20 + 0{,}22 + 0{,}24)\cdot 0{,}25\right)^{-1} \approx 25316{,}46\ \textit{руб.}$$

Учетная фиксированная сложная процентная ставка

$n > 1$ – срок операции в единичных периодах (срок погашения векселя);

d – сложная фиксированная учетная ставка процентов;

$P = S(1-d)^n$ – первоначальная стоимость (ссуда);

$(1-d)^n$ – дисконтный множитель;

$S = P(1-d)^{-n}$ – конечная стоимость денег (номинал векселя);

$(1-d)^{-n}$ – множитель наращения.

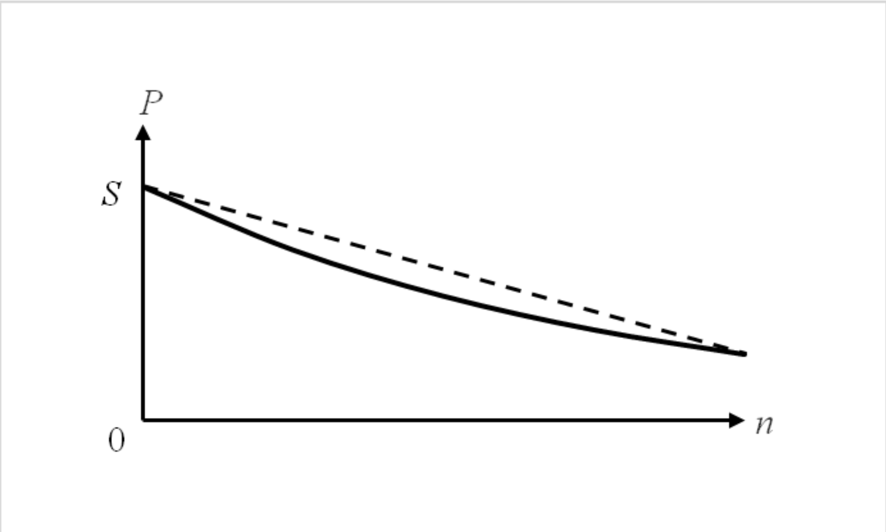

Рис. 7. Зависимость ссуды от срока погашения векселя

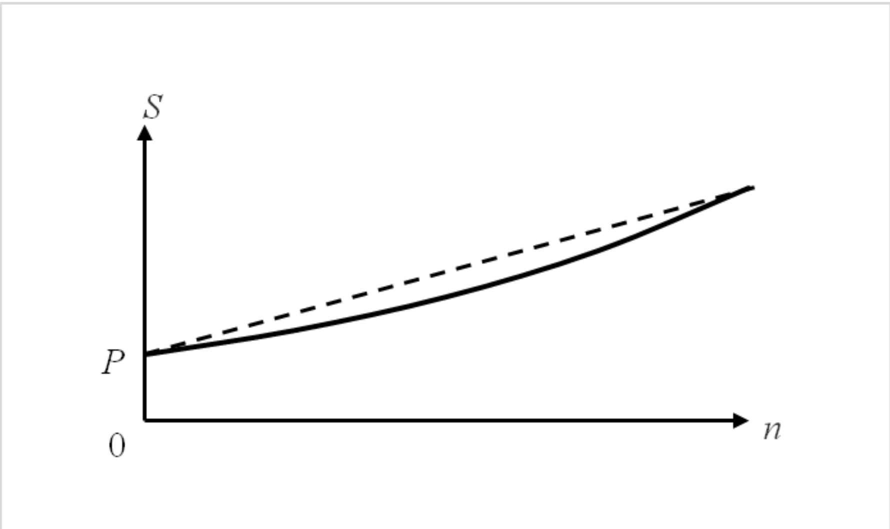

Рис. 8. Зависимость номинала векселя от срока его погашения

Учетная плавающая сложная процентная ставка

$n = \sum_{k=1}^{K} n_k \;, \forall n_k > 1$ – срок операции в единичных периодах;

d_k – ставка процентов, соответствующая части срока операции n_k;

$P = S \prod_{k=1}^{K} (1 - d_k)^{n_k}$ – первоначальная стоимость денег;

$\prod_{k=1}^{K} (1 - d_k)^{n_k}$ – дисконтный множитель;

$S = P \prod_{k=1}^{K} (1 - d_k)^{-n_k}$ – конечная стоимость денег;

$\prod_{k=1}^{K} (1 - d_k)^{-n_k}$ – множитель наращения.

Учетная фиксированная номинальная (годовая) процентная ставка

$n\ (\text{лет})$ – срок операции (срок погашения векселя);

f – фиксированная номинальная (годовая) учетная процентная ставка;

$m = \{12,\ 4,\ 2\}$ – число операций дисконтирования в течение года;

$\frac{1}{m}\ (\text{года})$ – единичный период (месяц, квартал, полугодие);

$nm > 1$ – срок операции в единичных периодах;

$\frac{f}{m}$ – ставка процентов на единичный период;

$P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}$ – первоначальная стоимость денег (ссуда);

$\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}$ –дисконтный множитель;

$S = P\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{-mn}$ – конечная стоимость денег (номинал векселя);

$\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{-mn}$ – множитель наращения;

$d_{эф} = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m}$ – эффективная (реальная) учетная ставка, измеряющая реальную процентную скидку за год.

Учетная плавающая номинальная (годовая) процентная ставка

$n = \sum_{k=1}^{K} n_k \left(лет\right)$ – срок операции.

Для соответствующей части срока операции n_k :

f_k – номинальная (годовая) учетная ставка процентов;

$m_k = \{12,\ 4,\ 2\}$ – число операций дисконтирования в течение года;

$\frac{1}{m_k}\left(года\right)$ – единичный период (месяц, квартал, полугодие);

$n_k\, m_k > 1$ – срок части операции в единичных периодах;

$\frac{f_k}{m_k}$ – ставка процентов на единичный период.

$P = S\prod_{k=1}^{K}\left(1-\frac{f_k}{m_k}\right)^{m_k\, n_k}$ – современная стоимость денег;

$\prod_{k=1}^{K}\left(1-\frac{f_k}{m_k}\right)^{m_k\, n_k}$ – дисконтный множитель;

$S = P\prod_{k=1}^{K}\left(1-\frac{f_k}{m_k}\right)^{-m_k\, n_k}$ – конечная стоимость денег;

$\prod_{k=1}^{K}\left(1-\frac{f_k}{m_k}\right)^{-m_k\, n_k}$ – множитель наращения.

Пример 14. Определить ссуду, которая может быть предоставлена кредитором заемщику при учете векселя с номиналом 26315,79 руб. с ежемесячным дисконтированием по учетной процентной ставке 2%. В качестве срока погашения векселя рассмотреть: 1, 2, 3 и 4 квартала.

Решение. $S = 26315{,}79\ руб.;\ d = 2\%;\ n = \{3;\ 6;\ 9;\ 12\}\ месяцев$

Ссуда, предоставляемая заемщику кредитором $P = S\left(1-d\right)^n$.

Таблица 9

Анализ операции расчета ссуды, предоставляемой при учете векселя

n (месяцев)	S (руб.)	$\left(1-d\right)^n$	$P = S\left(1-d\right)^n$ (руб.)
3	26315,79	0,9411920	24768,21
6	26315,79	0,8858424	23311,64
9	26315,79	0,8337478	21940,73
12	26315,79	0,7847167	20650,44

Примечание. Ежемесячная учетная ставка 2% соответствует номинальной (годовой) учетной процентной ставке 24%.

$$f = 24\%,\ m = 12,\ \frac{f}{m} = 2\%;\quad n = \{0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 1\}\textit{год}(a)$$

Расчет ссуды можно выполнить по формуле: $P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}$

Пример 15. Определить номинал векселя, если при его учете по ежемесячной учетной процентной ставке 2% кредитор предоставил заемщику ссуду 20650,44 руб. В качестве срока погашения векселя рассмотреть: 1, 2, 3 и 4 квартала.

Решение. $P = 20650{,}44\ \textit{руб.};\ d = 2\%;\ n = \{3;\ 6;\ 9;\ 12\}\textit{месяцев}$

Номинал векселя $S = P(1-d)^{-n}$.

Таблица 10

Анализ операции расчета номинала векселя, при предоставлении ссуды

n (месяцев)	P (руб.)	$(1-d)^{-n}$	$S = P(1-d)^{-n}$ (руб.)
3	20650,44	1,0624825	21940,73
6	20650,44	1,1288690	23311,64
9	20650,44	1,1994035	24768,21
12	20650,44	1,2743452	26315,79

Примечание. Ежемесячная учетная ставка 2% соответствует номинальной (годовой) учетной процентной ставке 24%.

$$f = 24\%,\ m = 12,\ \frac{f}{m} = 2\%;\quad n = \{0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 1\}\textit{год}(a)$$

Номинал векселя можно рассчитать по формуле: $S = P\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{-mn}$

Пример 16. Определить номинал векселя со сроком погашения один год, если при его учете была предоставлена ссуда 20000 руб. Для расчета дисконта была использована ежемесячная плавающая учетная процентная ставка. В первом квартале срока займа ежемесячная ставка учетная процентная ставка составляет 2%, а затем она поквартально увеличивается на 0,5%.

Решение. Расчет номинала векселя можно выполнить, используя формулы со сложной ежемесячной учетной плавающей процентной ставкой:

$$P = 20000\ \textit{руб.};\quad n = \sum_{k=1}^{4} n_k = 12\ \textit{месяцев};\ n_k = 3\textit{месяца},\ \forall k = \overline{1{,}4}$$

$$d_k = \left(2 + 0{,}5(k-1)\right)\%,\ k = \overline{1{,}4}$$

$$S = P\prod_{k=1}^{K}(1 - d_k)^{-n_k}$$ – номинал векселя.

Расчет номинала векселя можно выполнить, используя формулы со сложной плавающей номинальной (годовой) учетной процентной ставкой:

$$n = \sum_{k=1}^{4} n_k = 1\ год;\ n_k = 0{,}25\,года,\ \forall k = \overline{1{,}4}$$

$$\frac{f_k}{m_k} = \left(2 + 0{,}5(k-1)\right)\%;\ m_k = 12$$

$$S = P\prod_{k=1}^{K}\left(1 - \frac{f_k}{m_k}\right)^{-m_k n_k} \quad \text{– номинал векселя.}$$

Оба варианта формул для расчета номинала векселя приводят к одному результату. Множитель наращения первоначальной суммы долга:

$$\prod_{k=1}^{K}\left(1-d_k\right)^{-n_k} = \prod_{k=1}^{K}\left(1 - \frac{f_k}{m_k}\right)^{-m_k n_k} =$$

$$= \left(1-0{,}02\right)^{-3}\left(1-0{,}025\right)^{-3}\left(1-0{,}03\right)^{-3}\left(1-0{,}035\right)^{-3} \approx 1{,}39769$$

Номинал векселя составит $S \approx 27953{,}80\,руб.$

Смешанный способ расчета дисконта используется при сроке операции дисконтирования (сроке погашения векселя) более единичного периода с нецелым количеством единичных периодов. Он состоит в использовании ставки процентов, как сложной на части срока с целым количеством единичных периодов, и, как простой на части срока с нецелым количеством единичных периодов.

1. $n = a + b > 1$ – срок операции с нецелым количеством единичных периодов;
   d – сложная учетная ставка процентов на единичный период;
   $a = [n]$ – целое количество единичных периодов;
   $b = n - [n] < 1$ – нецелое количество единичных периодов;
   $P = S\left(1-d\right)^{a}\left(1-bd\right)$ – первоначальная стоимость денег (ссуда);
   $\left(1-d\right)^{a}\left(1-bd\right)$ – дисконтный множитель;
   $S = P\left(1-d\right)^{-a}\left(1-bd\right)^{-1}$ –конечная стоимость денег (номинал векселя);
   $\left(1-d\right)^{-a}\left(1-bd\right)^{-1}$ – множитель наращения.
2. $n\ (лет)$ – срок операции (срок погашения векселя);
   m – число операций дисконтирования в течение года;
   $nm = a + b > 1$ – нецелое количество единичных периодов;
   $\dfrac{f}{m}$ – ставка процентов на единичный период;
   f – номинальная (годовая) учетная ставка процентов;
   $a = [nm]$ – целое количество единичных периодов;

$b = nm - [nm] < 1$ –нецелое количество единичных периодов;

$P = S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{a}\left(1-b\frac{f}{m}\right)$ – первоначальная стоимость денег (ссуда);

$\left(1-\frac{f}{m}\right)^{a}\left(1-b\frac{f}{m}\right)$ – дисконтный множитель;

$S = P\left(1-\frac{f}{m}\right)^{-a}\left(1-b\frac{f}{m}\right)^{-1}$ – конечная стоимость денег (номинал векселя);

$\left(1-\frac{f}{m}\right)^{-a}\left(1-b\frac{f}{m}\right)^{-1}$ – множитель наращения.

Пример 17. Определить ссуду, которая была предоставлена кредитором заемщику 15.01.13 на 100 дней при учете векселя с номиналом 30000 руб. по номинальной (годовой) учетной процентной ставке 24% с ежемесячным дисконтированием.

Решение. Срок погашения векселя (100 дней) заканчивается 25.04.13.

$S = 30000\ руб.;\quad f = 24\%;\ m = 12;\ \frac{f}{m} = 2\%$

$nm = a + b$

$a = 3(месяца);\ b = \frac{10}{30}(часть\ апреля)$

$P = S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{a}\left(1-b\frac{f}{m}\right)$ – ссуда.

$P = 30000\,(1-0{,}02)^{3}\left(1-\frac{10}{30}0{,}02\right) \approx 28047{,}52\ руб.$

Примечания.

1. Расчет ссуды можно было выполнить, используя формулы со сложной ежемесячной учетной процентной ставкой:
   $d = 2\%$

   $n = a + b$

   $a = 3(месяца);\ b = \frac{10}{30}\ (часть\ апреля)$

   $P = S(1-d)^{a}(1-bd)$ – ссуда.
2. При использовании реального количества дней в году и в каждом месяце расчет ссуды выполняется следующим образом:
   $P = 30000\left(1-\frac{31}{365}0{,}24\right)\left(1-\frac{28}{365}0{,}24\right)\left(1-\frac{31}{365}0{,}24\right)\left(1-\frac{10}{365}0{,}24\right)$

   $P \approx 28073{,}59\ руб.$

Учетная фиксированная непрерывная (годовая) процентная ставка

$n\ (лет)$ – срок операции;

δ – фиксированная непрерывная (годовая) учетная ставка процентов;

$m \to \infty$ – база скидки процентов меняется практически непрерывно;

$P = \lim\limits_{m \to \infty} S\left(1 - \frac{\delta}{m}\right)^{\left(-\frac{m}{\delta}\right)(-\delta n)} = S\,e^{-\delta n}$ – первоначальная стоимость денег;

$e^{-\delta n}$ – дисконтный множитель;

$S = P e^{\delta n}$ – конечная стоимость денег;

$e^{\delta n}$ – множитель наращения;

$d_{эф} = 1 - e^{-\delta}$ – эффективная (реальная) процентная ставка скидки за год.

Ссудная и учетная непрерывные процентные ставки эквивалентны.

Учетная плавающая непрерывная (годовая) процентная ставка

$n = \sum\limits_{k=1}^{K} n_k\ (лет)$ – срок операции.

Для соответствующей части срока операции n_k:

δ_k – непрерывная (годовая) учетная ставка процентов;

$m_k \to \infty$ – число операций скидки процентов в течение года.

$P = Se^{-\sum\limits_{k=1}^{K} \delta_k n_k}$ – первоначальная стоимость денег;

$e^{-\sum\limits_{k=1}^{K} \delta_k n_k}$ – дисконтный множитель;

$S = Pe^{\sum\limits_{k=1}^{K} \delta_k n_k}$ – конечная стоимость денег;

$e^{\sum\limits_{k=1}^{K} \delta_k n_k}$ – множитель наращения.

Пример 18. Определить номинал векселя со сроком погашения один год, если при его учете по непрерывной годовой учетной процентной ставке 12% кредитор предоставил заемщику ссуду 20000 руб.

Решение. $P = 20000\ руб.;\ n = 1(год);\ \delta = 12\%$

$S = Pe^{\delta n};\quad S = 20000 \cdot e^{0{,}12} \approx 22549{,}94\ руб.$ – номинал векселя.

Результат увеличения задолженности (по предоставленной на год ссуде 20000 руб.) совпал с результатом увеличения задолженности по непрерывной годовой ссудной процентной ставке 12%, полученным в примере 8 (b).

Определение срока операций с учетными процентными ставками

Известны параметры финансовой операции: первоначальная стоимость денег, конечная стоимость денег, единичный период начисления процентов, процентная ставка.

Таблица 11

Расчет срока финансовой операции с использованием учетных процентных ставок

Вид учетной процентной ставки	Простая (d_s)	Сложная (d)	Номинальная (f,m)	Непрерывная (δ)
Срок операции (число единичных периодов)	$n=\dfrac{1-\frac{P}{S}}{d_s}$	$n=\dfrac{\ln\left(\frac{P}{S}\right)}{\ln(1-d)}$	$nm=\dfrac{\ln\left(\frac{P}{S}\right)}{\ln\left(1-\frac{f}{m}\right)}$	$n=\dfrac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\delta}$

Для выбора формулы расчета срока финансовой операции (табл. 11) необходим предварительный анализ срока финансовой операции, будет ли он менее или более единичного периода. Чтобы ответить на этот вопрос достаточно сравнить фактический дисконт с дисконтом за единичный период. Если рассчитанный срок финансовой операции включает нецелое количество единичных периодов, то потребуется смешанный способ дисконтирования и корректировка первоначальной или конечной стоимости денег (долга).

Пример 19. При учете векселя с номиналом 22000 руб. кредитор предоставил 15.01.13 заемщику ссуду около 20000 руб. Для расчета дисконта применяются учетные процентные ставки: а) годовая 12%; б) номинальная (годовая) 12%, с ежемесячным дисконтированием; в) непрерывная, годовая 12%. Определить срок погашения векселя. Если необходимо, выполнить корректировку ссуды так, чтобы срок погашения векселя был с целым количеством дней.

Решение. Номинал векселя $S = 22000$ *руб.*

$P \approx 20000$ *руб.* – ссуда, предоставленная 15.01.13.

а) Для расчета дисконта применяется годовая учетная процентная ставка.
$d = 12\%$.
$S\,d = 2640$ *руб.* $> (S-P) = 2000$ *руб.*

Срок операции менее года. Ставка процентов применяется, как простая процентная ставка. Расчет срока погашения векселя и ссуды:

$$t = n\cdot 365 = \frac{1-\frac{P}{S}}{d_s}\cdot 365; \quad t = \frac{1-\frac{20000}{22000}}{0{,}12}\cdot 365 \approx 276{,}52\,(\textit{дней})$$

Срок погашения векселя $t = \begin{Bmatrix}276\\277\end{Bmatrix}$ дней.

Дата погашения $\begin{Bmatrix} 18.10.2013 \\ 19.10.2013 \end{Bmatrix}$.

Корректировка ссуды для операции с целым количеством дней:

$$P = S\left(1 - d_S n\right)$$

$$P = 22000\begin{cases} \left(1 - 0{,}12\dfrac{276}{365}\right) \approx 20003{,}73\, руб. \\ \left(1 - 0{,}12\dfrac{277}{365}\right) \approx 19996{,}49\, руб. \end{cases}$$

б) Для расчета дисконта применяется номинальная (годовая) учетная процентная ставка 12% с ежемесячным дисконтированием.

$$f = 12\%;\ m = 12;\ \frac{f}{m} = 1\%$$

$$S\frac{f}{m} = 220\ руб. < \left(S - P\right) = 2000\, руб.$$

Срок операции более месяца. Ставка процентов применяется, как сложная процентная ставка. Расчет срока погашения векселя и ссуды:

$$nm = \frac{\ln\left(\dfrac{P}{S}\right)}{\ln\left(1 - \dfrac{f}{m}\right)}$$

$$n12 = \frac{\ln\left(\dfrac{20000}{22000}\right)}{\ln\left(1 - 0{,}01\right)} \approx 9{,}48\,(месяцев)$$

$$9\,(месяцев) = 273\,(дня)$$

$$288\,(дней) < t = n365 \approx 288{,}45\,(дней) < 289\,(дней) = 9\,(месяцев) + 16\,(дней)$$

Срок погашения векселя $t = \begin{Bmatrix} 288 \\ 289 \end{Bmatrix}$ дней.

Дата погашения – $\begin{Bmatrix} 30.10.2013 \\ 31.10.2013 \end{Bmatrix}$.

$$P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^a \left(1 - b\frac{f}{m}\right)$$

$$a = [nm] = 9;\ b = nm - a$$

Корректировка ссуды для операции с целым количеством дней:

$$P = 22000 \cdot \begin{cases} \left(1 - 0{,}01\right)^9 \left(1 - \dfrac{15}{31}0{,}01\right) \approx 20000{,}13\, руб. \\ \left(1 - 0{,}01\right)^9 \left(1 - \dfrac{16}{31}0{,}01\right) \approx 19993{,}65\, руб. \end{cases}$$

Примечание. При использовании реального количества дней в году и в каждом месяце расчет ссуды выполняется следующим образом:

$$P = 22000\left(1-\frac{0{,}12}{365}31\right)\left(1-\frac{0{,}12}{365}28\right)\left(1-\frac{0{,}12}{365}31\right)\left(1-\frac{0{,}12}{365}30\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{0{,}12}{365}31\right)\left(1-\frac{0{,}12}{365}30\right)\left(1-\frac{0{,}12}{365}31\right)\left(1-\frac{0{,}12}{365}31\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{0{,}12}{365}30\right)\begin{cases}\left(1-\dfrac{0{,}12}{365}15\right)\approx 20003{,}24\,\textit{руб.}\\ \left(1-\dfrac{0{,}12}{365}16\right)\approx 19996{,}63\,\textit{руб.}\end{cases}$$

в) Для расчета дисконта применяется непрерывная, годовая учетная процентная ставка $\delta = 12\%$.

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{S}{P}\right)}{\delta}$$

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{22000}{20000}\right)}{0{,}12} \approx 0{,}79425\,(\textit{года})$$

$$289\,(\textit{дней}) < t = n365 \approx 289{,}90\,(\textit{дней}) < 290\,(\textit{дней})$$

Срок погашения векселя $t = \begin{Bmatrix}289\\290\end{Bmatrix}$ дней.

Дата погашения – $\begin{Bmatrix}31.10.2013\\01.11.2013\end{Bmatrix}$.

Корректировка ссуды для операции с целым количеством дней:

$$P = S\,e^{-\delta n}$$

$$P = 22000\cdot\begin{cases}e^{-0{,}12\frac{289}{365}} \approx 20005{,}93\,\textit{руб.}\\ e^{-0{,}12\frac{290}{365}} \approx 19999{,}35\,\textit{руб.}\end{cases}$$

1.4. Эквивалентность процентных ставок и платежей

Процентные (годовые) ставки можно назвать эквивалентными, если множители наращения (дисконтные множители) денежных сумм за год равны.

Пример 20. Ссудная годовая процентная ставка 8%. Определить эквивалентную ссудную номинальную (годовую) процентную ставку, если проценты начисляются: ежемесячно, ежеквартально.

Решение. $i_S = 8\%(\textit{годовая})$

Условие эквивалентности процентных ставок: $$1 + i_S = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$$

$j = m\left(\sqrt[m]{1 + i_S} - 1\right)$ – эквивалентная номинальная процентная ставка.

$$m = \begin{cases} 12 \\ 4 \end{cases}; \quad j = \begin{cases} 12\left(\sqrt[12]{1 + 0{,}08} - 1\right) \approx 0{,}0772 = 7{,}72\% \\ 4\left(\sqrt[4]{1 + 0{,}08} - 1\right) \approx 0{,}0777 = 7{,}77\% \end{cases}$$

Пример 21. Ссудная номинальная (годовая) процентная ставка 8%, проценты начисляются по полугодиям. Определить эффективную ссудную процентную ставку. Определить эквивалентную ссудную номинальную процентную ставку, если проценты начисляются: ежемесячно, ежеквартально.

Решение. $j_1 = 8\%(\textit{годовая}),\ m_1 = 2,\ \dfrac{j_1}{m_1} = 4\%$

$$i_{эф} = \left(1 + \frac{j_1}{m_1}\right)^{m_1} - 1; \qquad i_{эф} = (1 + 0{,}04)^2 - 1 \approx 0{,}0816 = 8{,}16\%$$

Условие эквивалентности номинальных (годовых) процентных ставок:

$$\left(1 + \frac{j_1}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{j_2}{m_2}\right)^{m_2}$$

$$j_2 = m_2\left(\left(1 + \frac{j_1}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1\right)$$ – эквивалентная процентная ставка.

$$m_2 = \begin{cases} 12 \\ 4 \end{cases}; \quad j_2 = \begin{cases} 12\left(\left(1 + \dfrac{0{,}08}{2}\right)^{\frac{2}{12}} - 1\right) \approx 0{,}0787 = 7{,}87\% \\ 4\left(\left(1 + \dfrac{0{,}08}{2}\right)^{\frac{2}{4}} - 1\right) \approx 0{,}0792 = 7{,}92\% \end{cases}$$

Пример 22. Ссудная непрерывная (годовая) процентная ставка 8%. Определить эффективную ссудную процентную ставку. Определить эквивалентную ссудную номинальную (годовую) процентную ставку, если проценты начисляются: ежемесячно, ежеквартально.

Решение. $\delta = 8\%(\textit{годовая})$

$$i_{эф} = e^{\delta} - 1; \quad i_{эф} = e^{0,08} - 1 \approx 0,0833 = 8,33\%$$

Условие эквивалентности процентных ставок: $e^{\delta} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$

$j = m\left(e^{\frac{\delta}{m}} - 1\right)$ – эквивалентная номинальная (годовая) процентная ставка.

$$m = \begin{cases} 12 \\ 4 \end{cases}; \quad j = \begin{cases} 12\left(e^{\frac{0,08}{12}} - 1\right) \approx 0,0803 = 8,03\% \\ 4\left(e^{\frac{0,08}{4}} - 1\right) \approx 0,0808 = 8,08\% \end{cases}$$

Пример 23. Учетная годовая процентная ставка 16%. Определить эквивалентную учетную номинальную (годовую) процентную ставку, если дисконтирование выполняется: ежемесячно, ежеквартально.

Решение. $d_S = 16\%(\textit{годовая})$

Условие эквивалентности процентных ставок: $1 - d_S = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m$

$f = m\left(1 - \sqrt[m]{1 - d_S}\right)$ – эквивалентная процентная ставка.

$$m = \begin{cases} 12 \\ 4 \end{cases}; \quad f = \begin{cases} 12\left(1 - \sqrt[12]{1 - 0,16}\right) \approx 0,1731 = 17,31\% \\ 4\left(1 - \sqrt[4]{1 - 0,16}\right) \approx 0,1706 = 17,06\% \end{cases}$$

Пример 24. Учетная номинальная (годовая) процентная ставка 16%, дисконтирование выполняется по полугодиям. Определить эффективную учетную процентную ставку. Определить эквивалентную учетную номинальную (годовую) процентную ставку, если дисконтирование выполняется: ежемесячно, ежеквартально.

Решение. $f_1 = 16\%(\textit{годовая}),\ m_1 = 2,\ \frac{f_1}{m_1} = 8\%; \quad m_2 = \{12,\ 4\}$

$$d_{эф} = 1 - \left(1 - \frac{f_1}{m_1}\right)^{m_1}; \quad d_{эф} = 1 - (1 - 0,08)^2 \approx 0,1536 = 15,36\%$$

Условие эквивалентности номинальных (годовых) процентных ставок:

$$\left(1 - \frac{f_1}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1 - \frac{f_2}{m_2}\right)^{m_2}$$

$$f_2 = m_2\left(1-\left(1-\frac{f_1}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}}\right)$$ – эквивалентная процентная ставка.

$$m_2 = \begin{cases}12\\4\end{cases};\quad f_2 = \begin{cases}12\left(1-\left(1-\dfrac{0{,}16}{2}\right)^{\frac{2}{12}}\right) \approx 0{,}1656 = 16{,}56\%\\ 4\left(1-\left(1-\dfrac{0{,}16}{2}\right)^{\frac{2}{4}}\right) \approx 0{,}1633 = 16{,}33\%\end{cases}$$

Пример 25. Учетная непрерывная (годовая) процентная ставка 16%. Определить эквивалентную учетную номинальную (годовую) процентную ставку, если дисконтирование выполняется: ежемесячно, ежеквартально. Определить эффективную учетную процентную ставку.

Решение. $\delta = 16\%(\textit{годовая})$

$$d_{эф} = 1 - e^{-\delta} - 1;\quad d_{эф} = 1 - e^{-0{,}16} \approx 0{,}1479 = 14{,}79\%$$

Условие эквивалентности процентных ставок: $e^{-\delta} = \left(1-\dfrac{f}{m}\right)^m$

$$f = m\left(1 - e^{-\frac{\delta}{m}}\right)$$ – эквивалентная процентная ставка.

$$m = \begin{cases}12\\4\end{cases};\quad f = \begin{cases}12\left(1-e^{-\frac{0{,}16}{12}}\right) \approx 0{,}1589 = 15{,}89\%\\ 4\left(1-e^{-\frac{0{,}16}{4}}\right) \approx 0{,}1568 = 15{,}68\%\end{cases}$$

Пример 26. Ссудная годовая процентная ставка 20%. Определить эквивалентную учетную годовую процентную ставку.

Решение. $i_s = 20\%(\textit{годовая})$

Условие эквивалентности процентных ставок: $(1+i_s)^{-1} = (1-d_s)$

Эквивалентная учетная годовая процентная ставка.

$$d_s = \frac{i_s}{1+i_s};\quad d_s = \frac{0{,}2}{1+0{,}2} \approx 0{,}1667 = 16{,}67\%$$

Пример 27. Ссудная номинальная (годовая) процентная ставка 20%, проценты начисляются ежеквартально. Определить эквивалентную учетную номинальную (годовую) процентную ставку, если дисконтирование выполняется ежемесячно.

Решение. $j_1 = 20\% (\textit{годовая}),\ m_1 = 4,\ \dfrac{j_1}{m_1} = 5\%;\ \ m_2 = 12$

Условие эквивалентности номинальных (годовых) процентных ставок:

$$\left(1+\frac{j_1}{m_1}\right)^{-m_1} = \left(1-\frac{f_2}{m_2}\right)^{m_2}$$

$$f_2 = m_2\left(1-\left(1+\frac{j_1}{m_1}\right)^{-\frac{m_1}{m_2}}\right)$$ – эквивалентная процентная ставка.

$$f_2 = 12\left(1-\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{-\frac{4}{12}}\right) \approx 0{,}1936 = 19{,}36\%$$

Пример 28. Ссудная непрерывная (годовая) процентная ставка 20%. Определить эквивалентную учетную номинальную (годовую) процентную ставку, если дисконтирование выполняется ежемесячно.

Решение. $\delta = 20\% (\textit{годовая})$

Условие эквивалентности процентных ставок: $e^{-\delta} = \left(1-\dfrac{f}{m}\right)^{m}$

$$f = m\left(1-e^{-\frac{\delta}{m}}\right)$$ – эквивалентная процентная ставка.

$$m = 12;\quad f = 12\left(1-e^{-\frac{0{,}20}{12}}\right) \approx 0{,}1983 = 19{,}83\%$$

Платежи можно считать эквивалентными, если в результате их одновременного дисконтирования на более раннюю дату или наращения на более позднюю дату они становятся равными.

Для операций дисконтирования и наращения используется процентная ставка, соответствующая тем финансовым операциям, в ходе которых возникла потребность замены одних платежей и сроков – другими.

Все изменения предыдущих соглашений между кредиторами и заемщиками могут выполняться на основе принципа финансовой эквивалентности платежей, до и после изменения соглашений.

Пример 29. Согласно первоначальному соглашению заемщик должен был погасить задолженность тремя платежами: 20000 руб. 20.03.2013, 30000 руб. 25.04.2013 и 50000 руб. 19.07.2013. Однако 20.03.2013 первоначальное соглашение было изменено по инициативе заемщика. Согласно новому соглашению заемщик должен погасить всю задолженность одним (консолидированным) платежом 27.08.2013. Определить минимальный консолидированный платеж, если при его расчете было принято во внимание то, что кредитор предоставляет деньги заемщикам в долг: а) по годовой процентной ставке 12%, б) по номинальной годовой процентной ставке 12% с ежемесячным начислением процентов.

Решение. Платежи заемщика кредитору (рис. 9) по первоначальному соглашению: $D_1 = 20000\ руб.$; $D_2 = 30000\ руб.$; $D_3 = 50000\ руб.$ Отказываясь от первоначального соглашения, кредитор может согласиться с новым вариантом погашения задолженности, только при условии, что, как минимум, не потеряет те проценты, которые мог бы получить, предоставляя деньги всех трех платежей, полученных от заемщика в оговоренные ранее моменты времени, в долг другим заемщикам. Консолидированный платеж 27.08.2013 будет эквивалентен трем платежам предыдущего соглашения между кредитором и заемщиком, если он равен сумме этих платежей, после операции их наращения на дату консолидированного платежа 27.08.2013.

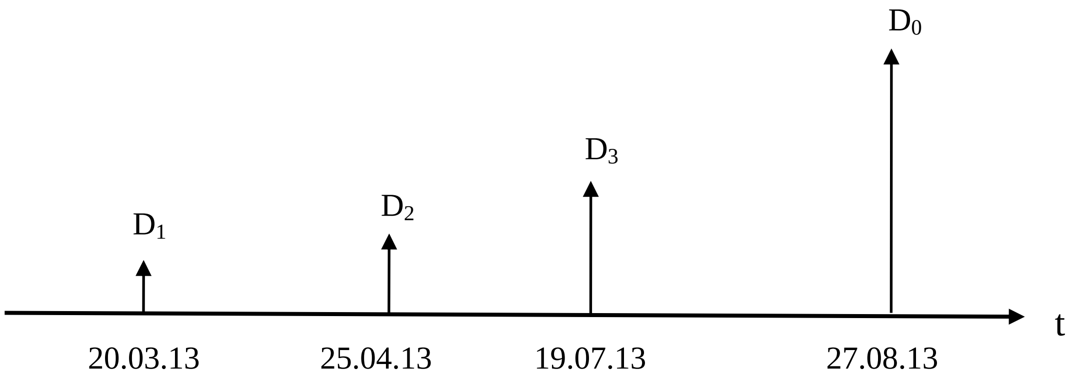

Рис. 9. Консолидация потока платежей заемщика кредитору

а) Кредитор предоставляет деньги заемщикам в долг по годовой процентной ставке $i_s = 12\%$.

$$D_o = \sum_{k=1}^{3} D_k \left(1 + i_s n_k\right)$$

$$D_o = 20000\left(1 + 0{,}12\frac{160}{365}\right) + 30000\left(1 + 0{,}12\frac{124}{365}\right) +$$

$$+ 50000\left(1 + 0{,}12\frac{39}{365}\right) \approx 102916{,}16\ руб.$$

Консолидированный платеж заемщика кредитору 27.08.2013 в новом соглашении не может быть меньше 102916,16 руб.

б) Кредитор предоставляет деньги заемщикам в долг по номинальной (годовой) процентной ставке с ежемесячным начислением процентов.

$j = 12\%,\ m = 12,\ \dfrac{j}{m} = 1\%$

Сроки наращения платежей включают нецелое количество единичных периодов (месяцев). Используется смешанный способ расчета процентов.

$$D_o = 20000\ (1+0{,}01)^5\left(1+0{,}01\frac{7}{31}\right) + 30000\ (1+0{,}01)^4\left(1+0{,}01\frac{2}{31}\right) +$$

$$+ 50000\ (1+0{,}01)\left(1+0{,}01\frac{8}{31}\right) \approx 102936{,}25\ руб.$$

Консолидированный платеж заемщика кредитору 27.08.2013 в новом соглашении не может быть меньше 102936,25 руб.

Пример 30. Согласно первоначальному соглашению заемщик должен был погасить задолженность тремя платежами: 20000 руб. 20.03.2013, 30000 руб. 25.04.2013 и 50000 руб. 19.07.2013. Однако 20.03.2013 первоначальное соглашение было изменено. Согласно новому соглашению заемщик должен погасить всю задолженность консолидированным платежом 11.06.2013. Определить эквивалентный консолидированный платеж, если при его расчете было принято во внимание то, что кредитор предоставляет деньги заемщикам в долг по годовой процентной ставке 10%.

Решение. Платежи заемщика кредитору (рис. 10) по первоначальному соглашению: $D_1 = 20000\ руб.;\ D_2 = 30000\ руб.;\ D_3 = 50000\ руб.$ Составляя новое соглашение, кредитор не должен потерять проценты, которые мог бы получить, предоставляя деньги от первого и второго платежей, предоставленные заемщиком вовремя, другим заемщикам в долг; при этом заемщик может рассчитывать на уменьшение части консолидированного платежа, соответствующей третьему платежу первоначального соглашения, поскольку консолидированная задолженность погашается раньше.

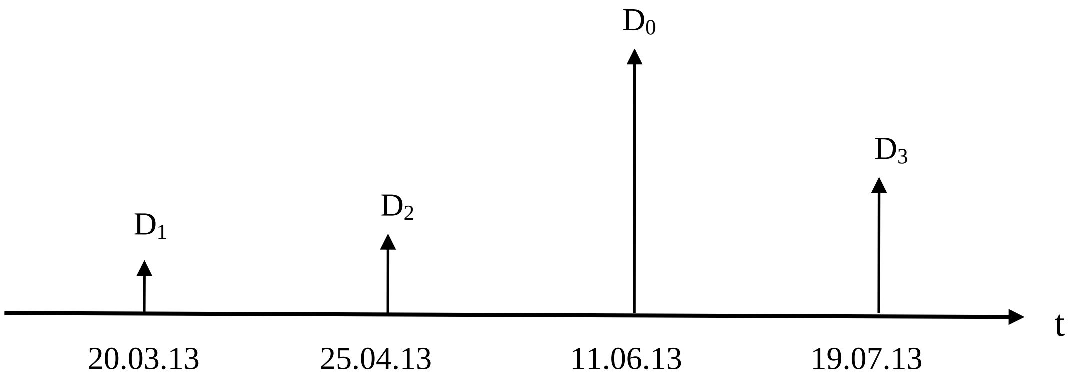

Рис. 10. Консолидация потока платежей заемщика кредитору

Консолидированный платеж 11.06.2013 будет эквивалентен трем платежам предыдущего соглашения между кредитором и заемщиком, если он равен сумме наращенных первого и второго платежей, и дисконтированного третьего платежа на дату консолидированного платежа 11.06.2013. Для операций наращения и дисконтирования применяется годовая процентная ставка 10%.

$$D_o = \sum_{k=1}^{2} D_k \left(1 + i_s n_k\right) + D_3 \left(1 + i_s n_3\right)^{-1}$$

$$D_o = 20000\left(1 + 0{,}10\frac{83}{365}\right) + 30000\left(1 + 0{,}10\frac{47}{365}\right) +$$

$$+ 50000\left(1 + 0{,}10\frac{38}{365}\right)^{-1} \approx 100325{,}91\,руб.$$

Эквивалентный консолидированный платеж заемщика кредитору 11.06.2013 в новом соглашении 100325,91 руб.

Пример 31. Согласно первоначальному соглашению заемщик должен был погасить задолженность тремя платежами: 20000 руб. 20.03.2013, 30000 руб. 25.04.2013 и 50000 руб. 19.07.2013. Однако 15.02.2013 первоначальное соглашение было изменено по инициативе кредитора. Согласно новому соглашению заемщик погашает всю задолженность консолидированным платежом 15.02.2013. Определить максимальный консолидированный платеж, если при его расчете было принято во внимание то, что кредитор предоставляет деньги заемщикам в долг: а) по годовой процентной ставке 18%, б) по номинальной годовой процентной ставке 18% с ежемесячным начислением процентов.

Решение. Платежи заемщика кредитору (рис. 11) по первоначальному соглашению: $D_1 = 20000\,руб.$; $D_2 = 30000\,руб.$; $D_3 = 50000\,руб.$ Отказываясь от первоначального соглашения (по инициативе кредитора), заемщик может рассчитывать на дисконтирование всех платежей на дату консолидированного платежа 15.02.2013.

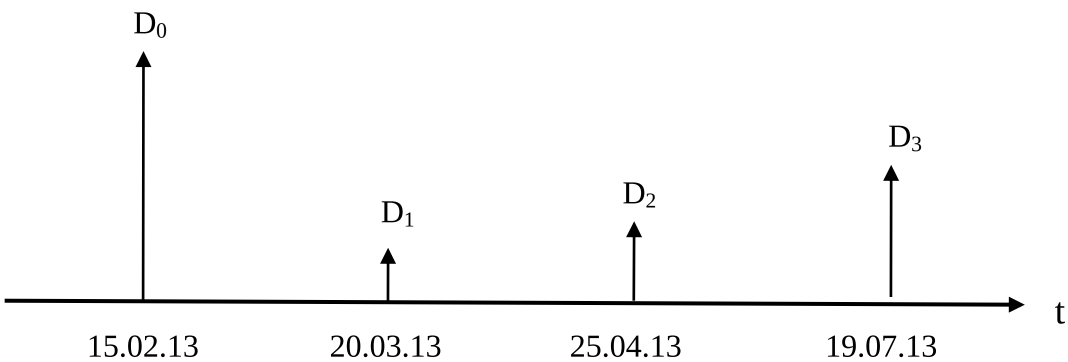

Рис. 11. Консолидация потока платежей заемщика кредитору

Консолидированный платеж будет эквивалентен трем платежам предыдущего соглашения между кредитором и заемщиком, если он равен сумме этих трех дисконтированных платежей на дату консолидированного платежа 15.02.2013.

а) Кредитор предоставляет деньги заемщикам в долг по годовой процентной ставке $i_s = 18\%$.

$$D_o = \sum_{k=1}^{3} D_k \left(1 + i_s n_k\right)^{-1}$$

$$D_o = 20000\left(1 + 0{,}18\frac{33}{365}\right)^{-1} + 30000\left(1 + 0{,}18\frac{69}{365}\right)^{-1} +$$

$$+ 50000\left(1 + 0{,}18\frac{154}{365}\right)^{-1} \approx 95163{,}27\ \textit{руб.}$$

Консолидированный платеж заемщика кредитору 15.02.2013 в новом соглашении не может быть больше 95163,27 руб.

б) Кредитор предоставляет деньги заемщикам в долг по номинальной (годовой) процентной ставке с ежемесячным начислением процентов.

$$j = 18\%,\ m = 12,\ \frac{j}{m} = 1{,}5\%$$

Сроки дисконтирования платежей включают нецелое количество единичных периодов (месяцев). Используется смешанный способ расчета процентов.

$$D_o = 20000\left(1 + 0{,}015\right)^{-1}\left(1 + 0{,}015\frac{5}{31}\right)^{-1} + 30000\left(1 + 0{,}015\right)^{-2}\left(1 + 0{,}015\frac{10}{30}\right)^{-1}$$

$$+ 50000\left(1 + 0{,}015\right)^{-5}\left(1 + 0{,}015\frac{4}{31}\right)^{-1} \approx 94955{,}21\,\textit{руб.}$$

Консолидированный платеж заемщика кредитору 15.02.2013 в новом соглашении не может быть больше 94955,21 руб.

Глава 2. Финансовая рента

2.1. Основные понятия и определения

Финансовая рента (рента или аннуитет) – поток платежей во времени, между которыми имеется одинаковый временной промежуток. Например, платежи по кредиту, проценты по вкладу в банке, дивиденды по акциям, выплаты заработной платы и пенсии, налоговые платежи, и.т.д.

Параметры ренты:

– отдельный платеж в деньгах (член ренты);
– временной промежуток между соседними платежами (период ренты);
– совокупное время от начала первого до конца последнего периода ренты (срок ренты);
– процентная ставка.

В финансовой практике различают ***ренты*** по величине платежей:

– ***постоянные*** (все платежи одинаковые);
– ***переменные*** (платежи разные).

В финансовой практике различают ***ренты*** по моменту исполнения платежей в пределах периодов:

– ***«постнумерандо»*** с выплатами в конце периодов;
– ***«пренумерандо»*** с выплатами в начале периодов.

Анализ ренты включает следующие ***обобщающие характеристики***:

– ***будущая (наращенная) стоимость ренты***, а именно, сумма всех платежей с начисленными процентами на момент окончания срока ренты (итоговый объем инвестиций, накопленная сумма на счете банка или в негосударственном пенсионном фонде, и т.д.)
– ***современная (дисконтированная) стоимость ренты***, а именно, сумма всех платежей, дисконтированных на момент начала срока ренты (величина кредита, погашаемого в рассрочку, приведенная прибыль от реализации проекта, и т.д.).

Современная и будущая стоимость ренты эквивалентны одному потоку платежей и, следовательно, эквивалентны друг другу.

2.2. Постоянная рента постнумерандо

Анализ ренты постнумерандо (рис. 12) включает параметры:

$n(\text{лет})$ – срок ренты;

p – количество платежей в течение года;

$\frac{1}{p}(\text{года})$ – период ренты;

$R(\text{д.е.})$ – отдельный (постоянный) платеж в денежных единицах;

j – номинальная (годовая) процентная ставка;
m – количество операций начисления процентов в течение года;
$\frac{1}{m}(года)$ – единичный период начисления процентов;
обобщающие характеристик ренты:

а) PA_{post} – современная (дисконтированная) стоимость ренты;

б) SA_{post} – будущая (наращенная) стоимость ренты.

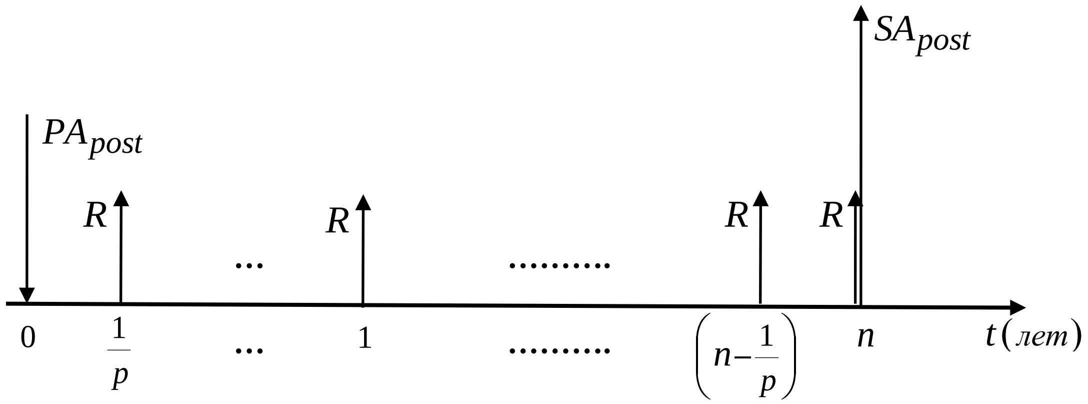

Рис. 12. Постоянная рента постнумерандо

Связь между обобщающими характеристиками.

$$SA_{post} = PA_{post}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}$$

Расчет обобщающих характеристик ренты[1]

$$PA_{post} = \sum_{k=1}^{np} R\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\frac{k}{p}} = R\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}np}}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}$$

$$PA_{post} = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$ – современная стоимость ренты.

[1] Для расчетов применяется формула суммы членов геометрической прогрессии.

$$SA_{post} = \sum_{k=0}^{(n\,p-1)} R\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\frac{k}{p}} = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}n\,p}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

$$SA_{post} = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\,n}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$ – будущая стоимость ренты.

Расчет срока постоянной ренты постнумерандо
(с целым количеством периодов ренты)

1. Известны параметры ренты: PA_{post}, p, R, j, m, тогда:

$$n^{*}p = \left[\frac{\ln\left(1-\frac{PA_{post}}{R}\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right)\right)^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}\cdot p\right]$$ – срок ренты (в периодах).

Примечания

а) Рента будет вечной, если выполняется условие:

$$R \le PA_{post}\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right)$$

б) Необходимо скорректировать параметры ренты, а именно, либо современную стоимость, либо один платеж (чаще последний), либо все платежи, применяя следующие формулы:

$$PA^{*}_{post} = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\,n^{*}}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$ – скорректированная современная стоимость,

$$R_{np}^{*} = R + \left(PA_{post} - PA_{post}^{*}\right)\left(1+\frac{j}{m}\right)^{n^{*}m}$$ – новый последний платеж,

$$R^{*} = PA_{post} : \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn^{*}}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$ – новые постоянные платежи.

2. Известны параметры ренты: SA_{post}, p, R, j, m, тогда:

$$n^{*}p = \left[\frac{\ln\left(1+\frac{SA_{post}}{R}\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right)\right)}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}\cdot p\right]$$ – срок ренты (в периодах).

Примечание. Необходимо скорректировать параметры ренты, а именно, либо будущую стоимость, либо один платеж, либо все платежи, применяя следующие формулы:

$$SA_{post}^{*} = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn^{*}}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$ – скорректированная будущая стоимость,

$$R_{np}^{*} = R + \left(SA_{post} - SA_{post}^{*}\right)$$ – новый последний платеж,

$$R^{*} = SA_{post} : \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn^{*}}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$ – новые постоянные платежи.

Если период ренты совпадает с единичным периодом начисления процентов $(p = m)$***, формулы можно упростить:***

$i = \frac{j}{m}$ – процентная ставка за единичный период,

$$PA_{post} = R\frac{1-(1+i)^{-mn}}{i}$$ – современная стоимость ренты,

$$SA_{post} = R\frac{(1+i)^{mn}-1}{i}$$ – будущая стоимость ренты,

$$R = PA_{post} : \frac{1-(1+i)^{-mn}}{i}$$ – расчет члена ренты,

$$R = SA_{post} : \frac{(1+i)^{mn}-1}{i}$$ – расчет члена ренты,

$$n^{*}p = \left[\frac{\ln\left(1-\frac{PA_{post}}{R}i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}\right]$$ – срок ренты (известна стоимость PA_{post}),

$$n^{*}p = \left[\frac{\ln\left(1+\frac{SA_{post}}{R}i\right)}{\ln(1+i)}\right]$$ – срок ренты (известна стоимость SA_{post}).

Пример 32. В банке был открыт счет с номинальной (годовой) процентной ставкой 6% и ежемесячным начислением процентов. Определить минимальную сумму вклада, достаточную для того, чтобы течение 4 лет можно было снимать со счета банка в конце каждого полугодия по 45000 руб.

Решение. Операция представляет собой постоянную ренту постнумерандо.

$n = 4(\textit{года});\ p = 2;\ R = 45000\,(\textit{руб.})$

$j = 6\%;\ m = 12;\ \frac{j}{m} = 0{,}5\%$

Достаточная сумма вклада равна современной стоимости этой ренты.

$$PA_{post} = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$ – современная стоимость ренты.

$$PA_{post} = 45000\frac{1-(1+0{,}005)^{-48}}{(1+0{,}005)^{6}-1} \approx 45000\cdot 7{,}008526807 \approx 315383{,}71(\textit{руб.})$$

Пример 33. На счет банка поступают постоянные взносы по 6000 руб. в конце каждого квартала. По вкладу начисляют ежемесячно проценты по ставке 0,25%. Определить сумму вклада на счете банка, накопленную за 10 лет.

Решение. Операция представляет собой постоянную ренту постнумерандо.

$n = 10\,(лет);\ p = 4;\ R = 6000\,(руб.)$

$m = 12;\ \dfrac{j}{m} = 0{,}25\%;\ j = 3\%$

Накопленная сумма вклада равна будущей стоимости ренты:

$$SA_{post} = R\frac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$SA_{post} = 6000\frac{(1+0{,}0025)^{120} - 1}{(1+0{,}0025)^{3} - 1} \approx 6000 \cdot 46{,}464215619 \approx 278785{,}29\,(руб.)$$

Пример 34. В банке открыт счет с номинальной (годовой) процентной ставкой 6% с ежемесячным начислением процентов, и внесен вклад 360000 руб. Со счета снимают по 45000 руб. в конце каждого полугодия. Найти минимальный срок (с целым количеством полугодий), в течение которого будет потрачена вся сумма вклада. При необходимости выполнить корректировку: а) последней суммы, снимаемой со счета банка; б) всех постоянных сумм, снимаемых со счета банка.

Решение. Первоначальная сумма вклада равна современной стоимости ренты постнумерандо $PA_{post} = 360000\,(руб.)$.

$p = 2;\ R = 45000\,(руб.)$

$j = 6\%;\ m = 12;\ \dfrac{j}{m} = 0{,}5\%$

Срок ренты (с целым количеством периодов) можно рассчитать по формуле:

$$n^{*}p = \left[\frac{\ln\left(1 - \dfrac{PA_{post}}{R}\left(\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right)\right)^{-1}}{m\ln\left(1+\dfrac{j}{m}\right)} \cdot p\right]$$

$$n^{*}2=\left[\frac{\ln\left(1-\dfrac{360000}{45000}\left((1+0{,}005)^{6}-1\right)\right)^{-1}}{12\ \ln(1+0{,}005)}\cdot 2\right]=[9{,}304]=9(\textit{полугодий})$$

а) Корректировка последней суммы, снимаемой со счета банка.

$$R_{np}^{*}=R+\left(PA_{post}-PA_{post}^{*}\right)\left(1+\frac{j}{m}\right)^{n^{*}m}$$

Скорректированная современная стоимость (минимальная сумма вклада, достаточная для того, чтобы в течение 4,5 лет снимать со счета банка по 45000 руб. в конце каждого полугодия):

$$PA_{post}^{*}=R\frac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn^{*}}}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

$$PA_{post}^{*}=45000\frac{1-(1+0{,}005)^{-54}}{(1+0{,}005)^{6}-1}\approx 349758{,}90(\textit{руб.})$$

Скорректированная сумма, имеющаяся на счете и снимаемая со счета банка в конце девятого полугодия:

$$R_{9}^{*}=45000+(360000-349758{,}90)\cdot(1+0{,}005)^{54}\approx 58406{,}45(\textit{руб.})$$

б) Корректировка всех постоянных сумм, снимаемых со счета банка.

$$R^{*}=PA_{post}:\frac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn^{*}}}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

$$R^{*}=360000:\frac{1-(1+0{,}005)^{-54}}{(1+0{,}005)^{6}-1}\approx 46317{,}62(\textit{руб.})$$

Пример 35. На счете банка необходимо накопить 400000 руб. с помощью постоянных взносов по 8000 руб. в конце каждого квартала. По вкладу ежемесячно начисляются проценты по ставке 0,5%. Найти срок операции с целым количеством кварталов. При необходимости выполнить корректировку: а) последнего взноса на счет банка, б) всех постоянных взносов на счет банка.

Решение. Накопленная сумма вклада равная будущей стоимости ренты постнумерандо $SA_{post}=400000(\textit{руб.})$.

$p = 4;\ R = 8000\,(руб.)$

$\dfrac{j}{m} = 0{,}5\%;\ m = 12;\ j = 6\%$

Срок ренты (с целым количеством периодов) можно рассчитать по формуле:

$$n^*\,p = \left[\frac{\ln\left(1 + \dfrac{SA_{post}}{R}\left(\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right)\right)}{m\ln\left(1+\dfrac{j}{m}\right)}\cdot p\right]$$

$$n^*\,4 = \left[\frac{\ln\left(1 + \dfrac{400000}{8000}\left((1+0{,}005)^3 - 1\right)\right)}{12\ \ln(1+0{,}005)}\cdot 4\right] \approx [37{,}54] = 37\,(кварталов)$$

а) Корректировка последнего взноса на счет банка.

$R^*_{np} = R + \left(SA_{post} - SA^*_{post}\right)$

Скорректированная будущая стоимость (сумма вклада, накопленная за 9,25 лет с помощью постоянных взносов в конце каждого квартала по 8000 руб.):

$$SA^*_{post} = R\frac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m\,n^*} - 1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$SA^*_{post} = 8000\frac{(1+0{,}005)^{111} - 1}{(1+0{,}005)^3 - 1} \approx 392452{,}46\,(руб.)$$

Скорректированный последний взнос на счет банка:

$R^*_{37} = 8000 + (400000 - 392452{,}46) = 15547{,}54\,(руб.)$

Если последний взнос кажется слишком большим, можно увеличить срок ренты на один период и принять равным 38 кварталам. В этом случае:

$$SA^{**}_{post} = 8000\frac{(1+0{,}005)^{114} - 1}{(1+0{,}005)^3 - 1} \approx 406368{,}73\,(руб.)$$

$R^{**}_{38} = 8000 + (400000 - 406368{,}73) = 1631{,}27\,(руб.)$ – последний взнос.

б) Корректировка всех постоянных взносов на счет банка.

$$R^* = SA_{post} : \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn^*} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$R^* = 400000 : \frac{(1+0{,}005)^{111} - 1}{(1+0{,}005)^{3} - 1} \approx 8153{,}85\,(руб.)$$

Пример 36. Банк предоставил заемщику кредит 600000 руб. сроком на 5 лет. По кредиту предложена номинальная (годовая) процентная ставка 12% с ежемесячным начислением процентов. Определить постоянный платеж заемщика в конце каждого месяца.

Решение. Операция погашения кредита представляет собой постоянную ренту постнумерандо.

$PA_{post} = 600000\,(руб.)$

$p = m = 12;\; j = 12\%;\; i = \frac{j}{m} = 1\%$

Постоянный платеж заемщика в конце месяца:

$$R = PA_{post} : \frac{1-(1+i)^{-mn}}{i}$$

$$R = 600000 : \frac{1-1{,}01^{-60}}{0{,}01} \approx 13346{,}67\,(руб.)$$

2.3. Постоянная рента пренумерандо

Анализ ренты пренумерандо (рис. 13) включает параметры:

$n\,(лет)$ – срок ренты;

p – количество платежей в течение года;

$\frac{1}{p}\,(года)$ – период ренты;

$R\,(д.е.)$ – отдельный (постоянный) платеж в денежных единицах;

j – номинальная (годовая) процентная ставка;

m – количество операций начисления процентов в течение года;

$\frac{1}{m}\,(года)$ – единичный период начисления процентов;

обобщающие характеристики ренты:

а) PA_{pre} – современная (дисконтированная) стоимость ренты;

б) SA_{pre} – будущая (наращенная) стоимость ренты.

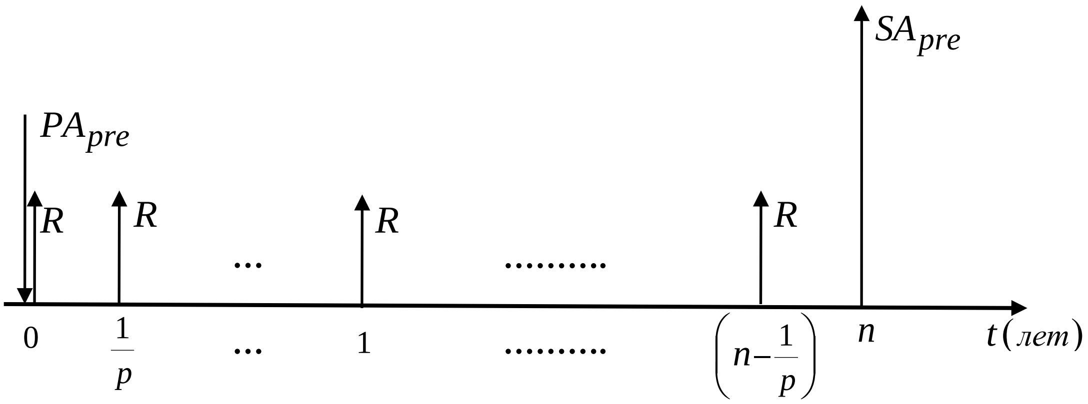

Рис. 13. Постоянная рента пренумерандо

Расчет обобщающих характеристик ренты[2]

$$PA_{pre} = \sum_{k=0}^{(np-1)} R\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\frac{k}{p}} = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}np}}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}$$

$$PA_{pre} = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}$$ – современная стоимость ренты.

$$SA_{pre} = \sum_{k=1}^{np} R\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\frac{k}{p}} = R\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}np}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

$$SA_{pre} = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}$$ – будущая стоимость ренты.

---

[2] Для расчетов применяется формула суммы членов геометрической прогрессии.

Связь между обобщающими характеристиками:

$$SA_{pre} = PA_{pre}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}$$

Срок постоянной ренты пренумерандо (с целым количеством периодов)

1. Известны параметры ренты: $PA_{pre},\ p,\ R,\ j,\ m$, тогда срок ренты равен:

$$n^{*}p = \left[\frac{\ln\left(1-\frac{PA_{pre}}{R}\left(1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}\right)\right)^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}\cdot p\right]$$

Примечания

а) Рента будет вечной, если выполняется условие:

$$R \le PA_{pre}\left(1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}\right)$$

б) Необходимо скорректировать параметры ренты, а именно, либо современную стоимость, либо один платеж (чаще последний), либо все платежи, применяя следующие формулы:

$$PA^{*}_{pre} = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn^{*}}}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}$$ – современная стоимость,

$$R^{*}_{np} = R+\left(PA_{pre}-PA^{*}_{pre}\right)\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\left(n^{*}-\frac{1}{p}\right)m}$$ – последний платеж,

$$R^{*} = PA_{pre} : \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn^{*}}}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}$$ – постоянные платежи.

2. Известны параметры ренты: $SA_{pre},\ p,\ R,\ j,\ m$, тогда срок ренты равен:

$$n^{*}p=\left[\frac{\ln\left(1+\frac{SA_{pre}}{R}\left(1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}\right)\right)}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}\cdot p\right]$$

Примечание. Необходимо скорректировать параметры ренты, а именно, либо современную стоимость, либо один платеж (чаще последний), либо все платежи, применяя следующие формулы:

$$SA_{pre}^{*}=R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn^{*}}-1}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}$$ – будущая стоимость,

$$R_{np}^{*}=R+\left(SA_{pre}-SA_{pre}^{*}\right)\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}$$ – последний платеж,

$$R^{*}=SA_{pre}:\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn^{*}}-1}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}$$ – постоянные платежи.

Если период ренты совпадает с единичным периодом начисления процентов $(p=m)$***, формулы можно упростить:***

$i=\frac{j}{m}$ – процентная ставка за единичный период,

$PA_{pre}=R\frac{1-(1+i)^{-mn}}{i}(1+i)$ – современная стоимость ренты,

$SA_{pre}=R\frac{(1+i)^{mn}-1}{i}(1+i)$ – будущая стоимость ренты,

$R=PA_{pre}:\left(\frac{1-(1+i)^{-mn}}{i}(1+i)\right)$ – расчет члена ренты,

$$R = SA_{pre} : \left(\frac{(1+i)^{mn} - 1}{i} (1+i) \right)$$ – расчет члена ренты,

$$n^* p = \left[\frac{\ln\left(1 - \frac{PA_{pre}}{R} \frac{i}{1+i}\right)^{-1}}{\ln(1+i)} \right]$$ – расчет срока ренты,

$$n^* p = \left[\frac{\ln\left(1 + \frac{SA_{pre}}{R} \frac{i}{1+i}\right)}{\ln(1+i)} \right]$$ – расчет срока ренты.

Пример 37. В банке открыт счет при номинальной (годовой) процентной ставке 8% с ежеквартальным начислением процентов. Определить величину вклада, достаточную для оплаты обучения в течение 4,5 лет равными платежами в начале каждого полугодия по 42500 руб.

Решение. Оплата обучения в рассрочку представляет собой постоянную ренту пренумерандо.

$n = 4{,}5(\text{года});\ p = 2;\ R = 42500\,(\text{руб.});\ j = 8\%;\ m = 4;\ \frac{j}{m} = 2\%$.

Достаточная сумма вклада равна современной стоимости ренты:

$$PA_{pre} = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}$$

$$PA_{pre} = 42500 \frac{1 - (1 + 0{,}02)^{-18}}{1 - (1 + 0{,}02)^{-2}} \approx 42500 \cdot 7{,}721638274 \approx 328169{,}63(\text{руб.})$$

Пример 38. На счет банка поступают постоянные взносы по 9000 руб. в начале каждого квартала. По вкладу ежемесячно начисляются проценты по ставке 0,5%. Определить накопленную за 7 лет сумму.

Решение. Операция представляет собой постоянную ренту пренумерандо.

$n = 7(\text{лет});\ p = 4;\ R = 9000\,(\text{руб.})$

$m = 12;\ \frac{j}{m} = 0{,}5\%;\ j = 6\%$.

Накопленная сумма вклада равна будущей стоимости ренты:

$$SA_{pre} = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}$$

$$SA_{pre} = 9000\frac{(1+0{,}005)^{84}-1}{1-(1+0{,}005)^{-3}} \approx 9000\cdot 35{,}038798908 \approx 315349{,}19(\textit{руб.})$$

Пример 39. В банке открыт счет, внесен вклад 165000 руб., для оплаты обучения равными платежами в начале каждого полугодия по 42500 руб. По вкладу ежеквартально начисляются проценты по номинальной (годовой) процентной ставке 6%. Найти максимальный срок операции (с целым количеством полугодий), в течение которого будет потрачена сумма вклада. При необходимости выполнить корректировку: а) последней суммы, снимаемой со счета банка; б) всех постоянных сумм, снимаемых со счета банка.

Решение. Операция представляет собой постоянную ренту пренумерандо.

$$PA_{pre} = 165000(\textit{руб.});\ p=2;\ R=42500(\textit{руб.})$$

$$j=6\%;\ m=4;\ \frac{j}{m}=1{,}5\%$$

Срок ренты (с целым количеством периодов) можно рассчитать по формуле:

$$n^{*}p = \left[\frac{\ln\left(1-\frac{PA_{pre}}{R}\left(1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}\right)\right)^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}\cdot p\right]$$

$$n^{*}2 = \left[\frac{\ln\left(1-\frac{165000}{42500}\left(1-(1+0{,}015)^{-2}\right)\right)^{-1}}{4\ln(1+0{,}015)}\cdot 2\right] = [4{,}061] = 4(\textit{полугодия})$$

а) Корректировка последней суммы, оставшейся и снимаемой со счета банка.

$$R^{*}_{np} = R + \left(PA_{pre}-PA^{*}_{pre}\right)\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\left(n^{*}-\frac{1}{p}\right)m}$$

$$PA^*_{pre} = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn^*}}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}$$

Скорректированная современная стоимость (минимальная сумма вклада, достаточная для операции со сроком 2 года) будет менее 165000 руб.:

$$PA^*_{pre} = 42500\frac{1-(1+0{,}015)^{-8}}{1-(1+0{,}015)^{-2}} \approx 162664{,}00(руб.)$$

Скорректированная последняя сумма, оставшаяся и снимаемая со счета банка в начале четвертого полугодия, будет более 42500 руб.:

$$R^*_4 = 42500 + (165000 - 162664{,}00)\cdot(1+0{,}015)^6 \approx 45054{,}29(руб.)$$

б) Корректировка всех постоянных сумм, снимаемых со счета банка.

$$R^* = PA_{pre} : \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn^*}}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}$$

Скорректированная постоянная сумма, снимаемая в начале каждого полугодия со счета банка, будет более 42500 руб.:

$$R^* = 165000 : \frac{1-(1+0{,}015)^{-8}}{1-(1+0{,}015)^{-2}} \approx 43110{,}34(руб.)$$

Пример 40. На счете банка необходимо накопить 300000 руб. с помощью постоянных взносов в начале каждого квартала по 12000 руб. По вкладу начисляются ежеквартально проценты по ставке 2%. Найти срок операции с целым количеством кварталов. При необходимости выполнить корректировку: а) последнего взноса, б) всех взносов.

Решение. Операция представляет собой постоянную ренту пренумерандо.

$$SA_{pre} = 300000(руб.);\ R = 12000(руб.)$$

$$p = m = 4;\ i = \frac{j}{m} = 2\%$$

Срок ренты (с целым количеством периодов) можно рассчитать по формуле:

$$n^* p = \left[\frac{\ln\left(1 + \frac{SA_{pre}}{R}\frac{i}{1+i}\right)}{\ln(1+i)} \right]$$

$$n^* 4 = \left[\frac{\ln\left(1 + \frac{300000}{12000}\cdot\frac{0{,}02}{1+0{,}02}\right)}{\ln(1+0{,}02)} \right] \approx [20{,}14] = 20(\textit{кварталов})$$

а) Корректировка последнего взноса.

$$R^*_{np} = R + \left(SA_{pre} - SA^*_{pre}\right)(1+i)^{-1}$$

Скорректированная будущая стоимость (сумма, накопленная за 5 лет, с помощью взносов в начале каждого квартала по 12000 руб.) будет менее 300000 руб.:

$$SA^*_{pre} = R\frac{(1+i)^{mn^*} - 1}{i}(1+i)$$

$$SA^*_{pre} = 12000\frac{1{,}02^{20} - 1}{0{,}02}1{,}02 \approx 297399{,}81(\textit{руб.})$$

Скорректированный последний взнос в начале двадцатого квартала:

$$R^*_{20} = 12000 + (300000 - 297399{,}81)\cdot 1{,}02^{-1} = 14549{,}21(\textit{руб.})$$

б) Корректировка всех постоянных взносов.

$$R^* = SA_{pre} : \left(\frac{(1+i)^{mn} - 1}{i}(1+i)\right)$$

Чтобы накопить 300000 руб. за 5 лет нужно вносить на счет в начале каждого квартала более 12000 руб.:

$$R^* = 300000 : \left(\frac{1{,}02^{20} - 1}{0{,}02}1{,}02\right) \approx 12104{,}92(\textit{руб.})$$

Пример 41. Банк предоставил заемщику кредит 600000 руб. сроком на 5 лет. По кредиту предложена номинальная (годовая) процентная ставка 12% с ежемесячным начислением процентов. Определить постоянный платеж заемщика в начале каждого месяца.

Решение. Операция представляет собой постоянную ренту пренумерандо, современная стоимость которой равна сумме предоставленного кредита $PA_{pre} = 600000\,(\textit{руб.})$.

$$n=5(лет);\quad p=m=12;\ \ j=12\%,\ \ i=\frac{j}{m}=1\%.$$

Платеж заемщика в начале каждого месяца можно рассчитать по формуле:

$$R=PA_{pre}:\left(\frac{1-(1+i)^{-mn}}{i}(1+i)\right)$$

$$R=600000:\left(\frac{1-1{,}01^{-60}}{0{,}01}1{,}01\right)\approx 13214{,}52\,(руб.)$$

2.4. Эквивалентность финансовых рент

Финансовые ренты можно считать эквивалентными, если в результате одновременного дисконтирования их обобщающих характеристик на более раннюю дату или наращения на более позднюю дату они становятся равными. Для операций дисконтирования и наращения используются процентные ставки, соответствующие тем финансовым операциям, в ходе которых возникла потребность сравнить потоки платежей. Все изменения потоков платежей, ранее оговоренных в соглашениях между заемщиками и кредиторами, могут выполняться на основе принципа финансовой эквивалентности обязательств указанных сторон, до и после изменения соглашений.

Пример 42. Банк предоставил заемщику ипотечный кредит на следующих условиях:

- первоначальный платеж составляет 20% от полной стоимости квартиры, равной 2500000 руб.;
- проценты по остатку задолженности начисляются ежемесячно, согласно номинальной (годовой) процентной ставке 12%;
- погашается кредит постоянными платежами в конце каждого месяца;
- срок погашения 25 лет.

Определить постоянный платеж в конце каждого месяца. Найти срок погашения кредита в случае увеличения ежемесячного платежа на 40% после пяти лет погашения кредита. При необходимости выполнить корректировку последнего платежа.

Решение. Первоначальный вариант погашения кредита ежемесячными платежами представляет собой постоянную ренту постнумерандо, современная стоимость которой равна сумме предоставленного кредита.

$$PA_{post}=2500000\,(1-0{,}20)=2000000\,(руб.)$$

$$n=25(лет);\quad p=m=12;\quad j=12\%,\ \ \frac{j}{m}=i=1\%$$

Платеж заемщика в конце каждого месяца можно рассчитать по формуле:

$$R = PA_{post} : \frac{1-(1+i)^{-mn}}{i}$$

$$R = 2000000 : \frac{1-(1+0{,}01)^{-12\cdot 25}}{0{,}01} \approx 21064{,}48(\textit{руб.})$$

Измененный вариант погашения кредита ежемесячными платежами представляет собой две постоянных ренты постнумерандо:

– с платежами $R^{*} = 21064{,}48(\textit{руб.})$ и сроком $n^{*} = 5(\textit{лет})$;

– с платежами $R^{**} = 1{,}4R^{*} = 29490{,}28(\textit{руб.})$и неизвестным сроком n^{**}.

Современная стоимость первой ренты, на момент предоставления банком ипотечного кредита заемщику:

$$PA^{*}_{post} = R^{*} \cdot \frac{1-(1+i)^{-mn}}{i}$$

$$PA^{*}_{post} = 21064{,}48\frac{1-(1+0{,}01)^{-12\cdot 5}}{0{,}01} \approx 946954{,}64(\textit{руб.})$$

Современная стоимость второй ренты, в начале шестого года срока займа:

$$PA^{**}_{post} = \left(PA_{post} - PA^{*}_{post}\right)(1+i)^{mn^{*}}$$

$$PA^{**}_{post} = (2000000 - 946954{,}64)\cdot 1{,}01^{12\cdot 5} = 1913064{,}04(\textit{руб.})$$

Срок второй ренты можно рассчитать по формуле:

$$n^{**}p = \left[\frac{\ln\left(1-\frac{PA^{**}_{post}}{R^{**}}i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}\right]$$

$$n^{**}12 = \left[\frac{\ln\left(1-\frac{1913064{,}04}{29490{,}28}0{,}01\right)^{-1}}{\ln(1+0{,}01)}\right] = [105{,}137] = 105(\textit{месяцев})$$

Срок второй постоянной ренты постнумерандо составляет 8 лет и 9 месяцев, что значительно меньше 20 лет в первоначальном варианте погашения кредита. Необходима корректировка последнего платежа.

Современная стоимость ста пяти постоянных платежей второй ренты, в начале шестого года срока займа:

$$PA_{post}^{**} = R^{**} \cdot \frac{1-(1+i)^{-mn}}{i}$$

$$PA_{post}^{**} = 29490{,}28 \frac{1-(1+0{,}01)^{-105}}{0{,}01} \approx 1911655{,}44 (руб.)$$

Корректировка последнего платежа второй ренты:

$$R_{pn^{**}}^{**} = R^{**} + \Delta PA_{post}^{**} (1+i)^{mn^{**}}$$

$$R_{105}^{**} = 29490{,}28 + (1913064{,}04 - 1911655{,}44) \cdot 1{,}01^{105} \approx 33494{,}63 (руб.)$$

Первоначальный вариант погашения кредита включает 300 платежей в конце каждого месяца в течение 25 лет по $R = 21064{,}48 (руб.)$. Измененный вариант погашения кредита включает165 платежей в конце каждого месяца в течение 13 лет и 9 месяцев. Сначала шестьдесят ежемесячных (постнумерандо) платежей по $R^{*} = 21064{,}48 (руб.)$, затем сто четыре ежемесячных платежа по $R^{**} = 29490{,}28 (руб.)$ и последний платеж $R_{105}^{**} = 33494{,}63 (руб.)$.

И первоначальный и измененный варианты погашения ипотечного кредита представляют собой эквивалентные потоки платежей, поскольку их дисконтирование на начало кредитной операции приводит к одной и той же сумме предоставленного ипотечного кредита.

Пример 43. ВКЛАДЧИК открыл счет в БАНКЕ для формирования своего пенсионного фонда. Согласно договору между БАНКОМ и ВКЛАДЧИКОМ:

1. ВКЛАДЧИК в течение срока $n^{*} = 35 (лет)$ делает постоянные взносы $R^{*} (руб.)$ в начале каждого месяца.
2. Если вкладчик не предъявит требование о возврате суммы вклада вместе с причитающимися процентами до окончания срока, указанного в п.1, то ВКЛАДЧИК в течение очередного срока $n^{**} = 20 (лет)$ будет снимать со счета в конце каждого месяца постоянные суммы $R^{**} = 30000 (руб.)$.
3. Номинальная (годовая) процентная ставка по вкладу 6% не меняется в течение сроков, указанных в п.1,2. БАНК начисляет проценты по сумме вклада ежемесячно и присоединяет их к сумме вклада.
4. В случае востребования ВКЛАДЧИКОМ суммы вклада до дня окончания очередного года срока договора, указанного в п.1 и 2, исчисление дохода (процентов) за неполный год производится исходя из процентной ставки по вкладам до востребования.

Определить величину постоянного взноса $R^{*} (руб.)$ в начале каждого месяца в течение срока $n^{*} = 35 (лет)$, указанного в п. 1 договора между БАНКОМ и ВКЛАДЧИКОМ, достаточного для получения в конце каждого месяца в течение срока $n^{**} = 20(лет)$ постоянной суммы $R^{**} = 30000(руб.)$, указанной в п. 2.

Решение. Согласно договору между БАНКОМ и ВКЛАДЧИКОМ операция по счету включает две эквивалентных постоянных ренты:

– рента пренумерандо, представленная в п. 1,
– рента постнумерандо, представленная в п. 2.

Параметры второй ренты постнумерандо, представленной в п. 2:

$R^{**} = 30000(руб.)$; $n^{**} = 20(лет)$

$p = m = 12;\quad j = 6\%,\ \frac{j}{m} = i = 0,5\%$

Современная стоимость второй ренты:

$$PA_{post}^{**} = R^{**} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-m n^{**}}}{i}$$

$$PA_{post}^{**} = 30000 \frac{1 - (1 + 0,005)^{-12 \cdot 20}}{0,005} \approx 4187423,15(руб.)$$

Параметры первой ренты пренумерандо, представленной в п. 1:

$SA_{pre}^{*} = PA_{post}^{**};\quad n^{*} = 35(лет)$

$p = m = 12;\quad j = 6\%,\ \frac{j}{m} = i = 0,5\%$

Постоянный взнос первой ренты:

$$R^{*} = SA_{pre}^{*} : \frac{(1+i)^{m n^{*}} - 1}{i}(1+i)$$

$$R^{*} = 4187423,15 : \frac{1,005^{12 \cdot 30} - 1}{0,005} 1,005 \approx 2924,52(руб.)$$

Согласно договору между БАНКОМ и ВКЛАДЧИКОМ с помощью постоянных взносов на счет банка в начале месяца $R^{*} = 2924,52(руб.)$ в течение $n^{*} = 35(лет)$ может быть накоплена сумма $SA_{pre}^{*} = 4187423,15(руб.)$, достаточная для того, чтобы можно было снимать со счета в конце месяца в течение следующих $n^{**} = 20(лет)$ постоянную сумму $R^{**} = 30000(руб.)$.

Глава 3. Погашение кредита в рассрочку

3.1. Основные понятия и определения

Анализ кредитной операции включает план погашения займа, в котором представлены платежи заемщика кредитору. В условия погашения кредита включены: срок займа, процентная ставка, информация о наличии или отсутствии льготного периода с указанием его вида и продолжительности.

При формировании плана погашения займа используются параметры:

D_o – основной долг (первоначальная сумма кредита);

$n(лет)$ – срок займа;

$p = \{1,\ 2,\ 4,\ 12\}$ – количество платежей по кредиту в течение года, платежи заемщика кредитору выполняются в конце каждого из периодов (года, полугодия, квартала, месяца) в течение всего срока займа;

$n_k\,(лет)$ – временной промежуток (период) между соседними платежами по кредиту $\left(k = \overline{1, n\,p}\right)$;

j – номинальная (годовая) процентная ставка по кредиту;

$L(лет)$ – льготный период срока займа;

D_{Lp} – сумма долга на конец льготного периода срока займа.

В план погашения займа включаются рассчитанные показатели:

D_{k-1} – остаток задолженности после $(k-1)$ платежей по кредиту;

$I_k = D_{k-1} \cdot j \cdot n_k$ – проценты по остатку задолженности в составе платежа заемщика с номером k;

R_k – погашенная часть основного долга в составе платежа заемщика с номером k;

$Y_k = I_k + R_k$ – платеж заемщика с номером k, состоящий из текущих процентов по остатку задолженности и средств, идущих на погашение полученной суммы кредита D_o;

$D_k = D_{k-1} - R_k\,,\ \left(k = \overline{1, n\,p}\right)$.

Различают льготные периоды двух видов, в течение которых:

а) заемщик выплачивает кредитору только проценты по остатку задолженности (задолженность не увеличивается)

$$R_k = 0,\ \ Y_k = I_k\,,\ \ k = \overline{0, L\,p}\ \ \Rightarrow\ \ D_{Lp} = D_o$$

б) заемщик ничего не платит кредитору (задолженность увеличивается)

$$Y_k = 0,\ \ k = \overline{0, Lp}\ \ \Rightarrow\ \ D_{Lp} = D_o \prod_{k=1}^{Lp} \left(1 + j \cdot n_k\right)$$

3.2. Погашение кредита дифференцированными выплатами (равными долями)

Основной долг D_o или долг на конец льготного периода срока займа D_{Lp} погашается равными долями (d) в течение срока займа. При формировании плана погашения займа используются следующие формулы:

$$\forall k > Lp \qquad R_k = d = \frac{D_{Lp}}{(n-L)p}$$

$$\forall k \qquad I_k = D_{k-1} \cdot j \cdot n_k$$

$$Y_k = I_k + R_k$$

$$D_k = D_{k-1} - R_k$$

Примечание. Недостаток данного способа погашения долга состоит в том, что срочные уплаты заемщика в начале срока погашения займа выше.

Пример 44. Составить планы погашения кредита 300000 руб., полученного 27.01.2013, с номинальной (годовой) процентной ставкой по займу 12%, со сроком погашения 3 года, используя способ погашения в рассрочку равными долями в форме платежей 27 числа каждого месяца. Рассмотреть варианты отсутствия и наличия льготного периода:

а) нет льготного периода;
б) имеется льготный период, первый год, в течение которого заемщик выплачивает кредитору только проценты по остатку задолженности;
в) имеется льготный период, первый год, в течение которого заемщик ничего не платит кредитору.

Решение.

$$D_o = 300000\,(\textit{руб.})$$

$$n = 3\,(\textit{года})$$

$$p = 12$$

$$j = 12\%$$

Составим планы погашения кредита, используя способ погашения в рассрочку равными долями в составе платежей 27 числа каждого месяца. Рассмотрим варианты отсутствия и наличия льготного периода.

а) Нет льготного периода.

$$R_k = d = \frac{D_o}{n\,p}$$

$$R_k = \frac{300000}{3 \cdot 12} = 8333{,}33\,(\textit{руб.})$$

Таблица 12

План погашения кредита

k	Дата платежа	D_{k-1}	I_k	R_k	Y_k
1	27.02.2013	300000,00	3057,53	8333,33	11390,86
2	27.03.2013	291666,67	2684,93	8333,33	11018,26
3	27.04.2013	283333,34	2887,67	8333,33	11221,00
4	27.05.2013	275000,01	2712,33	8333,33	11045,66
5	27.06.2013	266666,68	2717,81	8333,33	11051,14
6	27.07.2013	258333,35	2547,95	8333,33	10881,28
7	27.08.2013	250000,02	2547,95	8333,33	10881,28
8	27.09.2013	241666,69	2463,01	8333,33	10796,34
9	27.10.2013	233333,36	2301,37	8333,33	10634,70
10	27.11.2013	225000,03	2293,15	8333,33	10626,48
11	27.12.2013	216666,70	2136,99	8333,33	10470,32
12	27.01.2014	208333,37	2123,29	8333,33	10456,62
13	27.02.2014	200000,04	2038,36	8333,33	10371,69
14	27.03.2014	191666,71	1764,38	8333,33	10097,71
15	27.04.2014	183333,38	1868,49	8333,33	10201,82
16	27.05.2014	175000,05	1726,03	8333,33	10059,36
17	27.06.2014	166666,72	1698,63	8333,33	10031,96
18	27.07.2014	158333,39	1561,64	8333,33	9894,97
19	27.08.2014	150000,06	1528,77	8333,33	9862,10
20	27.09.2014	141666,73	1443,84	8333,33	9777,17
21	27.10.2014	133333,40	1315,07	8333,33	9648,40
22	27.11.2014	125000,07	1273,97	8333,33	9607,30
23	27.12.2014	116666,74	1150,69	8333,33	9484,02
24	27.01.2015	108333,41	1104,11	8333,33	9437,44
25	27.02.2015	100000,08	1019,18	8333,33	9352,51
26	27.03.2015	91666,75	843,84	8333,33	9177,17
27	27.04.2015	83333,42	849,32	8333,33	9182,65
28	27.05.2015	75000,09	739,73	8333,33	9073,06
29	27.06.2015	66666,76	679,45	8333,33	9012,78
30	27.07.2015	58333,43	575,34	8333,33	8908,67
31	27.08.2015	50000,10	509,59	8333,33	8842,92
32	27.09.2015	41666,77	424,66	8333,33	8757,99
33	27.10.2015	33333,44	328,77	8333,33	8662,10
34	27.11.2015	25000,11	254,80	8333,33	8588,13
35	27.12.2015	16666,78	164,38	8333,33	8497,71
36	27.01.2016	8333,45	84,93	8333,45	8418,38

б) Есть льготный период, в течение которого заемщик выплачивает кредитору проценты по остатку задолженности 27 числа каждого месяца. $L = 1(год)$

$$Y_k = I_k,\ k = \overline{1{,}12}$$

$$D_{Lp} = D_o; \quad D_{12} = 300000\,(руб.)$$

$$R_k = \begin{cases} 0, & 0 \le k \le Lp \\ d = \dfrac{D_{Lp}}{(n-L)p}, & k > Lp \end{cases} \Rightarrow R_k = \begin{cases} 0, & 0 \le k \le 12 \\ d = 12500, & k > 12 \end{cases}$$

Таблица 13

План погашения кредита

k	Дата платежа	D_{k-1}	I_k	R_k	Y_k
1	27.02.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
2	27.03.2013	300000,00	2761,64	0	2761,64
3	27.04.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
4	27.05.2013	300000,00	2958,90	0	2958,90
5	27.06.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
6	27.07.2013	300000,00	2958,90	0	2958,90
7	27.08.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
8	27.09.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
9	27.10.2013	300000,00	2958,90	0	2958,90
10	27.11.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
11	27.12.2013	300000,00	2958,90	0	2958,90
12	27.01.2014	300000,00	3057,53	0	3057,53
13	27.02.2014	300000,00	3057,53	12500,00	15557,53
14	27.03.2014	287500,00	2646,58	12500,00	15146,58
15	27.04.2014	275000,00	2802,74	12500,00	15302,74
16	27.05.2014	262500,00	2589,04	12500,00	15089,04
17	27.06.2014	250000,00	2547,95	12500,00	15047,95
18	27.07.2014	237500,00	2342,47	12500,00	14842,47
19	27.08.2014	225000,00	2293,15	12500,00	14793,15
20	27.09.2014	212500,00	2165,75	12500,00	14665,75
21	27.10.2014	200000,00	1972,60	12500,00	14472,60
22	27.11.2014	187500,00	1910,96	12500,00	14410,96
23	27.12.2014	175000,00	1726,03	12500,00	14226,03
24	27.01.2015	162500,00	1656,16	12500,00	14156,16
25	27.02.2015	150000,00	1528,77	12500,00	14028,77
26	27.03.2015	137500,00	1265,75	12500,00	13765,75
27	27.04.2015	125000,00	1273,97	12500,00	13773,97
28	27.05.2015	112500,00	1109,59	12500,00	13609,59
29	27.06.2015	100000,00	1019,18	12500,00	13519,18
30	27.07.2015	87500,00	863,01	12500,00	13363,01
31	27.08.2015	75000,00	764,38	12500,00	13264,38
32	27.09.2015	62500,00	636,99	12500,00	13136,99
33	27.10.2015	50000,00	493,15	12500,00	12993,15
34	27.11.2015	37500,00	382,19	12500,00	12882,19
35	27.12.2015	25000,00	246,58	12500,00	12746,58
36	27.01.2016	12500,00	127,40	12500,00	12627,40

в) Есть льготный период, в течение которого заемщик ничего не выплачивает кредитору $L = 1(\textit{год})$, $Y_k = 0$, $k = \overline{1{,}12}$.

$$D_{Lp} = D_o \prod_{k=1}^{Lp} (1 + j \cdot n_k); \quad D_{12} = 338047{,}34 (руб.)$$

$$R_k = \begin{cases} 0, & 0 \le k \le Lp \\ d = \dfrac{D_{Lp}}{(n-L)p}, & k > Lp \end{cases} \Rightarrow R_k = \begin{cases} 0, & 0 \le k \le 12 \\ d = 14085{,}31 & k > 12 \end{cases}$$

Таблица 14

План погашения кредита

k	Дата платежа	D_{k-1}	I_k	R_k	Y_k
1	27.02.2013	300000,00	3057,53	0	0
2	27.03.2013	303057,53	2789,79	0	0
3	27.04.2013	305847,32	3117,13	0	0
4	27.05.2013	308964,45	3047,32	0	0
5	27.06.2013	312011,77	3179,96	0	0
6	27.07.2013	315191,73	3108,74	0	0
7	27.08.2013	318300,47	3244,05	0	0
8	27.09.2013	321544,52	3277,11	0	0
9	27.10.2013	324821,63	3203,72	0	0
10	27.11.2013	328025,35	3343,16	0	0
11	27.12.2013	331368,51	3268,29	0	0
12	27.01.2014	334636,80	3410,54	0	0
13	27.02.2014	338047,34	3445,30	14085,31	17530,61
14	27.03.2014	323962,03	2982,23	14085,31	17067,54
15	27.04.2014	309876,72	3158,20	14085,31	17243,51
16	27.05.2014	295791,41	2917,39	14085,31	17002,70
17	27.06.2014	281706,10	2871,09	14085,31	16956,40
18	27.07.2014	267620,79	2639,55	14085,31	16724,86
19	27.08.2014	253535,48	2583,98	14085,31	16669,29
20	27.09.2014	239450,17	2440,42	14085,31	16525,73
21	27.10.2014	225364,86	2222,78	14085,31	16308,09
22	27.11.2014	211279,55	2153,31	14085,31	16238,62
23	27.12.2014	197194,24	1944,93	14085,31	16030,24
24	27.01.2015	183108,93	1866,21	14085,31	15951,52
25	27.02.2015	169023,62	1722,65	14085,31	15807,96
26	27.03.2015	154938,31	1426,28	14085,31	15511,59
27	27.04.2015	140853,00	1435,54	14085,31	15520,85
28	27.05.2015	126767,69	1250,31	14085,31	15335,62
29	27.06.2015	112682,38	1148,43	14085,31	15233,74
30	27.07.2015	98597,07	972,46	14085,31	15057,77
31	27.08.2015	84511,76	861,33	14085,31	14946,64
32	27.09.2015	70426,45	717,77	14085,31	14803,08
33	27.10.2015	56341,14	555,69	14085,31	14641,00
34	27.11.2015	42255,83	430,66	14085,31	14515,97
35	27.12.2015	28170,52	277,85	14085,31	14363,16
36	27.01.2016	14085,21	143,55	14085,21	14228,76

3.3. Погашение кредита аннуитетными платежами (равными срочными уплатами)

Основной долг D_o, или долг с начисленными за льготный период процентами D_{Lp}, погашается равными срочными уплатами в конце каждого временного промежутка между платежами. При формировании плана погашения займа используются следующие формулы:

$$\forall k > L\,p \qquad Y_k = D_{Lp} : \frac{1-\left(1+\dfrac{j}{p}\right)^{-(n-L)\,p}}{j/p} = const$$

$$\forall k \qquad I_k = D_{k-1} \cdot j \cdot n_k$$

$$R_k = Y_k - I_k$$

$$D_k = D_{k-1} - R_k$$

Пример 45. Составить планы погашения кредита 300000 руб., полученного 27.01.2013, с номинальной (годовой) процентной ставкой по займу 12%, со сроком погашения 3 года, используя способ погашения в рассрочку равными срочными уплатами в форме платежей 27 числа каждого месяца. Рассмотреть варианты отсутствия и наличия льготного периода:

а) нет льготного периода;
б) имеется льготный период, первый год, в течение которого заемщик выплачивает кредитору только проценты по остатку задолженности;
в) имеется льготный период, первый год, в течение которого заемщик ничего не платит кредитору.

Решение.

$$D_o = 300000\,(руб.)$$

$$n = 3\,(года)$$

$$p = 12$$

$$j = 12\%$$

Составим планы погашения кредита, используя способ погашения в рассрочку равными срочными уплатами в конце каждого месяца. Рассмотрим варианты отсутствия и наличия льготного периода.

а) Вариант без льготного периода.

$$Y_k = D_o : \frac{1-\left(1+\dfrac{j}{p}\right)^{-n\,p}}{j/p}; \quad Y_k = 300000 : \frac{1-1{,}01^{-36}}{0{,}01} \approx 9964{,}29\,(руб.)$$

Таблица 15

План погашения кредита

k	Дата платежа	D_{k-1}	I_k	R_k	Y_k
1	27.02.2013	300000,00	3057,53	6906,76	9964,29
2	27.03.2013	293093,24	2698,06	7266,23	9964,29
3	27.04.2013	285827,01	2913,09	7051,20	9964,29
4	27.05.2013	278775,81	2749,57	7214,72	9964,29
5	27.06.2013	271561,09	2767,69	7196,60	9964,29
6	27.07.2013	264364,49	2607,43	7356,86	9964,29
7	27.08.2013	257007,63	2619,37	7344,92	9964,29
8	27.09.2013	249662,71	2544,51	7419,78	9964,29
9	27.10.2013	242242,93	2389,25	7575,04	9964,29
10	27.11.2013	234667,89	2391,68	7572,61	9964,29
11	27.12.2013	227095,28	2239,84	7724,45	9964,29
12	27.01.2014	219370,83	2235,78	7728,51	9964,29
13	27.02.2014	211642,32	2157,01	7807,28	9964,29
14	27.03.2014	203835,04	1876,40	8087,89	9964,29
15	27.04.2014	195747,15	1995,01	7969,28	9964,29
16	27.05.2014	187777,87	1852,06	8112,23	9964,29
17	27.06.2014	179665,64	1831,11	8133,18	9964,29
18	27.07.2014	171532,46	1691,83	8272,46	9964,29
19	27.08.2014	163260,00	1663,91	8300,38	9964,29
20	27.09.2014	154959,62	1579,31	8384,98	9964,29
21	27.10.2014	146574,64	1445,67	8518,62	9964,29
22	27.11.2014	138056,02	1407,04	8557,25	9964,29
23	27.12.2014	129498,77	1277,25	8687,04	9964,29
24	27.01.2015	120811,73	1231,29	8733,00	9964,29
25	27.02.2015	112078,73	1142,28	8822,01	9964,29
26	27.03.2015	103256,72	950,53	9013,76	9964,29
27	27.04.2015	94242,96	960,50	9003,79	9964,29
28	27.05.2015	85239,17	840,72	9123,57	9964,29
29	27.06.2015	76115,60	775,75	9188,54	9964,29
30	27.07.2015	66927,06	660,10	9304,19	9964,29
31	27.08.2015	57622,87	587,28	9377,01	9964,29
32	27.09.2015	48245,86	491,71	9472,58	9964,29
33	27.10.2015	38773,28	382,42	9581,87	9964,29
34	27.11.2015	29191,41	297,51	9666,78	9964,29
35	27.12.2015	19524,63	192,57	9771,72	9964,29
36	27.01.2016	9752,91	99,40	9752,91	9852,31

б) Есть льготный период, в течение которого заемщик выплачивает кредитору проценты по остатку задолженности 27 числа каждого месяца. $L = 1(год)$

$Y_k = I_k,\ k = \overline{1,12}$

$D_{Lp} = D_o;\quad D_{12} = 300000\ (руб.)$

$$Y_k = D_{Lp} : \frac{1-\left(1+\frac{j}{p}\right)^{-(n-L)p}}{j/p};\ Y_k = 300000 : \frac{1-1{,}01^{-24}}{0{,}01} \approx 14122{,}04 (руб.)$$
$$(\forall k > Lp)$$

Таблица 16

План погашения кредита

k	Дата платежа	D_{k-1}	I_k	R_k	Y_k
1	27.02.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
2	27.03.2013	300000,00	2761,64	0	2761,64
3	27.04.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
4	27.05.2013	300000,00	2958,90	0	2958,90
5	27.06.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
6	27.07.2013	300000,00	2958,90	0	2958,90
7	27.08.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
8	27.09.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
9	27.10.2013	300000,00	2958,90	0	2958,90
10	27.11.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
11	27.12.2013	300000,00	2958,90	0	2958,90
12	27.01.2014	300000,00	3057,53	0	3057,53
13	27.02.2014	300000,00	3057,53	11064,51	14122,04
14	27.03.2014	288935,49	2659,79	11462,25	14122,04
15	27.04.2014	277473,24	2827,95	11294,09	14122,04
16	27.05.2014	266179,15	2625,33	11496,71	14122,04
17	27.06.2014	254682,44	2595,67	11526,37	14122,04
18	27.07.2014	243156,07	2398,25	11723,79	14122,04
19	27.08.2014	231432,28	2358,71	11763,33	14122,04
20	27.09.2014	219668,95	2238,82	11883,22	14122,04
21	27.10.2014	207785,73	2049,39	12072,65	14122,04
22	27.11.2014	195713,08	1994,66	12127,38	14122,04
23	27.12.2014	183585,70	1810,71	12311,33	14122,04
24	27.01.2015	171274,37	1745,59	12376,45	14122,04
25	27.02.2015	158897,92	1619,45	12502,59	14122,04
26	27.03.2015	146395,33	1347,64	12774,40	14122,04
27	27.04.2015	133620,93	1361,84	12760,20	14122,04
28	27.05.2015	120860,73	1192,05	12929,99	14122,04
29	27.06.2015	107930,74	1100,01	13022,03	14122,04
30	27.07.2015	94908,71	936,09	13185,95	14122,04
31	27.08.2015	81722,76	832,90	13289,14	14122,04
32	27.09.2015	68433,62	697,46	13424,58	14122,04
33	27.10.2015	55009,04	542,55	13579,49	14122,04
34	27.11.2015	41429,55	422,24	13699,80	14122,04
35	27.12.2015	27729,75	273,50	13848,54	14122,04
36	27.01.2016	13881,21	141,47	13881,21	14022,68

в) Есть льготный период, в течение которого заемщик ничего не выплачивает кредитору $L = 1(год),\ \ Y_k = 0,\ k = \overline{1{,}12}$.

$$D_{Lp} = D_o \prod_{k=1}^{Lp} \left(1 + j \cdot n_k\right); \quad D_{12} = 338047{,}34\,(руб.)$$

$$Y_k = D_{Lp} : \frac{1 - \left(1 + \dfrac{j}{p}\right)^{-(n-L)p}}{j/p}; \quad Y_k = 338047{,}34 : \frac{1 - 1{,}01^{-24}}{0{,}01} \underset{\forall k > Lp}{\approx} 15913{,}06\,(руб.)$$

Таблица 17

План погашения кредита

k	Дата платежа	D_{k-1}	I_k	R_k	Y_k
1	27.02.2013	300000,00	3057,53	0	0
2	27.03.2013	303057,53	2789,79	0	0
3	27.04.2013	305847,32	3117,13	0	0
4	27.05.2013	308964,45	3047,32	0	0
5	27.06.2013	312011,77	3179,96	0	0
6	27.07.2013	315191,73	3108,74	0	0
7	27.08.2013	318300,47	3244,05	0	0
8	27.09.2013	321544,52	3277,11	0	0
9	27.10.2013	324821,63	3203,72	0	0
10	27.11.2013	328025,35	3343,16	0	0
11	27.12.2013	331368,51	3268,29	0	0
12	27.01.2014	334636,8	3410,54	0	0
13	27.02.2014	338047,34	3445,30	12467,76	15913,06
14	27.03.2014	325579,58	2997,12	12915,94	15913,06
15	27.04.2014	312663,64	3186,60	12726,46	15913,06
16	27.05.2014	299937,18	2958,28	12954,78	15913,06
17	27.06.2014	286982,40	2924,86	12988,20	15913,06
18	27.07.2014	273994,20	2702,41	13210,65	15913,06
19	27.08.2014	260783,55	2657,85	13255,21	15913,06
20	27.09.2014	247528,34	2522,75	13390,31	15913,06
21	27.10.2014	234138,03	2309,31	13603,75	15913,06
22	27.11.2014	220534,28	2247,64	13665,42	15913,06
23	27.12.2014	206868,86	2040,35	13872,71	15913,06
24	27.01.2015	192996,15	1966,97	13946,09	15913,06
25	27.02.2015	179050,06	1824,84	14088,22	15913,06
26	27.03.2015	164961,84	1518,55	14394,51	15913,06
27	27.04.2015	150567,33	1534,55	14378,51	15913,06
28	27.05.2015	136188,82	1343,23	14569,83	15913,06
29	27.06.2015	121618,99	1239,51	14673,55	15913,06
30	27.07.2015	106945,44	1054,80	14858,26	15913,06
31	27.08.2015	92087,18	938,53	14974,53	15913,06
32	27.09.2015	77112,65	785,92	15127,14	15913,06
33	27.10.2015	61985,51	611,36	15301,70	15913,06
34	27.11.2015	46683,81	475,79	15437,27	15913,06
35	27.12.2015	31246,54	308,19	15604,87	15913,06
36	27.01.2016	15641,67	159,42	15641,67	15801,09

3.4. Погашение кредита равными платежами, оговоренными между заемщиком и кредитором

Основной долг D_o, или долг с начисленными за льготный период процентами D_{Lp}, погашается платежами, оговоренными между заемщиком и кредитором. Все платежи заемщика кредитору выполняются в конце каждого временного промежутка между платежами. Они могут быть равными. Срок погашения займа определяется. При формировании плана погашения займа используются следующие формулы:

$$\forall k > Lp \quad Y_k = I_k + R_k = Y = const$$

$$\forall k \quad I_k = D_{k-1} \cdot j \cdot n_k$$

$$D_k = D_{k-1} - R_k$$

$$np = Lp + \left[\frac{\ln\left(1 - \frac{D_{Lp}}{Y}\frac{j}{p}\right)^{-1}}{\ln\left(1 + \frac{j}{p}\right)} \right] + \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Примечания.

1) Кредит не может быть погашен, если выполняется условие $Y \le I_{Lp+1}$.
2) Практически всегда нужна корректировка последней срочной уплаты.

Пример 46. Составить планы погашения кредита 300000 руб., полученного 27.01.2013, с номинальной (годовой) процентной ставкой по займу 12%, со сроком погашения 3 года, используя способ погашения в рассрочку равными выплатами по 15900 руб. в форме платежей 27 числа каждого месяца. Рассмотреть варианты отсутствия и наличия и льготного периода:

а) нет льготного периода;
б) имеется льготный период, первый год, в течение которого заемщик выплачивает кредитору только проценты по остатку задолженности;
в) имеется льготный период, первый год, в течение которого заемщик ничего не платит кредитору.

Решение.

$$D_o = 300000\,(руб.)$$

$$p = 12$$

$$Y_k = Y = 15900\,(руб.)$$

$$j = 12\%$$

Составим планы погашения кредита, используя способ погашения в рассрочку равными платежами 27 числа каждого месяца. Рассмотрим варианты отсутствия и наличия льготного периода.

а) Вариант без льготного периода.

$$n\,p=\left[\frac{\ln\left(1-\frac{D_o}{Y}\frac{j}{p}\right)^{-1}}{\ln\left(1+\frac{j}{p}\right)}\right];\ n\cdot 12=\left[\frac{\ln\left(1-\frac{300000}{15900}0{,}01\right)^{-1}}{\ln(1+0{,}01)}\right]\approx[21{,}01]=21(\textit{мес.})$$

Таблица 18

План погашения кредита

k	Дата платежа	D_{k-1}	I_k	R_k	Y_k
1	27.02.2013	300000,00	3057,53	12842,47	15900,00
2	27.03.2013	287157,53	2643,42	13256,58	15900,00
3	27.04.2013	273900,95	2791,54	13108,46	15900,00
4	27.05.2013	260792,49	2572,20	13327,80	15900,00
5	27.06.2013	247464,69	2522,11	13377,89	15900,00
6	27.07.2013	234086,80	2308,80	13591,20	15900,00
7	27.08.2013	220495,60	2247,24	13652,76	15900,00
8	27.09.2013	206842,84	2108,10	13791,90	15900,00
9	27.10.2013	193050,94	1904,06	13995,94	15900,00
10	27.11.2013	179055,00	1824,89	14075,11	15900,00
11	27.12.2013	164979,89	1627,20	14272,80	15900,00
12	27.01.2014	150707,09	1535,97	14364,03	15900,00
13	27.02.2014	136343,06	1389,58	14510,42	15900,00
14	27.03.2014	121832,64	1121,53	14778,47	15900,00
15	27.04.2014	107054,17	1091,07	14808,93	15900,00
16	27.05.2014	92245,24	909,82	14990,18	15900,00
17	27.06.2014	77255,06	787,37	15112,63	15900,00
18	27.07.2014	62142,43	612,91	15287,09	15900,00
19	27.08.2014	46855,34	477,54	15422,46	15900,00
20	27.09.2014	31432,88	320,36	15579,64	15900,00
21	27.10.2014	15853,24	156,36	15853,24	16009,60

б) Есть льготный период, в течение которого заемщик выплачивает кредитору проценты по остатку задолженности 27 числа каждого месяца. $L=1(\textit{год})$

$Y_k=I_k,\ k=\overline{1{,}12}$

$D_{Lp}=D_o;\quad D_{12}=300000\,(\textit{руб.})$

$$n\cdot 12=12+\left[\frac{\ln\left(1-\frac{300000}{15900}0{,}01\right)^{-1}}{\ln(1+0{,}01)}\right]\approx 12+[21{,}014]=33(\textit{месяца})$$

Таблица 19

План погашения кредита

k	Дата платежа	D_{k-1}	I_k	R_k	Y_k
1	27.02.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
2	27.03.2013	300000,00	2761,64	0	2761,64
3	27.04.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
4	27.05.2013	300000,00	2958,90	0	2958,90
5	27.06.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
6	27.07.2013	300000,00	2958,90	0	2958,90
7	27.08.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
8	27.09.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
9	27.10.2013	300000,00	2958,90	0	2958,90
10	27.11.2013	300000,00	3057,53	0	3057,53
11	27.12.2013	300000,00	2958,90	0	2958,90
12	27.01.2014	300000,00	3057,53	0	3057,53
13	27.02.2014	300000,00	3057,53	12842,47	15900,00
14	27.03.2014	287157,53	2643,42	13256,58	15900,00
15	27.04.2014	273900,95	2791,54	13108,46	15900,00
16	27.05.2014	260792,49	2572,20	13327,80	15900,00
17	27.06.2014	247464,69	2522,11	13377,89	15900,00
18	27.07.2014	234086,80	2308,80	13591,20	15900,00
19	27.08.2014	220495,60	2247,24	13652,76	15900,00
20	27.09.2014	206842,84	2108,10	13791,90	15900,00
21	27.10.2014	193050,94	1904,06	13995,94	15900,00
22	27.11.2014	179055,00	1824,89	14075,11	15900,00
23	27.12.2014	164979,89	1627,20	14272,80	15900,00
24	27.01.2015	150707,09	1535,97	14364,03	15900,00
25	27.02.2015	136343,06	1389,58	14510,42	15900,00
26	27.03.2015	121832,64	1121,53	14778,47	15900,00
27	27.04.2015	107054,17	1091,07	14808,93	15900,00
28	27.05.2015	92245,24	909,82	14990,18	15900,00
29	27.06.2015	77255,06	787,37	15112,63	15900,00
30	27.07.2015	62142,43	612,91	15287,09	15900,00
31	27.08.2015	46855,34	477,54	15422,46	15900,00
32	27.09.2015	31432,88	320,36	15579,64	15900,00
33	27.10.2015	15853,24	156,36	15853,24	16009,60

в) Есть льготный период, в течение которого заемщик ничего не выплачивает кредитору.

$L = 1(год)$

$Y_k = 0,\ k = \overline{1{,}12}$

$$D_{Lp} = D_o \prod_{k=1}^{Lp} \left(1 + j \cdot n_k\right); \quad D_{12} = 338047{,}34\left(руб.\right)$$

$$n \cdot 12 = 12 + \left[\frac{\ln\left(1 - \frac{338047,34}{15900} 0,01\right)^{-1}}{\ln(1+0,01)} \right] \approx 12 + [24,022] = 36 (\textit{месяцев})$$

Таблица 20

План погашения кредита

k	Дата платежа	D_{k-1}	I_k	R_k	Y_k
1	27.02.2013	300000,00	3057,53	0	0
2	27.03.2013	303057,53	2789,79	0	0
3	27.04.2013	305847,32	3117,13	0	0
4	27.05.2013	308964,45	3047,32	0	0
5	27.06.2013	312011,77	3179,96	0	0
6	27.07.2013	315191,73	3108,74	0	0
7	27.08.2013	318300,47	3244,05	0	0
8	27.09.2013	321544,52	3277,11	0	0
9	27.10.2013	324821,63	3203,72	0	0
10	27.11.2013	328025,35	3343,16	0	0
11	27.12.2013	331368,51	3268,29	0	0
12	27.01.2014	334636,8	3410,54	0	0
13	27.02.2014	338047,34	3445,30	12454,70	15900,00
14	27.03.2014	325592,64	2997,24	12902,76	15900,00
15	27.04.2014	312689,88	3186,87	12713,13	15900,00
16	27.05.2014	299976,75	2958,67	12941,33	15900,00
17	27.06.2014	287035,42	2925,40	12974,60	15900,00
18	27.07.2014	274060,82	2703,07	13196,93	15900,00
19	27.08.2014	260863,89	2658,67	13241,33	15900,00
20	27.09.2014	247622,56	2523,71	13376,29	15900,00
21	27.10.2014	234246,27	2310,37	13589,63	15900,00
22	27.11.2014	220656,64	2248,88	13651,12	15900,00
23	27.12.2014	207005,52	2041,70	13858,30	15900,00
24	27.01.2015	193147,22	1968,51	13931,49	15900,00
25	27.02.2015	179215,73	1826,53	14073,47	15900,00
26	27.03.2015	165142,26	1520,21	14379,79	15900,00
27	27.04.2015	150762,47	1536,54	14363,46	15900,00
28	27.05.2015	136399,01	1345,31	14554,69	15900,00
29	27.06.2015	121844,32	1241,81	14658,19	15900,00
30	27.07.2015	107186,13	1057,18	14842,82	15900,00
31	27.08.2015	92343,31	941,14	14958,86	15900,00
32	27.09.2015	77384,45	788,69	15111,31	15900,00
33	27.10.2015	62273,14	614,20	15285,80	15900,00
34	27.11.2015	46987,34	478,88	15421,12	15900,00
35	27.12.2015	31566,22	311,34	15588,66	15900,00
36	27.01.2016	15977,56	162,84	15977,56	16140,40

Глава 4. Задания для самостоятельной работы

4.1. Типовые задачи

Задача 1. ВКЛАДЧИК открыл счет в БАНКЕ 14.07.13 и внес на него денежные средства в сумме 75000 руб. Согласно договору между БАНКОМ и ВКЛАДЧИКОМ:

1. ВКЛАДЧИК может вносить и снимать денежные средства на счет. Неснижаемый остаток суммы вклада составляет 30000 руб.
2. Годовая процентная ставка по вкладу 5% и не меняется в течение первых трех месяцев, до 14.10.2013 включительно, при выполнении условия указанного в п. 1.
3. В случае востребования ВКЛАДЧИКОМ части суммы вклада до дня окончания первых трех месяцев, или невыполнения условия указанного в п. 1, исчисление дохода (процентов) производится исходя из процентной ставки по вкладам до востребования – 0,1% годовых.
4. Проценты начисляются и присоединяются к сумме вклада ежегодно или при закрытии счета.

Ставка процентов по вкладу была увеличена банком 25.10.13 и составила 6% годовых. 08.11.13 вкладчик внес на счет денежные средства в сумме 40000 руб. Ставка процентов по вкладу была снова повышена банком 25.12.13 и составила 8% годовых. ВКЛАДЧИК предъявил требование о возврате суммы вклада вместе с причитающимися процентами 15.01.14. Рассчитать сумму полученную ВКЛАДЧИКОМ.

Задача 2. Определить накопленную сумму долга через три года, если первоначальная сумма долга на 01.01.2013 составляет 80000 руб. и задолженность ежеквартально увеличивается на проценты, начисленные согласно номинальной (годовой) плавающей процентной ставке. В течение первого года предполагаемого срока займа номинальная процентная ставка составляет 16%, затем она ежегодно увеличивается на 4%.

Задача 3. ВКЛАДЧИК открыл счет в БАНКЕ 10.01.13 и внес на него денежные средства в сумме 120000 руб. Согласно договору между БАНКОМ и ВКЛАДЧИКОМ:

1. Вклад вносится на срок с 10.01.13 по 10.01.14.
2. Годовая процентная ставка по вкладу 8% не меняется в течение срока, указанного в п. 1. БАНК начисляет проценты по сумме вклада ежеквартально и присоединяет их к сумме вклада.
3. Если вкладчик не предъявит требование о возврате суммы вклада вместе с причитающимися процентами в день окончания срока, и БАНКОМ не принято решение о прекращении открытия счетов по данному виду вклада, то договор считается пролонгированным на тот же срок. Течение

очередного срока начинается со дня, следующего за днем окончания предыдущего срока.

4. В случае востребования ВКЛАДЧИКОМ суммы вклада до дня окончания основного (пролонгированного) срока договора, исчисление дохода (процентов) за неполный срок производится исходя из процентной ставки по вкладам до востребования.

ВКЛАДЧИК предъявил требование о возврате суммы вклада вместе с причитающимися процентами 16.01.14. Рассчитать сумму полученную ВКЛАДЧИКОМ 16.01.14, учитывая то, что БАНКОМ не принималось решение о прекращении открытия счетов по данному виду вклада, и процентная ставка по вкладам до востребования 0,1% годовых.

Задача 4. Определить накопленную сумму долга через полгода, если первоначальная сумма долга 01.07.13 составляет 90000 руб., если: а) задолженность ежедневно увеличивается на проценты, начисленные по плавающей номинальной годовой процентной ставке, равной в первом месяце 12%, увеличивающейся ежемесячно на 0,5%; б) задолженность непрерывно увеличивается на проценты, начисленные по плавающей непрерывной годовой процентной ставке, равной в первом месяце 12%, увеличивающейся ежемесячно на 0,5%. Найти эффективные ставки процентов.

Задача 5. Определить время, в течение которого задолженность (имевшаяся у заемщика на 17.04.13) из 60000 руб. увеличится и составит 65000 руб. Для расчета процентов по задолженности были использованы:

а) годовая ссудная процентная ставка 14%;
б) номинальная (годовая) ссудная процентная ставка 14%, с начислением процентов ежеквартально;
в) непрерывная (годовая) ссудная процентная ставка 14%.

При необходимости выполнить корректировку конечной суммы долга так, чтобы срок финансовой операции был с целым количеством дней.

Задача 6. Определить ссуду, которая была предоставлена кредитором заемщику 17.02.13 на 200 дней при учете векселя с номиналом 70000 руб. Для расчета дисконта были использованы:

а) годовая учетная процентная ставка 20%;
б) номинальная (годовая) учетная процентная ставка 20% с ежеквартальным дисконтированием;
в) непрерывная (годовая) учетная процентная ставка 20%.

Задача 7. Определить номинал векселя со сроком погашения полгода, если при его учете 20.05.2013 была предоставлена ссуда 50000 руб. Для расчета дисконта были использованы:

а) плавающая годовая учетная процентная ставка, равная 12% в первом месяце и далее увеличивающаяся ежемесячно на 1,5%;
б) ежемесячная плавающая учетная процентная ставка, равная 1% в первом месяце срока займа и далее увеличивающаяся ежемесячно на 0,125%;

в) непрерывная (годовая) плавающая учетная процентная ставка, равная 12% в первом месяце срока займа и далее увеличивающаяся ежемесячно на 0,125%.

Задача 8. При учете векселя с номиналом 65000 руб. кредитор предоставил 17.04.13 заемщику ссуду около 60000 руб. Для расчета дисконта были использованы:

а) годовая учетная процентная ставка 14%;

б) номинальная (годовая) процентная ставка 14%, с ежеквартальным дисконтированием;

в) непрерывная (годовая) процентная ставка 14%.

Определить срок погашения векселя. Если необходимо, выполнить корректировку ссуды так, чтобы срок погашения векселя был с целым количеством дней.

Задача 9. В финансовой операции для расчета процентов были использованы:

а) ссудная годовая процентная ставка 6%;

б) ссудная номинальная (годовая) процентная ставка 6%, с начислением процентов ежеквартально;

в) ссудная непрерывная (годовая) процентная ставка 6%.

Определить эквивалентные ссудные номинальные (годовые) процентные ставки, если проценты начисляются: ежедневно, по полугодиям. Определить эффективные ссудные процентные ставки в п. (б), (в).

Задача 10. В финансовой операции для расчета дисконта были использованы:

а) учетная годовая процентная ставка 12%;

б) учетная номинальная (годовая) процентная ставка 12%, с ежеквартальным дисконтированием;

в) учетная непрерывная (годовая) процентная ставка 12%.

Определить эквивалентные учетные номинальные (годовые) процентные ставки, если дисконтирование выполняется: ежедневно, по полугодиям. Определить эффективные учетные процентные ставки в п. (б), (в).

Задача 11. В финансовой операции для расчета дисконта были использованы:

а) учетная номинальная (годовая) процентная ставка 20%, с ежеквартальным дисконтированием;

б) учетная непрерывная (годовая) процентная ставка 20%.

Определить эквивалентные ссудные номинальные (годовые) процентные ставки с ежемесячным начислением процентов.

Задача 12. Согласно первоначальному соглашению заемщик должен был погасить задолженность тремя платежами: 70000 руб. 15.01.2013, 50000 руб. 25.04.2013 и 30000 руб. 21.05.2013. Однако 15.01.2013 первоначальное соглашение было изменено по инициативе заемщика. Согласно новому соглашению заемщик должен погасить всю задолженность одним (консолидированным) платежом 29.05.2013. Определить минимальный консолидированный платеж, если при его расчете было принято во внимание то, что кредитор предоставляет деньги заемщикам в долг: а) по годовой процентной ставке 14%; б) по номинальной годовой процентной ставке 14% с ежемесячным начислением процентов.

Задача 13. Согласно первоначальному соглашению заемщик должен был погасить задолженность тремя платежами: 70000 руб. 15.01.2013, 50000 руб. 25.04.2013 и 30000 руб. 21.05.2013. Однако 15.01.2013 первоначальное соглашение было изменено. Согласно новому соглашению заемщик должен погасить всю задолженность консолидированным платежом 30.04.2013. Определить эквивалентный консолидированный платеж, если при его расчете было принято во внимание то, что кредитор предоставляет деньги заемщикам в долг по годовой процентной ставке 16%.

Задача 14. Согласно первоначальному соглашению заемщик должен был погасить задолженность тремя платежами: 70000 руб. 15.01.2013, 50000 руб. 25.04.2013 и 30000 руб. 21.05.2013. Однако 10.01.2013 первоначальное соглашение было изменено по инициативе кредитора. Согласно новому соглашению заемщик погашает всю задолженность консолидированным платежом 10.01.2013. Определить максимальный консолидированный платеж, если при его расчете было принято во внимание то, что кредитор предоставляет деньги заемщикам в долг: а) по годовой процентной ставке 12%; б) по номинальной годовой процентной ставке 12% с ежемесячным начислением процентов.

Задача 15. В банке был открыт счет с номинальной (годовой) процентной ставкой 8% и ежеквартальным начислением процентов. Определить минимальную сумму вклада, достаточную для того, чтобы течение 5 лет можно было снимать со счета банка в конце каждого года по 85000 руб.

Задача 16. На счет банка поступают постоянные взносы по 20000 руб. в конце каждого полугодия. По вкладу начисляют ежеквартально проценты по ставке 1,5%. Определить сумму вклада на счете банка, накопленную за 7 лет.

Задача 17. В банке открыт счет с номинальной (годовой) процентной ставкой 8% с ежеквартальным начислением процентов, и внесен вклад 320000 руб. Со счета снимают по 40000 руб. в конце каждого года. Найти минимальный срок (с целым количеством лет), в течение которого будет потрачена вся сумма вклада. При необходимости выполнить корректировку: а) последней суммы, снимаемой со счета банка; б) всех постоянных сумм, снимаемых со счета банка.

Задача 18. На счете банка необходимо накопить 300000 руб. с помощью постоянных взносов по 3000 руб. в конце каждого месяца. По вкладу ежемесячно начисляются проценты по ставке 0,5%. Найти срок операции с целым количеством месяцев. При необходимости выполнить корректировку: а) последнего взноса на счет банка, б) всех постоянных взносов на счет банка.

Задача 19. Банк предоставил заемщику кредит 800000 руб. сроком на 20 лет. По кредиту предложена номинальная (годовая) процентная ставка 12,5% с ежемесячным начислением процентов. Определить постоянный платеж заемщика в конце (в начале) каждого месяца.

Задача 20. В банке открыт счет при номинальной (годовой) процентной ставке 6% с ежемесячным начислением процентов. Определить величину вклада, достаточную для оплаты обучения в течение 3,5 лет равными платежами в начале каждого полугодия по 35000 руб.

Задача 21. На счет банка поступают постоянные взносы по 6000 руб. в начале каждого месяца. По вкладу ежемесячно начисляются проценты по ставке 0,5%. Определить накопленную за 10 лет сумму.

Задача 22. В банке открыт счет, внесен вклад 315000 руб., для оплаты обучения равными платежами в начале каждого полугодия по 35000 руб. По вкладу ежемесячно начисляются проценты по номинальной (годовой) процентной ставке 6%. Найти максимальный срок операции (с целым количеством полугодий), в течение которого будет потрачена сумма вклада. При необходимости выполнить корректировку: а) последней суммы, снимаемой со счета банка; б) всех постоянных сумм, снимаемых со счета банка.

Задача 23. На счете банка необходимо накопить 333000 руб. с помощью постоянных взносов в начале каждого месяца по 3000 руб. По вкладу начисляются ежемесячно проценты по ставке 0,5%. Найти срок операции с целым количеством месяцев. При необходимости выполнить корректировку: а) последнего взноса, б) всех взносов.

Задача 24. Банк предоставил заемщику ипотечный кредит на следующих условиях:

- проценты по остатку задолженности начисляются ежемесячно, согласно номинальной (годовой) процентной ставке 12,5%;
- погашается кредит постоянными платежами в начале каждого месяца;
- первый платеж по кредиту увеличен на сумму, составляющую 10% от полной стоимости квартиры, равной 3000000 руб.;
- срок погашения 30 лет.

Определить постоянный платеж в начале каждого месяца. Найти срок погашения кредита в случае увеличения ежемесячного платежа на 25% после семи лет погашения кредита. При необходимости выполнить корректировку последнего платежа.

Задача 25. ВКЛАДЧИК открыл счет в БАНКЕ для формирования своего пенсионного фонда. Согласно договору между БАНКОМ и ВКЛАДЧИКОМ:

1. ВКЛАДЧИК в течение срока $n^* = 40(\textit{лет})$ делает постоянные взносы $R^*(\textit{руб.})$ в начале каждого месяца.
2. Если вкладчик не предъявит требование о возврате суммы вклада вместе с причитающимися процентами до окончания срока, указанного в п.1, то

ВКЛАДЧИК в течение очередного срока $n^{**} = 15(лет)$ будет снимать со счета в конце каждого месяца постоянные суммы $R^{**} = 45000\,(руб.)$.

3. Номинальная (годовая) процентная ставка по вкладу 4,8% не меняется в течение сроков, указанных в п. 1 и 2. БАНК начисляет проценты по сумме вклада ежемесячно и присоединяет их к сумме вклада.
4. В случае востребования ВКЛАДЧИКОМ суммы вклада до дня окончания очередного года срока договора, указанного в п. 1 и 2, исчисление дохода (процентов) за неполный год производится исходя из процентной ставки по вкладам до востребования – 0,1% годовых.

Определить величину постоянного взноса $R^{*}\,(руб.)$ в начале каждого месяца в течение срока $n^{*} = 40(лет)$, указанного в п. 1 договора между БАНКОМ и ВКЛАДЧИКОМ, достаточного для получения в конце каждого месяца в течение срока $n^{**} = 15(лет)$ постоянной суммы $R^{**} = 45000\,(руб.)$, указанной в п. 2.

Задача 26. Составить планы погашения кредита 720000 руб., полученного 25.01.2013, с номинальной (годовой) процентной ставкой по займу 14%, со сроком погашения 5 лет, используя способ погашения в рассрочку равными долями (дифференцированными выплатами) в форме платежей 25 числа каждого месяца. Рассмотреть варианты отсутствия и наличия льготного периода:

а) нет льготного периода;
б) имеется льготный период, два первых года, в течение которых заемщик выплачивает кредитору только проценты по остатку задолженности;
в) имеется льготный период, два первых года, в течение которых заемщик ничего не платит кредитору.

Задача 27. Составить планы погашения кредита 720000 руб., полученного 25.01.2013, с номинальной (годовой) процентной ставкой по займу 14%, со сроком погашения 5 лет, используя способ погашения в рассрочку равными срочными уплатами (аннуитетными платежами) в форме платежей 25 числа каждого месяца. Рассмотреть варианты отсутствия и наличия льготного периода:

а) нет льготного периода;
б) имеется льготный период, два первых года, в течение которых заемщик выплачивает кредитору только проценты по остатку задолженности;
в) имеется льготный период, два первых года, в течение которых заемщик ничего не платит кредитору.

Задача 28. Составить план погашения кредита 720000 руб., полученного 25.01.2013, с номинальной (годовой) процентной ставкой по займу 14%, со сроком погашения 5 лет, используя способ погашения в рассрочку равными выплатами по 16800 руб. в форме платежей 25 числа каждого месяца.

4.2. Вопросы для самоконтроля и подготовки к аттестации

1. Положение ЦБ РФ от 26 июня 1998 №39-П «О порядке начисления процентов по операциям, связанным с привлечением и размещением денежных средств банками» (в ред. Положения, утв. ЦБ РФ 26.11.2007 N 1931-У).
2. Первоначальная и конечная сумма денег, процентные деньги (проценты), процентная ставка, срок финансовой операции в днях и единичных периодах. Классификация процентных ставок.
3. Ссудная простая процентная ставка. Операция наращения первоначальной (современной) стоимости денег. Операция дисконтирования конечной (будущей) стоимости денег.
4. Ссудная сложная процентная ставка. Операция наращения первоначальной (современной) стоимости денег. Операция дисконтирования конечной (будущей) стоимости денег.
5. Ссудная номинальная процентная ставка. Операция наращения первоначальной (современной) стоимости денег. Операция дисконтирования конечной (будущей) стоимости денег.
6. Смешанный способ расчета ссудных процентов в операциях со сроками, включающими нецелое количество единичных периодов.
7. Ссудная непрерывная процентная ставка. Операция наращения первоначальной (современной) стоимости денег. Операция дисконтирования конечной (будущей) стоимости денег.
8. Определение сроков финансовой операции со ссудными процентными ставками.
9. Учетная простая процентная ставка. Операция наращения первоначальной (современной) стоимости денег. Операция дисконтирования конечной (будущей) стоимости денег.
10. Учетная сложная процентная ставка. Операция наращения первоначальной (современной) стоимости денег. Операция дисконтирования конечной (будущей) стоимости денег.
11. Учетная номинальная процентная ставка. Операция наращения первоначальной (современной) стоимости денег. Операция дисконтирования конечной (будущей) стоимости денег.
12. Смешанный способ расчета дисконта в операциях со сроками, включающими нецелое количество единичных периодов.
13. Учетная непрерывная процентная ставка. Операция наращения первоначальной (современной) стоимости денег. Операция дисконтирования конечной (будущей) стоимости денег.

14. Определение сроков финансовой операции с учетными процентными ставками.
15. Условие эквивалентности процентных ставок. Примеры эквивалентных процентных ставок.
16. Условие эквивалентности платежей. Примеры определения консолидированных платежей.
17. Финансовая рента и ее параметры: член ренты, период ренты, срок ренты. Классификация рент.
18. Постоянная рента постнумерандо. Расчет современной и будущей стоимости ренты.
19. Расчет срока постоянной ренты постнумерандо и корректировка ее параметров.
20. Анализ постоянной ренты постнумерандо в случае, когда период ренты совпадает с единичным периодом начисления процентов.
21. Постоянная рента пренумерандо. Расчет современной и будущей стоимости ренты.
22. Расчет срока постоянной ренты пренумерандо и корректировка ее параметров.
23. Анализ постоянной ренты пренумерандо в случае, когда период ренты совпадает с единичным периодом начисления процентов.
24. Условие эквивалентности потоков платежей (финансовых рент). Примеры эквивалентных потоков платежей (финансовых рент).
25. Основные понятия и определения, используемые в анализе кредитной операции.
26. Описание способа погашения долга в рассрочку дифференцированными выплатами (равными долями).
27. Описание способа погашения долга в рассрочку аннуитетными платежами (равными срочными уплатами).
28. Описание способа погашения долга в рассрочку равными платежами, оговоренными между заемщиком и кредитором.

Литература

1. Положение ЦБ РФ от 26 июня 1998 №39-П «О порядке начисления процентов по операциям, связанным с привлечением и размещением денежных средств банками» (в ред. Положения, утв. ЦБ РФ 26.11.2007 N 1931-У).
2. Бланк И.А. Инвестиционный менеджмент: Учебный курс. – К.: Эльга-Н, Ника-Центр, 2001.
3. Боди 3., Мертоп Р. Финансы: Учебное пособие. Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильяме», 2003.
4. Брейли Р., Майерс С. Принципы корпоративных финансов: Пер. с англ. – М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 1997.
5. Буреева Н.Н., Петрова О.В. Финансовая математика в примерах: Учебно-методическое пособие. – Н. Новогород: Изд-во Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского, 2009.
6. Ван Хорн Дж. К. Основы управления финансами: Пер. с англ. / Гл. ред. серии Я.В. Соколов. – М.: Финансы и статистика, 2011.
7. Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения. – М.: «Издательство ПРИОР», 2007.
8. Козинова А.Т. Руководство к решению задач по финансовой математике: Учебное пособие. – Н. Новогород: Изд-во Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского, 2000.
9. Криничанский К.В. Математика финансового менеджмента: Учебное пособие. – М.: Издательство «Дело и сервис», 2006.
10. Малыхин В. И. Финансовая математика. – М.: ЮНИТИ, 1999.
11. Мелкумов Я.С. Финансовые вычисления: теория и практика: Учебно-справочное пособие. – 2-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2010.
12. Росс С. и др. Основы корпоративных финансов: Пер. с англ. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
13. Четыркин Е.М. Финансовая математика: Учебник. – 6-е изд., испр. – М.: Дело, 2006.
14. Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Дж. В. Инвестиции: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2009.

Оглавление

Татьяна Александровна **Артамонова**
Антонина Трифоновна **Козинова**

ОЦЕНКА ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ

Учебное пособие

Компьютерная верстка: Т.А. Артамонова, А.Т. Козинова

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 5,25. Заказ № . Тираж экз.

Отпечатано в типографии
Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01