МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Л.В.Лебедева

СХОДИМОСТЬ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки
03.03.03. «Радиофизика», 02.03.02. «Фундаментальная информатика и информационные технологии», 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем»

Нижний Новгород
2019

УДК 517
ББК 22.16
Л33

Рецензент: кандидат технических наук, доцент **С. Н. Стребуляев**

Л33 Лебедева Л.В. СХОДИМОСТЬ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 22 с.

В учебно-методическом пособии рассматривается один из математических курсов – теория числовых рядов – входящий в такие дисциплины как «Математический анализ» и «Кратные интегралы и ряды», читаемые на радиофизическом факультете ННГУ во втором семестре. В пособии содержится необходимый минимум теоретических сведений, примеры выполнения типовых задач, упражнения для самостоятельной работы студентов.

Пособие предназначено для студентов радиофизического факультета ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 03.03.03. «Радиофизика», 02.03.02. «Фундаментальная информатика и информационные технологии», 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем».

Ответственные за выпуск:
председатель методической комиссии радиофизического факультета ННГУ
к.ф.-м., доцент **Н.Д.Миловский**,
зам.председателя методической комиссии радиофизического факультета ННГУ
д.ф.-м.н., профессор **Е.З.Грибова**

УДК 517
ББК 22.16

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЯДА И ЕГО СУММЫ

Пусть задана бесконечная числовая последовательность $u_1, u_2, ..., u_n, ...$.

$$u_1, u_2, ..., u_n, ... \qquad (1)$$

Определение. **Числовым рядом** называется **выражение** вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \qquad (2)$$

Величины $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называются первым, вторым, … , n-ым (или **общим) членами** ряда.

Определение. Сумма S_n первых n членов ряда называется ***n*-ой частичной суммой** ряда.

Каждому числовому ряду (2) ставится в соответствие числовая последовательность его частичных сумм:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad \ldots \quad S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n, \quad \ldots \qquad (3)$$

Определение. Если *существует конечный* предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то **ряд** (2) называется **сходящимся**, а число S называется **суммой ряда**. В противном случае ряд называется **расходящимся**.

Замечание. Любая числовая последовательность $S_1^*, S_2^*, ..., S_n^*, ...$ может быть представлена как последовательность частичных сумм числового ряда

$$S_1^* + (S_2^* - S_1^*) + ... + (S_n^* - S_{n-1}^*) + ... \qquad (4)$$

Пример 1. Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1} = b + bq + bq^2 + ... + bq^{n-1} + ... \qquad (5)$$

1) Очевидно, что если $q = 1$, то ряд (5) имеет вид $b + b + b + ... + b + ...$, и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (bn) = \infty$, т.е. ряд расходится.

2) Известно, что при $q \neq 1$ $S_n = \frac{b(1-q^n)}{1-q}$. То есть, если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{b}{1-q}$; если $q>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$; если $q \le -1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует.

Таким образом, ряд (5) сходится при $|q|<1$ и сумма его равна $S = \frac{b}{1-q}$, ряд (5) расходится при $|q| \ge 1$.

Замечание. При $b=1, q=-1$ имеем расходящийся ряд $1-1+1-1+\ldots$ с частичной суммой $S_n = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = 2k+1 \\ 0, & \text{если} \quad n = 2k \end{cases}$.

Пример 2. Установить сходимость (или расходимость) ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Решение. Частичная сумма ряда: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) =$ $= \sum\limits_{k=1}^{n} \left(-\ln k + \ln(k+1)\right) = -\ln 1 + \ln 2 - \ln 2 + \ln 3 - \ldots + \ln(n+1) = \ln(n+1)$. Значит $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$. Ряд расходится.

Пример 3. Определить сумму ряда (где p – любое натуральное число)

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)\cdot\ldots\cdot(a+n+p)} \qquad (6)$$

Решение. Представим n-ый член ряда в виде разности $u_n = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{(a+n)(a+n+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1+p)} - \frac{1}{(a+n+1)(a+n+2)\cdot\ldots\cdot(a+n+p)}\right)$.

Тогда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(a+k+p)-(a+k)}{(a+k)(a+k+1)\cdot\ldots\cdot(a+k+p)} \cdot \frac{1}{p}$. После преобразования получим $S_n = \left(\frac{1}{p(a+1)\ldots(a+p)} - \frac{1}{p(a+n+1)\ldots(a+n+p)}\right)$. Второе слагаемое с ростом n стремится к нулю, и, значит, сумма ряда равна $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{p(a+1)(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+p)}$.

Из формулы (6) можно получить, в частности, соотношения (7) и (8):

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n} - \frac{1}{a+n+1}\right) = \frac{1}{a+1} \ldots \qquad (7)$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)(a+n+2)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(a+n)(a+n+1)} - \frac{1}{(a+n+1)(a+n+2)}\right) = \qquad (8)$$

$$= \frac{1}{2(a+1)(a+2)}$$

Пример 4. Определить сумму ряда (если x – произвольное фиксированное число, отличное от ± 1)

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1 - x^{2^n}} \qquad (9)$$

Решение. Представим общий член ряда в виде разности и найдем n-ую частичную сумму ряда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1 - x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1 - x^{2^n}}\right) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1 - x^{2n}}$$

Значит, при $|x| < 1$ ряд сходится к сумме $\dfrac{x}{1-x}$, а при $|x > 1|$ – к сумме $\dfrac{1}{1-x}$.

Примеры 5. Установить расходимость ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Решение. Оценим величину n-ой частичной суммы. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Значит, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, и ряд расходится.

2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Определение. **Остатком ряда** (2) **после *n*-ого члена** или ***n*-ым остатком** называется ряд

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \tag{10}$$

Теорема 1. Ряд (2) сходится тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

Теорема 2. Изменение **конечного** числа членов ряда (в частности, добавление или отбрасывание) не влияет на сходимость (или расходимость) ряда.

Теорема 3. Если сходящиеся ряды (11) и (12) имеют суммы U и V, то ряды (13) и (14), полученные умножением на константы (α, β) и последующего почленного сложения-вычитания исходных рядов, сходятся и их суммы равны $\alpha U \pm \beta V$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = U \quad (11) \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha U + \beta V \quad (13)$$

$$\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = V \quad (12) \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n - \beta v_n) = \alpha U - \beta V \quad (14)$$

Пример 6. Доказать сходимость ряда $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$. Найти его сумму.

Решение. Ряд $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$ сходится (см. пример 1) и его сумма $U=\frac{1/2}{1-(1/2)}=1$. Ряд $\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\ldots$ тоже сходится и его сумма равна $V=\frac{1/3}{1-(1/3)}=\frac{1}{2}$. Следовательно, согласно теореме 3, рассматриваемый ряд сходится, и его сумма равна $S=U+V=1+0{,}5=1{,}5$.

Теорема 4 (Критерий Коши). Для сходимости ряда (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0 : \forall n>n_0, \forall p\in N \Rightarrow \left|S_{n+p}-S_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon \tag{15}$$

Пример 7. Рассмотрим **гармонический ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \tag{16}$$

Решение. Покажем, что ряд (16) является расходящимся. Пусть $p=n,\ \varepsilon=\frac{1}{4}$.

Тогда $\left|S_{2n}-S_n\right|=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}>\varepsilon$.

Следовательно, по критерию Коши, ряд расходится.

Пример 8. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}\frac{1}{2^n}$.

Решение. Воспользуемся критерием Коши. $\left|S_{n+p}-S_n\right|=$
$=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^n\frac{k}{k+1}\frac{1}{2^k}\right|<\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^n}$. Возьмем $n_0=1$ для $\varepsilon>\frac{1}{2}$ и $n_0=\left[\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]+1$ для $\varepsilon<\frac{1}{2}$. Очевидно, что исследуемый ряд сходится.

Пример 9. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x^n}{n^2}$.

Решение. Воспользуемся критерием Коши. $\left|S_{n+p}-S_n\right|=$
$=\left|\frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2}\right|\le\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|<$
$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$. Следовательно, положив $n_0=\frac{1}{\varepsilon}$, по критерию Коши, получим, что данный ряд сходится.

Теорема 5 (Необходимый признак сходимости ряда). Если ряд (2) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\ne 0$, то ряд (2) расходится.

Пример 10. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$ расходится, так как необходимый признак сходимости числового ряда не выполняется: $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+1)!+(n+1)!}{(n+2)(n+1)!-(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} = 1 \neq 0$.

Пример 11. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ расходится, поскольку предел общего члена

не равен нулю: $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{n^n \cdot \left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{e^0} = 1$.

Замечание. Выполнение условия $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ не гарантирует сходимости ряда (см. примеры 2, 5, 7).

3. РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Изучение рядов с членами одного знака сводится к изучению рядов с положительными слагаемыми.

Теорема 6. Для сходимости ряда (2) с членами одного знака необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена.

Доказательство. Т.к. последовательность частичных сумм ряда (2) с членами одного знака является монотонно возрастающей (или убывающей), то ограниченность этой последовательности сверху (или снизу) обеспечивает существования конечного $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Определение. Если члены ряда принимают только неотрицательные значения, то ряд называется **рядом с положительными членами** (или **знакоположительным**, или **положительным** рядом).

Определение. Если члены ряда принимают *только* положительные значения, то ряд называется ***строго*** **положительным**.

Рассмотрим ряды (17) и (18), предположив, что все их члены – неотрицательные числа, т.е. $u_n \ge 0$ и $v_n \ge 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (18)$$

Теорема 7 *(теорема сравнения).* Для рядов с положительными членами справедливы следующие утверждения.

1). Если $0 \le u_n \le v_n \quad (\forall n > n_0)$, то

1.1) если сходится ряд (18), то сходится и ряд (17);

1.2) если расходится ряд (17), то расходится и ряд (18)

2). Если существует конечный отличный от нуля предел $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{v_n}$, то ряды (17) и (18) либо оба сходятся, либо оба расходятся.

3). Если $0 < u_n,\, 0 < v_n,\, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \quad (\forall n > n_0)$, то

3.1) если сходится ряд (18), то сходится и ряд (17);

3.2) если расходится ряд (17), то расходится и ряд (18)

В качестве рядов, с которыми сравнивают, удобно использовать те, сходимость (или расходимость) которых известна. Часто используются следующие.

А) **Гармонический ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$, который является расходящимся.

Б) **Обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} = 1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \ldots + \dfrac{1}{n^p} + \ldots$, который является расходящимся при $p \le 1$ и сходящимся при $p > 1$.

В) Ряд, составленный из членов **геометрической прогрессии** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} bq^{n-1} = b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + \ldots$, который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \ge 1$.

Пример 12. Чтобы определить сходимость ряда $\sum_{n=3}^{\infty} v_n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$, сравним его с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=3}^{\infty} u_n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$. Т.к. $v_n > u_n$, то ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ тоже расходится.

Пример 13. Чтобы определить сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} u_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n}$, сравним его со сходящимся рядом $\sum_{n=2}^{\infty} v_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$). Т.к. $u_n \le v_n$, то ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ тоже сходится.

Пример 14. Чтобы определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, сравним его с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$. Т.к. $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n} = 1$, то ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ тоже расходится.

Пример 15. Чтобы определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n!}{2^n}$ сравним его со сходящимся рядом (геометрическая прогрессия) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Поскольку $v_n \le u_n$, то исследуемый ряд тоже сходится.

Пример 16. Чтобы определить сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} v_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n - \ln n}$, сравним его с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$. Т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n - \ln n} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n \cdot \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)} \right) = 1 \ne 0,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ тоже расходится.

Теорема 8 (Признак Даламбера). Рассмотрим знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad (u_n \geq 0) \tag{19}$$

А) (непредельная форма) Если существует такое n_0, что для всех $n > n_0$

а) выполнено неравенство: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$ то ряд (19) расходится;

б) можно найти число q такое, что $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1,$ то ряд (19) сходится.

Б) (предельная форма). Если для членов ряда (19) существует и конечен $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L$, то при $L < 1$ ряд (19) сходится, при $L > 1$ – расходится, при $L = 1$ – требуется дополнительное исследование.

Пример 17. Для определения сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$ Значит, ряд сходится.

Пример 18. Для определения сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \cdot \left(\dfrac{e}{n}\right)^n$ вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot e^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n! \cdot e^n} = e \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = e \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{e}{e} = 1.$$

Значит, предельный признак Даламбера не позволяет решить вопрос о сходимости ряда. Однако при всех n выполняется неравенство $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \dfrac{e}{e} = 1$. Поэтому, согласно непредельной форме признака Даламбера, ряд расходится.

Теорема 9 (Признак Коши радикальный). Рассмотрим знакоположительный ряд (19).

А) (непредельная форма) Если существует такое n_0 , что для всех $n > n_0$

а) выполнено неравенство $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, то ряд (19) расходится;

б) существует число q такое, что $\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1$, то ряд (19) сходится.

Б) (предельная форма) Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$, то при $L < 1$ ряд (19) сходится, при $L > 1$ – расходится, при $L = 1$ требуется дополнительное исследование.

.Пример 19. Для определения сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+2}{2n+3}\right)^n$ вычислим предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n+2}{2n+3}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2n+3} = \dfrac{1}{2} < 1$. Значит, согласно предельному признаку Коши ряд сходится.

Пример 20. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$, считая $x > 0$. Применяем признак Коши, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{n} = 0$. Ряд сходится.

Теорема 10 (Интегральный признак Коши). Если общий член ряда (19) можно определить равенством $u_n = f(n)$, функция $f(x)$ непрерывного аргумента x положительна и монотонно убывает на интервале $(1,+\infty)$, то ряд (19) сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx \tag{20}$$

Пример 21. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$.

Решение. Ряд сходится только при $p > 1$, т.к.

при $p \neq 1$ $\quad \int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{1}{1-p}\cdot\left(\ln^{1-p} x\right)\Big|_2^N = \begin{cases} C, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$;

при $p = 1$ $\quad \int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x(\ln x)} = \lim\limits_{N\to+\infty}\left(\ln\ln N - \ln\ln 2\right) = \infty$

Теорема 11 (Логарифмический признак). Если существует такое n_0, что для всех $n > n_0$

а) выполнено неравенство $\dfrac{\ln n}{\ln\left(\dfrac{1}{u_n}\right)} \geq 1$, то ряд (19) расходится;

б) существует число q такое, что $\dfrac{\ln n}{\ln\left(\dfrac{1}{u_n}\right)} < q < 1$, то ряд (19) сходится.

Пример 22. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=16}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$.

Решение. Применяя логарифмический признак, получаем:

$\dfrac{\ln n}{\ln\left(\dfrac{1}{u_n}\right)} = \dfrac{\ln n}{\ln n \cdot \ln \ln \ln n} = \dfrac{1}{\ln \ln \ln n}$ Дробь является бесконечно малой при $n \to \infty$, следовательно, данный ряд сходится.

Теорема 12 (Признак Раабе).

А). (**непредельная форма**) Если существует такое n_0 , что для всех $n > n_0$

а) выполнено неравенство $n \cdot \left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, то ряд (19) расходится;

б) можно найти число q такое, что $n \cdot \left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geq q > 1$, то ряд (19) сходится.

Б). (**предельная форма**) Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n \cdot \left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right) = L$, то при $L < 1$ ряд (19) расходится, при $L > 1$ – сходится.

Пример 23. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{9 \cdot 14 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot (5n+9)}{3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (5n+3)}$.

Решение. Применим признак Раабе в предельной форме $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\dfrac{5n+8}{5n+14} - 1\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-6n}{5n+14} = -\dfrac{6}{5} < 1$. Значит, ряд расходится.

Теорема 13. (Признак Гаусса). Если для ряда (19) отношение предыдущего члена к последующему может быть представлено в виде $\frac{u_n}{u_{n+1}} = A + \frac{B}{n} + \frac{Q_n}{n^p}$, где $p > 1$ и $|Q_n| \le M$ (здесь A, B, M, p – постоянные), тогда

1) если $A < 1$ или ($A = 1$, но $B \le 1$), то ряд (19) расходится,

2) если $A > 1$ или ($A = 1$, но $B > 1$), то ряд (19) сходится.

Пример 24. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p$.

Решение. Вычислим отношение $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p : \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right)^p =$

$= \left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^p = \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{p(p-1)}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} + 0\left(\frac{1}{n^2} \right) =$

$= 1 + \frac{p/2}{n+1/2} + \frac{p(p-1)}{8} \cdot \frac{1}{(n+1/2)^2} + 0\left(\frac{1}{n^2} \right)$. Применим признак Гаусса. Здесь $A = 1$ и $B = 1/2$. Значит, при $p > 2$ ряд сходится, при $p \le 2$ расходится.

4. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Определение. Ряд (21) называется **знакопеременным**, если среди его членов есть и положительные и отрицательные.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (21)$$

Определение. Ряд (21) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд (22), составленный из абсолютных величин членов ряда (21)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \qquad (22)$$

Теорема 14. Если сходится ряд (22), то сходится и ряд (21).

Определение. Ряд (21) называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд (22) расходится.

Принципиальное отличие абсолютно и условно сходящихся рядов состоит в том, что

1) любая перестановка любого (**бесконечного**) числа слагаемых абсолютно сходящегося ряда не влияет на сходимость ряда и не меняет его суммы.

2) члены условно сходящегося ряда всегда можно переставить таким образом, чтобы его сумма оказалась равной любому наперед заданному числу; более того, существует такая перестановка, в результате которой ряд станет расходящимся.

Замечание. Любая перестановка **конечного** числа членов любого ряда не меняет его суммы и не влияет на его сходимость.

Частным случаем знакопеременных рядов являются ряды **знакочередующиеся,** которые можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots \qquad (u_n > 0 \quad \forall n) \qquad (23)$$

Теорема 15 (признак Лейбница). Если ряд (23) является знакочередующимся, его общий член стремится к нулю ($\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$) и с ростом n монотонно убывает ($u_n \ge u_{n+1}$), то ряд сходится, и его сумма находится в интервале $(0, u_1)$.

Следствие. Ошибка от замены суммы S ряда (23) на его n-ую частичную сумму S_n не превышает значение u_{n+1}.

Пример 25. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится, т.к. для него выполнены все условия теоремы Лейбница: он является знакочередующимся, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0, \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.

Пример 26. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ является условно сходящимся, так как он сходится (для него выполнены все условия теоремы Лейбница), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, составленный из абсолютных величин его членов, является гармоническим рядом, и, следовательно, расходится.

Пример 27. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ является абсолютно сходящимся, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, составленный из абсолютных величин его членов, сходится (по признаку Даламбера).

Теорема 17. (Признак Абеля). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Пример 28. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ сходится условно (по признаку Лейбница). Последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Следовательно, по признаку Абеля исследуемый ряд сходится (условно).

Теорема 18. (Признак Дирихле). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если последовательность $\{a_n\}$, начиная с некоторого номера n_0, монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$, и последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничена.

Пример 29. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \omega n}{n^{\alpha}}$.

Решение. А). При $\alpha \le 0$ необходимое условие сходимости ряда не выполняется (предел общего члена ряда не равен нулю).

Б). При $\alpha > 1$ исследуемый ряд в соответствии с признаком сравнения для рядов с положительными членами сходится абсолютно, т.к. $\left|\frac{\cos \omega n}{n^{\alpha}}\right| \le \frac{1}{n^{\alpha}}$.

В). Рассмотрим ряд при $0 < \alpha \le 1$. Согласно тригонометрической формуле $\cos(\omega n) = \frac{\sin(n+0{,}5)\omega - \sin(n-0{,}5)\omega}{2\sin(0{,}5\omega)}$. Тогда частичная сумма запишется в виде

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(\omega k) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(\sin(k+0{,}5)\omega - \sin(k-0{,}5)\omega\right)}{2\sin(0{,}5\omega)} = \frac{\sin(n+0{,}5)\omega - \sin 0{,}5\omega}{2\sin(0{,}5\omega)} .$$

Поэтому $|S_n| \le \dfrac{1}{\sin(0{,}5\omega)}$. Следовательно, при $\omega \ne 2\pi n$ ряд сходится условно (признак Дирихле).

Г). Наконец, при $0 < \alpha \le 1$ и $\omega = 2\pi n$ ряд расходится, так как является в этом случае обобщенным гармоническим рядом: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\omega n}{n^{\alpha}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$.

5. Упражнения.

I. Установить сходимость (или расходимость) ряда, используя определение суммы ряда, критерий Коши, необходимый признак сходимости, признаки сравнения

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 4}} + \ldots$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0{,}001}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2n+1}$

6. $2 + \dfrac{2^2}{2} + \dfrac{2^3}{3} + \dfrac{2^4}{4} + \ldots$

7. $\dfrac{1}{1001} + \dfrac{1}{2001} + \dfrac{1}{3001} + \ldots$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg \dfrac{1}{2n^2}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{4n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$

20. $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots$

21. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}{n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^4+1}}$

II. Исследовать сходимость рядов с помощью признаков Даламбера, Коши,…

29. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln n}$

30. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln^p n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot n!}{n^n}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\cdot n!}{n^n}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

36. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot7\cdot10\cdot\ldots(4+3(n-1))}{2\cdot6\cdot10\cdot\ldots(2+4(n-1))}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\left((\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})\cdot(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdot\ldots\cdot(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})\right)$

40. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{1+n}\right)^{n(n-1)}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000\cdot1001\cdot\ldots\cdot(1000+n-1)}{(2n-1)!!}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-n}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot tg\frac{\pi}{2^{n+1}}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{\left(2n^2+n+1\right)^{(n+1)/2}}$

51. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

52. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

III. Определить область абсолютной и условной сходимости знакопеременных рядов

53. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$

54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100}n}{n}\sin\frac{\pi n}{4}$

55. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$

57. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1}$

58. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n-1)}{(n+1)\cdot\sqrt[100]{n}}$

59. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$

60. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

63. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2^n \cdot n^{100}$

64. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{12}}{\ln n}$

65. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$

66. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$

67. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$

68. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$

69. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

70. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}$

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$

72. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!}$

Список рекомендуемой литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1,2. М.: Наука. 1970.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. М.: Высшая школа, 1981.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ Астрель, 2005.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1969.
5. Н.А.Воробьев Теория рядов, М.: Наука,1974
6. Данко П.Б., Попов О.К., Кожевникова Л.Н. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч.2., М.: Наука,1982

Лариса Владимировна **Лебедева**

СХОДИМОСТЬ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23