

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»  
Национальный исследовательский университет

**В.В. Новиков**  
**Н.Ю. Буланихина**  
**Д.В. Капитанов**

## **ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**

*Учебно-методическое пособие*

Учебные дисциплины: «Теоретическая механика»

Рекомендовано методической комиссией механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки: 010100 «Математика», 010200 «Математика и компьютерные науки», 010400 «Прикладная математика и информатика», 010800 «Механика и математическое моделирование»

ННГУ, 2014

УДК 531(072)  
ББК В21р30  
Н 73

Н 73 Новиков В.В. Динамика твердого тела: Учебно-методическое пособие/ В.В. Новиков, Н.Ю. Буланихина, Д.В. Капитанов. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 44 с.

Рецензент: д.т.н., профессор **Л.В. Смирнов**

Пособие посвящено разделу «Динамика твердого тела» курса «Теоретическая механика».

Рассмотрены вращение твердого тела вокруг неподвижной оси, плоское движение тела, движение тела с неподвижной точкой. Представлены частные случаи Эйлера и Лагранжа движения твердого тела, а также приближенная теория гироскопических явлений.

Пособие предназначено для студентов младших курсов физико-математических направлений вузов.

УДК 531(072)  
ББК В21р30

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского,  
2014

## Содержание

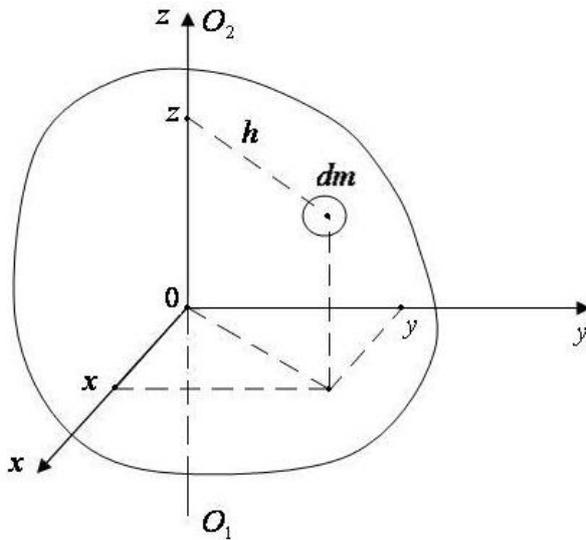
1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.....	3
1.1. Момент количества движения твердого тела относительно оси вращения. Момент инерции.....	3
1.2. Теорема Штейнера.....	4
1.3. Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси .....	5
1.4. Колебания физического маятника.....	7
1.5. Работа силы во вращательном движении.....	8
2. Динамика плоского движения.....	9
2.1. Основные понятия.....	9
2.2. Задачи.....	10
3. Движение твердого тела в общем случае.....	14
3.1. Кинетическая энергия твердого тела.....	14
3.2. Уравнения движения твердого тела.....	15
4. Динамические уравнения Эйлера.....	17
4.1. Тензор моментов инерции.....	17
4.2. Момент количества движения твердого тела относительно центра инерции. Уравнения Эйлера.....	22
5. Динамика твердого тела с неподвижной точкой. Кинематические уравнения.....	23
6. Случай Эйлера.....	29
6.1. Первые интегралы.....	30
6.2. Стационарные вращения твердого тела в случае Эйлера.....	30
6.3. Движение динамически симметричного тела в случае Эйлера. Регулярная прецессия.....	31
6.4. Геометрическая интерпретация движения твердого тела в случае Эйлера.....	34
7. Случай Лагранжа.....	37
8. Приближенная теория гироскопических явлений.....	40
Литература.....	43

# 1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

## 1.1. Момент количества движения твердого тела относительно оси вращения. Момент инерции

Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси  $O_1O_2$ . Примем её за ось  $Oz$  жестко связанной с телом системы координат  $Oxyz$  (Рис.1). Момент количества движения элемента тела массы  $dm$ , находящегося в точке с координатами  $x, y, z$ , относительно  $Oz$  равен  $dk_z = dmhv$ . Вспоминая, что  $v = h\omega$ , где  $\omega$  – угловая скорость, получим:

$$dk_z = dm(x^2 + y^2)\omega.$$



Главный момент количества движения относительно оси:

$$K_z = \int_V dk_z = \int_V \rho(x^2 + y^2)\omega dV,$$

$\rho = \rho(x, y, z)$  – плотность.

Величину

$$I_z = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV$$

называют **моментом инерции тела относительно оси  $Oz$** .

Рис.1. Главный момент количества движения тела относительно оси. Момент инерции

*Момент количества движения тела (главный момент количества движения твердого тела), вращающегося вокруг неподвижной оси, относительно этой оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость вращения.*

Отношение:  $I_z/M$ , где  $M = \int_V \rho dV$  – масса тела, имеет размерность квадрата длины. Обозначим его через  $\xi^2$ .

Величину  $\xi$  называют радиусом инерции относительно оси  $Oz$ .

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси скорость элемента тела  $v = \omega h$ . Его кинетическая энергия  $dT = dm \omega^2 h^2 / 2$ .  
Кинетическая энергия тела:

$$T_{\text{вр}} = \int_V dT = 1/2 I_z \omega^2.$$

## 1.2. Теорема Штейнера

**Теорема:** Момент инерции тела относительно некоторой оси  $Oz$  равен моменту инерции относительно параллельной оси  $Oz_c$ , проходящей через центр инерции тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.

**Доказательство:**

Вычислим моменты инерции некоторого тела сначала относительно оси, проходящей через центр инерции, а затем относительно произвольной параллельной ей оси.

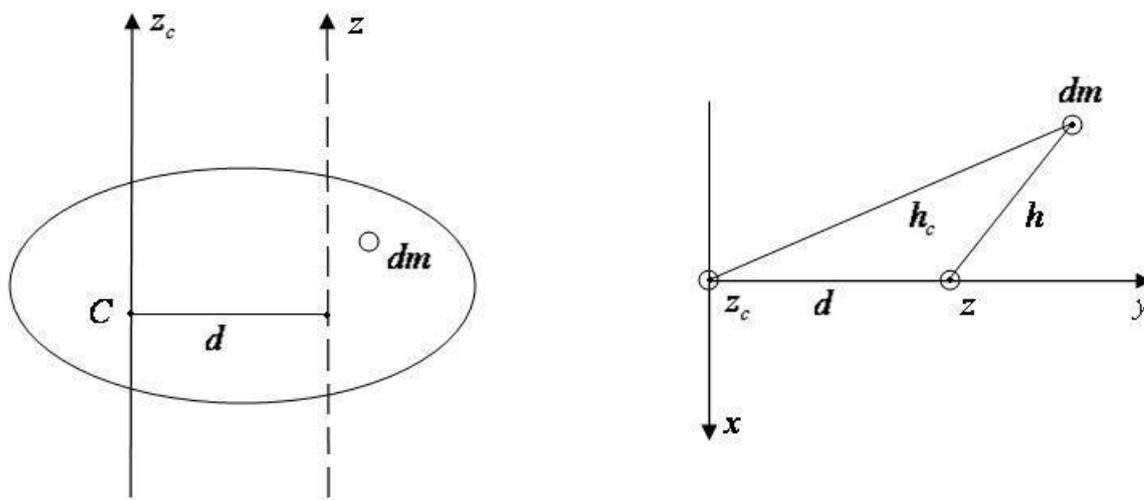


Рис. 2. Теорема Штейнера

Пусть ось  $Oy$  расположена в плоскости осей  $Oz_c$  и  $Oz$  и перпендикулярна этим осям. В соответствии с рис. 2:

$$h^2 = h_c^2 + d^2 - 2h_c \cos\alpha = h_c^2 + d^2 - 2d y,$$

где  $y = h_c \cos\alpha$ .

Тогда имеем:

$$I_z = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV = \int_V \rho h^2 dV, \quad I_z = \int_V \rho(h_c^2 + d^2 - 2d y) dV.$$

Но  $\int_V \rho d^2 dV = d^2 \int_V \rho dV = d^2 M$ , и  $\int_V \rho 2d y dV = 0$ , т.к. центр инерции лежит на оси  $Oz_c$ .

Окончательно запишем:  $I_z = I_{z_c} + Md^2$ .

**Теорема доказана.**

**Пример.** Момент инерции однородной балки длины  $l$  относительно оси  $Oz$  (Рис. 3), проходящей перпендикулярно балке через один из ее концов:

$$I_z = \int_0^l \rho a b y^2 dy = \rho a b l^3 / 3 = M l^2 / 3.$$

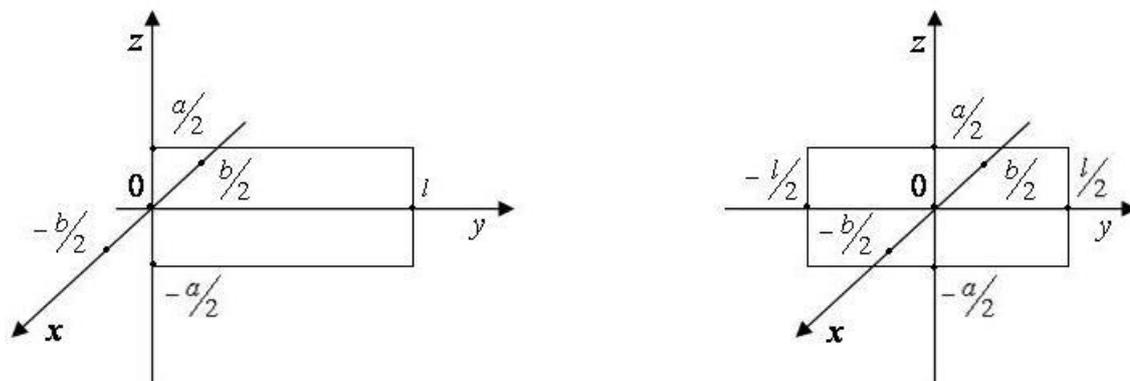


Рис. 3. Моменты инерции балки относительно осей, проходящих через один из ее концов и середину

Момент инерции относительно оси, проходящей через середину балки (центр инерции):

$$I_z = \int_{-l/2}^{l/2} \rho a b y^2 dy = (\rho a b y^3 / 3) \Big|_{-l/2}^{l/2} = M l^2 / 12.$$

**Упражнение:** Убедитесь, что рассмотренный пример соответствует теореме Штейнера.

### 1.3. Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Для системы материальных точек:

$$d\mathbf{K} / dt = \sum_l \mathbf{M}_l. \quad (1)$$

Это – теорема об изменении момента количества движения системы.

Пусть к твердому телу приложены внешние силы:  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_l$ . Кроме этих внешних сил, имеются реакции подшипников, в которых закреплена ось:  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ , которые также являются внешними силами. Однако моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Поэтому в правую часть уравнения для момента количества движения они не входят.

Кинетический момент системы имеет лишь составляющую по оси  $Oz$ :

$$K_z = I_z \omega = I_z \dot{\varphi}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), находим:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_l M_{lz}$$

или 
$$I_z \varepsilon_z = \sum_l M_{lz}. \quad (2)$$

Это – *уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.*

Таким образом, момент инерции характеризует инертность тела при вращательном движении. Для получения одинакового углового ускорения момент силы, действующей на тело с большим моментом инерции, должен быть больше. Из двух тел, вращающихся с одинаковыми угловыми скоростями, при одинаковых моментах внешних сил быстрее остановится тело с меньшим моментом инерции.

**Следствие:** Главный момент количества движения системы относительно некоторой оси  $Oz$  сохраняет постоянное значение  $K_z = const$ , если сумма моментов внешних сил относительно этой оси равна нулю.

Например, фигурист изменяет скорость вращения, прижимая руки к туловищу. Момент количества движения сохраняется, т.к. сила тяжести и реакция льда момента относительно вертикальной оси не имеют:

$$I_z^{(1)} \omega_1 = I_z^{(2)} \omega_2.$$

В заключение сопоставим (2) с дифференциальным уравнением прямолинейного (по оси  $Ox$ ) движения точки:

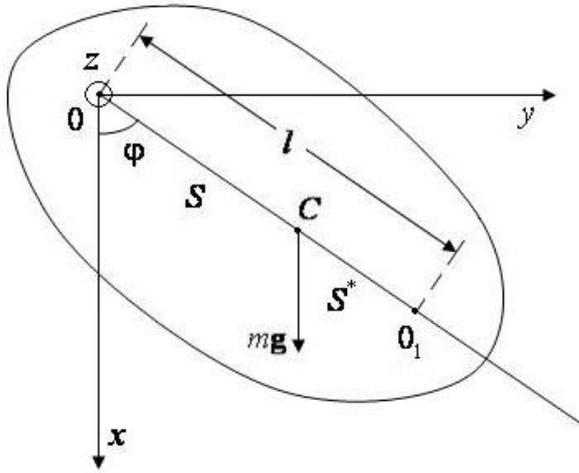
$$m\ddot{x} = \sum_l F_{lx}.$$

Видно, что в уравнении вращательного движения вокруг неподвижной оси момент инерции играет ту же роль, что масса в уравнении движения материальной точки, угловое ускорение аналогично ускорению и т.д.

<b>В поступательном движении</b>	<b>Во вращательном движении</b>
Масса	Момент инерции
Ускорение	Угловое ускорение
Скорость	Угловая скорость
Сила	Момент силы
Кинетическая энергия поступательного движения:	Кинетическая энергия при вращении вокруг оси $Oz$ :
$T_{\text{пост}} = 1/2 mv^2.$	$T_{\text{вр}} = 1/2 I_z \omega^2.$

## 1.4. Колебания физического маятника

Физическим маятником называют тяжелое твердое тело, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения (Рис. 4).



Обозначим через  $I_c$  момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр инерции  $C$ , перпендикулярно плоскости рисунка. Тогда в соответствии с теоремой Штейнера

$$I_0 = I_c + ms^2.$$

Уравнение вращательного движения тела в проекции на  $Oz$  имеет вид:

$$I_0 \ddot{\varphi} = -mgs \sin \varphi.$$

Рис.4. Физический маятник

При малых  $\varphi$  ( $\varphi \ll 1$ ) имеем:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \text{где } \omega^2 = mgs / (I_0 + ms^2).$$

Решение этого уравнения  $\varphi = A \cos(\omega t + \beta)$ .

Период колебаний  $T = 2\pi / \omega$ .

Момент инерции  $I_c = m\xi^2$  ( $\xi$  – приведенная длина).

Для  $T$  можем записать  $T = 2\pi((I_0 + ms^2)/mgs)^{1/2} = 2\pi\sqrt{l/g}$ .

Величину  $l = (s^2 + \xi^2)/s$  называют **эквивалентной длиной физического маятника**.

Отсюда можно записать  $ls = s^2 + \xi^2$ .

Корни этого уравнения обозначим посредством  $s$  и  $s^*$ :  $s + s^* = l$ ,  $s s^* = \xi^2$ .

Видно, что данный период колебаний  $T$  можно получить, поместив ось подвеса в  $O$  или  $O_1$ .

*Теория физического маятника является исторически первой разрешенной задачей динамики системы. Ее решил Гюйгенс (1629-1695). Динамика как наука берет начало от Галилея (1654-1642). Им были открыты весьма существенные свойства равнопеременного движения. Работы Галилея продолжил и развил Гюйгенс. Он распространил теорию ускоренного и замедленного движения материальной точки, т.е. поступательного движения, на случай вращательного движения тел, разработал теорию колебаний физического маятника.*

*Гюйгенс ввел в механику понятие о моменте инерции тела относительно оси.*

В 1690 г. Гюйгенс опубликовал «Трактат о свете», в котором изложил волновую теорию света и рассмотрел некоторые интересные задачи распространения света.

Труды Гюйгенса явились продолжением исследований Галилея и были широко использованы И. Ньютоном (1643-1727). Основную работу Гюйгенса «Маятниковые часы» Ньютон считал превосходной.

### 1.5. Работа силы во вращательном движении

Уравнение вращательного движения тела запишем в виде:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_l \mathbf{M}_l.$$

Умножив его скалярно на вектор угловой скорости  $\omega$ , имеем:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{I_z \omega^2}{2} \right) = \sum_l (\mathbf{M}_l, \omega), \text{ где } (\mathbf{M}_l, \omega) = N_l$$

или

$$\frac{dT_{\text{вр}}}{dt} = \sum_i N_i,$$

где  $N_i$  – мощность силы во вращательном движении.

За элементарный интервал  $dt$  тело поворачивается вокруг оси на угол  $d\varphi$ . Отвечающее этому повороту изменение кинетической энергии:

$$dT_{\text{вр}} = \sum_l (\mathbf{M}_l d\boldsymbol{\varphi}) = \sum_l \delta A_l,$$

где  $d\boldsymbol{\varphi}$  – вектор длины  $d\varphi$ , направленный по  $\omega$ .

Таким образом, элементарная работа силы  $\mathbf{F}$  при повороте тела на угол  $d\varphi$ :

$$\delta A = (\mathbf{M}_i d\boldsymbol{\varphi}).$$

При повороте на конечный угол  $\Delta\varphi$  вокруг  $Oz$  работа вычисляется интегрированием элементарной работы:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\mathbf{M}_i d\boldsymbol{\varphi}).$$

Если сила  $\mathbf{F}$  является потенциальной, то ее элементарная работа:

$$\delta A = -d\Pi.$$

Отсюда

$$\mathbf{M}_{\text{пот}} = - \frac{d\Pi}{d\varphi} \mathbf{e}_z,$$

где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор, направленный по  $Oz$ .

## 2. Динамика плоского движения

### 2.1. Основные понятия

Под **плоскопараллельным (плоским) движением** понимают движение, при котором все точки твердого тела во всё время движения расположены в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости. Если мысленно представить, что тело разбито на плоские сечения – плоские фигуры, параллельные этой неподвижной плоскости, то эти сечения будут скользить каждое в своей плоскости. Изучение движения тела значительно упрощается: достаточно изучить движение фигуры в её плоскости.

Это весьма важный для технических приложений случай движения твердого тела. Большинство механизмов, встречающихся в технике, представляет системы твердых тел, совершающих плоские движения.

Будем считать, что твердое тело имеет плоскость материальной симметрии  $Oxy$ , внешние силы  $F_1, \dots, F_l$ , приложенные к телу, располагаются в плоскости  $Oxy$ , а начальные скорости всех точек тела ей параллельны. В этом случае тело будет совершать плоское движение.

Для определения движения плоской фигуры (Рис. 5) должны быть заданы уравнения движения полюса:

$$x_c = f_1(t), \quad y_c = f_2(t)$$

и уравнение вращения фигуры вокруг оси проходящей через полюс и перпендикулярной плоскости  $Oxy$ :

$$\varphi = f_3(t).$$

При плоскопараллельном движении тела ось вращения сохраняет направление в пространстве, перемещаясь параллельно самой себе, следовательно, можно использовать результаты изучения вращения тела вокруг неподвижной оси.

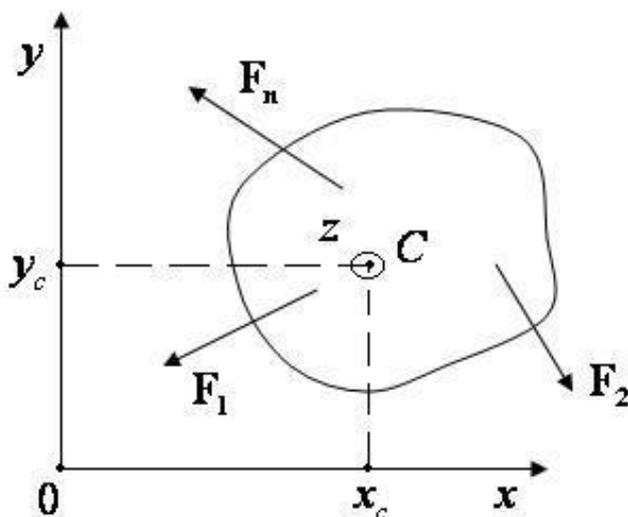


Рис. 5. Плоскопараллельное движение

*В динамике за полюс следует принять центр инерции тела, т.к. этим достигается в дальнейшем исключение внутренних сил из уравнений движения (теорема о движении центра инерции).*

Если представить движение системы как два движения: поступательное вместе с центром инерции и вращательное вокруг центра инерции, то в этом движении теорема о изменении момента количества движения сохраняет свою формулировку.

**Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела** включают: уравнения движения центра инерции (полюса):

$$m\ddot{x}_c = \sum_l F_{lx}, \quad m\ddot{y}_c = \sum_l F_{ly}$$

и уравнение моментов в относительном движении по отношению к центру инерции:

$$I_c \ddot{\varphi} = \sum_l M_{lz},$$

где  $I_c$  – момент инерции относительно оси  $Oz$ .

**Кинетическая энергия твердого тела в плоскопараллельном движении:**

$$T = T_{\text{пост}} + T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2.$$

## 2.2. Задачи

1. Тяжелый круглый цилиндр радиуса  $R$  и массы  $m$  скатывается с наклонной шероховатой плоскости **без скольжения**. Угол наклона плоскости к горизонту равен  $\alpha$ . Найти закон движения центра масс цилиндра.

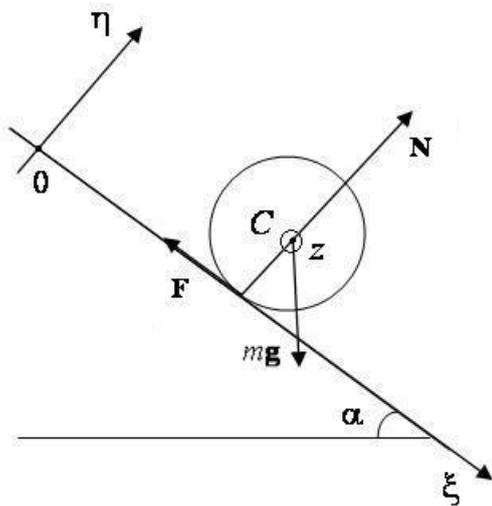


Рис. 6. Задача 1

Движение является плоскопараллельным: все точки цилиндра движутся параллельно неподвижной вертикальной плоскости. Введем неподвижную систему осей  $O\xi\eta$ . Внешние силы, действующие на плоскую фигуру: сила тяжести  $m\mathbf{g}$ , реакция наклонной плоскости  $\mathbf{N}$ , направленная в противоположную движению сторону, перпендикулярная  $O\xi\eta$ , сила трения  $\mathbf{F}$ .

Уравнения движения центра масс:

$$m\ddot{\xi}_c = mg \sin\alpha - F, \quad m\ddot{\eta}_c = N - mg \cos\alpha. \quad (3)$$

Уравнение вращения вокруг оси  $Oz$ , проходящей через центр инерции  $C$ :

$$I_z \varepsilon_z = -RF \quad \text{или} \quad I_z \ddot{\varphi} = RF. \quad (4)$$

Так как при движении цилиндра  $\eta_c = R$ ,  $\dot{\eta}_c = 0$  и  $N = mg \cos \alpha$ .

Качение происходит без проскальзывания, поэтому  $v_c = \dot{\xi}_c = R\dot{\phi}$ . Отсюда  $\ddot{\phi} = \ddot{\xi}_c/R$ . После подстановки этого выражения в уравнение (4) имеем

$$I_z \frac{1}{R} \ddot{\xi}_c = FR \quad \text{или} \quad F = \frac{I_z}{R^2} \ddot{\xi}_c.$$

После подстановки  $F$  в уравнение (3) определим  $\ddot{\xi}_c$ :

$$\ddot{\xi}_c \left( m + \frac{I_z}{R^2} \right) = mg \sin \alpha, \quad \ddot{\xi}_c = g \sin \alpha / \left( 1 + \frac{I_z}{R^2} \right).$$

Так как  $I_z = mR^2/2$ , окончательно имеем:  $\ddot{\xi}_c = 2g \sin \alpha / 3$ .

Таким образом, центр инерции цилиндра движется с постоянным ускорением  $\ddot{\xi}_c = 2g \sin \alpha / 3$ .

Отметим, что в отсутствие трения ( $F=0$ ) цилиндр соскальзывал бы по наклонной плоскости с ускорением  $\ddot{\xi}_c = g \sin \alpha$ .

Укажем еще один способ решения этой задачи. Кинетическая энергия цилиндра:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}_c^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2.$$

На цилиндр действуют три силы. Лишь одна из них – сила тяжести – совершает работу:

$$\delta A_{\text{тяж}} = mg \sin \alpha d\xi_c.$$

Обратимся к теореме об изменении кинетической энергии:  $dT = \delta A_{\text{тяж}}$ ,

$$m \ddot{\xi}_c d\xi_c + \frac{I_z}{R^2} \ddot{\xi}_c d\xi_c = mg \sin \alpha d\xi_c,$$

$$\left( m \ddot{\xi}_c + \frac{I_z}{R^2} \ddot{\xi}_c \right) \dot{\xi}_c dt = mg \sin \alpha d\xi_c.$$

Отсюда

$$\left( 1 + \frac{I_z}{mR^2} \right) \ddot{\xi}_c = g \sin \alpha \quad \text{или} \quad \ddot{\xi}_c = \frac{2g \sin \alpha}{3}.$$

**2.** Динамика гибкого вала. Среди элементов машин, назначение которых состоит в передаче мощности, важнейшее место занимают валы.

Простейшей моделью может служить безмассовый вал круглого сечения с одним круглым диском радиуса  $R$  и массы  $m$ . Диск насажен на вал. Концы вала находятся в соосных подшипниках. Пусть точка  $C$  – центр масс диска,  $D$  – точка пересечения оси с плоскостью диска.

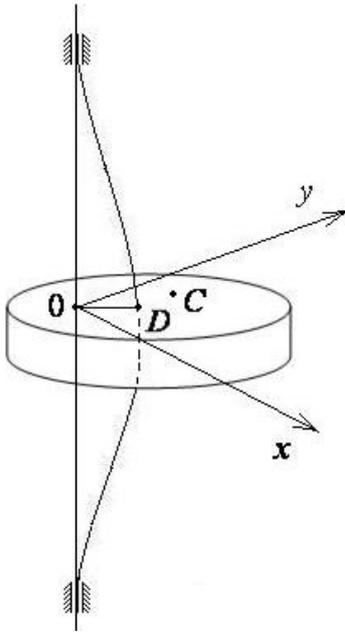


Рис. 7. Задача 2

Расстояние  $DC = e$  называют **эксцентриситетом диска**.

На практике  $e$  – малая величина:  $e \ll R$ .

Отклонение оси вала от прямой  $z$  обозначим  $r = OD$ .

Введем неподвижную систему осей  $Oxy$  (Рис. 7).

Координаты центра масс диска обозначим посредством  $x_c, y_c$ .

На диск действует упругая сила изогнутого вала, которую считаем пропорциональной прогибу  $OD$ , т.е.  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ .

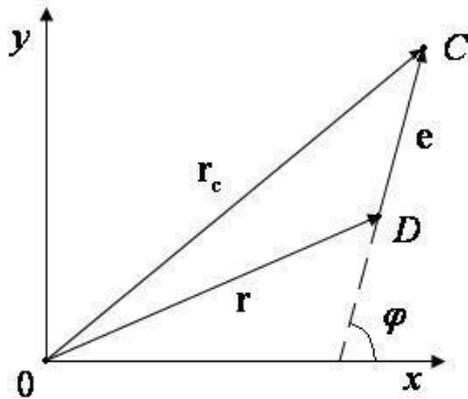
Дифференциальные уравнения движения центра масс:

$$m\ddot{x}_c = -kx, \quad m\ddot{y}_c = -ky.$$

Угловую скорость вращения вала будем считать постоянной

$$\omega = const.$$

Это предположение позволяет ограничиться в рассмотрении уравнениями поступательного движения диска.



На рис. 8 видно, что  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c - \mathbf{e}$ :

$$x = x_c - e\cos\varphi, \quad y = y_c - e\sin\varphi,$$

$$\varphi = \omega t.$$

Продифференцируем эти выражения дважды по времени:

$$\ddot{x} = \ddot{x}_c + e\omega^2\cos\varphi, \quad \ddot{y} = \ddot{y}_c + e\omega^2\sin\varphi.$$

Рис. 8. Уравнения движения центра масс

После подстановки в уравнения поступательного движения диска имеем:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = e\omega^2 \cos\omega t,$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = e\omega^2 \sin\omega t, \quad \omega_0^2 = k/m.$$

Эти уравнения аналогичны дифференциальным уравнениям вынужденных колебаний точки под действием гармонической внешней силы в отсутствие сопротивления.

Общее решение этой системы имеет вид:

$$x = a_1 \sin(\omega_0 t + \alpha_1) + e\omega^2 / (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t,$$

$$y = a_2 \sin(\omega_0 t + \alpha_2) + e\omega^2 / (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t,$$

где  $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Выберем начальные условия так, чтобы  $a_1 = a_2 = 0$ , тогда:

$$x = e\omega^2 / (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t, \quad y = e\omega^2 / (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t.$$

Заметим, что  $OD = \sqrt{x^2 + y^2} = e\omega^2 / (\omega_0^2 - \omega^2)$ .

Видно, что даже при весьма небольших смещениях центра масс с оси вращения,  $x, y$  – смещения диска, а, следовательно, динамические нагрузки могут достигать больших значений. При  $\omega = \omega_0$  наблюдается резонанс.

**Значение угловой скорости вращения вала, соответствующее резонансу, называют критической угловой скоростью.**

Обозначим через  $\beta$  угол  $OD$  с осью  $Ox$ :

$$x = OD \cos \beta, \quad y = OD \sin \beta.$$

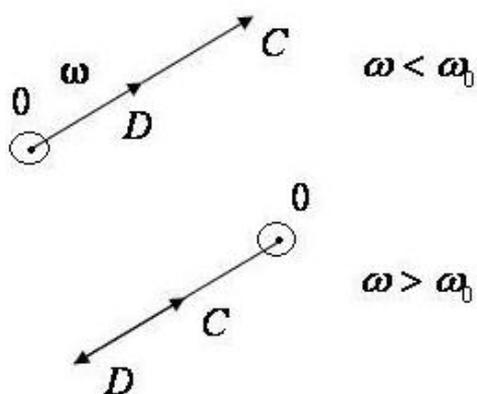
Сопоставляя с выражениями, полученными для  $x$  и  $y$ , заключаем, что  $\beta = \omega t$ .

Отсюда следует, что точка  $O$  и отрезок  $DC$  лежат на одной прямой.

Эта прямая вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через точку  $O$ .

Расстояние  $OC = r_c$ .

$$r_c = OD + e = e\omega^2 / (\omega_0^2 - \omega^2) + e = e / \left(1 - \omega^2 / \omega_0^2\right).$$



При  $\omega < \omega_0$   $r_c > OD > 0$ , т.е. точка  $D$  находится между  $O$  и  $C$  (Рис. 9).

При  $\omega > \omega_0$   $OD$  отрицательно, что отвечает прогибу вала в сторону, противоположную направлению вектора  $DC$ , т.е. центр масс в этом случае располагается между точками  $O$  и  $D$ .

Если  $\omega = \infty$ , то  $r_c = 0$  и  $OD = -e$ .

Рис. 9. Положение центра масс в зависимости от угловой скорости

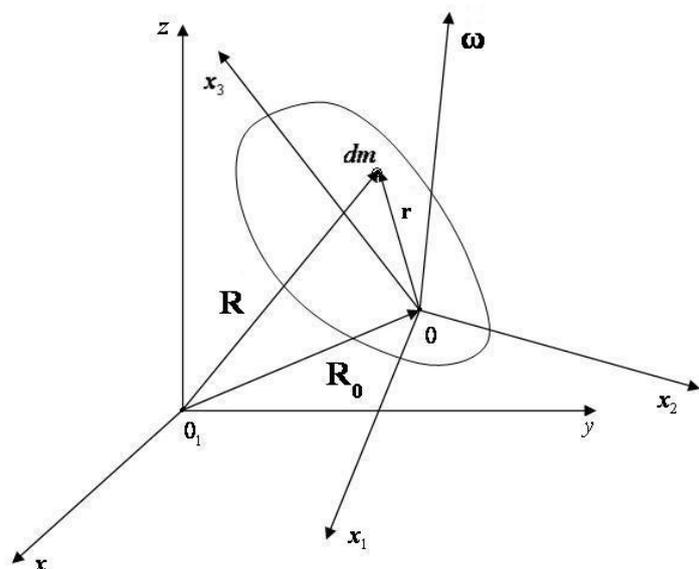
Следовательно, при достаточно большой угловой скорости вращения диск, насаженный на гибкий вал, автоматически центрируется.

Явление автоматического центрирования гибкого вала было замечено в 1884 году Густавом де Лавалем (1845-1913) – шведским инженером, изобретателем паровой турбины.

3. Рассмотрите также задачу о движении обруча в учебно-методическом пособии «Как решать задачи по теоретической механике».

### 3. Движение твердого тела в общем случае

#### 3.1. Кинетическая энергия твердого тела



Введем две системы осей: условно неподвижную  $O_1xyz$  и связанную с телом систему  $Ox_1x_2x_3$ , которая перемещается относительно неподвижной системы поступательно со скоростью  $\mathbf{v}_0(t)$  и вращается с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}(t)$  (Рис. 10).

Вычислим кинетическую энергию абсолютно твердого тела.

Рис.10. Кинетическая энергия тела в общем случае

В  $O_1xyz$  скорость его элемента  $dm$  определяется выражением  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ , а кинетическая энергия  $dT = dm v^2/2$ .

Кинетическая энергия тела запишется в виде:

$$T = \int_V dT = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV = \int_V \rho \{\mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]\}^2 dV,$$

$$T = \frac{1}{2} v_0^2 \int_V \rho dV + \int_V \rho (\mathbf{v}_0[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]) dV + \frac{1}{2} \int_V \rho ([\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}])^2 dV.$$

Первый член в  $T$  записан с учетом того, что скорость  $\mathbf{v}_0$  одинакова для всех точек тела.

Масса тела  $m = \int_V \rho dV$ , где плотность  $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$ .

Преобразуем второе слагаемое в выражении для кинетической энергии  $T$ :

$$\int_V \rho(\mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}])dV = \int_V \rho(\mathbf{r}[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}])dV = \left( [\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}] \int_V \rho\mathbf{r} dV \right).$$

Но  $\int_V \rho\mathbf{r} dV = m\mathbf{r}_c$ , где  $\mathbf{r}_c$  – радиус-вектор центра инерции.

**Если выбрать начало системы  $Ox_1x_2x_3$  в центре инерции, то  $\mathbf{r}_c = 0$ , и выражение для кинетической энергии твердого тела в этом случае принимает наиболее простой вид:**

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\int_V \rho([\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}])^2 dV.$$

$T =$  кинетическая энергия поступательного движения (если вся масса сосредоточена в центре масс)  $+$  кинетическая энергия вращательного движения

Это заключение впервые сформулировал И.С. Кёниг в 1751 году.

Подчеркнем, что положение начала отсчета (т.  $O$ ) можно выбрать произвольным образом. Однако, если т.  $O$  совпадает с центром инерции, то выражение для кинетической энергии имеет простой вид.

**Далее везде, где рассматривается движение твердого тела, точка  $O$  – центр инерции.**

### 3.2. Уравнения движения твердого тела

Движение твердого тела складывается из поступательного движения (движение центра инерции) и вращательного движения (относительно оси, проходящей через центр инерции).

#### *а. Поступательное движение твердого тела*

Теорема об изменении количества движения системы материальных точек (твердого тела):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_l \mathbf{F}_l, \text{ где } \mathbf{p} = \int_V \rho\mathbf{v} dV = \int_V \rho(\mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}])dV = \mathbf{v}_0 \int_V \rho dV = m\mathbf{v}_0.$$

Здесь учтено, что т.  $O$  – центр инерции тела.

Таким образом, центр инерции твердого тела движется как материальная точка с массой, равной массе тела, к которой приложены все внешние силы, действующие на тело:

$$d(m\mathbf{v}_0)/dt = \sum_l \mathbf{F}_l \text{ или при } m = \text{const } m d\mathbf{v}_0/dt = \sum_l \mathbf{F}_l. \quad (5)$$

Поступательное движение отсутствует, когда

$$\sum_l \mathbf{F}_l = 0 \text{ и в начальный момент времени } t = t_0 \text{ скорость } \mathbf{v}_0(t_0) = 0. \quad (6)$$

### *б. Вращательное движение твердого тела*

*Относительно центра инерции* момент количества движения элемента тела  $dm$  имеет вид  $d\mathbf{K} = dm[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]$ . Момент количества движения тела:

$$\mathbf{K} = \int_V \rho [\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] dV.$$

**Уравнение вращательного движения тела** (теорема об изменении момента количества движения системы:

$$d\mathbf{K}/dt = \sum_l \mathbf{M}_l, \quad (7)$$

где  $\sum_l \mathbf{M}_l$  – сумма моментов внешних сил, действующих на тело, вычисленных относительно центра инерции.

Отсутствие вращательного движения (необходимое условие):

$$\sum_l \mathbf{M}_l = 0, \quad \boldsymbol{\omega}(t = 0) = 0. \quad (8)$$

Подчеркнем, что уравнения (5) и (7) записаны в неподвижной системе отсчета.

**Уравнение поступательного движения тела (5) и уравнение вращательного движения (7), дополненные начальными условиями, образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающих движение твердого тела:**

$$d(m\mathbf{v}_0)/dt = \sum_l \mathbf{F}_l, \quad d\mathbf{K}/dt = \sum_l \mathbf{M}_l.$$

**Условия равновесия и отсутствия движения твердого тела имеют вид (6) и (8).**

## 4. Динамические уравнения Эйлера

Ранее из теоремы об изменении момента количества движения получили уравнение вращательного движения (7):

$$d\mathbf{K}/dt = \mathbf{M},$$

где кинетический момент  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  – сумма моментов сил, приложенных к телу, записаны в системе координат  $Oxyz$  (т.  $O$  – центр инерции, ориентация осей неизменна и совпадает с ориентацией системы  $O_1x_1y_1z_1$ ).

Однако удобнее это уравнение рассматривать в проекциях на оси жестко связанной с телом системы  $Ox_1x_2x_3$ , в которой проекции кинетического момента имеют совершенно ясную форму записи.

Напомним, что скорость изменения некоторого вектора  $\mathbf{a}$  по отношению к системе  $Oxyz$  складывается из скорости его изменения по отношению к подвижной системе  $d'\mathbf{a}/dt$  и переносной скорости – векторного произведения  $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}]$ .

С учетом этого уравнение (7) относительно  $Ox_1x_2x_3$  принимают вид:

$$d'\mathbf{K}/dt + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{K}] = \mathbf{M}, \quad (9)$$

где  $d'/dt$  – дифференцирование в подвижной системе (далее штрих опустим),  $\mathbf{M}$  – сумма моментов сил, действующих на тело.

### 4.1. Тензор моментов инерции

В случае неподвижной оси вращения или плоского движения твердого тела скорость элемента  $dm$   $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ ,  $|[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]| = \omega h$ .

Для кинетической энергии твердого тела имеем:

$$T_{\text{вр}} = 1/2 \int_V \rho ([\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}])^2 dV = 1/2 \omega^2 1/2 \int_V \rho h^2 dV = T_{\text{вр}} = 1/2 I_{\omega} \omega^2,$$

где  $\int_V \rho h^2 dV = I_{\omega}$  – момент инерции относительно оси  $\omega$ .

Подобное выражение для  $T_{\text{вр}}$  можно записать и в общем случае, но момент инерции  $I_{\omega}$  будет функцией времени, т.к. со временем изменяется не только величина вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , но и его направление. Изменение величины  $\boldsymbol{\omega}$  войдет в  $T_{\text{вр}}$  явно, а изменение направления  $\boldsymbol{\omega}$  – неявно через  $I_{\omega}(t)$ .

Такая форма записи неприменима для решения конкретных задач. Необходимо получить выражение для кинетической энергии через проекции  $\boldsymbol{\omega}$  на оси связанной с телом системы координат  $Ox_1x_2x_3$ , которые и будут определять изменение  $T_{\text{вр}}$  во времени в явном виде.

Обратимся к выражению для кинетической энергии вращательного движения:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \int_V \rho([\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}])^2 dV$$

и раскроем входящее в него векторное произведение:

$$[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] = \mathbf{e}_1(\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2) + \mathbf{e}_2(\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3) + \mathbf{e}_3(\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1).$$

Теперь подставим это выражение в  $T_{\text{вр}}$ :

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \int_V \rho\{(\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2)^2 + (\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3)^2 + (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1)^2\} dV$$

или

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j,$$

где введены обозначения:

$$I_{ij} = \int_V \rho(x_1 x_2 x_3) (x_n^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dV, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Совокупность этих величин называют **тензором моментов инерции**.

**Тензор моментов инерции  $I_{ij}$  – симметричный тензор второго ранга:  $I_{ij} = I_{ji}$ .**

Величины:  $I_{ii}$  ( $I_{11}, I_{22}, I_{33}$ ) – **осевые моменты инерции**,

$I_{ij}$  ( $i \neq j$ ):  $I_{12}, I_{13}, I_{23}$  – **центробежные моменты инерции тела**.

Ориентацию осей  $Ox_1 x_2 x_3$  в теле можно выбрать произвольным образом. Соответствующим выбором положения осей в теле можно привести  $I_{ij}$  к диагональному виду, когда отличны от нуля лишь осевые компоненты тензора моментов инерции  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$  ( $I_1, I_2, I_3$ ).

В этом случае компоненты  $I_{ij}$  ( $I_1, I_2, I_3$ ) называют **главными моментами инерции**.

При выборе в качестве связанной системы главных осей

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2).$$

Отметим, что каждый из трех главных моментов инерции тела не может быть больше двух других:

$$I_1 + I_2 = \int_V \rho(x_1 x_2 x_3) (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dV \geq \int_V \rho(x_1 x_2 x_3) (x_1^2 + x_2^2) dV = I_3.$$

Тело, у которого все три главных момента инерции различны, называют **асимметричным волчком**.

Если два главных момента инерции равны друг другу  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , то твердое тело называют **симметричным волчком**. В этом случае выбор направления главных осей в плоскости  $Ox_1 x_2$  произволен.

При совпадении трех главных моментов инерции тело называют **шаровым волчком**.

### Примеры:

**а.** Однородный шар радиуса  $R$ .  $I_1 = I_2 = I_3 = 2mR^2/5$  – шаровой волчок.

**б.** Тело в виде куба из однородного материала:  $I_1 = I_2 = I_3 = ma^2/6$ , где  $a$  – сторона квадрата, также является шаровым волчком.

**в.** Однородное цилиндрическое тело радиуса  $R$ , высотой  $h$ , ось  $Ox_3$  совпадает с осью цилиндра:  $I_1 = I_2 = m(R^2 + h^2/3)/4$ ,  $I_3 = mR^2/2$  – симметричный волчок, лишь при  $h = \sqrt{3}R$  – шаровой волчок.

Нахождение главных осей упрощается в тех случаях, когда твердое тело обладает той или иной симметрией. Положение центра инерции и главных осей инерции обладают той же симметрией.

Так, если тело (система материальных точек) обладают плоскостью симметрии (зеркальное отражение совмещает его с самим собой), то центр инерции должен лежать в этой плоскости. В ней же лежат две главные оси инерции, а третья к ней перпендикулярна.

Примером такого рода симметрии является система частиц, расположенных в одной плоскости (плоское тело). Выберем плоскость симметрии в качестве плоскости  $Ox_1 x_2$  ( $Ox_1, Ox_2$  главные оси). Тогда:

$$I_1 = 1/2 \int_V \rho x_2^2 dV, \quad I_2 = 1/2 \int_V \rho x_1^2 dV, \quad I_3 = 1/2 \int_V \rho (x_1^2 + x_2^2) dV.$$

Для плоской системы, плоского тела

$$I_1 + I_2 = I_3.$$

В частности, моменты инерции диска из однородного материала:

$$I_1 = I_2 = m/4 R^2, \quad I_3 = m/2 R^2.$$

Если тело обладает осью симметрии какого-либо порядка (ось  $n$ -го порядка: при повороте на угол  $2\pi/n$  тело совмещается с самим собой), то одна из главных осей инерции совпадает с осью симметрии, а две другие перпендикулярны к ней.

При этом, если порядок оси симметрии выше второго, то тело является симметричным волчком. Действительно, каждую главную ось, перпендикулярную оси симметрии, можно повернуть на угол, отличный от  $\pi$ , т.е. выбор этих осей становится неоднозначным, а это возможно лишь в случае симметричного волчка.

Особый случай – система частиц, расположенных вдоль одной оси, которую назовем  $Ox_3$ :  $I_1 = I_2 = \sum_l x_{3l}^2$ ,  $I_3 = 0$ .

Такую систему называют **ротатором**. Характерная особенность ротатора в том, что он имеет всего две вращательные степени свободы (вращение вокруг  $Ox_1$  и  $Ox_2$ , говорить о вращении прямой вокруг самой себя не имеет смысла).

Подведем итог:

**В общем случае кинетическая энергия тела во вращательном движении имеет вид:**

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \omega_i \omega_j \text{ или } T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j.$$

**Величины  $I_{ij}$  определяются геометрией тела и распределением вещества и не зависят от угловой скорости  $\omega$ .**

### Замечания

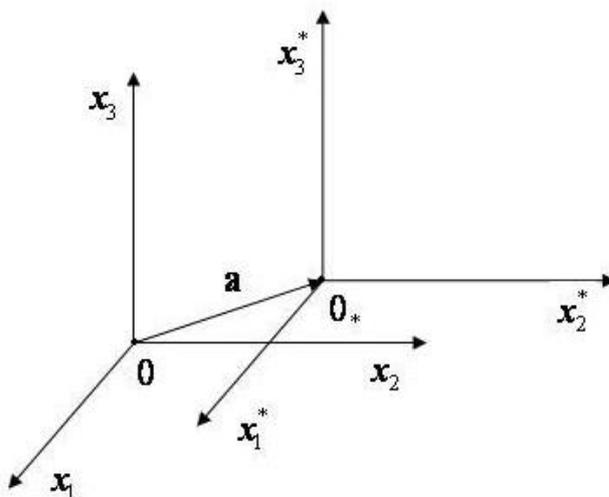


Рис.11. Обобщенная теорема Штейнера

**а. Обобщенная теорема Штейнера.** Мы определили тензор инерции по отношению к системе координат с центром в центре инерции. Иногда оказывается удобным вычислить аналогичный тензор

$$I_{ij}^* = \int_V \rho (x_n^{*2} \delta_{ij} - x_i^* x_j^*) dV$$

по отношению к другому началу  $O_*$  (Рис.11).

Если  $OO_*$  дается вектором  $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ , то  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^* + \mathbf{a}$ .

После подстановки в  $I_{ij}^*$   $x_i^* = x_i - a_i$  имеем:

$$I_{ij}^* = \int_V \rho [(x_n^2 - 2a_n x_n + a_n^2) \delta_{ij} - x_i x_j - a_i a_j + x_i a_j + x_j a_i] dV.$$

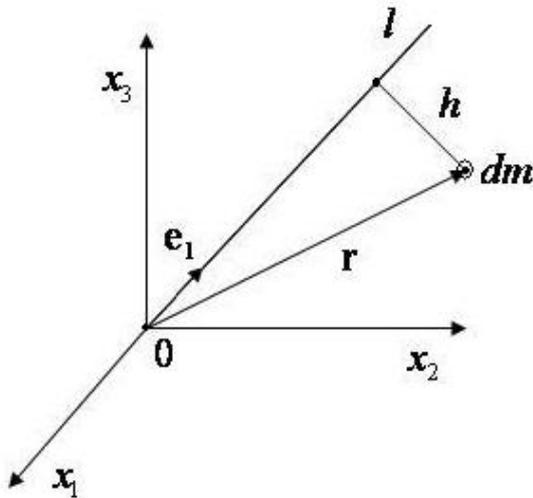
Учитывая  $\int_V \rho x_i dV = 0, i=1, 2, 3$  (по определению точки  $O$ ),

окончательно имеем:

$$I_{ij}^* = \int_V \rho [(x_n^2 + a_n^2) \delta_{ij} - x_i x_j - a_i a_j] dV \quad \text{или} \quad I_{ij}^* = I_{ij} + m(a_n^2 \delta_{ij} - a_i a_j).$$

**б.** Считаем, что в системе координат  $Ox_1x_2x_3$  известны компоненты тензора инерции  $I_{ij}$ . Требуется вычислить **момент инерции относительно оси, проходящей через точку  $O$**  (Рис.12).

Направление оси  $\mathbf{e}_l$  задается направляющими косинусами  $l_1, l_2, l_3, l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$ .



Момент инерции тела относительно оси  $l$  определяется выражением:

$$I_l = \int_V \rho h^2 dV,$$

где  $h$  – перпендикуляр на ось  $l$ .

Вычислим  $h$ :

$$h^2 = \vec{r}^2 - OP^2,$$

$$OP = (\vec{r} \vec{e}_l) = x_1 l_1 + x_2 l_2 + x_3 l_3.$$

Рис.12. Момент инерции относительно наклонной оси

После подстановки  $h^2$  в  $I_l$  имеем:

$$I_l = l_1^2 I_{11} + l_2^2 I_{22} + l_3^2 I_{33} + 2l_1 l_2 I_{12} + 2l_1 l_3 I_{13} + 2l_2 l_3 I_{23}.$$

## 4.2. Момент количества движения твердого тела относительно центра инерции. Уравнения Эйлера

Момент количества движения (кинетический момент) тела:

$$\mathbf{K} = \int_V \rho [\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]dV \quad \text{или} \quad \mathbf{K} = \int_V \rho \{r^2\boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega})\}dV.$$

Проекция вектора  $\mathbf{K}$  на оси связанной с телом системы координат  $Ox_1x_2x_3$ :

$$K_1 = \int_V \rho \{(x_2^2 + x_3^2)\omega_1 - x_1(x_2\omega_2 + x_3\omega_3)\}dV,$$

$$K_2 = \int_V \rho \{(x_1^2 + x_3^2)\omega_2 - x_2(x_1\omega_1 + x_3\omega_3)\}dV,$$

$$K_3 = \int_V \rho \{(x_1^2 + x_2^2)\omega_3 - x_3(x_1\omega_1 + x_2\omega_2)\}dV.$$

Учитывая определение тензора моментов инерции, запишем эти выражения в виде:

$$K_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3,$$

$$K_2 = I_{12}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3,$$

$$K_3 = I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 + I_{33}\omega_3.$$

Или в компактной форме:

$$K_i = I_{ij}\omega_j.$$

Подчеркнем, что вектор  $\mathbf{K}$  записан в связанной с телом системе координат.

Видно, что в общем случае направления  $\mathbf{K}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  не совпадают.

Если система  $Ox_1x_2x_3$  ориентирована по главным направлениям тензора инерции (по главным осям инерции тела), то:

$$K_1 = I_1\omega_1, \quad K_2 = I_2\omega_2, \quad K_3 = I_3\omega_3.$$

Для шарового волчка:  $\mathbf{K} = I \boldsymbol{\omega}$ .

Лишь в этом случае  $\mathbf{K}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  имеют одинаковое направление.

Уравнение (9) в проекциях на  $Ox_1x_2x_3$  (в подвижной системе) запишется в виде:

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= M_1, \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= M_2, \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= M_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Это – динамические **уравнениями Эйлера**. Впервые получил Леонард Эйлер в 1758 году.

Пусть на тело не действуют какие-либо силы извне ( $\mathbf{M} = 0$ ). Приведем его во вращение вокруг  $Ox_1$  ( $Ox_2$ ,  $Ox_3$ ). Из (4) следует, что направление оси вращения не будет изменяться в пространстве. Говорят, что **главные оси являются свободными осями**.

*В общем случае момент внешних сил  $\mathbf{M}$  ( $M_1, M_2, M_3$ ) – правые части уравнений (10) – зависит от положения тела в пространстве (системы  $Ox_1x_2x_3$  относительно  $Oxuz$ ), угловой скорости  $\omega$  и времени  $t$ . Поэтому для замыкания системы к уравнениям (10) следует добавить кинематические уравнения, связывающие положение тела с его угловой скоростью.*

## 5. Динамика твердого тела с одной неподвижной точкой. Кинематические уравнения

**5.1.** Рассматривается вращательное движение абсолютно твердого тела. С телом жестко связана система координат  $Ox_1x_2x_3$ . Опишем положение  $Ox_1x_2x_3$  относительно условно неподвижной системы  $Oxuz$ .

Исторически первым способом задания ориентации  $Ox_1x_2x_3$  являются **углы Эйлера** (Рис.13).

Углы  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , задающие ориентацию  $Ox_1x_2x_3$  относительно  $Oxuz$  представляют собой углы плоских поворотов, на которые следовало бы мысленно повернуть неподвижную систему для совмещения с подвижной.

**Первый** поворот осуществляется в плоскости  $Oxu$  на угол  $\psi$  (от  $Oxuz$  переход к  $Ox'y'z$ ).

**Второй** – в плоскости  $Oy'z$  на угол  $\theta$  (от  $Ox'y'z$  переход к  $Ox'y''x_3$ ).

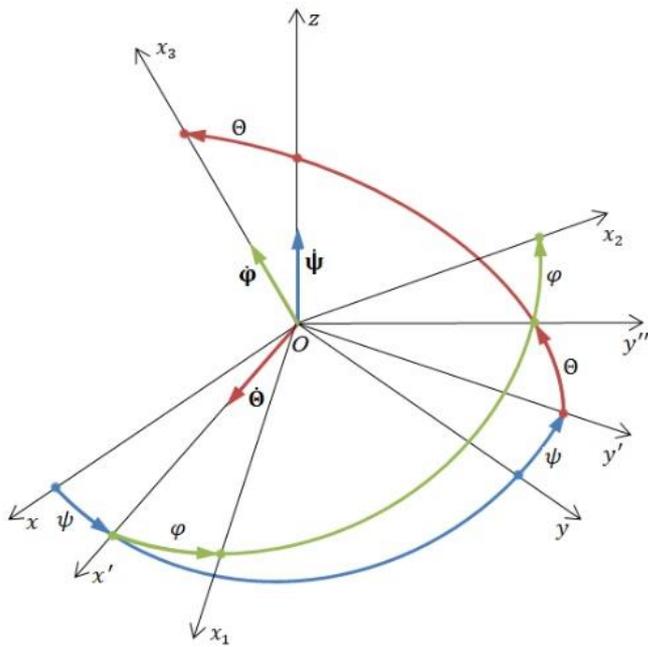


Рис.13. Углы Эйлера

**Третий** – в плоскости  $Ox'y''$  на угол  $\varphi$  (от  $Ox'y''x_3$  переход к  $Ox_1x_2x_3$ ).

Угол  $\psi$  называется **углом прецессии**,  $\theta$  – **углом нутации**,  $\varphi$  – **углом собственного вращения**.

Символически проведенные преобразования можно записать следующим образом:

$$Oxyz \rightarrow Ox'y'z' \rightarrow Ox'y''x_3 \\ \rightarrow Ox_1x_2x_3.$$

$$\mathbf{3} (z) \rightarrow \mathbf{1} (x') \rightarrow \mathbf{3} (x_3).$$

**Важно следующее:** три числа  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , определяющие ориентацию твердого тела не являются наблюдаемыми (как это имеет место в случае декартовых координат материальной точки).

Указанные повороты, наполняющие конкретным содержанием углы  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , представляют собой воображаемую конструкцию, которая может быть и иной.

Одной из распространенных последовательностей поворотов является показанная на рис.14. Это так называемые **углы Крылова-Булгакова**.

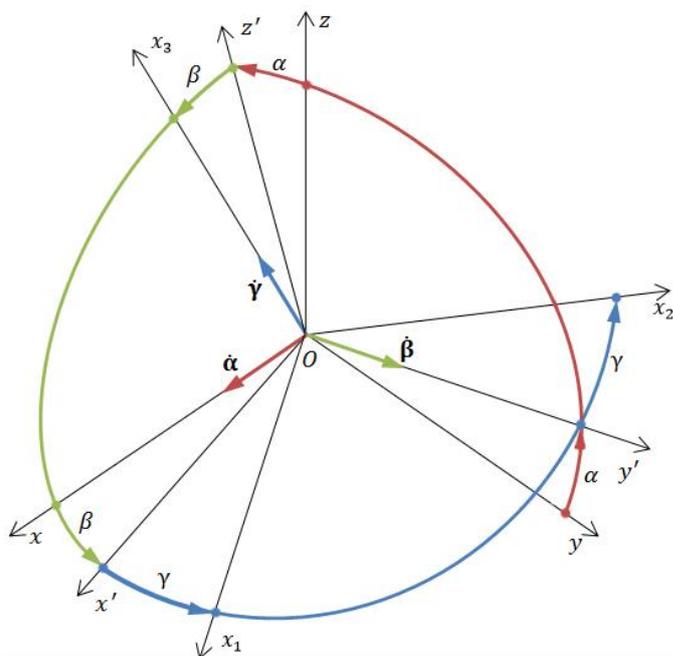


Рис.14. Углы Крылова-Булгакова

Углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  позволяют мысленно совместить неподвижную систему с подвижной, совершая первый поворот на  $\alpha$  вокруг  $Ox$  (от  $Oxyz$  переход к  $Oxy'z'$ ).

Второй поворот – на угол  $\beta$  вокруг  $Oy'$  (от  $Oxy'z'$  переход к  $Ox'y'x_3$ ).

Третий – на угол  $\gamma$  вокруг  $Ox_3$  (от  $Ox'y'x_3$  переход к  $Ox_1x_2x_3$ ).

Символически эту последовательность можно записать следующим образом:

**1-2-3.**

Последовательность, образующая углы Эйлера, в этих символах запишется так: **3-1-3.**

Совокупность возможных последовательностей поворотов называют **системой углов конечного вращения.**

Все последовательности поворотов могут быть разбиты на четыре класса:

I.	1-2-3	3-1-2	2-3-1
II.	1-3-2	2-1-3	3-2-1
III.	1-2-1	2-3-2	3-1-3
IV.	1-3-1	3-2-3	2-1-2

В классах I и II повороты осуществляются вокруг всех трех осей.

В классах III и IV одна из осей пропущена.

Все последовательности поворотов, принадлежащие одному классу, являются эквивалентными между собой в том смысле, что при одних и тех же числовых значениях углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  положение тела, задаваемое одной последовательностью отличается от положения, задаваемого другой последовательностью, поворотом тела вокруг биссектрисы координатного угла на угол  $\pm 120^\circ$ .

Таким образом, из двенадцати возможных последовательностей поворотов вокруг координатных осей существенно различными являются лишь четыре.

Последовательности I, II классов называют **углами конечного вращения первого рода.**

Последовательности из III и IV классов – **углами вращения второго рода.**

Можно доказать следующую **теорему**:

*Любое положение твердого тела может быть получено тремя последовательными плоскими поворотами из любого начального положения любым из указанных выше способов.*

**5.2.** Поворот твердого тела математически можно задать как линейное отображение трехмерного евклидова пространства в себя, при котором расстояние между произвольными точками неизменно.

Такие отображения называют **ортогональными.**

Пусть вектор  $\mathbf{R}$  задан в осях  $Oxyz$ . Представим его как матрицу-столбец  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Преобразованием поворота этот вектор отображается в  $\mathbf{R}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ .

Само преобразование  $Oxyz$  в  $Ox_1x_2x_3$  задается матрицей  $A$ .

Из определения поворотов  $(\mathbf{R}' \mathbf{R}') = (\mathbf{R}' \mathbf{R}')$ . Отсюда:

$$(\mathbf{R}' \mathbf{R}') = (A \mathbf{R} A \mathbf{R}) = (\mathbf{R} A^T A \mathbf{R}).$$

Следовательно,  $A^T A = E$ .

Это условие означает, что столбцы матрицы  $A$  представляют собой **ортонормированную** систему: сумма квадратов элементов столбца равна единице, произведение столбцов друг на друга равно нулю. Такие матрицы называют **ортогональными**.

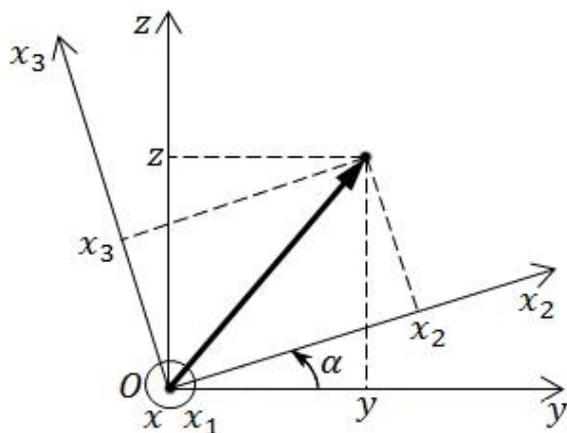


Рис.15. Поворот на угол  $\alpha$  вокруг  $Ox$

а. Рассмотрим поворот на угол  $\alpha$  вокруг  $Ox$  (Рис. 15):

$$x_1 = x,$$

$$x_2 = y \cos \alpha + z \sin \alpha,$$

$$x_3 = -y \sin \alpha + z \cos \alpha.$$

Матрица поворота:

$$A(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

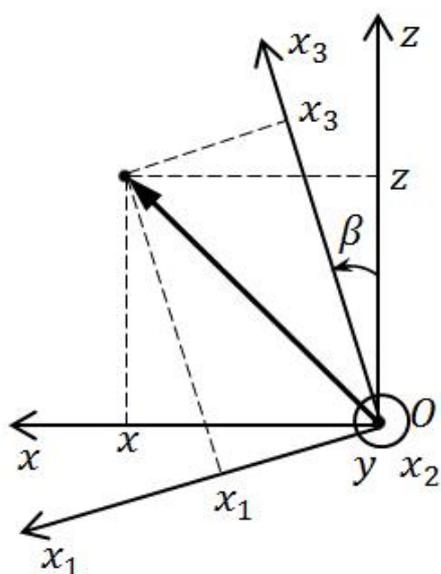


Рис.16. Поворот вокруг  $Oy$  на угол  $\beta$

б. Поворот вокруг  $Oy$  на угол  $\beta$  (Рис. 16) :

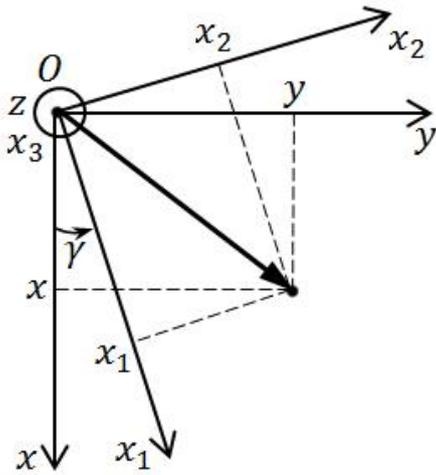
$$x_1 = x \cos \beta - z \sin \beta,$$

$$x_2 = y,$$

$$x_3 = x \sin \beta + z \cos \beta.$$

Матрица поворота:

$$B(\beta) = \begin{vmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{vmatrix}.$$



с. Поворот вокруг  $Oz$  на угол  $\gamma$  (Рис. 17):

$$\begin{aligned}x_1 &= x \cos \gamma + y \sin \gamma, \\x_2 &= -x \sin \gamma + y \cos \gamma, \\x_3 &= z.\end{aligned}$$

Матрица поворота:

$$C(\gamma) = \begin{vmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Рис.17. Поворот вокруг  $Oz$  на угол  $\gamma$

**Любое преобразование из указанных выше четырех классов – произведение соответствующих матриц  $A, B, C$ .**

**5.3.** Получим теперь кинематические уравнения, связывающие характеристики положения тела с его угловой скоростью. Будем работать в углах Эйлера.

Вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  можно записать следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_{x_3} + \dot{\psi} \mathbf{e}_z + \dot{\theta} \mathbf{e}_{x_1}.$$

Приведем все слагаемые этого выражения к одной системе координат  $Ox_1x_2x_3$ .

**а.** Для преобразования второго слагаемого  $\dot{\psi} \mathbf{e}_z$  воспользуемся полученными матрицами:

1. поворот на вокруг  $Oz$  не затрагивает вектор  $\dot{\psi} \mathbf{e}_z$ .

2. поворот на угол  $\theta$  вокруг  $Ox'$ :

$$\begin{aligned}A(\theta) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = (0, \sin \theta \dot{\psi}, \cos \theta \dot{\psi}), \\ \dot{\psi} \mathbf{e}_z &= \sin \theta \dot{\psi} \mathbf{e}_{y''} + \cos \theta \dot{\psi} \mathbf{e}_{x_3}.\end{aligned}$$

3. поворот вокруг  $Ox_3$  на угол  $\varphi$ :

$$C(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \dot{\psi} \\ \cos \theta \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \dot{\psi} \\ \cos \theta \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

Окончательно имеем:

$$\dot{\psi} \mathbf{e}_z = \sin \theta \sin \varphi \dot{\psi} \mathbf{e}_{x_1} + \cos \theta \cos \varphi \dot{\psi} \mathbf{e}_{x_2} + \cos \theta \dot{\psi} \mathbf{e}_{x_3}.$$

б. Преобразуем третье слагаемое  $\dot{\theta} \mathbf{e}_{x'}$ . К системе  $Ox_1x_2x_3$  перейдем с помощью матрицы  $C(\varphi)$ :

$$C(\varphi) = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\cos \varphi \dot{\theta}, -\sin \varphi \dot{\theta}, 0)$$

или  $\dot{\theta} \mathbf{e}_{x'} = \cos \varphi \dot{\theta} \mathbf{e}_{x_1} - \sin \varphi \dot{\theta} \mathbf{e}_{x_2}$ .

Собирая все эти соотношения, находим:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sin \theta \sin \varphi \dot{\psi} + \cos \varphi \dot{\theta}, \\ \omega_2 &= \cos \theta \cos \varphi \dot{\psi} - \sin \varphi \dot{\theta}, \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} + \cos \theta \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{11}$$

Уравнения (11) могут быть взяты в любой из установленных ранее форм (четырёх типов).

Подведем итог.

**Для определения движения твердого тела с одной неподвижной точкой необходимо решить уравнения (10) + (11):**

**Динамические уравнения Эйлера:**

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= M_1, \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= M_2, \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= M_3. \end{aligned}$$

**Кинематические уравнения** (например, через углы Эйлера):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sin \theta \sin \varphi \dot{\psi} + \cos \varphi \dot{\theta}, \\ \omega_2 &= \cos \theta \cos \varphi \dot{\psi} - \sin \varphi \dot{\theta}, \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} + \cos \theta \dot{\psi}, \end{aligned}$$

**при соответствующих начальных условиях.**

Если тело наряду с вращательным движением совершает поступательное движение, то к этим уравнениям следует добавить три уравнения поступательного движения.

Задача о движении твердого тела около неподвижной точки издавна привлекала всех крупных механиков и математиков.

В 1758 г. Л. Эйлер впервые рассмотрел решение этой задачи для случая, когда центр масс совпадает с неподвижной точкой.

В 1788 г. Лагранжем был исследован другой случай движения тяжелого твердого тела, когда эллипсоид инерции, построенный для неподвижной точки, является эллипсоидом вращения, а центр масс находится на оси симметрии этого эллипсоида.

После этого в течение столетия, несмотря на усилия многих исследователей (в том числе таких крупных математиков, как Пуассон, Якоби, Пуансо) новых существенных результатов не получено.

В 1886 году Парижская академия наук объявила конкурс на лучшую работу о движении твердого тела около неподвижной точки. Премию в 1888 году получила С.В. Ковалевская за решение этой задачи в случае, когда эллипсоид инерции, построенный для неподвижной точки, является эллипсоидом вращения, причем моменты инерции относительно главных осей  $I_1 = I_2 = 2I_3$ .

После работы Ковалевской многими авторами (Жуковский Н.Е., Ляпунов А.М., Стеклов В.А., Чаплыгин С.А., Гесс, Лиувилль, Леви-Чевита и др.) найдены различные частные случаи движения тела.

## 6. Случай Эйлера

### (Задача о движении тела с неподвижной точкой по инерции, т.е. в отсутствие внешних моментов)

В случае Эйлера от системы уравнений вращательного движения твердого тела (10), (11) отделяются динамические уравнения (10), которые решаются независимо от кинематических уравнений:

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= 0, \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= 0, \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

## 6.1. Первые интегралы

Поскольку главный момент внешних сил относительно точки  $O$  равен нулю:  $\mathbf{M} = 0$ , то в  $Ox_1x_2x_3$  для момента количества движения  $\mathbf{K}$  имеем:

$$d\mathbf{K}/dt = 0.$$

Отсюда следует  $\mathbf{K} = const$ .

Проекции вектора  $\mathbf{K}$  на оси связанной системы координат  $Ox_1x_2x_3$  имеют вид  $I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3$ . В системе  $Ox_1x_2x_3$  сохраняется

$$K^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = const. \quad (13)$$

(Но  $\mathbf{K}$  в этой системе не сохраняется!)

Из теоремы об изменении кинетической энергии:

$$T = 1/2 (I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = const. \quad (14)$$

Существование первых интегралов (13), (14) можно установить и непосредственно из системы динамических уравнений (12).

Действительно, умножив первое уравнение на  $I_1\omega_1$ , второе – на  $I_2\omega_2$ , третье – на  $I_3\omega_3$  и сложив полученные выражения, получим:

$$I_1^2\omega_1\dot{\omega}_1 + I_2^2\omega_2\dot{\omega}_2 + I_3^2\omega_3\dot{\omega}_3 = 0.$$

Отсюда следует интеграл (13).

Если первое уравнение (12) умножить на  $\omega_1$ , второе – на  $\omega_2$ , третье – на  $\omega_3$ , то получим:

$$I_1\omega_1\dot{\omega}_1 + I_2\omega_2\dot{\omega}_2 + I_3\omega_3\dot{\omega}_3 = 0.$$

Отсюда следует интеграл (14).

## 6.2. Стационарные вращения твердого тела в случае Эйлера

Стационарным вращением называют такое движение твердого тела, при котором его угловая скорость постоянна относительно тела, а, следовательно, и относительно неподвижной системы отсчета.

Для стационарного вращения уравнения (12) принимают вид:

$$(I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 0, (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0, (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = 0. \quad (15)$$

Отсюда следует, что стационарное вращение может происходить только вокруг главной оси инерции тела для точки  $O$ , причем величина угловой скорости может быть произвольной.

Если:

**а.**  $I_1 = I_2 = I_3$ , то уравнения (15) справедливы при любых  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Эллипсоид инерции превращается в шар. Любая ось, проходящая через точку  $O$ , становится главной.

**б.**  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , то уравнения (15) удовлетворяются при любом  $\omega_3$  и  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ .

**в.**  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ , то уравнения (15) имеют лишь такие решения, для которых две из величин  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  равны нулю, а третья произвольна.

Таким образом, в любом из рассмотренных случаев вращение происходит вокруг главной оси инерции.

### 6.3. Движение динамически симметричного тела в случае Эйлера. Регулярная прецессия

**а.** Шаровой волчок:  $I_1 = I_2 = I_3$ . В соответствии с уравнениями (12)

$$\boldsymbol{\omega} = \text{const.}$$

**б.** Движение симметричного волчка ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ). Из третьего динамического уравнения (12) следует:

$$\omega_3 = \text{const.}$$

Первые два уравнения запишем следующим образом:

$$d\omega_1/dt = -\Omega\omega_2, \quad d\omega_2/dt = \Omega\omega_1, \quad \text{где } \Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3.$$

Умножим второе уравнение на  $i = \sqrt{-1}$  и сложим с первым уравнением:

$$\frac{d}{dt}(\omega_1 + i\omega_2) = i\Omega(\omega_1 + i\omega_2).$$

Отсюда

$$\omega_1 + i\omega_2 = Ae^{i\Omega t}.$$

или  $\omega_1 = A \cos \Omega t$ ,  $\omega_2 = A \sin \Omega t$ , где  $A = \text{const.}$

Проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную к оси волчка, вращается в этой плоскости, оставаясь постоянной по величине:  $(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2} = A$  (Рис. 18).

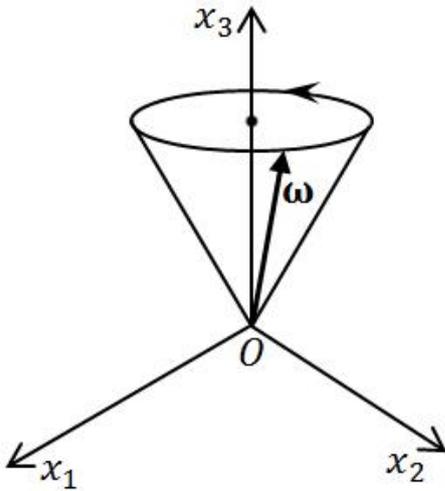


Рис. 18. Симметричный волчок

Поскольку проекция  $\omega_3$  на ось волчка также постоянна, то заключаем, что вектор  $\omega$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси волчка, оставаясь неизменным по величине.

Ввиду связи

$$K_1 = I_1 \omega_1, \quad K_2 = I_2 \omega_2, \quad K_3 = I_3 \omega_3$$

между компонентами  $\mathbf{K}$  и  $\omega$  такое же движение (по отношению к оси волчка) совершает и вектор момента количества движения  $\mathbf{K}$ .

Другой подход к этой задаче. В системе  $Oxyz$   $\mathbf{K} = const$ . Ось  $Oz$  ориентируем по  $\mathbf{K}$ , т.е.  $\mathbf{K}$  можно записать как матрицу-столбец  $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{pmatrix}$ .

Преобразуем  $\mathbf{K}$  к системе  $Ox_1x_2x_3$ , ориентация которой задается углами Эйлера:

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = z(\varphi)x(\theta)z(\psi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{pmatrix}.$$

В результате имеем:

$$K_1 = K \sin \theta \sin \varphi, \quad K_2 = K \sin \theta \cos \varphi, \quad K_3 = K \cos \theta.$$

Но, с другой стороны

$$K_1 = I_1 \omega_1, \quad K_2 = I_2 \omega_2, \quad K_3 = I_3 \omega_3.$$

Приравнивая соответствующие компоненты, получим:

$$\omega_1 = \frac{K}{I_1} \sin \theta \sin \varphi, \quad \omega_2 = \frac{K}{I_2} \sin \theta \cos \varphi, \quad \omega_3 = \frac{K}{I_3} \cos \theta. \quad (16)$$

Из третьего уравнения (12)  $\omega_3 = \omega_{30} = const$ . Значит, и

$$\cos \theta = \frac{I_3}{K} \omega_{30} = const, \text{ т.е. угол нутации } \theta = \theta_0 = const.$$

Первые два уравнения (16):

$$\omega_1 = \frac{K}{I_1} \sin \theta_0 \sin \varphi, \quad \omega_2 = \frac{K}{I_2} \sin \theta_0 \cos \varphi.$$

Сопоставим эти уравнения с кинематическими уравнениями (11), положив в них  $\dot{\theta} = 0$ :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sin \varphi \sin \theta_0 \dot{\psi}, \\ \omega_2 &= \cos \varphi \sin \theta_0 \dot{\psi}, \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} + \cos \theta_0 \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда следует, что

$$\dot{\psi} = K/I_1 = \delta = \text{const.}$$

Величину  $\delta$  называют угловой скоростью прецессии.

Из третьего уравнения (11) находим:

$$\omega_{30} - \dot{\psi} \cos \theta_0 = \dot{\varphi}.$$

После подстановки  $\dot{\psi} \cos \theta_0$  находим:

$$\omega_{30} - \frac{I_3}{I_1} \omega_{30} = \dot{\varphi}, \quad \dot{\varphi} = -\Omega = \text{const.}$$

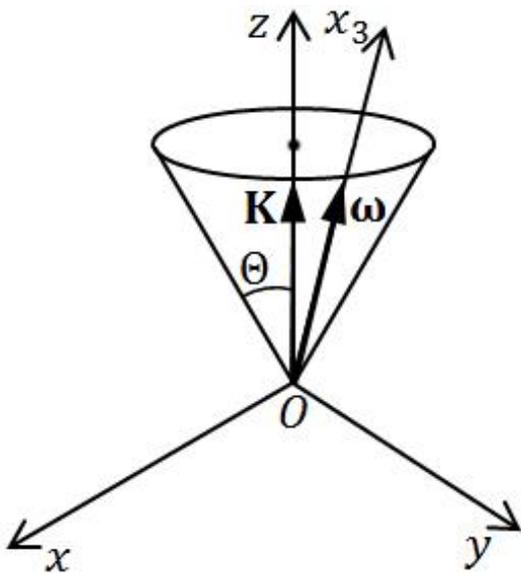


Рис.19. Прецессия

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, состоящее из его вращения вокруг оси неизменно связанной с телом  $Ox_3$ , и движения, при котором эта ось вращается вокруг неподвижной оси  $Oz$ , называют **прецессией** (Рис. 19).

Прецессию называют **регулярной**, если вращение тела вокруг связанной неизменно с ним оси и вращение самой этой оси происходят с постоянными по модулю угловыми скоростями.

#### 6.4. Геометрическая интерпретация движения твердого тела в случае Эйлера

В общем случае (различные главные моменты инерции  $I_1, I_2, I_3$ ) остановимся на геометрической интерпретации решения задачи. Для определенности считаем  $I_1 \leq I_2 \leq I_3$ .

Воспользуемся тем, что при  $\mathbf{M} = 0$  система допускает интегралы кинетического момента и энергии.

В неподвижной системе  $Oxyz$   $\mathbf{K} = \text{const}$ . В осях, связанных с телом  $Ox_1x_2x_3$ , постоянным будет лишь модуль  $K^2$ :

$$K^2 = I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2.$$

Интеграл энергии имеет вид:

$$2T = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2.$$

Эти два интеграла можно выразить через компоненты кинетического момента:

$$K^2 = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2, \quad (18)$$

$$2T = \frac{K_1^2}{I_1} + \frac{K_2^2}{I_2} + \frac{K_3^2}{I_3}. \quad (19)$$

Эти уравнения позволяют получить достаточно ясное представление о движении тела в случае Эйлера.

В осях  $OK_1K_2K_3$  первое уравнение представляет собой сферу радиуса  $K$ . Второе – эллипсоид (эллипсоид Мак-Куллага) с полуосями  $\sqrt{2TI_1}$ ,  $\sqrt{2TI_2}$ ,  $\sqrt{2TI_3}$ .

Движение вектора  $\mathbf{K}$  относительно тела таково, что энергия и момент количества движения сохраняются, поэтому конец вектора  $\mathbf{K}$  всегда остается на линии пересечения поверхностей сферы и эллипсоида. Убедимся, что такое пересечение существует. Рассмотрим (18) совместно с двумя следующими соотношениями, получаемыми из (19) умножением соответственно на  $I_1$ ,  $I_3$ :

$$2TI_1 = K_1^2 + \frac{K_2^2 I_1}{I_2} + \frac{K_3^2 I_2}{I_3},$$

$$2TI_3 = \frac{K_1^2 I_3}{I_1} + \frac{K_2^2 I_3}{I_2} + K_3^2.$$

Сопоставляя эти выражения с (11) в предположении, что  $I_1 \leq I_2 \leq I_3$ , заключаем:

$$2TI_1 \leq K^2 \leq 2TI_3. \quad (20)$$

Радиус сферы лежит между осями наименьшего и наибольшего моментов инерции. Знак равенства в (20) отвечает вращению тела вокруг оси наибольшего и наименьшего моментов инерции.

Поскольку вектор  $\mathbf{K}$  неподвижен в  $Oxuz$ , а эллипсоид Мак-Кулага неподвижен в теле, то движение тела в  $Oxuz$  представляет собой обкат эллипсоидом неподвижного конца  $\mathbf{K}$  по линии пересечения эллипсоида со сферой.

Остановимся на характере траекторий вектора  $\mathbf{K}$  на эллипсоиде (движение конца вектора  $\mathbf{K}$  в системе  $Ox_1x_2x_3$ ).

Из выражений (18), (19) можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} K_1^2/2T(1/I_1 - 1/I_2) + K_3^2/2T(1/I_3 - 1/I_2) &= 1 - K^2/2TI_2, \\ K_1^2/2T(1/I_1 - 1/I_3) + K_2^2/2T(1/I_2 - 1/I_3) &= 1 - K^2/2TI_3, \\ K_2^2/2T(1/I_2 - 1/I_1) + K_3^2/2T(1/I_3 - 1/I_1) &= 1 - K^2/2TI_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Это уравнения проекций конца вектора  $\mathbf{K}$  на плоскости  $K_1K_3(Ox_1x_3)$ ,  $K_1K_2(Ox_1x_2)$ ,  $K_2K_3(Ox_2x_3)$ .

Проекции траекторий на плоскости  $Ox_1x_2$ ,  $Ox_2x_3$  представляют собой замкнутые эллипсы или эллиптические дуги. Проекции траекторий  $\mathbf{K}$  на  $Ox_1x_3$  представляют собой гиперболы, которые могут вырождаться в две прямые линии (первое уравнение (21)).

Обсудим некоторые частные случаи.

**а.** Пусть кинетическая энергия тела равна  $T = K^2/2I_1$ . Тогда сфера полностью размещается в эллипсоиде. Поверхности соприкасаются в точках  $(\pm K, 0, 0)$ .

**б.** Если  $T = K^2/2I_2$ , то траектория конца вектора  $\mathbf{K}$  имеет проекцией на  $Ox_1x_3$  две прямые линии, проходящие через начало координат, т.е. представляет собой два больших круга сферы.

**в.** В том случае, когда  $T = K^2/2I_3$ , эллипсоид полностью располагается в сфере. Эти поверхности соприкасаются в точках  $(0, 0, \pm K)$ .

**г.** Если тело обладает осевой симметрией, к примеру,  $Ox_3$  – ось симметрии, то проекции траекторий  $\mathbf{K}$  на плоскость  $Ox_1x_2$  – окружности.

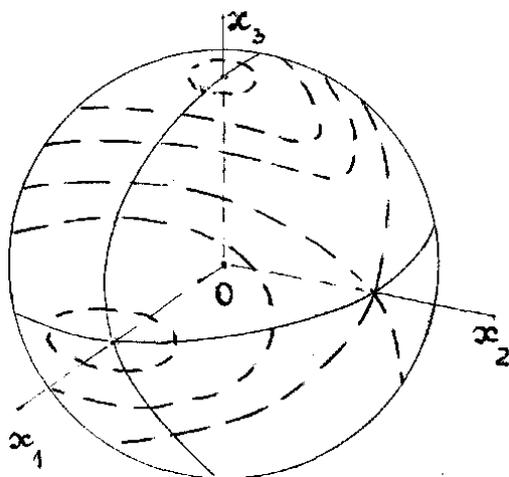
**д.** Для тела с шаровым тензором инерции поверхности (18), (19) совпадают. Любое начальное положение  $\mathbf{K}$  относительно тела остается неизменным во времени.

На Рис.20 показаны траектории вектора  $\mathbf{K}$  на сфере постоянного кинетического момента. В отсутствие момента сил кинетический момент  $\mathbf{K}$  в неподвижных осях  $Oxuz$  сохраняет направление и величину. Поэтому

движение  $\mathbf{K}$  является фактически движением тела – связанной системы  $Ox_1x_2x_3$ , вокруг фиксированного положения вектора  $\mathbf{K}$ .

Геометрическое описание движения тела является неполным, т.к. положение тела определяется с точностью до произвольного вращения вокруг  $\mathbf{K}$ . Эту неопределенность можно устранить вычислением вектора угловой скорости  $\omega_i = K_i/I_i$ , определяя таким образом положение оси мгновенного вращения.

Согласно рисунку все траектории являются замкнутыми кривыми, следовательно, им отвечают периодические движения вектора  $\mathbf{K}$  относительно тела. Малое отклонение  $\mathbf{K}$  от одной из осей стационарного вращения  $Ox_1, Ox_3$  приводит к тому, что его конец описывает в теле малую замкнутую кривую вокруг стационарной точки, т.е. тело совершает движения, близкие к первоначальным. На этом основании стационарные вращения вокруг осей наибольшего и наименьшего моментов инерции принято считать устойчивыми. Такой взгляд не имеет достаточно оснований. Дело в том, что обсуждаемые ситуации относятся к числу критических по Ляпунову, поэтому на вопрос об устойчивости стационарных вращений тела вокруг  $Ox_1$  и  $Ox_3$  в рамках модели абсолютно твердого тела ответить не удастся.



Что касается вращения вокруг средней оси  $Ox_2$ , то исследование его устойчивости проблем не вызывает. Это стационарное вращение абсолютно твердого тела неустойчиво. Достаточно малые отклонения  $\mathbf{K}$  от  $Ox_2$  вызывают движения, уводящие тело в положения, далекие от первоначального.

Рис. 20. траектории вектора  $\mathbf{K}$  на сфере постоянного кинетического момента

Уточним модель, включив в рассмотрение малую внутреннюю диссипацию. Это не скажется на кинетическом моменте. Он остается неизменным, а кинетическая энергия тела будет уменьшаться со временем, переходя во внутреннюю энергию тела. Следовательно, сфера кинетического момента сохраняется, а эллипсоид уменьшается в размерах.

Пусть тело приведено во вращение вокруг главной оси наименьшего момента инерции  $Ox_1$  и затем совершает свободное движение. В начальном состоянии поверхности сферы и эллипсоида соприкасаются в двух точках

$(\pm K, 0, 0)$  (ранее рассмотренный случай **а**). С уменьшением энергии (эллипсоида) конец вектора **K** будет описывать раскручивающуюся спираль. Значит, стационарное вращение вокруг оси наименьшего момента инерции неустойчиво. Этому состоянию тела отвечает наибольшая энергия при заданном кинетическом моменте.

При вращении тела вокруг  $Ox_3$  – оси наибольшего момента инерции (случай **в**) поверхности сферы и эллипсоида соприкасаются в точках  $(0, 0, \pm K)$ . Малое отклонение **K** от этого направления означает, что кинетическая энергия тела становится больше, чем  $K^2/2I_3$ . Со временем  $T$  уменьшается. При этом конец вектора **K** описывает на сфере скручивающуюся спираль. При достижении кинетической энергией значения  $K^2/2I_3$  кинетический момент приходит в положение  $Ox_3$ , тело совершает чистое вращение вокруг **K**. Этому состоянию отвечает минимум энергии при фиксированном кинетическом моменте.

Таким образом, устойчивым является лишь стационарное вращение твердого тела вокруг оси наибольшего момента инерции, а вращение относительно осей среднего и наименьшего моментов инерции неустойчивы. Исследование устойчивости стационарных вращений твердого тела удалось выполнить лишь после учета внутренней диссипации энергии, т.е. отступив от модели абсолютно твердого тела, причем важен сам факт учета рассеяния энергии, а механизм его в задаче устойчивости не имеет принципиального значения.

Приведенные результаты интересны с точки зрения многих задач и подтверждаются наблюдениями за динамикой космических объектов. Например, известно, что спутник Explorer 1 стабилизировался вокруг оси наименьшего момента инерции. После первого оборота вокруг Земли, т.е. за время порядка 1,5 часа, он перешел в более предпочтительное положение, развернувшись относительно первоначального состояния на угол порядка  $60^\circ$ .

## 7. Случай Лагранжа

Динамически симметричное тело ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) находится в поле тяжести, а центр масс смещен вдоль оси симметрии на расстояние  $b$  от неподвижной точки:  $OC = b$  (Рис. 21). Здесь момент сил, вызывающий регулярную прецессию, возникает естественным образом.

Поскольку

$$M_3 = 0,$$

то проекция кинетического момента на  $Ox_3$  сохраняется:

$$K_3 = I_3 \omega_3 = K_0 = \text{const.}$$

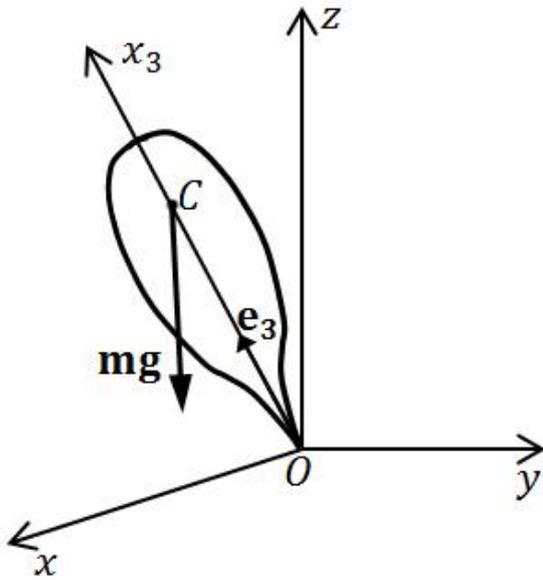


Рис. 21. Случай Лагранжа

Уравнение движения волчка в  $Oxyz$  имеет вид (7):

$$d\mathbf{K}/dt = \mathbf{M},$$

где  $\mathbf{K} = I_1(\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2) + K_0 \mathbf{e}_3$ .

$$\mathbf{M} = mgb[\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_3],$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – единичный вектор вертикального направления.

Далее обозначим  $mgb = d$ ,  $\omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 =$

Скорость изменения кинетического момента:

$$d\mathbf{K}/dt = I_1 \dot{\boldsymbol{\Omega}} + K_0 \dot{\mathbf{e}}_3.$$

Здесь учтено, что  $K_0 = const$ .

Исключим из этого выражения производную от проекции угловой скорости на плоскость, перпендикулярную оси динамической симметрии  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ .

Воспользуемся тем, что в  $Ox_1x_2x_3$

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{e}_3] = [\boldsymbol{\omega}[(\boldsymbol{\Omega} + \omega_3 \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3]] = [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_3].$$

Умножим это равенство слева векторно на  $\mathbf{e}_3$ :

$$[\mathbf{e}_3 \dot{\mathbf{e}}_3] = [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_3]] = \boldsymbol{\Omega}.$$

Отсюда:  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = [\dot{\mathbf{e}}_3 \dot{\mathbf{e}}_3] + [\mathbf{e}_3 \ddot{\mathbf{e}}_3] = [\mathbf{e}_3 \ddot{\mathbf{e}}_3]$ .

Уравнение движения волчка принимает вид:

$$K_0 \dot{\mathbf{e}}_3 + I_1 [\mathbf{e}_3 \ddot{\mathbf{e}}_3] = d[\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_3].$$

Частное решение этого уравнения будем искать в форме регулярной прецессии с осью, направленной по вертикали (по оси тяжести), т.е.

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \delta[\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_3],$$

где  $\delta$  – искомая угловая скорость прецессии.

Вычислим  $[\mathbf{e}_3 \ddot{\mathbf{e}}_3]$ :

$$[\mathbf{e}_3 \ddot{\mathbf{e}}_3] = \delta [\mathbf{e}_3 [\boldsymbol{\varepsilon} \dot{\mathbf{e}}_3]] = \delta^2 [\mathbf{e}_3 (\boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_3)] = -\delta^2 \cos \theta [\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_3],$$

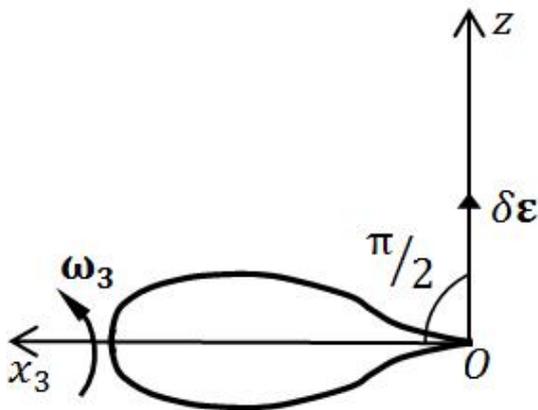
где  $\theta$  – угол наклона вектора  $\mathbf{e}_3$  к вертикали.

В результате уравнение волчка принимает вид

$$\delta K_0 - \delta^2 I_1 \cos \theta - d = 0. \quad (22)$$

Если ось динамической симметрии перпендикулярна направлению поля тяжести, то  $\cos \theta = 0$ , и уравнение имеет единственное решение:

$$\delta = d/K_0 = mgb/I_3 \omega_3.$$



Скорость прецессии направлена противоположно полю тяготения (Рис. 22)

Рис. 22. Случай, когда ось динамической симметрии перпендикулярна направлению поля тяжести

В случае  $\cos \theta \neq 0$  из уравнения (22) следует:

$$\delta = \left[ K_0 \pm \sqrt{K_0^2 - 4I_1 d \cos \theta} \right] / 2I_1 \cos \theta.$$

При  $\cos \theta > 0$  два решения существуют в случае

$$K_0^2 > 4I_1 d \cos \theta.$$

В частности, если  $\cos \theta = 1$ , то  $K_0^2 > 4I_1 d$ . Это неравенство известно как условие Майевского устойчивости вертикального положения волчка.

При  $K_0^2 < 4I_1 d \cos \theta$  движений типа регулярной прецессии нет.

Для значений угла наклона  $\theta > \pi/2$  имеются два решения уравнения волчка.

Во всех случаях существования двух решений одно из них:

$$\delta = \left[ K_0 + \sqrt{K_0^2 - 4I_1 d \cos \theta} \right] / 2I_1 \cos \theta \rightarrow \infty \text{ при } K_0 \rightarrow \infty,$$

т.е. имеет порядок роста  $K_0$  при увеличении  $K_0$ .

Другое решение:

$$\delta = \left[ K_0 - \sqrt{K_0^2 - 4I_1 d \cos \theta} \right] / 2I_1 \cos \theta$$

имеет порядок убывания  $1/K_0$ .

Первое называют быстрой прецессией, второе – медленной прецессией.

## 8. Приближенная теория гироскопических явлений

Рассмотрим динамически симметричное тело ( $I_1 = I_2$ ). Ось  $Ox_3$  – ось симметрии,  $\mathbf{e}_3$  – единичный вектор оси симметрии.

Тело приводится во вращение вокруг  $Ox_3$  с угловой скоростью  $\omega_3$ .

Кинетический момент  $\mathbf{K}_0 = I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3 = K_0 \mathbf{e}_3$ .

Предположим, что оси симметрии сообщили дополнительно скорость  $\Omega$ , т.е. тело имеет угловую скорость:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \mathbf{e}_3 + \Omega, \quad \Omega \ll \omega_3.$$

Направление вектора  $\boldsymbol{\omega}$  уже не совпадает с осью симметрии тела (ось  $Ox_3$ ) и изменившийся кинетический момент также не совпадает с осью  $Ox_3$ .

Элементарная теория гироскопических явлений основана на следующих допущениях:

1. кинетический момент  $\mathbf{K}$  и при наличии  $\Omega \ll \omega_3$  считается направленным по оси симметрии  $Ox_3$ ;
2. при вычислении  $\mathbf{K}$  пренебрегают угловой скоростью  $\Omega$ , т.е.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 = K_0 \mathbf{e}_3.$$

Таким образом, в элементарной теории, следя за движением оси тела, следим за движением вектора  $\mathbf{K}$ .

Скорость изменения вектора  $\mathbf{K}$  определяется суммой моментов внешних сил:  $\mathbf{M} = M_3 \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\mu}$ .

$$d\mathbf{K}/dt = d^*\mathbf{K}/dt + [\Omega \mathbf{K}] = \boldsymbol{\mu},$$

где  $\boldsymbol{\mu} \perp \mathbf{e}_3$ , т.е.  $\boldsymbol{\mu}$  перпендикулярно оси симметрии.

Отсюда с учетом сделанных предположений:

$$[\boldsymbol{\Omega} \mathbf{K}_0] = \boldsymbol{\mu}$$

или

$$K_0 [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_3] = \boldsymbol{\mu}, \quad \text{где} \quad K_0 = I_3 \omega_3.$$

Это **основная формула** приближенной теории гироскопических явлений.

Подчеркнем, что в большинстве приложений приближенной теории считаем угловую скорость собственного вращения  $\omega_3$  постоянной.

Основная формула приближенной теории дает

- величину и направление момента внешних сил  $\boldsymbol{\mu}$ , который нужно приложить, чтобы имело место рассмотренное движение оси гироскопа  $Ox_3$  (вектора  $\mathbf{K}$ ):

$$\mathbf{u} = d\mathbf{K}/dt = K_0 [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_3].$$

- величину и направление гироскопического момента – момента, действующего на приспособление, приводящее тело в движение:

$$\mathbf{M}_Г = -\boldsymbol{\mu} = K_0 [\mathbf{e}_3 \boldsymbol{\Omega}].$$

Проиллюстрируем сказанное. Велосипедное колесо привели во вращение вокруг оси  $O_1 O_2$  со скоростью  $\omega_3$ .

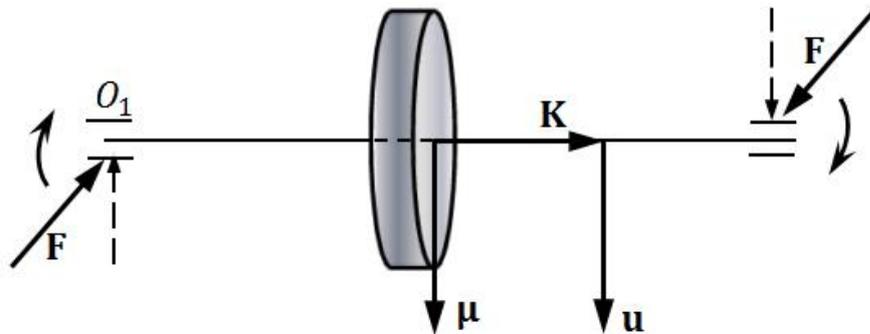


Рис. 23. Пример: вращение колеса вокруг оси

Необходимо повернуть ось в плоскости так, как показано на Рис.23.

Казалось бы, что следует приложить силы, показанные пунктиром.

А как на самом деле?

В рассматриваемой ситуации  $\mathbf{K}$  приобретает при повороте скорость  $\mathbf{u}$ . Значит, таким же должен быть и вектор момента  $\boldsymbol{\mu}$ .

Этот момент создают силы, перпендикулярные плоскости перемещения, показанные на Рис. 23.

Данный эффект появляется при всяком изменении направления оси быстровращающегося тела.

Ещё один пример. Приведем в быстрое вращение волчок вокруг его оси симметрии. Если бы волчок не вращался, то показанное на Рис. 24 положение волчка является неустойчивым. Быстрое вращение сообщает волчку (гироскопу) свойство устойчивости. (Заметим, что в общем случае под гироскопом понимают твердое тело любой формы, совершающее вращательное движение).

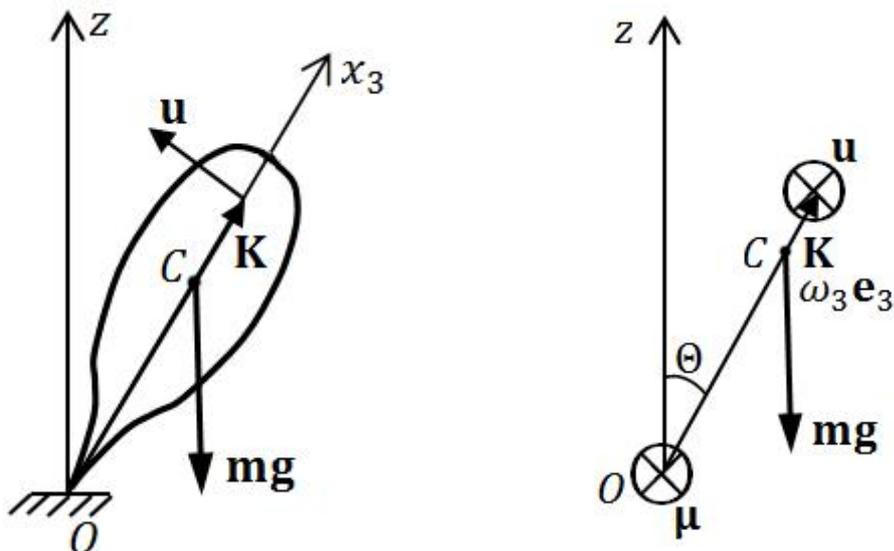


Рис. 24. Пример: вращение волчка вокруг его оси симметрии

Дадим оси волчка толчок в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, т.е. приложим в течение малого промежутка времени силу  $\mathbf{F}$ .

Казалось бы, что после прекращения действия силы  $\mathbf{F}$  ось гироскопа должна продолжить падение. Но это не так.

Если отвлечься от действия момента силы тяжести, то с прекращением действия силы  $\mathbf{F}$  исчезает её момент, следовательно, дальнейшее движение  $\mathbf{K}$  прекращается. Толчок не опрокинул гироскоп, а отклонил его ось на некоторый угол.

Гироскоп обладает свойством «безинерционности», т.е. при приложении силы или при снятии её скорость  $\mathbf{u} = d\mathbf{K}/dt$  принимает значение  $\boldsymbol{\mu}$  (момент силы) или обращается в нуль (гироскоп мгновенно останавливается).

Учтем теперь момент силы тяжести. Этот момент вызывает перемещение конца вектора  $\mathbf{K}$  в направлении, перпендикулярном плоскости сила тяжести – ось гироскопа. Угол  $\theta$  при этом остается постоянным, а ось описывает коническую поверхность, вращаясь с угловой скоростью  $\omega_3 \mathbf{e}_3$  вокруг вертикали, проходящей через точку  $O$ .

Вычислим скорость прецессии по приближенной теории гироскопических явлений.

Скорость изменения кинетического момента:

$$\mathbf{u} = K_0[\boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_3] = \boldsymbol{\mu}. \quad (23)$$

Здесь:  $\boldsymbol{\mu}$  – момент силы тяжести,  $\boldsymbol{\Omega} = d\mathbf{e}$ , где вектор  $\mathbf{e}$  направлен по вертикали.

В проекции на ось, перпендикулярную плоскости рисунка, уравнение (23) имеет вид:

$$I_3 \omega_3 \delta \sin \theta = mgb \sin \theta.$$

Отсюда скорость прецессии волчка:

$$\delta = mgb / I_3 \omega_3,$$

т.е. угловая скорость прецессии обратно пропорциональна угловой скорости собственного вращения гироскопа.

С уменьшением угловой скорости собственного вращения  $\omega_3$  угловая скорость прецессии возрастает. Это можно наблюдать на обыкновенном волчке. Если привести волчок в быстрое вращение, то он прецессирует медленно. Со временем из-за сил сопротивления угловая скорость вращения уменьшается, а скорость прецессии возрастает.

Гироскопический момент  $M_r = I_3 \omega_3 \delta \sin \theta$  при заданных значениях  $I_3$ ,  $\omega_3$  и  $\delta$  достигает максимального значения когда угол между осью прецессии и осью фигуры  $Ox_3$  равен  $\pi/2$ .

### Рекомендуемая литература

1. Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В. Теоретическая механика. –М.: Академия, 2010. –432 с.
2. Бугаенко Г.А., Маланин В.В., Яковлев В.И. Основы классической механики. –М.: Высшая школа, 1999. –306 с.
3. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Т. 1, 2. –М.: Наука, 1965. –486 с.
4. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. –М.: Физматлит, 2008. –320 с.
5. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 1, 2. – М.: Гос. Издательство технико-теоретической литературы, 1954. –980 с.
6. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. С-Пб.: Изд-во «Лань», 1998. –448 с.
7. Новиков В.В., Культина Н.Ю. Как решать задачи по теоретической механике. Н. Новгород.: Изд-во ННГУ, 2010. –34 с.

8. Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике. –М: Физматлит, 2002. –392 с.
9. Павленко Ю.Г. Задачи по теоретической механике. –М: Физматлит, 2003. –536 с.
10. Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. Сборник задач по аналитической механике. –М: Физматлит, 2002. –400 с.