МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”

Е.Л. Панкратов
Е.А. Булаева

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие
по курсу «Математический анализ»

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.02 «Менеджмент»

Нижний Новгород
2015

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: Автор: Панкратов Е.Л., Булаева Е.А. учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. - 42 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор **М.И. Сумин.**

Учебно-методическое пособие «Обыкновенные дифференциальные уравнения» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по специальности 38.03.02 «Менеджмент», с соответствующим разделом курса «Математический анализ». Оно содержит основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений, основные аналитические методы их решения и некоторые приложения. Для закрепления теоретических знаний по обыкновенным дифференциальным уравнениям в данном пособии приведены контрольные задания.

Ответственная за выпуск:
председатель методической комиссии Института экономики и предпринимательства, **Е.Н. Летягина**.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

Содержание

Введение

В настоящее время имеется большое количество экономических для описания которых необходимо решать дифференциальные уравнения. В рамках проведения такого моделирования необходимо решать как линейные, так и нелинейные дифференциальные уравнения с постоянными и переменными параметрами. В данном пособии приведен обзор методов решения обыкновенных дифференциальные уравнения. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенций ОК-15 и ОК-16 образовательного стандарта специальности 38.03.02 «Менеджмент». В результате изучения раздела математики “Обыкновенные дифференциальные уравнения” курса “Математический анализ” студенты должны знать основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уметь решать обыкновенные дифференциальные уравнения первого и высших порядков, а также системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. ***Основные понятия теории дифференциальных уравнений***

Определение 1

Уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию независимой переменной $y(x)$ и производные функции $y\ (x)$ до n-го порядка включительно называется обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка.

Определение 2

Пусть $F\ (x,y,\ldots)$ - непрерывная функция. Уравнение

$$F\left(x, y(x), \frac{d\,y(x)}{d\,x}, \frac{d^2 y(x)}{d^2 x}, \ldots, \frac{d^n y(x)}{d^n x}\right) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка, неразрешённым относительно старшей производной.

Определение 3

Пусть $f(x,y,\ldots)$ - непрерывная функция. Уравнение

$$\frac{d^n y(x)}{d^n x} = f\left(x, y(x), \frac{d\,y(x)}{d\,x}, \frac{d^2 y(x)}{d^2 x}, \ldots, \frac{d^{n-1} y(x)}{d^{n-1} x}\right)$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешённым относительно старшей производной.

Определение 4

Функция $y = y\ (x)$ называется решением (интегралом) дифференциального уравнения, если при её подстановке в данное уравнение оно обращается в тождество.

Определение 5

Общим решением дифференциального уравнения называется его решение, содержащее все постоянные интегрирования.

Замечание 1

Количество постоянных интегрирования совпадает с порядком уравнения.

Определение 6

Если в общем решении выбрано конкретное значение постоянных интегрирования, то решение называется частным.

Определение 7

Особым решением называется такое решением дифференциального уравнения, для всех точек которого нарушается свойство единственности. Например, отдельные слагаемые могут обращаться в нуль или бесконечность. Особое решение состоит из особых точек.

Пример 1

Рассмотрим уравнения

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 2\frac{y}{x},\ \frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{y}{x},\ \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{x+y}{x-y},\ \frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{x}{y}.$$

Правые части данных уравнений, а также уравнений

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{2y},\ \frac{dx}{dy}=-\frac{x}{y},\ \frac{dx}{dy}=\frac{x-y}{x+y},\ \frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}$$

разрывны в точке x=0 и y=0. Интегрирование исходных уравнений позволяет получить следующие решения

$$y=Cx^2,\ y=C/x,\ \sqrt{x^2+y^2}=C\exp\left[arctg\left(\frac{y}{x}\right)\right],\ x^2+y^2=C^2.$$

Данные особые точки называются соответственно узлом, седлом, фокусом и центром.

Определение 8

График частного решения называется интегральной кривой.

Определение 9

Если решение дифференциального уравнения $y=y(x)$ удовлетворяет начальным условиям, т.е. при $x=x_0$, $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, $y''(x_0)=y''_0$, …, $y^{(n)}(x_0)=y^{(n)}{}_0$, то считается, что оно удовлетворяет задаче Коши.

Определение 10

Если решение дифференциального уравнения $y=y(x)$ на интервале $x\in[a,b]$ удовлетворяет граничным условиям, т.е. при $x=a$ $y(a)=y_a$ и при $x=b$ $y(b)=y_b$, то считается, что оно удовлетворяет краевой задаче.

2. Задачи, приводящие к решению обыкновенных дифференциальных уравнений

Необходимость решения дифференциальных уравнений возникает в ряде прикладных задачах. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2

Рассмотрим точку, движущуюся вдоль оси Ox со скоростью $v(t)$. Будем также считать, что известна абсцисса x_0 этой точки в некоторый момент времени t_0, принятый за начальный. Найдём закон движения данной точки. Под законом движения понимается зависимость абсциссы движущейся точки от времени. Такая задача сводится к необходимости нахождения решения следующего дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt}=v(t).$$

Общее решение такого уравнения имеет следующий вид

$$x(t)=C+\int_0^t v(\tau)\,d\tau\,.$$

Решение имеет единственную постоянную интегрирования, но при $t=t_0$ оно должно обращаться в $x=x_0$. Из данного условия получаем

$$C = x_0 - \int_0^{t_0} v(\tau)\, d\tau .$$

Тогда

$$x(t) = x_0 - \int_0^{t_0} v(\tau)\, d\tau + \int_0^{t} v(\tau)\, d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau .$$

<u>Пример 3</u>

Известно, что скорость распада радия прямо пропорционально наличному количеству радия. Будем считать, что в момент времени t_0 имелось M_0 *г* радия. Определим массу радия в момент времени t. Обозначим коэффициент пропорциональности как $a>0$. Тогда задача сводится к нахождению такого решения дифференциального уравнения

$$\frac{d\,M(t)}{d\,t} = -a\,M(t),$$

которое при $t=t_0$ обращается в $M=M_0$. Искомым решением будет убывающая во времени экспоненциальная функция

$$M(t) = C\,e^{-a\,t} .$$

Наложенное условие позволяет получить

$$C = M_0 e^{a\,t_0} .$$

Таким образом, решение рассмотренного уравнения, удовлетворяющее наложенным условиям, имеет следующий вид

$$M(t) = M_0 e^{-a(t-t_0)} .$$

Из рассмотренных примеров следует, что одному и тому же дифференциальному уравнению может удовлетворять большое количество функций. Поэтому для определения искомой функции задавалось не только дифференциальное уравнение, которому она должна удовлетворять, но также и её значение при определённом (например, начальном) значении аргумента. В рассмотренных примерах начальные значения определяли единственным образом соответствующие им решения дифференциальных уравнений. Нахождение решений дифференциального уравнения называется интегрированием данного уравнения.

<u>Пример 4</u>

Рассмотрим колебательный контур, состоящий из конденсатора ёмкостью C, катушки индуктивностью L, резистора с сопротивлением R и источника ЭДС E. (см. рис.11.1). Падение напряжения на первых трёх элементах соответственно

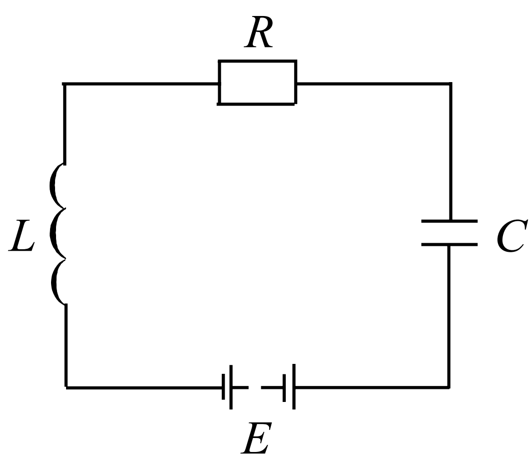

Рис. 1.

равно $\dfrac{q}{C}$ (q – заряд на обкладках конденсатора), $L\dfrac{d\,i}{d\,t}$ ($i=\dfrac{d\,q}{d\,t}$ - сила тока) и iR. Второй закон Кирхгофа при постоянном значении индуктивности в данном случае имеет вид

$$L\frac{d^2\,q(t)}{d\,t^2}+R\frac{d\,q(t)}{d\,t}+\frac{q(t)}{C}=E\,.$$

Общее решение такого уравнения имеет представимо в следующей форме

$$q=E\frac{C}{L}+C_1\exp\left[-\left(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{L\,C}}+\frac{R}{2L}\right)t\right]+C_2\exp\left[\left(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{L\,C}}-\frac{R}{2L}\right)t\right],$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, t - время. Если $\dfrac{R^2}{4L^2}>\dfrac{1}{L\,C}$, получаем затухающее во времени решение исходного дифференциального уравнения. Если $\dfrac{R^2}{4L^2}<\dfrac{1}{L\,C}$, получаем колебательное с уменьшающейся во времени амплитудой решение исходного дифференциального уравнения, т.е.

$$q(t)=E\frac{C}{L}+C_1\exp\left[-\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}+\frac{R}{2L}\right)j\,t\right]+C_2\exp\left[\left(\sqrt{\frac{1}{L\,C}-\frac{R^2}{4L^2}}-\frac{R}{2L}\right)j\,t\right].$$

где $j=\sqrt{-1}$. Эквивалентная форма записи (с учётом формул Эйлера) данного соотношения имеет следующий вид

$$q(t)=E\frac{C}{L}+\widetilde{C}_1\cos\left[-\left(\sqrt{\frac{1}{L\,C}-\frac{R^2}{4L^2}}+\frac{R}{2L}\right)t\right]+\widetilde{C}_2\sin\left[\left(\sqrt{\frac{1}{L\,C}-\frac{R^2}{4L^2}}-\frac{R}{2L}\right)t\right].$$

Пусть $q(0)=q_0$ и $q'(0)=0$. Из таких начальных условий получаем

$$C_1 = q_0 - E\frac{C}{L} - \left[\left(q_0 - E\frac{C}{L}\right)\left(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}+\frac{R}{2L}\right) - E\frac{C}{L}\right] \Big/ 2\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}},$$

$$C_2 = \left[\left(q_0 - E\frac{C}{L}\right)\left(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}+\frac{R}{2L}\right) - E\frac{C}{L}\right] \Big/ 2\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}.$$

3. ***Методы решения дифференциальных уравнений первого порядка***

Определение 11

Уравнения

$$F\left(x, y(x), \frac{d\,y(x)}{d\,x}\right) = 0 \text{ и } \frac{d\,y(x)}{d\,x} = f\left(x, y(x)\right),$$

называются обыкновенными дифференциальными уравнением первого порядка неразрешённым и разрешённым относительно первой производной.

Определение 12

Пусть в каждой точке (x,y) определён такой угол α, что $tg(\alpha)=f(x,y(x))$. Тогда точка (x,y) вместе с отрезком малой длины, составляющим угол α с положительным направлением оси абсцисс, называется линейным элементом.

Определение 13

Совокупность линейных элементов образует поле направлений, наглядно изображающее рассматриваемое дифференциальное уравнение.

Метод изоклин

Рассмотри уравнение

$$\frac{d\,y(x)}{d\,x} = f\left(x, y(x)\right).$$

Функция $k=f(x,y(x))$ является угловым коэффициентом касательной к искомой интегральной кривой. Геометрическое место точек, в которых касательные к интегральным кривым сохраняют постоянное значение ($k=const$), называются изоклинами.

Пример 5

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{y}{x}.$$

Угловой коэффициент касательной к искомой интегральной кривой равен отношению $k=y/x$, т.е. совпадает с угловым коэффициентом прямой, направленной из начала координат в точку (x,y). Интегральными кривыми в данном случае будут линии $y=Cx$ (C – постоянная интегрирования), т.к. направления этих линий совпадают с направлением поля.

Пример 6

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

Угловой коэффициент касательной к искомой интегральной кривой равен отношению k=-x/y. Такой угловой коэффициент и угловой коэффициент касательной в предыдущем примере удовлетворяют условию ортогональности (т.е. интегральная кривая перпендикулярна своей касательной), т.е. –(x/y)(y/x)=-1. Поэтому поле направлений, определяемое данным дифференциальным уравнением, ортоганально полю направлений, рассмотренному в предыдущем примере. Тогда интегральными кривыми в рассмотренном примере являются две полуокружности $y=\sqrt{c^2-x^2}$ и $y=-\sqrt{c^2-x^2}$, образующие окружность с центром в начале координат и радиусом, равным постоянной интегрирования.

Пример 7

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Угловой коэффициент касательной к искомой интегральной кривой равен

$$\sqrt{x^2+y^2}=k=const\Leftrightarrow x^2+y^2=k^2.$$

Таким образом, изоклинами являются окружности с центром в начале координат и равным k радиусом. Для построения поля направлений присвоим постоянной k некоторые определённые значения (см. рис. 11.2).

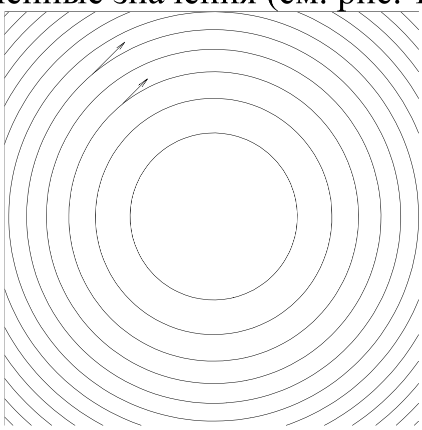

Рис. 2.

Теперь можно приближённо провести искомые интегральные кривые, похожие на $y=Cx^2$ (C – постоянная интегрирования).

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение 14

Если обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка представимо в следующей форме

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x),$$

где $f(y) \neq 0$, то оно называется уравнением с разделяющимися переменными. Для его решения разделим переменные. Тогда

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx.$$

Интегрирование такого уравнения позволяет получить

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx + C.$$

Если необходимо выделить частное решение, удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_0$, тогда решение рассматриваемого дифференциального уравнения может быть представлено в следующей форме

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} = \int_{x_0}^{x} g(x)dx.$$

Пример 8

Решим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Далее разделим переменные. Тогда

$$y\,dy + x\,dx = 0.$$

В окончательном виде решение данного уравнения представимо в следующей форме

$$y^2 + x^2 = C.$$

Пример 9

Найдём решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \ln(y)\exp(x^2).$$

Далее разделим переменные. Тогда

$$\frac{d\,y}{\ln(y)} = \exp\left(x^2\right) d\,x\,.$$

В окончательном виде решение данного уравнения представимо в следующей форме

$$\int \frac{d\,y}{\ln(y)} = \int \exp\left(x^2\right) d\,x + C\,.$$

Полученные интегралы не вычисляются в элементарных функциях, но рассматриваемое дифференциальное уравнение считается проинтегрированным, т.к. решение доведено до квадратур.

Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными
Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\,y}{d\,x} = f\left(a\,x + b\,y\right),$$

где a и b - постоянные величины. Замена переменных $z=ax+by$ позволяет преобразовать данное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными. Переходя к новым переменным, получаем

$$\frac{d\,z}{d\,x} = a + b\frac{d\,y}{d\,x},\ \frac{d\,z}{d\,x} = a + b\,f(z).$$

Разделение переменных приводит к следующему результату

$$\frac{d\,z}{a + b\,f(z)} = d\,x\,.$$

Общий интеграл такого уравнения имеет вид

$$x = \int \frac{d\,z}{a + b\,f(z)} + C\,.$$

<u>Пример 10</u>
Найдём решение уравнения

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 2\,x + y\,.$$

Замена переменных $z=ax+by$ приводит к следующему результату

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,z}{d\,x} - 2,\ \frac{d\,z}{d\,x} - 2 = z\,.$$

Разделение переменных в новом уравнении позволяет получить

$$dx = \frac{dz}{z+2}.$$

В результате последовательных интегрирования и потенцирования получаем

$$x^2 + ln|C| = ln|z+2| \Rightarrow z = Ce^x - 2.$$

Возвращение к исходным переменным приводит к решению исходного дифференциального уравнения в окончательной форме

$$2x + y = Ce^x - 2 \Leftrightarrow y = Ce^x - 2x - 2.$$

<u>Пример 11</u>

Решим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1.$$

Замена переменных $z=x-y$ позволяет получить

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx},\ 1 - \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + 1.$$

Такая система уравнений может быть преобразована к одному уравнению

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z}.$$

Последовательные разделение переменных и интегрирование приводят к следующему решению данного уравнения

$$z\,dz = -dx,\ z^2 = C - 2x.$$

Возвращение к исходным переменным позволяет получить искомое решение в окончательной форме

$$(x-y)^2 = C - 2x \Leftrightarrow y = x \mp \sqrt{C - 2x}.$$

К уравнениям с разделяющимися переменными также приводятся

Однородные дифференциальные уравнения

Рассмотрим следующее уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

После подстановки $z=y/x$ или $y=z\cdot x$ получаем

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z = f(z).$$

Разделение переменных приводит к следующему результату

$$\frac{d\,z}{f(z)-z}=\frac{d\,x}{x}.$$

Общий интегрирование такого уравнения имеет вид

$$\int\frac{d\,z}{f(z)-z}=\ln|z|+\ln|C|.$$

Потенцирование такого соотношения позволяет получить

$$x=C\exp\left[\int\frac{d\,z}{f(z)-z}\right].$$

<u>Пример 12</u>

Найдём форму зеркала, собирающего параллельные лучи в одну точку. Для решения данной задачи будем считать, что лучи падают параллельно оси Оx справа. Из соображений симметрии следует, что форма поверхности зеркала является поверхностью вращения. Примем плоскость Оxy за мередианную плоскость данной поверхности. В сечении находится искомая кривая $y=y(x)$. Если воспользоваться условием, что угол падения φ равен углу отражения (как следствие – равны соответствующие тангенсы, выраженные через x, $y(x)$ и $y'(x)$), можно получить искомое дифференциальное уравнение в следующем виде

$$tg(\varphi)=\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{y}{x+\sqrt{y^2+x^2}}.$$

Преобразуем данное уравнение к эквивалентной форме

$$x\,d\,x+y\,d\,y=\sqrt{y^2+x^2}\,d\,x.$$

Умножим полученное уравнение на функцию $\mu=1/\sqrt{y^2+x^2}$, т.е.

$$\frac{x\,d\,x+y\,d\,y}{\sqrt{y^2+x^2}}=d\,x.$$

Интегрирование позволяет получить

$$\sqrt{y^2+x^2}=x+C.$$

Решением данного уравнения является квадратичная парабола

$$y^2=2C(x+C/2).$$

<u>Пример 13</u>

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\,y}{d\,x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right).$$

Такое уравнение может быть преобразовано к однородному уравнению после переноса начала координат в точку (x_1,y_1) пересечения прямых $a_1x_1+b_1y_1+c_1=0$ и $a_2x_2+b_2y_2+c_2=0$. В новых координатах $X=x-x_1$ и $Y=y-y_1$ рассматриваемое уравнение принимает следующий вид

$$\frac{d\,Y}{d\,X}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\,Y/X}{a_2+b_2\,Y/X}\right)=F\left(\frac{Y}{X}\right),$$

соответствующий однородному уравнению.

Уравнение в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнение

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0.$$

Если левая часть такого уравнения является дифференциалом некоторой функции $d\,U(x,y)$, то рассмотренное уравнение называется уравнением в полных дифференциалах. Тогда

$$d\,U(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy=0.$$

Интегрирование такого уравнения позволяет получить

$$U(x,y)=C.$$

Для того, чтобы левая часть исходного уравнения являлась полным дифференциалом функции $d\,U(x,y)$ необходимо и достаточно выполнения сформулированного Эйлером условия

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial\,y}\equiv\frac{\partial N(x,y)}{\partial\,x}.$$

Функцию $U(x,y)$ можно также восстановить из полного дифференциала с помощью следующего соотношения

$$U(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)d\,x+\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}N(x,y)d\,y.$$

<u>Пример 14</u>

Рассмотрим уравнение

$$(x+y+1)\,dx+(x-y^2+3)\,dy=0.$$

Равенство друг другу производных

$$\frac{\partial\left(x+y+1\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(x-y^{2}+3\right)}{\partial x}\Leftrightarrow 1=1$$

подтверждает, что исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Далее вычисляем интеграл $U\left(x,y\right)=\int M\left(x,y\right)d\,x+C\left(y\right)$. Тогда

$$U\left(x,y\right)=\frac{x^{2}}{2}+x\,y+x+C\left(y\right).$$

Вычисление производной $\frac{\partial U\left(x,y\right)}{\partial y}$ позволяет получить

$$\frac{\partial U\left(x,y\right)}{\partial y}=x+\frac{\partial C\left(y\right)}{\partial y}=x-y^{2}+3\Leftrightarrow\frac{\partial C\left(y\right)}{\partial y}=3-y^{2}.$$

Восстановление $C(x,y)$ по её производной приводит к следующему результату

$$C\left(y\right)=3y+C_{1}-\frac{y^{3}}{3}.$$

В окончательной форме искомая функция $U(x,y)$ определяется соотношением

$$U\left(x,y\right)=\frac{x^{2}}{2}+x\,y+x+3y-\frac{y^{3}}{3}+C_{1},$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Интегрирующий множитель

Часто левая часть уравнения

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

не является уравнением в полных дифференциалах. Но иногда удаётся подобрать такой множитель $\mu(x,y)$, который приводит рассматриваемое уравнение в уравнение в полных дифференциалах, т.е.

$$d\,U(x,y)=\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

В таком случае функция $\mu(x,y)$ называется интегрирующим множителем для рассматриваемого уравнения.

<u>Пример 15</u>

Рассмотрим уравнение

$$x\,dx+y\,dy+x^{2}(x^{2}+y^{2})\,dx=0.$$

Умножим левую часть уравнения на функцию $\mu(x,y)=1/(x^2+y^2)$, т.е.

$$\frac{x\,d\,x}{x^{2}+y^{2}}+\frac{y\,d\,y}{x^{2}+y^{2}}+x^{2}d\,x=0.$$

Проверка с использованием соотношения

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

подтверждает, что полученное соотношение является уравнением в полных дифференциалах. Тогда уравнение с учётом интегрирующего множителя легко интегрируется

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{x^3}{3}=\ln\left|C_1\right|\Leftrightarrow\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2x^3}{3}=\ln\left(C_1\right)^2.$$

Потенцирование данного соотношения позволяет получить

$$\left(x^2+y^2\right)e^{2x^3/3}=C.$$

В общем виде интегрирующий множитель может быть определён с помощью следующего соотношения

$$\frac{\partial\left[\mu(x,y)M(x,y)\right]}{\partial y}=\frac{\partial\left[\mu(x,y)N(x,y)\right]}{\partial x}.$$

Линейное уравнение

Линейным уравнением называется уравнение, линейное относительно искомой функции, т.е.

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x),$$

где $p(x)$ и $f(x)$ – известные функции. Если $f(x)=0$, то оно называется однородным. Если $f(x)\neq 0$, то оно называется неоднородным. Однородное уравнение может быть решено методом разделения переменных. Тогда

$$y=C\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Для решения неоднородного уравнения может быть использован

Метод вариации произвольной постоянной

В рамках данного метода решение однородного уравнения подставляется в исходное неоднородное уравнение. Но при этом считается, что постоянная интегрирования c является функцией независимой переменной x, т.е. $c=c(x)$. После рассмотренной подстановки получаем

$$\frac{dc(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx}=f(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{dc(x)}{dx}=f(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Тогда

$$c(x)=\int f(x)e^{\int p(v)dv}\,dx+C_1.$$

<u>Пример 16</u>

Найдём решение уравнения

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x^2.$$

Решением однородного уравнения является следующая функция

$$y=Cx.$$

Далее считаем C функцией x. Тогда

$$x\frac{dC(x)}{dx}+C(x)-C(x)\frac{x}{x}=x^2 \Leftrightarrow x\frac{dC(x)}{dx}=x^2 \Leftrightarrow \frac{dC(x)}{dx}=x.$$

Решение уравнения для $C(x)$ и его подстановка в решение однородного уравнения для $y(x)$ позволяет получить

$$y=x(C_1+x^2/2).$$

<u>Пример 17</u>

Определим функцию $y(x)$ из уравнения

$$\frac{dy}{dx}-y\,ctg(x)=2x\sin(x).$$

Решением однородного уравнения является функция

$$y=C\cdot sin(x).$$

Вариация постоянной C приводит к следующему результату

$$\frac{dC(x)}{dx}\sin(x)+C(x)\cos(x)-C(x)\sin(x)ctg(x)=2x\sin(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{dC(x)}{dx}\sin(x)=2x\sin(x)\Leftrightarrow\frac{dC(x)}{dx}=2x.$$

Общий интеграл данного уравнения определяется соотношением

$$y=(C_1+x^2)sin(x).$$

Некоторые нелинейные уравнения могут быть сведены к линейным заменой переменных. Примером таких уравнений является

Уравнение Бернулли

Данное уравнение имеет следующий вид

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^n,$$

где $n\neq 1$. Разделим правую и левую часть уравнения Бернулли на $y^n(x)$, т.е.

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+\frac{p(x)}{y^{1-n}}=f(x).$$

Замена переменной $z(x)=y^{n-1}(x)$ приводит рассматриваемое уравнение к следующему виду

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=f(x).$$

<u>Пример 18</u>
Решим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}+\frac{x^2}{2y}.$$

Преобразуем его к виду

$$2y\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x}+x^2.$$

Проведём замену переменных $y^2=z$. Тогда

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{x}+x^2.$$

Интегрирование данного уравнения приводит к следующему результату

$$z=x(C_1+x^2/2).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$y^2=x(C_1+x^2/2).$$

Уравнение Риккарти

Такое уравнение в общем случае имеет следующий вид

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y+q(x)y^2=f(x).$$

Данное уравнение не интегрируется в квадратурах, т.е. в общем случае его решение не может быть найдено в элементарных функциях. Однако, если известно одно частное решение уравнения Риккарти $y_1(x)$, то заменой $y(x)=y_1(x)+z(x)$ рассматриваемое уравнение можно преобразовать в уравнение Бернулли. После проведения рассмотренной замены получаем

$$\frac{d\,y_1}{d\,x}+\frac{d\,z}{d\,x}+p(x)y_1+p(x)z+q(x)y_1^2+2q(x)y_1z+q(x)z^2=f(x).$$

Из-за того, что $y_1(x)$ является решением уравнения Риккарти, сумма соответствующих членов уравнения равна нулю. Тогда

$$\frac{d\,z}{d\,x}+\left[p(x)+2q(x)y_1\right]z+q(x)z^2=f(x).$$

<u>Пример 19</u>

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\,y}{d\,x}=y^2-\frac{2}{x^2}.$$

Частным решением такого уравнения является следующая функция $y_1(x)=1/x$. Полагая $y(x)=z(x)+1/x$, получаем $y'(x)=z'(x)-\frac{1}{x^2}$. Тогда

$$\frac{d\,z}{d\,x}-\frac{1}{x^2}=\left(z+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{2}{x^2}\Leftrightarrow\frac{d\,z}{d\,x}=z^2+2\frac{z}{x}.$$

Данное уравнение является уравнением Бернулли. Приводим его к следующему виду

$$\frac{1}{z^2}\frac{d\,z}{d\,x}=\frac{2}{x\,z}+1.$$

Замена переменных $z=1/u$ позволяет получить

$$\frac{d\,u}{d\,x}=-2\frac{u}{x}-1.$$

Последовательные разделение переменных, интегрирование и потенцирование дают связь между u и x

$$\frac{d\,u}{u}=-2\frac{d\,x}{x};\ \ln|u|=-2\ln|x|+\ln|C|\Leftrightarrow u=\frac{C}{x^2}.$$

Вариация постоянной приводит к следующему результату

$$\frac{1}{x^2}\frac{d\,C(x)}{d\,x}-2\frac{C(x)}{x^3}=-2\frac{C(x)}{x^3}-1\Leftrightarrow\frac{d\,C(x)}{d\,x}=-x^2\Rightarrow C(x)=C_1-\frac{x^3}{3}.$$

Тогда

$$u(x)=\frac{1}{x^2}\left(C_1-\frac{x^3}{3}\right)\Rightarrow z(x)=\frac{3x^2}{3C_1-x^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x)=\frac{3x^2}{3C_1-x^3}-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow y(x)=\frac{3x^4+x^3-3C_1}{x^2\left(3C_1-x^3\right)}.$$

Уравнение Клеро

Уравнением Клеро называется следующее уравнение

$$y=x\frac{dy}{dx}-g\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Общий интеграл уравнения Клеро имеет вид

$$y=xC+g(C),$$

где C – произвольная постоянная.

4. ***Дифференциальные уравнения второго порядка***

В данном разделе рассматриваются методы интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка. Данные методы обобщаемы и на случай уравнений более высокого порядка

Определение 15

Уравнения

$$F\left(x,y(x),\frac{dy(x)}{dx},\frac{d^2y(x)}{d^2x}\right)=0 \text{ и } \frac{d^2y(x)}{d^2x}=f\left(x,y(x),\frac{dy(x)}{dx}\right)$$

называются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, соответственно неразрешённым и разрешённым относительно старшей производной.

Замечание 2

Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка имеет следующий вид: при $x=x_0$ *искомая функция и её первая производная соответственно равны* $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0$.

Понижение порядка дифференциальных уравнений

4.1. *Уравнение, не содержащее искомой функции*

Рассмотрим уравнение, не содержащее искомой функции, т.е.

$$F\left(x,\frac{dy(x)}{dx},\frac{d^2y(x)}{d^2x}\right)=0.$$

В данном случае замена искомой функции $z(x) = \frac{d\, y(x)}{d\, x}$ позволяет понизить порядок уравнения, т.е.

$$F\left(x, z(x), \frac{d\, z(x)}{d\, x}\right) = 0.$$

После нахождения решения $z=z(x)$ функция $y=y(x)$ находится интегрированием

$$y(x) = \int z(x) d\, x + C.$$

<u>Пример 20</u>

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 y}{d\, x^2} - \frac{1}{x}\frac{d\, y}{d\, x} = 0.$$

Проведём замену искомой функции $z(x) = \frac{d\, y(x)}{d\, x}$. Тогда

$$\frac{d\, z}{d\, x} - \frac{z}{x} = 0.$$

Разделение переменных позволяет получить

$$\frac{d\, z}{z} = \frac{d\, x}{x}.$$

Результат интегрирования данного уравнения имеет вид

$$z=C_1 x.$$

Возвращение к исходной искомой функции приводит к следующему соотношению

$$y=C_2+C_1 x^2/2.$$

4.2. *Уравнение, не содержащее независимой переменной*

Рассмотрим уравнение, не содержащее независимой переменной, т.е.

$$F\left(y(x), \frac{d\, y(x)}{d\, x}, \frac{d^2 y(x)}{d^2 x}\right) = 0.$$

Тогда замена искомой функции $z(x) = \frac{d\, y(x)}{d\, x}$ позволяет понизить порядок уравнения, т.е.

$$z=\frac{d\,y}{d\,x};\ \frac{d\,z}{d\,x}=\frac{d^2y}{d\,x^2}=\frac{d\,z}{d\,y}\frac{d\,y}{d\,x}=z\frac{d\,z}{d\,y}.$$

Таким образом, достигается понижение порядка исходного дифференциального уравнения за счёт его сведения к следующему виду

$$F\left(y(x),\frac{d\,y(x)}{d\,x},\frac{d^2y(x)}{d^2x}\right)=0\to\widetilde{F}\left(y,z(y),\frac{d\,z(y)}{d\,y}\right).$$

Тогда после решения уравнения в переменных (y,z), полученное уравнение формально интегрируется в исходных переменных (x,y).

<u>Пример 21</u>

Рассмотрим уравнение

$$y\frac{d^2y}{d\,x^2}-\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2=0.$$

Проведём замену искомой функции $z(x)=\dfrac{d\,y(x)}{d\,x}$. Тогда получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$y\,z\frac{d\,z}{d\,y}-z^2=0.$$

Последовательные разделение переменных и интегрирование приводят к следующему результату

$$\frac{d\,z}{z}=\frac{d\,y}{y}\Rightarrow\ln|z|=\ln|y|+\ln|C_1|\Leftrightarrow z=C_1y=\frac{d\,y}{d\,x}.$$

Повторные последовательные разделение переменных и интегрирование позволяют получить общее решение исходного уравнения в окончательном виде

$$\frac{d\,y}{y}=C_1d\,x\Rightarrow\ln|y|=C_1\,x+\ln|C_2|\Leftrightarrow y=C_2\,e^{C_1\,x}.$$

4.3. *Левая часть уравнения является полным дифференциалом функции*

Рассмотрим уравнение, левая часть которого является производной некоторого дифференциального выражения, т.е.

$$F\left(x,y(x),\frac{d\,y(x)}{d\,x},\frac{d^2y(x)}{d^2x}\right)=\frac{d}{d\,x}\widetilde{F}\left(x,y(x),\frac{d\,y(x)}{d\,x}\right)=0.$$

Тогда формальным интегрированием левой и правой частей уравнения получаем так называемый “первый интеграл”, т.е.

$$\widetilde{F}\left(x, y(x), \frac{d\,y(x)}{d\,x}\right) = C_1 .$$

<u>Пример 22</u>
Рассмотрим уравнение

$$y\frac{d^2 y}{d\,x^2} + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 = 0 .$$

Такое уравнение эквивалентно следующему

$$\frac{d}{d\,x}\left(y\frac{d\,y}{d\,x}\right) = 0 .$$

Первый интеграл такого соотношения имеет вид

$$y\frac{d\,y}{d\,x} = C_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{d\,y^2}{d\,x} = C_1 .$$

Являющийся в данном случае вторым общий интеграл вычисляется аналогично, т.е.

$$y^2 = 2\,C_1 x + C_2 .$$

<u>Пример 23</u>
Рассмотрим уравнение

$$y\frac{d^2 y}{d\,x^2} - \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 = 0 .$$

Преобразуем данное уравнение к следующей форме

$$\frac{1}{y^2}\left[y\frac{d^2 y}{d\,x^2} - \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\,x}\left(\frac{1}{y}\frac{d\,y}{d\,x}\right) = 0 .$$

Первый интеграл данного соотношения имеет вид

$$\frac{1}{y}\frac{d\,y}{d\,x} = C_1 \Leftrightarrow \frac{d}{d\,x}\ln|\,y\,| = C_1 .$$

Являющийся в данном случае вторым общий интеграл вычисляется аналогично, т.е.

$$\ln|\,y\,| = C_1 x + \widetilde{C}_2 \Leftrightarrow y = C_2 e^{C_1 x} .$$

4.4. *Понижение порядка уравнения, имеющего одинаковые коэффициенты перед искомой функцией и её производными*

Рассмотрим уравнение, имеющее одинаковые коэффициенты перед искомой функцией и её производными (оно также имеет название однородного относительно искомой функции и её производных), т.е.

$$F\left(x, k\,y(x), k\frac{d\,y(x)}{d\,x}, k\frac{d^2y(x)}{d^2x}\right) = k^p\tilde{F}\left(x, k\,y(x), k\frac{d\,y(x)}{d\,x}, k\frac{d^2y(x)}{d^2x}\right).$$

Порядок такого уравнения может быть понижен на единицу с помощью следующей замены: $y(x) = e^{\int z(x)d\,x}$. Вычисление производных от искомой функции подтверждает понижение порядка, т.е.

$$\frac{d\,y(x)}{d\,x} = z(x)\,e^{\int z(x)d\,x},\ \frac{d^2y(x)}{d\,x^2} = \left[z^2(x) + \frac{d\,z(x)}{d\,x}\right]e^{\int z(x)d\,x}.$$

Решение линейного дифференциального уравнения второго порядка

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение следующего вида

$$a_2(x)\frac{d^2y(x)}{d\,x^2} + a_1(x)\frac{d\,y(x)}{d\,x} + a_0(x)\,y(x) = b(x). \qquad (1)$$

<u>Замечание 3</u>

Порядок указывает на то, что решение уравнения должно содержать две постоянные интегрирования. Если известны два линейно независимых частных решения рассматриваемого дифференциального уравнения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то структура общего решения такого уравнения представима в виде

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

<u>Определение 16</u>

Если $b(x)$=0, то дифференциальное уравнение (1) называется однородным. В противоположном случае данное уравнение называется неоднородным.

<u>Определение 17</u>

Если $a_0(x)=const_0$, $a_1(x)=const_1$, $a_2(x)=const_2$ и $b(x)=const_b$, то дифференциальное уравнение (11.1) называется уравнением с постоянными коэффициентами.

<u>Определение 18</u>

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, … называются линейно зависимыми на отрезке $x\in[a,b]$, если существуют такие постоянные величины α_1, α_2, … (хотя бы одна из них не равна нулю), что на данном отрезке выполняется соотношение

$$\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)+\ldots\equiv 0.$$

Если данное тождество выполняется только при $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \ldots \equiv 0$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, … называются линейно независимыми на отрезке $x \in [a,b]$.

Метод Эйлера

Метод Эйлера применяется для решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_2 \frac{d^2 y(x)}{d x^2} + a_1 \frac{d\, y(x)}{d x} + a_0 y(x) = 0 .$$

Подстановка $y(x) = e^{\lambda x}$ преобразует рассмотренное дифференциальное уравнение в алгебраическое

$$a_2 \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0,$$

называемое “характеристическим”. Далее сокращаем каждый из членов уравнения на ненулевой множитель $e^{\lambda x}$. Тогда параметр λ определяется корнями следующего квадратичного полинома

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Искомые корни определяются с помощью стандартного соотношения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{1}{2a_2}\sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} .$$

В окончательной форме искомое решение рассматриваемого уравнения имеет следующий вид

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} .$$

Если параметры λ получаются комплексными, то в зависимости от значения корней представляет интерес тригонометрическая или смешанная (экспоненциально-тригонометрическая) форма решения дифференциального уравнения (с применением формул Эйлера).

<u>Пример 24</u>

Решим уравнение

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + 4 \frac{d\, y}{d x} + 5\, y = 0 .$$

Подстановка $y(x) = e^{\lambda x}$ позволяет получить следующее характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

Его корни равны следующим величинам: $\lambda_{1,2} = -2 \pm j$, $j = \sqrt{-1}$. Тогда искомое решение рассматриваемого уравнения имеет следующий вид

$$y(x)=e^{-2x}[C_1 e^{jx}+C_2\, e^{-jx}].$$

После незначительных преобразований с использованием формул Эйлера получаем

$$y(x)=e^{-2x}\left[\widetilde{C}_1\cos(x)+\widetilde{C}_2\sin(x)\right].$$

<u>Пример 25</u>

Решим уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0\,.$$

Подстановка $y(x)=e^{\lambda x}$ позволяет получить характеристическое уравнение

$$\lambda^2\text{-}3\lambda+2=0.$$

Его корни равны: $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=2$. Тогда искомое решение данного уравнения имеет следующий вид

$$y(x)=C_1 e^{x}+C_2 e^{2x}.$$

Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные (в случае дифференциального уравнения второго порядка возможно два кратных корня), то решение необходимо искать в другом виде, т.е.

$$y(x)=(C_1+C_2 x)\,e^{\lambda x}.$$

<u>Пример 26</u>

Решим уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y=0\,.$$

Подстановка $y(x)=e^{\lambda x}$ позволяет получить следующее характеристическое уравнение

$$\lambda^2\text{-}4\lambda+4=0.$$

Его корни равны следующим величинам: $\lambda_1=\lambda_2=2$. Тогда искомое решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$y(x)=(C_1+C_2 x)\,e^{2x}.$$

Формула Лиувилля

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два линейно независимых решения однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Если одно из них (например, $y_1(x)$) известно, то второе может быть определено с помощью формулы Лиувилля

$$y_2 = C_1 y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left(-\int a_1(x)\, d\,x\right) d\,x,$$

где C - произвольная постоянная. Частное решение соответствующего неоднородного уравнения определяется с помощью следующего соотношения

$$y_s = \frac{y_2(x)}{C_1} \int b(x) y_1(x) \exp\left[\int a_1(x)\, d\,x\right] d\,x - \frac{y_1(x)}{C_1} \int b(x) y_2(x) \exp\left[\int a_1(x)\, d\,x\right] d\,x + C_2.$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Рассматриваемое уравнение имеет следующий вид

$$a_2 \frac{d^2 y(x)}{d\,x^2} + a_1 \frac{d\,y(x)}{d\,x} + a_0\, y(x) = b.$$

Общее решение данного уравнения представимо в форме

$$y(x)=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)+y_s(x),$$

где $y_s(x)$ - частное решение дифференциального уравнения, остальная часть - общее решение соответствующего однородного уравнения. Иногда удаётся подобрать частное решение. Например, у уравнения

$$\frac{d^2 y(x)}{d\,x^2} + y(x) = x$$

частным решением является функция $y_s(x)=x$. Часто частные решения определяют для некоторых специальных зависимостей $b(x)$. Пусть функция $b(x) = Q_k(x) \cdot e^{mx}$, где $Q_k(x)$ – многочлен степени k. Тогда частное решение ищется в виде: $y_s(x) = R_k(x)e^{mx}$ (если m не является корнем характеристического уравнения) или $y_s(x)=x^{q\text{-}1}\cdot R_k(x)e^{mx}$ (если m является q-кратным корнем характеристического уравнения), где $R_k(x)$ - полином с неопределёнными пока коэффициентами. Пусть функция $b(x)=Q_k(x)e^{mx}sin(\omega x)$ или $b(x)=Q_k(x)e^{mx}cos(\omega x)$, где $Q_k(x)$ - многочлен степени k. Тогда частное решение определяется в виде: $y_s(x)=e^{mx}[R_k(x)cos\,(\omega x)+ S_k(x)sin(\omega x)]$ (если m не является корнем характеристического уравнения) или $y_s(x)=x^{q\text{-}1}e^{mx}[R_k(x)\,cos(\omega x)+S_k(x)sin(\omega x)]$ (если m является q-кратным корнем характеристического уравнения), где $R_k(x)$ и $S_k(x)$ - полиномы с неопределёнными пока коэффициентами.

Метод вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

Если общее решение однородного уравнения найдено, а нахождение частного решения неоднородного уравнения затруднено, то можно воспользоваться методом вариации произвольных постоянных. Данный метод заключается в том, чтобы в общем решении однородного уравнения

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

объявить произвольные постоянные объявить функциями независимой переменной, т.е.

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$$

и подобрать их таким образом, чтобы получившееся решение удовлетворяло бы неоднородному уравнению. Для этого необходимо сформулировать два дополнительных условия, которые могут быть представлены в следующей форме

$$\begin{cases} \dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}y_1(x)+\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}y_2(x)=0 \\ \dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x}+\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x}=b(x) \end{cases}.$$

<u>Пример 27</u>

Рассмотрим колебание тела массы m на пружине жёсткости k. Потери энергии учитывать не будем. Зависимость координаты тела от времени описываются вторым законом Ньютона

$$m\frac{d^2x(t)}{d\,t^2}+k\,x(t)=0 \Leftrightarrow \frac{d^2x(t)}{d\,t^2}+\frac{k}{m}x(t)=0\,.$$

Общее решение данного уравнения описывается следующим соотношением

$$x(t)=C_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

Такие колебания тела называются собственными. Далее рассмотрим вынужденные колебания тела, т.е. при воздействии внешней силы. Тогда второй закон Ньютона записывается в следующей форме

$$\frac{d^2x(t)}{d\,t^2}+\frac{k}{m}x(t)=f(t).$$

Для нахождения зависимости координаты колеблющегося тела от времени проварьируем произвольные постоянные. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{d\,C_1(t)}{d\,t}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)+\dfrac{d\,C_2(t)}{d\,t}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)=0 \\ -\sqrt{\dfrac{k}{m}}\dfrac{d\,C_1(t)}{d\,t}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)+\sqrt{\dfrac{k}{m}}\dfrac{d\,C_2(t)}{d\,t}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)=f(t) \end{cases}.$$

Преобразуем данную систему к следующему виду

$$\begin{cases} \dfrac{d\,C_1(t)}{d\,t} = -\sqrt{\dfrac{m}{k}}\,f(t)\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) \\ \dfrac{d\,C_2(t)}{d\,t} = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\,f(t)\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) \end{cases}$$

Интегрирование данной системы позволяет получить следующий результат

$$\begin{cases} C_1(t) = -\sqrt{\dfrac{m}{k}}\int f(t)\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)d\,t + \widetilde{C}_1 \\ C_2(t) = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\int f(t)\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)d\,t + \widetilde{C}_2 \end{cases}$$

Закон изменения координаты колеблющегося тела под действием внешней силы в окончательном виде определяется следующим соотношением

$$x(t) = \left[\sqrt{\frac{m}{k}}\int f(t)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)d\,t + \widetilde{C}_1\right]\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) +$$

$$+\left[\sqrt{\frac{m}{k}}\int f(t)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)d\,t + \widetilde{C}_2\right]\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right),$$

где $\widetilde{C}_1$ и $\widetilde{C}_2$ - постоянные интегрирования. В качестве частного случая внешней силы рассмотрим гармоническое воздействие $f(t)=\mathrm{A}cos(\omega t)$. Тогда

$$x(t) = \left[\widetilde{C}_1 A\sqrt{\frac{m}{k}}\int \cos(\omega\, t)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)d\,t\right]\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\times$$

$$\times\left[A\sqrt{\frac{m}{k}}\int \cos(\omega t)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)d\,t + \widetilde{C}_2\right] = \left\{\widetilde{C}_1 + \frac{A\sqrt{m/k}}{2\left(\sqrt{k/m}-\omega\right)}\cos\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}}-\omega\right)t\right] +\right.$$

$$\left.+\frac{A\sqrt{m/k}}{2\left(\sqrt{k/m}+\omega\right)}\cos\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}}+\omega\right)t\right]\right\}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

Из данного соотношения следует, что с уменьшением разницы между частотой внешнего воздействия ω и собственной частотой колебаний $\sqrt{k/m}$ неограниченно увеличивается амплитуда колебаний тела. Такое явление называется “резонанс”.

5. ***Системы линейных дифференциальных уравнений.***

Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

К нормальным системам относятся системы следующего вида

$$\begin{cases} \dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \ldots + a_{1n}y_n(x) \\ \dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x} = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \ldots + a_{2n}y_n(x) \\ \qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \\ \dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x} = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \ldots + a_{nn}y_n(x) \end{cases}$$

Пусть коэффициенты уравнений постоянны. Для нахождения решения такой системы решим следующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Каждому корню λ_i характеристического уравнения соответствует система частных решений

$$y_1(x)=A_1exp(\lambda_i x),\ y_2(x)=A_2exp(\lambda_i x),\ \ldots,\ y_n(x)=A_nexp(\lambda_i x).$$

Коэффициенты A_i определяются из следующей системы линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)A_1 + a_{12}A_2 + \ldots + a_{1n}A_n = 0 \\ a_{21}A_1 + (a_{22}-\lambda)A_2 + \ldots + a_{2n}A_n = 0 \\ \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)A_n = 0 \end{cases}$$

Из этой системы могут быть определены только отношения A_i. Поэтому полученная данным способом система частных решений для каждого λ_i будет содержать единственную произвольную постоянную. Если все корни характеристического уравнения различны, то сумма всех частных решений будет содержать n независимых произвольных постоянных. Такая сумма частных решений даёт общее решение исходной системы дифференциальных уравнений. Если хотя бы один корень λ_i характеристического уравнения имеет кратность q, то этому корню будет соответствовать система частных решений вида

$$y_1(x)=A_1(x)\ exp(\lambda_i x),\ y_2(x)=A_2(x)\ exp(\lambda_i x),\ \ldots,\ y_n(x)=A_n(x)\ exp(\lambda_i x),$$

где $A_i(x)$ – многочлены степени не выше q-1. После подстановки этих выражения с неопределёнными коэффициентами в данную систему и приравнивания (после сокращения экспоненциального множителя) коэффициенты при одинаковых степенях x в правых и левых частях равенств получаются уравнения, позволяющие определить все неизвестные коэффициенты.

Пример 28

Найдём решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} = 2y_1(x) + 2y_2(x) - y_3(x) \\ \dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x} = -2y_1(x) + 4y_2(x) + y_3(x) \\ \dfrac{d\,y_3(x)}{d\,x} = -3y_1(x) + 8y_2(x) + 2y_3(x) \end{cases}$$

Характеристическое уравнение данной системы имеет следующий вид

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & 4-\lambda & 1 \\ -3 & 8 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-6)(\lambda-1)^2 = 0.$$

Для простого корня λ=6 получается следующая система уравнений для коэффициентов A_i, $i\in[1,3]$

$$\begin{cases} -4A_1 + 2A_2 - A_3 = 0 \\ -2A_1 - 2A_2 + A_3 = 0 \\ -3A_1 + 8A_2 - 4A_3 = 0 \end{cases}$$

Корни этой системы равны следующим величинам: A_1=0, A_2=A_3/2=C_1. Тогда: $y_1(x)$=0, $y_2(x)=C_1e^{6x}$, $y_3(x)=2C_1e^{6x}$. Для кратного корня λ=1 искомые решения системы с учётом неопределённых коэффициентов определяются соотношениями

$$y_1(x)=(P_1x+Q_1)e^x,\ y_2(x)=(P_2x+Q_2)e^x,\ y_3(x)=(P_3x+Q_3)e^x.$$

После подстановки предполагаемой формы решения в исходную систему уравнений, сокращения на e^x и приведения подобных получаем систему уравнений для коэффициентов P_i и Q_i

$$\begin{cases} P_1 + (P_1x + Q_1) = (2P_1 + 2P_2 - P_3)x + (2Q_1 + 2Q_2 - Q_3) \\ P_2 + (P_2x + Q_2) = (-2P_1 + 4P_2 + P_3)x + (-2Q_1 + 4Q_2 + Q_3) \\ P_3 + (P_3x + Q_3) = (-3P_1 + 8P_2 + 2P_3)x + (-3Q_1 + 8Q_2 + 2Q_3) \end{cases}$$

Приравнивание друг другу коэффициентов при различных степенях x преобразует полученную систему в следующие две

$$\begin{cases} P_1 = 2P_1 + 2P_2 - P_3 \\ P_2 = -2P_1 + 4P_2 + P_3 \\ P_3 = -3P_1 + 8P_2 + 2P_3 \end{cases}; \begin{cases} P_1 + Q_1 = 2Q_1 + 2Q_2 - Q_3 \\ P_2 + Q_2 = -2Q_1 + 4Q_2 + Q_3 \\ P_3 + Q_3 = -3Q_1 + 8Q_2 + 2Q_3 \end{cases}$$

Решение этих систем позволяет получить

$$P_1=5C_2,\ P_2=C_2,\ P_3=7C_2;\ Q_1=5C_3\text{-}6C_2,\ Q_2=C_2,\ Q_3=7C_3\text{-}11C_2.$$

В таком случае общее решение уравнения имеет вид

$$y_1(x)=(5C_2x+5C_3-6C_2)\,e^x,\ y_2(x)=C_1e^{6x}+(C_2x+C_3)\,e^x,\ y_3(x)=2C_1e^{6x}+(7C_2x+7C_3-11C_2)\,e^x.$$

Системы однородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Рассматриваемые системы уравнений имеют вид

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} + a_{12}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x} + \ldots + a_{1n}\dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x} + b_{11}y_1(x) + b_{12}y_2(x) + \ldots + b_{1n}y_n(x) = 0 \\ a_{21}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} + a_{22}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x} + \ldots + a_{2n}\dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x} + b_{21}y_1(x) + b_{22}y_2(x) + \ldots + b_{2n}y_n(x) = 0 \\ \quad\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{n1}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} + a_{n2}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x} + \ldots + a_{nn}\dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x} + b_{n1}y_1(x) + b_{n2}y_2(x) + \ldots + b_{nn}y_n(x) = 0 \end{cases}$$

Данная система может быть также записана в более компактной форме

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{d\,y_k(x)}{d\,x} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}y_k(x) = 0,\ i\in[1,n].$$

Если определитель матрицы, состоящей из коэффициентов a_{ik}, не равен нулю, то данная система может быть приведена к нормальному виду. Однако решение рассматриваемой системы может быть получено без её преобразования. Характеристическое уравнение данной системы имеет следующий вид: $|a_{ik}\lambda+b_{ik}|=0$. Коэффициенты A_i, соответствующие простому корню λ_i, определяется из уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\lambda_i + b_{ik}\right)A_k = 0,\ i\in[1,n].$$

В остальном методика нахождения решения данной системы та же, что и в случае нормальной системы. Системы дифференциальных уравнений, у которых определитель матрицы, состоящей из коэффициентов a_{ik}, равен нулю, необходимо дополнительно исследовать.

<u>Пример 29</u>

Найдём решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} - 2\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x} + 4y_1(x) - y_2(x) = 0 \\ \dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} + 8y_1(x) - 3\,y_2(x) = 0 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение данной системы имеет следующий вид

$$\begin{vmatrix} 5\lambda + 4 & -2\lambda - 1 \\ \lambda + 8 & -3 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1.$$

Найдём коэффициенты A_1 и A_2 для λ_1=-2. В данном случае

$$\begin{cases} -6A_1 + 3A_2 = 0 \\ \ \ 6A_1 - 3A_2 = 0 \end{cases}$$

Решением данной системы являются следующие значения коэффициентов A_i: A_2=2A_1=2C_1. Далее найдём коэффициенты $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ для λ_2=1. Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 9\widetilde{A}_1 - 3\widetilde{A}_2 = 0 \\ 9\widetilde{A}_1 - 3\widetilde{A}_2 = 0 \end{cases}$$

Решением данной системы являются следующие значения искомых коэффициентов $\widetilde{A}_2 = 3\widetilde{A}_1 = 3C_2$. Таким образом, общее решение имеет вид

$$y_1(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^x,\ y_2(x)=2C_1e^{-2x}+3C_2e^x.$$

Системы неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Общий вид таких систем

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} + a_{12}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x} + \ldots + a_{1n}\dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x} + b_{11}y_1(x) + \ldots + b_{1n}y_n(x) = d_1(x) \\ a_{21}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} + a_{22}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x} + \ldots + a_{2n}\dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x} + b_{21}y_1(x) + \ldots + b_{2n}y_n(x) = d_2(x) \\ \quad\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{n1}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} + a_{n2}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x} + \ldots + a_{nn}\dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x} + b_{n1}y_1(x) + \ldots + b_{nn}y_n(x) = d_n(x) \end{cases}$$

Данная система может быть представлена в следующей, более компактной, форме

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{d\,y_k(x)}{d\,x} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\,y_k(x) = d_i(x),\ i\in[1,n].$$

Рассмотрим решение данной системы с помощью метода вариации произвольной постоянной. Общее решение однородной системы подставляется в неоднородную. При этом постоянные интегрирования C_i считаются функциями независимой переменной x, т.е. $C_i=C_i(x)$. При этом в выражениях для производных искомых функций появятся члены, содержащие производные от искомых функций, а также члены, содержащие производные от $C_i(x)$

$$a_{11}C_1(x)\frac{d\,\widetilde{y}_1(x)}{d\,x}+a_{12}C_2(x)\frac{d\,\widetilde{y}_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{1n}C_n(x)\frac{d\,\widetilde{y}_n(x)}{d\,x}+a_{11}\widetilde{y}_1(x)\times$$

$$\times\frac{d\,C_1(x)}{d\,x}+a_{12}\widetilde{y}_2(x)\frac{d\,C_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{1n}\widetilde{y}_n(x)\frac{d\,C_n(x)}{d\,x}+b_{11}\widetilde{y}_1(x)+b_{12}\widetilde{y}_2(x)+$$

$$+\ldots+b_{1n}\widetilde{y}_n(x)=d_1(x)$$

$$a_{21}C_1(x)\frac{d\,\widetilde{y}_1(x)}{d\,x}+a_{22}C_2(x)\frac{d\,\widetilde{y}_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{2n}C_n(x)\frac{d\,\widetilde{y}_n(x)}{d\,x}+a_{21}\widetilde{y}_1(x)\times$$

$$\times\frac{d\,C_1(x)}{d\,x}+a_{22}\widetilde{y}_2(x)\frac{d\,C_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{2n}\widetilde{y}_n(x)\frac{d\,C_n(x)}{d\,x}+b_{21}\widetilde{y}_1(x)+b_{22}\widetilde{y}_2(x)+$$

$$+\ldots+b_{2n}\widetilde{y}_n(x)=d_2(x)$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

$$a_{n1}C_1(x)\frac{d\,\widetilde{y}_1(x)}{d\,x}+a_{n2}C_2(x)\frac{d\,\widetilde{y}_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{nn}C_n(x)\frac{d\,\widetilde{y}_n(x)}{d\,x}+a_{n1}\widetilde{y}_1(x)\times$$

$$\times\frac{d\,C_1(x)}{d\,x}+a_{n2}\widetilde{y}_2(x)\frac{d\,C_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{nn}\widetilde{y}_n(x)\frac{d\,C_n(x)}{d\,x}+b_{n1}\widetilde{y}_1(x)+b_{n2}\widetilde{y}_2(x)+$$

$$+\ldots+b_{nn}\widetilde{y}_n(x)=d_n(x).$$

Первые члены компенсируются более поздними слагаемыми уравнений рассматриваемой системы (т.к. являются решениями однородной системы), т.е.

$$\begin{cases} a_{11}\widetilde{y}_1(x)\dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}+a_{12}\widetilde{y}_2(x)\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{1n}\widetilde{y}_n(x)\dfrac{d\,C_n(x)}{d\,x}=d_1(x)\\ a_{21}\widetilde{y}_1(x)\dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}+a_{22}\widetilde{y}_2(x)\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{2n}\widetilde{y}_n(x)\dfrac{d\,C_n(x)}{d\,x}=d_2(x)\\ \quad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\quad\ldots\\ a_{n1}\widetilde{y}_1(x)\dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}+a_{n2}\widetilde{y}_2(x)\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}+\ldots+a_{nn}\widetilde{y}_n(x)\dfrac{d\,C_n(x)}{d\,x}=d_n(x)\end{cases}$$

Далее из этой системы находятся функции $C_i(x)$.

Пример 30

Найдём решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x}-2\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x}+4y_1(x)-y_2(x)=e^{-x} \\ \dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x}+8y_1(x)-3\,y_2(x)=5\,e^{-x} \end{cases}$$

Решение соответствующей однородной системы, найденное в предыдущем примере, имеет следующий вид

$$y_1(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^x,\ y_2(x)=2C_1e^{-2x}+3C_2e^x.$$

Далее постоянные C_i будем считать функциями независимой переменной x, т.е. $C_i=C_i(x)$. Тогда

$$\begin{cases} 5\,e^{-2x}\dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}-10C_1(x)e^{-2x}+5\,e^x\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}+5\,C_2(x)e^x-4\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}e^{-2x}+ \\ +8C_1(x)e^{-2x}-6\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}e^x-6C_2(x)e^x+4C_1(x)e^{-2x}+4C_2(x)e^x-2C_1(x)\times \\ \times e^{-2x}-3\,C_2(x)e^x=e^{-x} \\ e^{-2x}\dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}-2C_1(x)e^{-2x}+\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}e^x+C_2(x)e^x-6\dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}e^{-2x}+ \\ +12C_1(x)e^{-2x}-9\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}e^x-9\,C_2(x)e^x+8\,C_1(x)e^{-2x}+8\,C_2(x)e^x=5\,e^{-x} \end{cases}$$

Приведение подобных и сокращение экспоненты позволяет получить следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}e^{-2x}-\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}e^x=e^{-x} \\ 5\dfrac{d\,C_1(x)}{d\,x}e^{-2x}+8\dfrac{d\,C_2(x)}{d\,x}e^x=-5\,e^{-x}, \end{cases}$$

которая приведением подобных может быть преобразована к более простой форме

$$\frac{d\,C_1(x)}{d\,x}=\frac{3}{13}e^{-2x},\ \frac{d\,C_2(x)}{d\,x}=-\frac{10}{13}e^{-2x}.$$

Решение такой системы имеет вид

$$C_1(x)=\widetilde{C}_1-\frac{3}{26}e^{-2x},\ C_2(x)=\widetilde{C}_2+\frac{5}{13}e^{-2x}.$$

Общее решение исходной системы неоднородных уравнений представимо в следующей форме

$$y_1(x) = \left(\widetilde{C}_1 - \frac{3}{26}e^{-2x}\right)e^{-2x} + \left(\widetilde{C}_2 + \frac{5}{26}e^{-2x}\right)e^{x};$$

$$y_2(x) = 2\left(\widetilde{C}_1 - \frac{3}{26}e^{-2x}\right)e^{-2x} + 3\left(\widetilde{C}_2 + \frac{5}{26}e^{-2x}\right)e^{x}.$$

Системы однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Данные системы уравнений имеют вид

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{d^2y_1(x)}{d\,x^2} + a_{12}\dfrac{d^2y_2(x)}{d\,x^2} + \ldots + a_{1n}\dfrac{d^2y_n(x)}{d\,x^2} + b_{11}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} + b_{12}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x} + \ldots + \\ + b_{1n}\dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x} + c_{11}y_1(x) + c_{12}y_2(x) + \ldots + c_{1n}y_n(x) = 0 \\ a_{21}\dfrac{d^2y_1(x)}{d\,x^2} + a_{22}\dfrac{d^2y_2(x)}{d\,x^2} + \ldots + a_{2n}\dfrac{d^2y_n(x)}{d\,x^2} + b_{21}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} + b_{22}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x} + \ldots + \\ + b_{2n}\dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x} + c_{21}y_1(x) + c_{22}y_2(x) + \ldots + c_{2n}y_n(x) = 0 \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}\dfrac{d^2y_1(x)}{d\,x} + a_{n2}\dfrac{d^2y_2(x)}{d\,x} + \ldots + a_{nn}\dfrac{d^2y_n(x)}{d\,x} + b_{n1}\dfrac{d\,y_1(x)}{d\,x} + b_{n2}\dfrac{d\,y_2(x)}{d\,x} + \ldots + \\ + b_{nn}\dfrac{d\,y_n(x)}{d\,x} + c_{n1}y_1(x) + c_{n2}y_2(x) + \ldots + c_{nn}y_n(x) = 0 \end{cases}$$

Рассматриваемая система также может быть представлена в более компактной форме

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{d^2y_k(x)}{d\,x^2} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\frac{d\,y_k(x)}{d\,x} + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}y_k(x) = 0,\ i \in [1,n].$$

Такие системы решаются аналогично системам дифференциальных уравнений первого порядка, т.е. в виде линейной комбинации частных решений $y_i(x) = A_i\,e^{\lambda_i x}$, где параметры λ_i определяются из характеристического уравнения

$$|a_{ik}\lambda^2 + b_{ik}\lambda + c_{ik}| = 0.$$

Параметры A_i определяются из соответствующих линейных алгебраических уравнений.

6. *Приложения дифференциальных уравнений в экономике*

Пример 31

Пусть $y(t)$ - объем продукции некоторой отрасли, реализованной к моменту времени t. Будем полагать, что вся производимая отраслью продукция реализуется по некоторой фиксированной цене p, т.е. выполнено условие ненасыщаемости рынка. Тогда доход к моменту времени t составит $y(t) = py(t)$.

Обозначим через $I(t)$ величину инвестиций, направляемых на расширение производства. В модели естественного роста полагают, что скорость выпуска продукции (акселерация) пропорциональна величине инвестиций, имеет место дифференциальное уравнение

$$y'(t) = \alpha I(t)$$

Полагая, что величина инвестиций $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, получим

$$I(t) = mY(t) = mpy(t),$$

где коэффициент пропорциональности m (так называемая норма инвестиций) - постоянная величина, $0<m<1$.

Подставляя последнее выражение для $I(t)$ в дифференциальное уравнение, получим $y' = \alpha mpy(t)$, обозначим $k=\alpha\, mp$, тогда $y' = k\, y(t)$.

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Его решение определяется в рамках стандартной методики, т.е.

$$\frac{dy}{y} = k\,d\,t;\ \ \ln|y| = kt + \ln C;\ \ \ln\frac{y}{C} = k\,t;\ \ \frac{y}{C} = e^{k\,t};\ \ y = Ce^{kt}.$$

При начальных условиях $y_0 = y(t_0)$ решение можно записать в виде

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}.$$

На практике условие насыщаемости рынка может быть принято только для достаточно узкого времени интервала. В общем случае кривая спроса, т.е. зависимость цены реализованной продукции от ее объема является убывающей функцией $p = p(y)$. По этой причине модель роста в условиях конкурентного рынка примет вид

$$y' = mlp(y)y$$

оставаясь по-прежнему уравнением с разделяющимися переменными.

Так как все сомножители в правой части уравнения положительны, то $y' > 0$, и это уравнение описывает возрастающую функцию $y(t)$. При исследовании функции $y(t)$ на выпуклость естественно используется понятие эластичности функции. Дифференцируя уравнение $y' = mlp(y)y$ получим

$$y'' = mly'\left(\frac{dp}{dy}y + p\right)$$

Так как эластичность спроса определяется формулой $E_p(y) = \dfrac{p}{y}\dfrac{dy}{dp}$, получим

$$y'' = mly'p\left(\frac{1}{E_p(y)}+1\right)$$

Условие $y''=0$ равносильно равенству $E_p(y)=-1$. Таким образом, если спрос эластичен, т.е. $|E_p(y)|>1$ или $|E_p(y)|<$ -1, то $y''>0$ и функция выпукла вниз; в случае если спрос эластичен, то функция выпукла вверх.

<u>Пример 32</u>

Найти выражение для объёма реализованной продукции $y=y(t)$, если известно, что кривая спроса $p(y)$ задаётся уравнением $p(y)=2-y$, норма акселерации $\frac{1}{l}=2$, норма инвестиций $m=0{,}5$, $y(0)=0{,}5$.

Для решения используем формулу, отражающую модель роста в условиях конкурентного рынка

$$y' = mlp(y)y.$$

Тогда получим следующее дифференциальное уравнение

$$y' = (2-y)y$$

Далее разделим переменные

$$\frac{dy}{(2-y)y}=dt;\ \frac{dy}{y^2-2y+1-1}=-dt;\ \frac{dy}{(y-1)^2-1}=-d\,t.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln\left|\frac{y-1-1}{y-1+1}\right| = -t+\ln C;\ \ln\frac{y-2}{Cy}=-t;\ \frac{y-2}{Cy}=e^{-t};\ 1-\frac{2}{y}=Ce^{-t};\ y=\frac{2}{1-Ce^{-t}}.$$

Учитывая, что $y(0)=0{,}5$, получаем, что $C=-3$. Таким образом, решение рассматриваемого уравнения имеет вид $y=\frac{2}{1+3e^{-2t}}$.

<u>Пример 33</u>

Найти функцию дохода $Y=Y(t)$, если известно, что величина потребления задаётся функцией $C=2t$, коэффициент капиталоёмкости прироста дохода $b=\frac{1}{2}$, $Y(0)=2$.

Известно, что функция дохода равна

$$Y(t)=I(t)+C(t),$$

где $I(t)$ – сумма инвестиций, $C(t)$ – величина потребления. А также имеет место дифференциальное уравнение

$$bY'(t)=I(t),$$

где b – коэффициент капиталоёмкости прироста дохода. По условию задачи составим дифференциальное уравнение:

$$Y(t)=\frac{1}{2}Y'(t)+2t, \text{ или } y'(t)-2y(t)=-4t$$

Итак, функция дохода удовлетворяет линейному неоднородному уравнению первого порядка. Будем искать его решение в виде $Y(t) = u(t)\,v(t)$.

Тогда $y' = u'v + v'u$, подставим в уравнение $u'v + v'u - 2uv = -4t$

1) $u\,(v' - 2v) = 0$ 2) $u'v = -4t$

$\dfrac{dv}{v} = 2dt$ $u'e^{2t} = -4t$

$\ln v = 2t$ $du = -\int 4te^{-2t}\,dt$

$v = e^{2t}$ $u = 2te^{-2t} + e^{-2t} + C$

Общее решение $y = u\,v$ или $y = Ce^{2t} + 2t + 1$. Используя начальные условия $Y(0) = 2$, найдём C: $2 = C + 1$ или $C = 1$. Итак, функция дохода имеет вид $y = e^{2t} + 2t + 1$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I) Найти общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений и решить для них задачу Коши при $y(1) = 1$; $y'(1) = 1$; $y''(1) = 1$; …; $y^{(n)}(1) = 1$. Если существуют особые решения, указать их

01. $3y - x\,y' = 0$, $y'' + 4\,y' = 0$;

02. $y''' - 9\,y' = 0$, $y' = y - x$;

03. $y = x\,y' + 4x^2e^x$, $y = (x+1)\,y' + y^2$;

04. $x\,y^2 + 2x\,y' = y$, $y' + y \cdot tg\,(x) = 0$;

05. $y^2 + (x - a)\,y' = 0$, $2x^2 y\,y' = 1 + x^2$;

06. $y'' + 2y\,(y')^3 = 0$, $y' = (2y + 1)\;ctg\;(x)$;

07. $x^2 \cdot y''' - x^2 \cdot y' = 1$, $x^2 y' + y = 0$;

08. $y' + y \cdot tg(x) = 0$, $x^3 y' = 2y$;

09. $x\,y' - 2\,y = x^3 \ln(x)$,
$y' + y\cos(x) = \sin(2x)$;

10. $(1 + x^2)\,y' + 1 + y^2 = 0$,
$-y = x\,y' - a\sqrt{1 + x^2}$;

11. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$, $3y^2 y' + y^3 = x + 1$;

12. $x\,y' + 2\sqrt{x} = y$, $y'\left(x^2 - 4\right) = 2x\,y$;

13. $(y')^2 = 4\,y$, $y' + y^2 = 2$;

14. $y\,y' + x = 0$, $y\,y'' = (y')^2$;

15. $x^2y^2y' + yx^2 = 1$, $x^2y' = y^2 + xy$;

16. $x\,y' + y = \ln(x) + 1$, $x^2y' + y^2 = 0$;

17. $x\,y' \cdot \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = y \cdot \cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

18. $y + \sqrt{x^2 + y^2} = x\,y'$,

$(2x+1)\,y'+y=x$; $\quad x\,y'=y\left[1+tg\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]$;

19. $a\,y''+b\,y'=c\cdot x$, $a=const$, $b=const$, $c=const$, $x^2\,y'=2\,x\,y-3$;

20. $x^2+y^2=x\,(2\,x+y)\,y'$, $\left(a^2+x^2\right)y'+x\,y=1$;

21. $y'+x\,y=x\,y^3$, $y'-y\cdot tg\,(x)=ctg\,(x)$;

22. $x(x+1)y'=2y+1$, $y'\sqrt{a^2+x^2}=y$;

23. $y'''+3a\,y''+3a^2\,y'+a^3\,y=0$, $\left(1+x^2\right)y'+y\sqrt{1+x^2}=x\,y$;

24. $y'\cos\,(x)-y\sin\,(x)=\sin\,(2\,x)$, $y'+2\dfrac{y}{x}=\dfrac{e^{-x^2}}{x^2}$;

25. $x^2+y(y-x\,y')=0$; $y'=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$;

26. $y\,(y')^2+y'=0$, $(y+x)\,y'=y$;

27. $y'=y$, $x+x\,y+y'\,y\,(1+x)=0$;

28. $x\,y'+y=-x\,y^2$, $y'-x\,y=-y^3e^{-x^2/2}$;

29. $2y'\sqrt{x}=y$, $y'''-5\,y''+8y'-4y=0$;

30. $4y^{(4)}-3y''+2y=0$, $y'=2\sqrt{y}\,\ln\,(x)$.

II) Найти общие решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

11.02.01. $\begin{cases}\dfrac{d\,x}{d\,t}=y+z\\ \dfrac{d\,y}{d\,t}=x+z\\ \dfrac{d\,z}{d\,t}=x+y\end{cases}$;

11.02.02. $\begin{cases}\dfrac{d\,x}{d\,t}=x-y+z\\ \dfrac{d\,y}{d\,t}=x+y-z\\ \dfrac{d\,z}{d\,t}=2x-y\end{cases}$;

11.02.03. $\begin{cases}5\dfrac{d\,x}{d\,t}+4x-y=e^{-t}\\ \dfrac{d\,x}{d\,t}+8x-3y=5e^{-t}\end{cases}$;

11.02.04. $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{d\,t^2}-4\dfrac{d\,x}{d\,t}+4x-y=0\\ \dfrac{d^2y}{d\,t^2}+4\dfrac{d\,y}{d\,t}+4y=16\,e^{t}\end{cases}$;

11.02.05. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+3x+y=0 \\ \dfrac{dy}{dt}-x+y=0 \end{cases}$;

11.02.06. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=8x+2sh(t) \end{cases}$;

11.02.07. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y-7x \\ \dfrac{dy}{dt}+2x+5y=0 \end{cases}$;

11.02.08. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+y \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+4y \end{cases}$;

11.02.09. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+y=0 \\ \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=3x+y \end{cases}$;

11.02.10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+x-y=e^t \\ \dfrac{dy}{dt}-x+y=e^t \end{cases}$;

11.02.11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-2y-z \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y+z \\ \dfrac{dz}{dt}=x-z \end{cases}$;

11.02.12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x-y+z \\ \dfrac{dy}{dt}=x+y+z \\ \dfrac{dz}{dt}=4x-y+4z \end{cases}$;

11.02.13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+y \\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y-z \\ \dfrac{dz}{dt}=2y+3z-x \end{cases}$;

11.02.14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=z+y-x \\ \dfrac{dy}{dt}=z+x-y \\ \dfrac{dz}{dt}=x+y+z \end{cases}$;

11.02.15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-3y \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+y \end{cases}$;

11.02.16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=x+e^t+e^{-t} \end{cases}$;

11.02.17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t} \end{cases}$;

11.02.18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x + y = t \\ \dfrac{dy}{dt} - x = t^{2} \end{cases}$;

11.02.19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \sin(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \cos(t) \end{cases}$;

11.02.20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x \\ \dfrac{dy}{dt} + t^{2} - x = 0 \end{cases}$;

11.02.21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 6e^{2t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + 2te^{t^{2}} \end{cases}$;

11.02.22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y - 11x \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + 9y - t \end{cases}$;

11.02.23. $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin(t) \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos(t) \end{cases}$;

11.02.24. $\begin{cases} \dfrac{d^{2}x}{dt^{2}} = x \\ \dfrac{d^{2}y}{dt^{2}} = y \end{cases}$;

11.02.25. $\begin{cases} \dfrac{d^{2}x}{dt^{2}} + \dfrac{dy}{dt} + x = 0 \\ \dfrac{d^{2}y}{dt^{2}} + \dfrac{dx}{dt} = 0 \end{cases}$;

11.02.26. $\begin{cases} 2\dfrac{d^{2}x}{dt^{2}} + 3\dfrac{dy}{dt} + 6x = 0 \\ 5\dfrac{d^{2}y}{dt^{2}} + 4\dfrac{dx}{dt} = 0 \end{cases}$;

11.02.27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = t + x \end{cases}$;

11.02.28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - \dfrac{1}{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$;

11.02.29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2y = 4x \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + y = te^{-t^{2}} \end{cases}$;

11.02.30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = \cos(t) \\ \dfrac{dy}{dt} + ax = e^{mt} \end{cases}$.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Шилов, Г.Е. Математический анализ / Г.Е. Шилов. - М.: Издательство “Лань”, 2015. 912 с.

2. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа (в двух томах) / Г. М. Фихтенгольц. - М.: Издательство “Лань”, 2015. 912 с.

Дополнительная литература

1. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер. - М.: Юнити, 2008. 480 с.

2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2004. 336 с.

3. Шипачев В.С. Сборник задач по высшей математике / В.С. Шипачев. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2005. 336 с.

Евгений Леонидович **Панкратов**
Елена Алексеевна **Булаева**

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,2. Уч.-изд.л.
Заказ № . Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603000, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01