

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский Нижегородский  
государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского

В.Б. Гильденбург  
И.А. Павличенко

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ  
МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ  
ВАННЫ**

Практикум

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы»

Нижегород  
2019

УДК 538.56

ББК 22.336

М74

М74 МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ  
МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ВАННЫ: Практикум.  
Составители: В.Б. Гильденбург, И.А. Павличенко — Н. Новгород:  
Нижегородский госуниверситет, 2019. — 14 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **Е.Ю. Петров**

Работа посвящена моделированию поперечной структуры низших мод круглого волновода с помощью электролитической ванны. Описание содержит изложение идеи предлагаемого метода моделирования, описание экспериментальной установки, формулировку конкретного задания, а также (в Приложении) решение опорной электростатической задачи о поле произвольного заданного распределения зарядов в экранированной цилиндрической системе.

Практикум предназначен для студентов третьего курса радиофизического факультета, обучающихся по направлению подготовки 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы».

Ответственные за выпуск:

председатель методической комиссии  
радиофизического факультета ННГУ,  
к.ф.-м.н., доцент **Н.Д. Миловский**

УДК 538.56

ББК 22.336

Нижегородский государственный университет им. Н.И.  
Лобачевского, 2019

# Моделирование волновых полей методом электролитической ванны

Целью работы является изучение поперечной структуры простейших типов волн в круглом волноводе методом моделирования в электролитической ванне. Возможность такого применения электролитической ванны, используемой обычно для моделирования электростатических полей, основана на совпадении уравнений, определяющих поперечные распределения электростатического потенциала  $\varphi$  и продольных составляющих волновых полей (или векторов-потенциалов) в двумерных цилиндрических системах. В том, что указанное совпадение действительно имеет место, нетрудно убедиться, решая уравнение Лапласа  $\Delta\varphi = 0$  методом разделения переменных. Получаемые при этом частные решения имеют вид

$$\varphi_n = \psi_n(\vec{r}_\perp)e^{\pm\kappa_n z}, \quad (1)$$

где  $z$  – продольная координата,  $\psi_n(\vec{r}_\perp)$  – функция поперечных координат, удовлетворяющая уравнению колебаний упругой мембраны

$$\Delta_\perp\psi_n + \kappa_n^2\psi_n = 0 \quad (\Delta_\perp = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}). \quad (2)$$

Если на границе области потенциал удовлетворяет одному из условий

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad (3)$$

то мы приходим к тем же задачам на отыскание собственных функций  $\psi_n$  и собственных значений  $\kappa_n$ , которые возникают при исследовании волн ТМ и ТЕ (или соответственно Е и Н) типов в линиях передачи с идеально проводящими границами. Отсюда (и из известных выражений для поперечных и продольных компонент полей ТЕ и ТМ волн) следует, что

поперечное распределение потенциала  $\psi_n(\vec{r}_\perp)$  тождественно поперечному распределению продольной составляющей поля волны соответствующего типа с поперечным волновым числом  $\varkappa_n$ , а эквипотенциальные линии в сечении  $z = \text{const}$  совпадают с силовыми линиями поля, не имеющего в данной волне продольной составляющей.

Поскольку граничные условия  $\varphi = 0$  и  $\partial\varphi/\partial n = 0$  реализуются соответственно на поверхностях идеального проводника и идеального изолятора, помещенных в среду с конечной проводимостью  $\sigma$ , изучение структуры волновых полей можно производить, измеряя распределение потенциала  $\varphi(\vec{r}_\perp)$  на горизонтальной поверхности электролита в цилиндрической электролитической ванне с вертикальными стенками, повторяющими форму границ исследуемой линии передачи и изготовленными из изолятора или хорошего проводника. Основной задачей при этом является выбор такого расположения токоподводящих электродов в ванне, при котором обеспечивается выделение на поверхности электролита того или иного частного решения  $\varphi_n$ .

В общем случае потенциал  $\varphi$  представляет собой суперпозицию частных решений (1), экспоненциально убывающих с удалением от области сторонних источников (электродов). Если источники занимают конечную область  $z_1 < z < z_2$ , то

$$\varphi = \begin{cases} \sum_n a_n \psi_n e^{\varkappa_n z} & \text{при } z < z_1, \\ \sum_n a_{-n} \psi_n e^{-\varkappa_n z} & \text{при } z > z_2. \end{cases} \quad (4)$$

Выражения для коэффициентов  $a_n$ ,  $a_{-n}$ , как показано в Приложении, имеют вид

$$a_{\pm n} = \frac{2\pi}{\varepsilon \varkappa_n N_n} \int_{(z_1, z_2)} \rho(\vec{r}_\perp, z) \psi_n(\vec{r}_\perp) e^{\mp \varkappa_n z} dv, \quad (5)$$

где  $\rho$  – объемная плотность электрических зарядов,  $N_n$  – норма функции  $\psi_n$ , определяемая как интеграл величины  $\psi_n^2$  по площади поперечного сечения системы,  $\varepsilon$  диэлектрическая проницаемость заполняющей среды. Для среды с конечной проводимостью  $\sigma$  (электролит в ванне), в которую погружены точечные токоподводящие электроды, расположенные в точках  $\vec{r}_i$  одного поперечного сечения  $z = 0$ , выражения (5) целесообразно преобразовать, переходя от зарядов к токам:

$$a_n = \frac{2\pi}{\varepsilon \kappa_n N_n} \sum_i q_i \psi_n(\vec{r}_i) = \frac{1}{2\sigma \kappa_n N_n} \sum_i I_i \psi_n(\vec{r}_i). \quad (6)$$

Здесь  $q_i$  и  $I_i$  – соответственно полный заряд  $i$ -го электрода и стекающий с него в электролит полный ток. В частности, для двух электродов, между которыми протекает полный ток  $I$ , имеем:

$$a_n = a_{-n} = \frac{I}{2\sigma \kappa_n N_n} (\psi_n(\vec{r}_1) - \psi_n(\vec{r}_2)). \quad (7)$$

На достаточно большом расстоянии по оси  $z$  от области источников полный потенциал, как следует из (4), совпадает с частным решением, соответствующим наименьшему собственному значению  $\kappa_1 = \min\{\kappa_n\}$  (если только соответствующий коэффициент  $a_1 \neq 0$ ). Для того чтобы с удалением от источников происходило выделение частного решения более высокого порядка  $\varphi_k$ , их распределение должно быть ортогонально всем частным решениям  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1}$ , для которых  $\kappa < \kappa_k$ , т.е. все коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  должны обращаться в нуль. Этими соображениями и следует руководствоваться при выборе расположения токоподводящих электродов, обеспечивающих моделирование того или иного типа волны.

В настоящей работе предлагается произвести моделирование поперечной структуры нескольких низших типов ТЕ и/или ТМ волн в круглом волноводе. Для моделирования используются

электролитические ванны, представляющие собой круглые цилиндрические сосуды с диэлектрической и металлической стенками. Измерения проводятся на переменном токе звуковой частоты. Соответствующее электрическое поле в электролите является кваэистатическим (длина волны и толщина скин-слоя много больше размеров ванны), т.е. описывается скалярным потенциалом  $\varphi$ , для которого справедливы все приведенные выше соотношения. Общая схема экспериментальной установки изображена на рисунке 1.

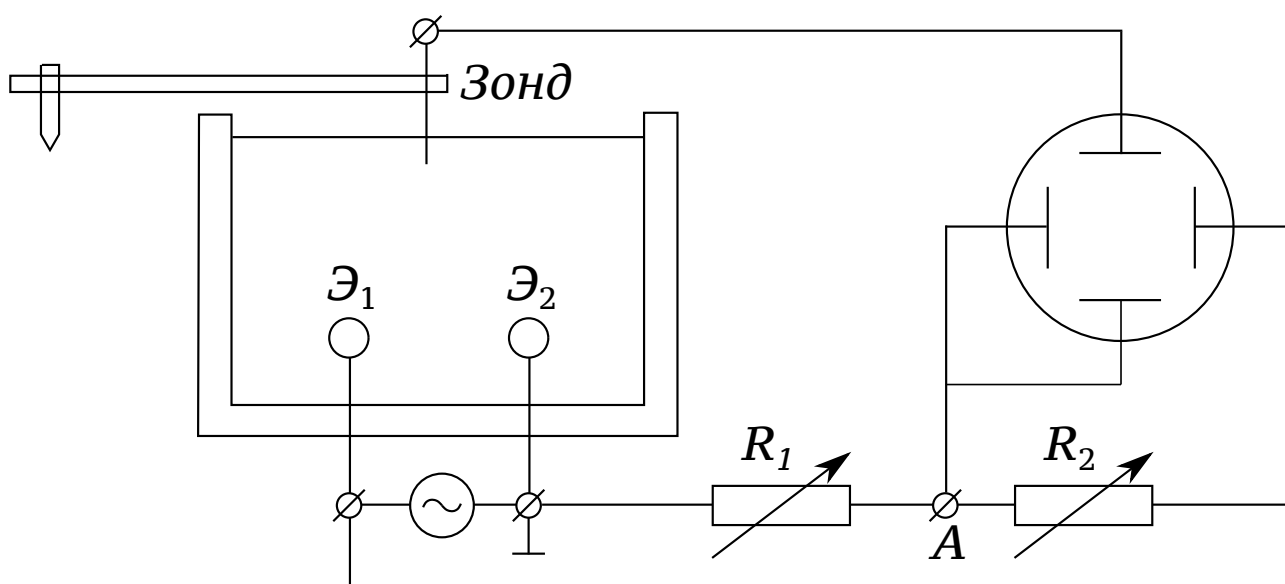


Рис. 1

Переменное напряжение со звукового генератора через водонепроницаемые вводы в дне ванны подается на укрепляемые вблизи дна электроды Э<sub>1</sub>, Э<sub>2</sub>. С помощью подвижного зонда, включенного в мостовую схему и связанного с пантографом устройством, производится снятие эквипотенциальных линий на поверхности налитого в ванну электролита (в качестве которого в работе используется водопроводная вода). Плечами мостовой схемы являются регулируемые сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$  и сопротивление электролита между зонтом и токоподводящими электродами Э<sub>1</sub>, Э<sub>2</sub>. При равновесии моста, т.е. при совпадении потенциалов зонда и точки А на экране осциллографа должна

наблюдаться горизонтальная прямая. Однако наличие емкости переходного слоя между зондом и электролитом приводит к появлению сдвига фазы между потенциалами зонда и точки  $A$ . В результате на экране всегда наблюдается эллипс. Мост считается уравновешенным, если большая ось этого эллипса располагается горизонтально. При вычерчивании семейства эквипотенциальных линий потенциал точки задается подбором сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$ , а зонд перемещается таким образом, чтобы мост оставался уравновешенным. Если потенциал электрода  $\mathcal{E}_1$  принять равным нулю, то потенциал  $\varphi_p$  точки соприкосновения зонда и электролита при равновесии моста можно определить по формуле

$$\varphi_p = K \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (8)$$

( $K$  – коэффициент, определяемый напряжением на выходе генератора и сдвигом фаз между потенциалами зонда и точки  $A$ ).

## Задание

1. Выясните, как должны быть расположены токоподводящие электроды, чтобы в ваннах моделировались поперечные структуры первых трех типов ТЕ и ТМ волн круглого волновода ( $TE_{11}$ ,  $TE_{21}$ ,  $TE_{01}$ ,  $TM_{01}$ ,  $TM_{11}$ ,  $TM_{21}$ ) и первой ТЕ волны коаксиальной линии  $TE_{11}^{\text{коакс}}$ .

2. Произведите моделирование волн указанных типов, снимая семейства эквипотенциальных линий на поверхности электролита и определяя по величине сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$  значения потенциала (в относительных единицах  $\varphi/K$ ) на каждой линии. Обязательно включите в семейство вычерчиваемых эквипотенциальных кривых особые линии и точки снимаемого потенциального рельефа (сепаратрисы, экстремумы).

Изменяя сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$ , следите за тем, чтобы их сумма всегда оставалась больше величины внутреннего сопротивления генератора  $R_{\text{внутр.}} = 600 \text{ Ом}$ .

3. На основании полученных данных постройте графики зависимости потенциала от радиуса  $r$  и азимутального угла  $\vartheta$  и сравните их с соответствующими графиками, построенными теоретически. Произвольная константа ( $C_1$ ) и масштабный множитель ( $C_2$ ) в определении потенциала  $C_1 + C_2\varphi$  должны выбиваться из требования наибольшей наглядности этого сравнения (нули и максимумы сравниваемых кривых должны совпадать).

**НЕ ПОГРУЖАЙТЕ РУКИ В ЭЛЕКТРОЛИТ И НЕ ПРОИЗВОДИТЕ СМЕНУ ЭЛЕКТРОДОВ ПРИ ВВЕДЕННОМ НАПРЯЖЕНИИ ЗВУКОВОГО ГЕНЕРАТОРА!**

По окончании работы слейте воду из ванны и оботрите насухо поверхности электродов.



## Вопросы

1. Каким образом можно произвести моделирование волновых полей в линии передачи, для которой заранее неизвестна структура поля ни одного типа волны?

2. Покажите, что линии равного потенциала в поперечном сечении ванны совпадают с силовыми линиями поля, не имеющего в волне данного типа продольной составляющей.

3. Как влияет на распределение потенциала в ванне наличие поперечных изолирующих границ (дно ванны и поверхность раздела электролит - воздух).

4. Докажите справедливость соотношений (6).

## Литература

1. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1990. С. 135-165.

2. Приложение к настоящему описанию.

# Приложение

к работе "Моделирование волновых полей методом  
электролитической ванны"

## Электростатические поля, создаваемые заданными источниками в цилиндрических системах

Рассмотрим бесконечную цилиндрическую систему, ограниченную замкнутой цилиндрической поверхностью  $S_0$ , на которой электростатический потенциал  $\varphi$  удовлетворяет одному из граничных условий

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0. \quad (\text{П.1})$$

Внутри этой поверхности на конечном участке длины  $z_1 < z < z_2$  (см. рис. П.1) с заданной объемной плотностью  $\rho(\vec{r}_\perp, z)$  распределены сторонние заряды ( $z$  – продольная координата,  $\vec{r}_\perp$  – радиус-вектор в поперечной плоскости).

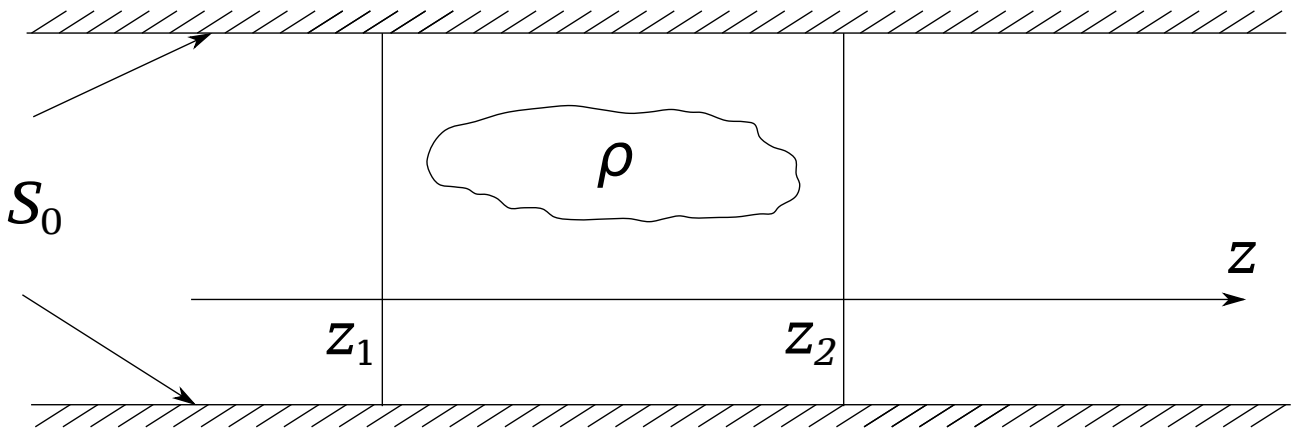


Рис. П.1

Среда, заполняющая систему, однородна и может быть как проводником, так и диэлектриком (в обоих случаях потенциал удовлетворяет вне области источников уравнению Лапласа  $\Delta\varphi = 0$ , а внутри ее – уравнению Пуассона  $\Delta\varphi = -4\pi\rho/\varepsilon$ ).

Будем искать потенциал вне области источников в виде суперпозиции частных решений уравнения Лапласа

$$\varphi_n = \psi_n(\vec{r}_\perp) \exp(\pm \varkappa_n z) , \quad (\text{П.2})$$

где  $\psi_n(\vec{r}_\perp)$  – решение «мембранного» уравнения

$$\Delta_\perp \psi_n + \varkappa_n^2 \psi_n = 0 \quad (\text{П.3})$$

с граничными условиями  $\psi = 0$  или  $\partial\psi_n/\partial n = 0$  (см. (П.1)). Поскольку поле не может экспоненциально нарастать с удалением от области  $(z_1, z_2)$ , справа ( $z > z_2$ ) и слева ( $z < z_1$ ) от нее в полное решение должны входить лишь функции  $\varphi_n$  соответственно с отрицательным и положительным знаками в показателе экспоненты  $\exp(\pm \varkappa_n z)$  (величины  $\varkappa_n$  предполагаются положительными):

$$\left. \begin{array}{l} z < z_1 : \varphi = \sum_n a_n \psi_n \exp(\varkappa_n z) \\ z > z_2 : \varphi = \sum_n a_{-n} \psi_n \exp(-\varkappa_n z) \end{array} \right\} \quad (\text{П.4})$$

Для определения коэффициентов  $a_{\pm n}$  воспользуемся теоремой Грина, согласно которой для любых дважды дифференцируемых функций  $f_1$  и  $f_2$  справедливо соотношение

$$\int_V (f_1 \Delta f_2 - f_2 \Delta f_1) dv = \iint_S \left( f_1 \frac{\partial f_2}{\partial n} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial n} \right) ds . \quad (\text{П.5})$$

Здесь справа интегрирование производится по замкнутой поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ .

Предварительно получим с помощью этой теоремы некоторые соотношения ортогональности. Выбирая в качестве функций  $f_1$  и  $f_2$  частные решения  $\varphi_n$  и  $\varphi_m$  (обращающие левую часть (П.5) в нуль), произведем в правой части (П.5) интегрирование по замкнутой поверхности  $S$ , образованной граничной поверхностью  $S_0$  и двумя произвольно

расположенными поперечными сечениями системы  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . В силу любого из граничных условий (П.1) интеграл по  $S_0$  обращается в нуль, так что в результате будем иметь:

$$\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} \left( \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} - \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right) ds = 0 . \quad (\text{П.6})$$

Поскольку нормали к поверхностям  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  имеют противоположные направления и параллельны оси  $z$ , то из (П.6) следует

$$\iint_{\Sigma_1} \left( \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} - \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right) ds = \iint_{\Sigma_2} \left( \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} - \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right) ds . \quad (\text{П.7})$$

Отсюда, ввиду произвольности расположения сечений  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  для любого поперечного сечения  $\Sigma$  имеем:

$$\iint_{\Sigma} \left( \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} - \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right) ds = \text{const} . \quad (\text{П.8})$$

Подставляя сюда  $\varphi_{n,m} = \psi_{n,m} \exp(\pm \kappa_{n,m} z)$ , находим, что в случае  $\kappa_n \neq \kappa_m$  это равенство может выполняться лишь при условии

$$\iint_{\Sigma} \psi_n \psi_m ds = 0 , \quad (\text{П.9})$$

означающем ортогональность собственных функций  $\psi_n$ , соответствующих различным собственным значениям  $\kappa_n$ .

При наличии вырождения, когда одному и тому же  $\kappa_n$  соответствует более одной собственной функции  $(\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(k)})$  из этих функций можно образовать линейные комбинации, для которых также будут выполняться соотношения типа (П.9).

Величина

$$N_n = \iint_{\Sigma} \psi_n^2 ds .$$

называется нормой функции  $\psi_n$  и обращается в нуль лишь для тривиальных решений  $\psi_n = 0$ .

Применим теперь теорему Грина к функциям  $f_1 = \varphi_n$ ,  $f_2 = \varphi$  и выберем в качестве  $S$  ту же поверхность, что и прежде, а сечения  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  будем теперь считать лежащими по разные стороны от области источников  $(z_1, z_2)$ .

Учитывая, что  $\varphi_n$  и  $\varphi$  удовлетворяют соответственно уравнениям Лапласа и Пуассона, подставляя в (П.5) разложения (П.4) и принимая во внимание полученное соотношение ортогональности, путем опускаемых здесь элементарных преобразований получим следующие выражения для коэффициентов  $a_{\pm n}$ :

$$a_{\pm n} = \frac{2\pi}{\varepsilon \kappa_n N_n} \int_V \psi_n \exp(\mp \kappa_n z) \varrho dv . \quad (\text{П.10})$$

Здесь интегрирование производится по всей области источников  $z_1 < z < z_2$ . Если весь заряд можно считать распределенным с плотностью  $\varrho$  в одном поперечном сечении системы  $\Sigma_0$  (принимаемом за начало отсчета по оси  $z$ ), то (П.10) принимает вид

$$a_n = a_{-n} = \frac{2\pi}{\varepsilon \kappa_n N_n} \iint_{\Sigma_0} \varrho \psi_n ds . \quad (\text{П.11})$$

Еще более упрощается это выражение для источников, представляющих собой набор точечных зарядов  $q_i$ , расположенных в точках  $\vec{r}_i$  одного сечения  $\Sigma_0$ :

$$a_n = a_{-n} = \frac{2\pi}{\varepsilon \kappa_n N_n} \sum_i q_i \psi_n(\vec{r}_i) . \quad (\text{П.12})$$

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ВАННЫ

Составители:

Владимир Борисович **Гильденбург**

Иван Александрович **Павличенко**

## *Практикум*

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Национальный  
исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.