МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”

А.А. Федюков

Элементы линейной алгебры

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института ИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению
подготовки 390301 «Социология»

Нижний Новгород
2016

УДК 512.643+512.644
ББК 22.143
Ф-16

Ф-16 Федюков А.А. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ: учебно-методическое пособие. – [электронный ресурс]. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 46 с.

Рецензент: ассистент **Р.С. Бирюков**

В учебно-методическом пособии изложен теоретический материал по решению систем линейных алгебраических уравнений, нахождению определителей и обратной матрицы. В каждом разделе поставлена задача и разобраны примеры с подробным алгоритмом решения. Приведены вопросы для самопроверки, которые позволяют закрепить полученные теоретические знания.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 390301 «Социология».

УДК 512.643+512.644
ББК 22.143

Содержание

Введение

Высшая математика отличатся от ранее созданных математических наук, изучаемых в средней школе: арифметики, геометрии, алгебры и тригонометрии, которые обычно объединяют под общим названием *элементарной математики*. Основное отличие высшей математики от элементарной заключается в следующем: элементарная математика изучает неизменяемые, постоянные величины – числа и фигуры. Высшая же математика изучает переменные величины и создает аппарат, предназначенный для изучения переменных процессов. Одним из разделов высшей математики является линейная алгебра.

Первые элементы линейной алгебры следовали из практических вычислительных задач вокруг решения линейных уравнений. В «Началах» Евклида фигурируют две теории «линейного» характера: теория величины и теория целых чисел. Близкие к современным матричным методам подходы к решению систем линейных уравнений обнаруживаются у вавилонян (системы из двух уравнений с двумя переменными) и древних китайцев (в «Математике в девяти книгах», до трёх уравнений с тремя переменными [1]). Однако после достижения определённости с основными вопросами нахождения решений систем линейных уравнений развитие раздела практически не происходило. Даже в конце XVIII — начале XIX века считалось, что проблем относительно уравнений первой степени больше не существует, притом системы линейных уравнений с числом переменных, отличающихся от количества уравнений или с линейно-зависимыми коэффициентами в левой части попросту считались некорректными [2].

Методы, сформировавшие линейную алгебру как самостоятельную отрасль математики, уходят корнями в другие разделы. Ферма в 1630-е годы, создав классификацию плоских кривых, ввёл в математику (ключевой для линейной алгебры) принцип размерности и разделил задачи аналитической геометрии по числу неизвестных (с одним неизвестным — отыскание точки, с двумя — кривой или геометрического места на плоскости, с тремя — поверхности). Эйлер создал классификацию кривых по порядкам, обратив внимание на линейный характер преобразований координат, ввёл в оборот понятие аффинного преобразования (и само слово «аффинность» [2]).

Первое введение понятия определителя для целей решения систем линейных уравнений относят к Лейбницу, но эти работы не были опубликованы [1]. Также определитель обнаруживается в трудах Сэки Такакадзу 1683 года, в которых он обобщил метод решения систем линейных уравнений из древнекитайской «Математики в девяти книгах» до n уравнений с n неизвестными. Маклорен, фактически используя простейшие определители в трактате вышедшем 1748 году, приводит решения систем из двух линейных уравнений с двумя неизвестными и трёх уравнений с тремя неизвестными [1]. Крамер и Безу в работах по проблеме отыскания плоской кривой, проходящей через заданную точку, вновь построили это понятие (правило Крамера сформулировано в 1750 году), Вандермонд и Лагранж дали индуктивное определение для случаев $n > 3$, а целостное определение и окончательные свойства определителей дали Коши (1815) и Якоби (1840-е годы) [2]. Гауссу (около 1800 года) принадлежит формализация метода последовательного исключения переменных для решения этих задач, ставшего известным под его именем [1].

Пособие разбито на разделы. В первом разделе рассмотрены матрицы и определители. Во втором разделе рассмотрены системы линейных алгебраических уравнений и способы их решения. В каждом разделе изложен теоретический материал, который позволяет обучающимся систематизировать знания основных понятий, теорем и методов их практического применения при подготовке к контрольным работам и экзаменам; рассмотрены основные типы задач, разобраны примеры. Пособие содержит комплект заданий, который может быть использован в качестве типового для выработки навыков решения задач. Количество заданий достаточно как для занятий в аудитории, так и для самостоятельной работы студентов.

Данное учебно-методическое пособие может быть полезно преподавателям при проведении практических занятий и формировании индивидуальных заданий обучающихся, а также студентам заочной формы обучения и аспирантам.

1. Матрицы и определители. Основные понятия

1.1. Основные сведения о матрицах

Матрицей называется математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы, которая представляет собой совокупность n строк и m столбцов, на пересечении которых стоят ее элементы. Элементами матрицы могут быть числа или другие математические объекты: функции, векторы и т.д. Например, матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ содержит две строки и три столбца. Элементами ее являются целые числа. Матрица $\begin{pmatrix} 0 & \sin x & 5 & 0.1 \\ \cos x & x^2-1 & 7 & x-y \end{pmatrix}$ содержит две строки и четыре столбца. Элементами ее являются функции и действительные числа.

Элемент матрицы стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца обозначим a_{ij}. Тогда матрицу A можно записать в виде

$$A = A^{n\times m} = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Количество строк и столбцов определяет *размер матрицы* (или размерность). Таким образом, матрица A имеет размерность $n\times m$.

Если $n=m$, то матрица называется *квадратной*.

$$A = A^{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

В случае квадратной матрицы вводится понятие главной и побочной диагонали. *Главной диагональю матрицы* называется диагональ $a_{11} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{nn}$. *Побочной диагональю матрицы* называется диагональ $a_{n1} \quad a_{(n-2)2} \quad \dots \quad a_{1n}$.

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все элементы матрицы, не лежащие на главной диагонали равны нулю. Например, матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ – диагональная матрица.

Диагональная матрица называется единичной, если все ее элементы, расположенные на главной диагонали, равны 1. Единичную матрицу будем обозначать символом E. Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица четвертого порядка.

Если все элементы матрицы $A^{n \times m}$ равны нулю, то такая матрица называется *нулевой*. Нулевую матрицу будем обозначать символом O. Например, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нулевая матрица размера 3×2.

Две матрицы одинакового размера $A^{n \times m} = (a_{ij})$ и $B^{n \times m} = (b_{ij})$ называются *равными*, если у них совпадают элементы, имеющие одинаковый номер, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для всех $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

1.2. Основные операции над матрицами

1. *Умножение матрицы на число.*

Под произведением матрицы $A=(a_{ij}),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$ на вещественное число λ называется матрица $C=(c_{ij})$ элементы которой

$$c_{ij}=\lambda\cdot a_{ij} \text{ для всех } i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}.$$

Пример 1. Найти матрицу $C=2\cdot A$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}.$$

$$C=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\end{pmatrix}.$$

2. *Сложение матриц.*

Если две матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ имеют одинаковую размерность, тогда суммой двух матриц $A+B$ называется матрица $C=(c_{ij})$ с элементами

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \text{ для всех } i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}, \text{ т.е.}$$

$$C=A+B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm}\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти матрицу $C=A+B$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ 5 & 9 & -8\end{pmatrix}.$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ 5 & 9 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(-3) & 2+(-2) & 3+1\\ 4+5 & 5+9 & 6+(-8)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ 9 & 14 & -2\end{pmatrix}.$$

Операция сложения матриц обладает:

a). Переместительным свойством: $A+B=B+A$,

b). Сочетательным свойством: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3. *Умножение матриц.*

Под произведением двух матриц $A^{n\times m}$ и $B^{m\times k}$ называется матрица $C^{n\times k}=(c_{ij})$ с элементами

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{m}a_{is}\cdot b_{sj} \text{ для всех } i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,k}, \text{ т.е.}$$

каждый элемент c_{ij} равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A на элементы j-го столбца матрицы B.

Заметим, что перемножать можно лишь матрицы, для которых количество столбцов в левом сомножителе равно количеству строк в правом сомножителе. Например, матрицу $A^{3\times 4}$ (матрица содержит 3 строк и 4 столбца) нельзя умножить на матрицу $D^{5\times 2}$ (матрица содержит 5 строк и 2 столбца), т.к. количество столбцов матрицы A не равно количеству строк матрицы D, т.е. $4\neq 5$.

Вместе с тем матрицу $A^{3\times 4}$ можно умножить на матрицу $B^{4\times 2}$. При этом результатом умножения матриц $A^{3\times 4}$ и $B^{4\times 2}$ будет матрица $C^{3\times 2}$, содержащая 3 строки и 2 столбца:

$$A^{3\times 4}\cdot B^{4\times 2}=C^{3\times 2}$$

Пошаговое умножение матриц разберем на примере.

Пример 3. Найти матрицу $C=A\cdot B$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3 & 0\\ 5 & 4 & -2 & 1\\ -8 & 11 & -10 & -5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-9 & 3\\ 6 & 20\\ 7 & 0\\ 12 & -4\end{pmatrix}.$$

В результате произведения матриц должны получить матрицу, состоящую из трех строк и двух столбцов:

$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\\ c_{31} & c_{32}\end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы получить элемент c_{11} нужно найти сумму произведений первой строки матрицы A на соответствующие элементы первого столбца матрицы B, т.е. первый элемент умножить на первый, второй элемент умножить на второй и т.д. и сложить.

c_{11}

Строка №1 *Столбец №1*

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3 & 0\\ 5 & 4 & -2 & 1\\ -8 & 11 & -10 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-9 & 3\\ 6 & 20\\ 7 & 0\\ 12 & -4\end{pmatrix}$$

Таким образом

$$c_{11}=(-1)\cdot(-9)+2\cdot 6+(-3)\cdot 7+0\cdot 12=0.$$

Получим элемент c_{12}. Для этого найдем сумму произведений первой строки матрицы A на соответствующие элементы второго столбца матрицы B.

c_{12}

Строка №1 *Столбец №2*

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & -10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & 20 \\ 7 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$$

Таким образом

$$c_{12} = (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 20 + (-3) \cdot 0 + 0 \cdot (-4) = 37 .$$

Чтобы найти элемент c_{21} найдем сумму произведений второй строки матрицы A на соответствующие элементы первого столбца матрицы B.

c_{21}

Строка №2 *Столбец №1*

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & -10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & 20 \\ 7 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$$

Таким образом

$$c_{21} = 5 \cdot (-9) + 4 \cdot 6 + (-2) \cdot 7 + 1 \cdot 12 = -23 .$$

Аналогично получим

$$c_{22} = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 20 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-4) = 91 ,$$

$$c_{31} = (-8) \cdot (-9) + 11 \cdot 6 + (-10) \cdot 7 + (-5) \cdot 12 = 8,$$

$$c_{32} = (-8) \cdot 3 + 11 \cdot 20 + (-10) \cdot 0 + (-5) \cdot (-4) = 216 .$$

Искомая матрица C имеет вид

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & -10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & 20 \\ 7 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 37 \\ -23 & 91 \\ 8 & 216 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что умножение матриц не коммутативно, т.е. в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пример 4. Показать, что $A \cdot B \neq B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом $A \cdot B \neq B \cdot A$. Что и требовалось показать.

4. *Транспонирование матрицы.*

Транспонированной по отношению к матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $A^T = (a_{ji})$ для всех $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$.

Таким образом, для того, чтобы получить транспонированную матрицу A^T, нужно в исходной матрице A заменить столбцы соответствующими строками по такому принципу: была первая строка – станет первый столбец; была вторая строка – станет второй столбец; была третья строка – станет третий столбец и так далее.

Пример 5. Найти матрицу A^T, если

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \end{pmatrix}.$$

По определению $A^T = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{pmatrix}.$

Первая строка стала первым столбцом

Соответственно, если исходная матрица A имела размер 2×3, то транспонированная матрица A^T имеет размер 3×2.

Некоторые свойства операций над матрицами

Если α, β – некоторые числа, а $A,\ B,\ C$ – матрицы, тогда справедливы следующие операции.

1. $A+B=B+A$ (коммутативность сложения)
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (ассоциативность сложения)
3. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$ (дистрибутивность умножения на матрицу относительно сложения чисел)
4. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц)
5. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
6. $(\alpha\cdot\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A)$
7. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$, $(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$
8. $A\cdot E=A$, $E\cdot A=A$, где E – единичная матрица соответствующего порядка
9. $A\cdot O=O$, $O\cdot A=O$, где O – нулевая матрица соответствующего размера
10. $(A^T)^T=A$
11. $(A+B)^T=A^T+B^T$
12. $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$
13. $(\alpha\cdot A)^T=\alpha\cdot A^T$

1.3. Определители квадратных матриц. Свойства определителей.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

С этой матрицей свяжем определенную числовую характеристику, называемую *определителем матрицы* по следующему закону.

Если $n=1$, тогда матрица $A=a_{11}$. Определителем назовем величину этого элемента, т.е

$$\Delta_A = a_{11}.$$

Если $n=2$, тогда матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Определителем назовем величину

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}. \tag{4}$$

Определитель третьего порядка.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{31}\cdot a_{23} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - \tag{5}$$
$$- a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{13}\cdot a_{31}\cdot a_{22}.$$

Пример 6. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся формулой (5). Тогда

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -12.$$

Аналогично можно определить определитель более высокого порядка.

Рассмотрим определитель n-го порядка.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим элемент a_{ij}. Вычеркнем i-ю строчку и j-й столбец. Получим определитель $n-1$-го порядка, называемый *минором элемента* a_{ij}. Обозначим его M_{ij}.

Величина $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением элемента* a_{ij}. Тогда величина определителя Δ_A равна сумме элементов какой-либо строки (столбца) умноженных на соответствующие алгебраические дополнения, т.е.

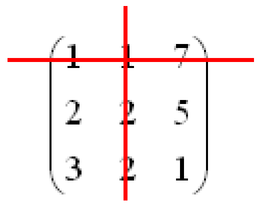
$$\Delta_A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}. \tag{6}$$

Пример 7. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

найти: миноры и алгебраические дополнения элементов a_{12}, a_{32} и a_{23}.

a) Вычеркнем 1-ю строчку и 2-й столбец.матрицы A.



Тогда минор M_{12} и алгебраическое дополнение A_{12} элемента a_{12} имеют вид

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 = -13,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 13.$$

b) Вычеркнем 3-ю строчку и 2-й столбец.матрицы A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда минор M_{32} и алгебраическое дополнение A_{32} элемента a_{32} имеют вид

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = -9,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 9.$$

с) Вычеркнем 2-ю строчку и 3-й столбец.матрицы A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23} имеют вид

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Пример 8. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Воспользуемся формулой (6) и раскроем определитель матрицы A по первому столбцу. Тогда

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -8 + 26 - 27 = -9,$$

так как по формуле (4) определители второго порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -8, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -13, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -9.$$

b) Воспользуемся формулой (6) и раскроем определитель матрицы A по второй строке. Тогда

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 26 - 40 + 5 = -9,$$

так как по формуле (4) определители второго порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -13, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -20, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

c) Воспользуемся формулой (6) и раскроем определитель матрицы A по третьему столбцу. Тогда

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -14 + 5 + 0 = -9,$$

так как по формуле (4) определители второго порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 9. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Воспользуемся формулой (6) и раскроем определитель матрицы A по первому столбцу. Тогда

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 + 15 + 0 = 13,$$

так как по формуле (4) определители второго порядка

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5, \qquad \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

b) Воспользуемся формулой (6) и раскроем определитель матрицы A по второй строке. Тогда

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 15 + 10 - 12 = 13,$$

так как по формуле (4) определители второго порядка

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

c) Воспользуемся формулой (6) и раскроем определитель матрицы A по третьей строке. Тогда

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 39 + 52 = 13,$$

так как по формуле (4) определители второго порядка

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 13, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 26.$$

Свойства определителей.

Ниже приводятся основные свойства определителей, которые можно подтвердить, используя формулы их вычисления.

1. Если в определителе поменять местами строки на соответствующие столбцы, то величина определителя не изменится, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

2. Определитель меняет знак, если в нем поменять местами соседние строки (столбцы), т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

3. Определитель равен нулю, если он содержит две одинаковые строки (столбца), т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Определитель равен нулю, если он содержит нулевую строку (столбец), т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Если какую-либо строку (столбец) умножить на константу, то величина определителя умножится на эту константу, т.е.

$$\begin{vmatrix} k \cdot a_1 & k \cdot b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

6. Если есть два определителя Δ_1 и Δ_2 отличающиеся только какой-то строкой (столбцом)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

тогда сумма этих определителей равна определителю, у которого эта строка (столбец) представляет собой сумму элементов Δ_1 и Δ_2, т.е.

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 10. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\ \cos 2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\beta,\ \cos 2\gamma=\cos^2\gamma-\sin^2\gamma,$$

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos^2\beta-\sin^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos^2\gamma-\sin^2\gamma \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix}.$$

Эти два определителя имеют одинаковые столбцы. Значит, в соответствии с третьим свойством определителей, они равны нулю.

$$\Delta_A=0.$$

1.4. Обратная матрица. Алгоритм нахождения обратной матрицы.

Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к квадратной матрице A, если выполнено условие

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E,$$

где E – единичная матрица, порядок которой равен порядку матрицы A.

Невырожденная матрица – это матрица, определитель которой не равен нулю. Соответственно *вырожденная матрица* – это матрица, у которой определитель равен нулю.

Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная. Если обратная матрица A^{-1} существует, то она единственная.

Есть несколько способов нахождения обратной матрицы. Рассмотрим метод вычисления с помощью присоединенной матрицы, который является стандартным в большинстве курсов высшей математики.

Алгоритм нахождения обратной матрицы.

Для вычисления обратной матрицы

1. Вычислим определитель матрицы Δ_A. Если $\Delta_A \neq 0$, то действие продолжается.
2. Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} ко всем элементам матрицы A.
3. Построим присоединённую матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. Тогда обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot A^*.$$

Пример 11. Вычислить обратную матрицу A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Определитель матрицы $\Delta_A = -9$ получен выше в **Примере 8**.

Шаг 2. Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} ко всем элементам матрицы A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -8, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 13,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 13,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -20, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -9, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 9,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Шаг 3. Построим присоединённую матрицу.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{23} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 13 & -9 \\ 13 & -20 & 9 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Тогда обратная матрица

$$A^{-1} = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 13 & -9 \\ 13 & -20 & 9 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку найденного решения. Для этого умножим матрицу A на матрицу A^{-1}.

$$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 13 & -9 \\ 13 & -20 & 9 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot (-8) + 1 \cdot 13 + 7 \cdot (-2) & 1 \cdot 13 + 1 \cdot (-20) + 7 \cdot 1 & 1 \cdot (-9) + 1 \cdot 9 + 7 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-8) + 2 \cdot 13 + 5 \cdot (-2) & 2 \cdot 13 + 2 \cdot (-20) + 5 \cdot 1 & 2 \cdot (-9) + 2 \cdot 9 + 5 \cdot 0 \\ 3 \cdot (-8) + 2 \cdot 13 + 1 \cdot (-2) & 3 \cdot 13 + 2 \cdot (-20) + 1 \cdot 1 & 3 \cdot (-9) + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 13 & -9 \\ 13 & -20 & 9 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} (-8) \cdot 1 + 13 \cdot 2 + (-9) \cdot 3 & (-8) \cdot 1 + 13 \cdot 2 + (-9) \cdot 2 & (-8) \cdot 7 + 13 \cdot 5 + (-9) \cdot 1 \\ 13 \cdot 1 + (-20) \cdot 2 + 9 \cdot 3 & 13 \cdot 1 + (-20) \cdot 2 + 9 \cdot 2 & 13 \cdot 7 + (-20) \cdot 5 + 9 \cdot 1 \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & (-2) \cdot 7 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Что и требовалось показать.

Пример 12. Вычислить обратную матрицу A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Определитель матрицы $\Delta_A = 13$ получен выше в **Примере 9**.

Шаг 2. Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} ко всем элементам матрицы A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 26.$$

Шаг 3. Построим присоединённую матрицу.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{23} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 13 \\ 6 & 2 & -13 \\ -9 & -3 & 26 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Тогда обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 & 13 \\ 6 & 2 & -13 \\ -9 & -3 & 26 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку найденного решения. Для этого умножим матрицу A на матрицу A^{-1}.

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 & 13 \\ 6 & 2 & -13 \\ -9 & -3 & 26 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 7 \cdot 6 + 3 \cdot (-9) & 1 \cdot (-5) + 7 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) & 1 \cdot 13 + 7 \cdot (-13) + 3 \cdot 26 \\ (-3) \cdot (-2) + 5 \cdot 6 + 4 \cdot (-9) & (-3) \cdot (-5) + 5 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) & (-3) \cdot 13 + 5 \cdot (-13) + 4 \cdot 26 \\ 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-9) & 0 \cdot (-5) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & 0 \cdot 13 + 3 \cdot (-13) + 2 \cdot 26 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -5 & 13\\ 6 & 2 & -13\\ -9 & -3 & 26\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ -3 & 5 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}(-2)\cdot 1+(-5)\cdot(-3)+13\cdot 0 & (-2)\cdot 7+(-5)\cdot 5+13\cdot 3 & (-2)\cdot 3+(-5)\cdot 4+13\cdot 2\\ 6\cdot 1+2\cdot(-3)+(-13)\cdot 0 & 6\cdot 7+2\cdot 5+(-13)\cdot 3 & 6\cdot 3+2\cdot 4+(-13)\cdot 2\\ (-9)\cdot 1+(-3)\cdot(-3)+26\cdot 0 & (-9)\cdot 7+(-3)\cdot 5+26\cdot 3 & (-9)\cdot 3+(-3)\cdot 4+26\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Что и требовалось показать.

2. Системы линейных уравнений

2.1. Основные понятия и определения

Системой линейных алгебраических уравнений называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (7)$$

содержащая m уравнений и n неизвестных (x_1, x_2, …, x_n). Прилагательное «линейные» означает, что все неизвестные входят только в первой степени.

Параметры a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, называют *коэффициентами*, а параметры b_i – *свободными членами* системы линейных алгебраических уравнений.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены b_i, $i=\overline{1,m}$ равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Если хотя бы один свободный член b_i, $i=\overline{1,m}$ не равен нулю, то систему уравнений (7) называют *неоднородной*.

Решением системы линейных уравнений (7) называется всякая упорядоченная совокупность чисел α_1, α_2, …, α_n которая поставленная в заданном порядке вместо неизвестных x_1, x_2, …, x_n обращает каждое уравнение системы (7) в тождество.

Система уравнений (7) называют *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* если она не имеет ни одного решения.

Пример 13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Данная система уравнений является несовместной, т.к. $0 \neq 1$.

Заметим, что любая однородная система всегда совместна, т.к. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется нулевым или тривиальным.

Совместная система линейных уравнений (7) называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *недоопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением системы*. Совокупность всех частных решений называется *общим решением системы*.

Решить систему уравнений – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решений.

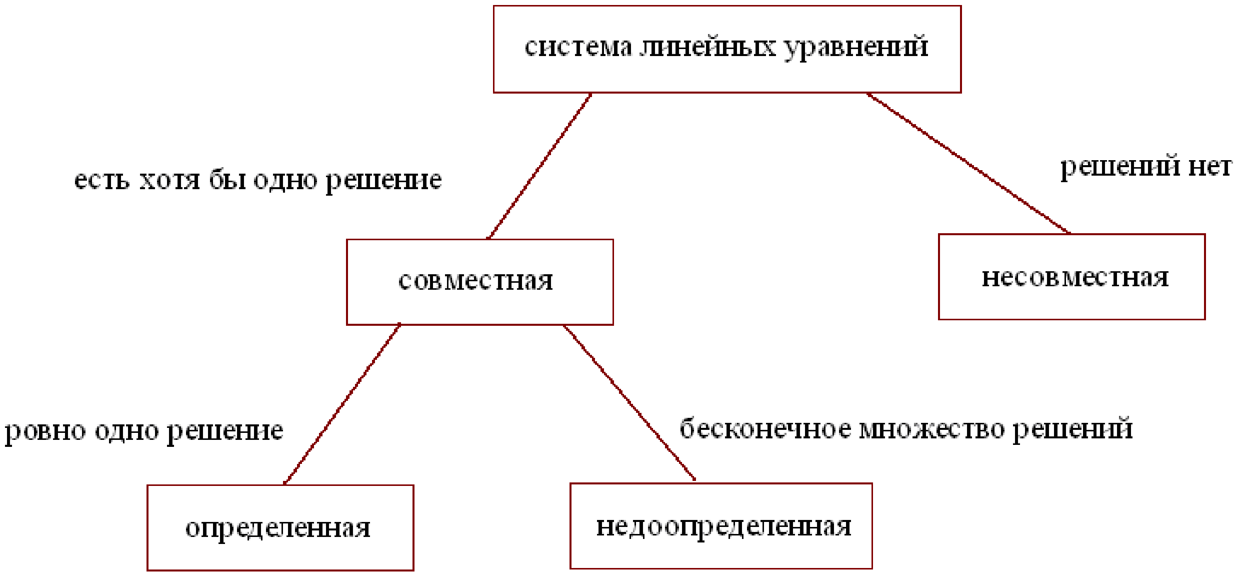


Рис. 1. Классификация систем линейных уравнений

Две *системы называются эквивалентными* (равносильными), если они имеют одно и тоже общее решение. Другими словами, системы эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Рассмотрим два способа решения невырожденных систем: с помощью нахождения обратной матрицы и применяя формулы Крамера.

2.2. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Систему линейных алгебраических уравнений (7) удобно записывать в матричной форме:

$$A\cdot x=b, \tag{8}$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда матрица A квадратная (т.е $n=m$) и ее определитель не равен нулю, т.е.

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Определитель этой матрицы называется *определителем системы*. Если определитель системы не равен нулю, то система называется *невырожденной*.

Умножим обе части равенства слева на матрицу A^{-1}. Получим

$$A^{-1}\cdot A\cdot x=A^{-1}\cdot b.$$

Тогда, так как $A^{-1}\cdot A=E$ и $E\cdot x=x$ получим решение системы линейных уравнений в векторной форме

$$x=A^{-1}\cdot b. \tag{9}$$

Пример 14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+7x_3=0, \\ 2x_1+2x_2+5x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=2. \end{cases} \tag{10}$$

Шаг 1. Запишем систему в матричной форме:

$$A\cdot x=b,$$

где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 7\\ 2 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Шаг 2. В **примере 11** получена матрица A^{-1}:

$$A^{-1}=-\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-8 & 13 & -9\\ 13 & -20 & 9\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Решение системы (10) имеет вид

$$x=A^{-1}\cdot b=-\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-8 & 13 & -9\\ 13 & -20 & 9\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}13\cdot 1-9\cdot 2\\ -20\cdot 1+9\cdot 2\\ 1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\ \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9}\end{pmatrix}.$$

Откуда

$$x_1=\frac{5}{9},\ x_2=\frac{2}{9},\ x_3=-\frac{1}{9}.$$

Сделаем проверку найденного решения.

$$\begin{cases}\frac{5}{9}+\frac{2}{9}+7\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)=0,\\ 2\cdot\frac{5}{9}+2\cdot\frac{2}{9}+5\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)=1,\\ 3\cdot\frac{5}{9}+2\cdot\frac{2}{9}-\frac{1}{9}=2.\end{cases}$$

Что и требовалось.

Пример 15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+7x_2+3x_3=1,\\ -3x_1+5x_2+4x_3=2,\\ 3x_2+2x_3=3.\end{cases}\tag{11}$$

Шаг 1. Запишем систему в матричной форме:

$$A\cdot x=b,$$

где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ -3 & 5 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Шаг 2. В **примере 12** получена матрица A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -5 & 13\\ 6 & 2 & -13\\ -9 & -3 & 26\end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Решение системы (11) имеет вид

$$x=A^{-1}\cdot b=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -5 & 13\\ 6 & 2 & -13\\ -9 & -3 & 26\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}-2\cdot1-5\cdot2+13\cdot3\\ 6\cdot1+2\cdot2-13\cdot3\\ -9\cdot1-3\cdot2+26\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{27}{13}\\ -\frac{29}{13}\\ \frac{63}{13}\end{pmatrix}.$$

Откуда

$$x_1=\frac{27}{13},\ \ x_2=-\frac{29}{13},\ \ x_3=\frac{63}{13}.$$

Сделаем проверку найденного решения.

$$\begin{cases}\frac{27}{13}+7\cdot\left(-\frac{29}{13}\right)+3\cdot\frac{63}{13}=1,\\ -3\cdot\frac{27}{13}+5\cdot\left(-\frac{29}{13}\right)+4\cdot\frac{63}{13}=2,\\ 3\cdot\left(-\frac{29}{13}\right)+2\cdot\frac{63}{13}=3.\end{cases}$$

Что и требовалось.

2.3. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Матричное равенство (9) запишем в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Данная формула справедлива, так как по определению

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Запишем (12) в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + A_{31} \cdot b_3 + \ldots + A_{n1} \cdot b_n}{\Delta_A} \\ \dfrac{A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + A_{32} \cdot b_3 + \ldots + A_{n2} \cdot b_n}{\Delta_A} \\ \ldots \\ \dfrac{A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + A_{3n} \cdot b_3 + \ldots + A_{nn} \cdot b_n}{\Delta_A} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + A_{31} \cdot b_3 + \ldots + A_{n1} \cdot b_n}{\Delta_A},$$

$$x_2 = \frac{A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + A_{32} \cdot b_3 + \ldots + A_{n2} \cdot b_n}{\Delta_A},$$

....

$$x_n = \frac{A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + A_{3n} \cdot b_3 + \ldots + A_{nn} \cdot b_n}{\Delta_A}.$$

Но выражение $A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + A_{31} \cdot b_3 + \ldots + A_{n1} \cdot b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Данный определитель получается путем замены первого столбца коэффициентов определителя

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

столбцом из свободных членов.

Итак

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_A}.$$

Аналогично, так как выражение $A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + A_{32} \cdot b_3 + \dots + A_{n2} \cdot b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам второго столбца, имеем

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_A}.$$

Формулы

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_A},\ i = \overline{1,n} \tag{13}$$

называются формулами Крамера.

Пример 16. Используя правило Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Шаг 1. В **примере 8** получен определитель матрицы Δ_A

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9.$$

Шаг 2. Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3. Определитель Δ_1 получается путем замены первого столбца коэффициентов определителя Δ_A столбцом из свободных членов $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, т.е.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 9 - 14 = -5,$$

Определитель Δ_2 получается путем замены второго столбца коэффициентов определителя Δ_A столбцом из свободных членов $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, т.е.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -9 + 7 = -2,$$

Аналогично, определитель Δ_3 получается путем замены третьего столбца коэффициентов определителя Δ_A столбцом из свободных членов, т.е.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

Шаг 3. Применяя формулы Крамера (13) получим, что

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_A} = \frac{5}{9},$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_A} = \frac{2}{9},$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_A} = -\frac{1}{9}.$$

Что и требовалось.

Пример 17. Используя правило Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 1, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 2, \\ 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Шаг 1. В **примере 9** получен определитель матрицы Δ_A

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 13.$$

Шаг 2. Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3: Определитель Δ_1 получается путем замены первого столбца коэффициентов определителя Δ_A столбцом из свободных членов $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, т.е.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -2 - 10 + 39 = 27.$$

Определитель Δ_2 получается путем замены второго столбца коэффициентов определителя Δ_A столбцом из свободных членов $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, т.е.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 21 = -29,$$

Аналогично, определитель Δ_3 получается путем замены третьего столбца коэффициентов определителя Δ_A столбцом из свободных членов, т.е.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 54 = 63.$$

Шаг 3. Применяя формулы Крамера (13) получим, что

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_A} = \frac{27}{13},$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_A} = -\frac{29}{13},$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_A} = \frac{63}{13}.$$

Что и требовалось.

Итак, невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено с помощью вычисления обратной матрицы либо по формулам Крамера.

2.4. Решение систем линейных уравнений с помощью метода Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решения систем линейных алгебраических уравнений является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{14}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (в частности треугольному) виду.

$$\begin{cases} \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \ldots + \lambda_{1k}x_k + \ldots + \lambda_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad \lambda_{22}x_2 + \ldots + \lambda_{2k}x_k + \ldots + \lambda_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \lambda_{mk}x_k + \ldots + \lambda_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{15}$$

где $k \le n$, $\lambda_{ii} \ne 0$, $i = \overline{1,k}$.

Коэффициенты λ_{ii} называются *главными элементами системы*.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

Опишем метод Гаусса подробнее.

Первый этап (**Прямой ход**).

Будем считать, что элемент $a_{11} \ne 0$ (если элемент $a_{11} = 0$, то первым в системе (14) запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля).

Преобразуем систему (14), исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого используя элементарные преобразования системы. Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 +{}_{m3}^{(1)}\, x_3 + \ldots +{}_{mn}^{(1)}\, x_n = b_m^{(1)}. \end{cases}$$

Здесь $a_{ij}^{(1)}$ и $b_i^{(1)}$, $i = \overline{2,m}$, $j = \overline{2,m}$ – новые значения коэффициентов и правых частей, которые получаются после первого шага.

Аналогичным образом, считая главным элементом $a_{22}^{(1)}$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока это возможно.

Если в процессе приведения системы (14) к ступенчатому виду (15) появятся нулевые уравнения, т.е. равенства вида $0 = 0$, их отбрасывают. Если же появится уравнение вида $0 = b_i^{(s)}$, а $b_i^{(s)} \neq 0$, то это свидетельствует о несовместности системы.

Второй этап (**Обратный ход**).

Данный этап заключается в решении полученной ступенчатой системы (15). Ступенчатая система уравнений, вообще говоря, имеет бесконечное множество решений. В последнем уравнении системы (15) выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные x_{k+1}, $x_{k+2}, \ldots, x_n$:

$$x_k = b_m - \frac{\lambda_{m(k+1)}}{\lambda_{mk}} x_{k+1} - \ldots - \frac{\lambda_{mn}}{\lambda_{mk}} x_n .$$

Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы (15) и выражаем x_{k-1} через x_{k+1}, $x_{k+2}, \ldots, x_n$. Аналогично находим $x_{k-2}, \ldots, x_2, x_1$.

Придавая свободным неизвестным x_{k+1}, $x_{k+2}, \ldots, x_n$ произвольные значения, получим бесчисленное множество решений исходной системы.

Замечание:

Если ступенчатая система оказывается треугольной, т. е. $n = k$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, и далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1$.

Пример 16. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Шаг 1. (**Прямой ход**). Приведем систему к ступенчатому виду. Для упрощения вычислений поменяем местами первое и второе уравнения системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

1). Умножим на -2 обе части первого уравнения и сложим почленно со вторым уравнением системы.

2). Умножим на -3 обе части первого уравнения и сложим почленно с третьим уравнением системы.

3). Умножим на -7 обе части первого уравнения и сложим почленно с четвертым уравнением системы.

Получим эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3, \\ 2x_2 + 26x_3 - 10x_4 = -6. \end{cases}$$

Второе и третье уравнения совпадают. Оставляем одно из них:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3, \\ 2x_2 + 26x_3 - 10x_4 = -6. \end{cases}$$

4). Умножим на -2 обе части второго уравнения и сложим почленно с третьим уравнением системы.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Равенства вида $0 = 0$ отбрасываем. Исходная система свелась к ступенчатой:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 \qquad\qquad = 2, \\ \qquad x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Шаг 2. (**Обратный ход**). Поэтому общее решение системы имеет вид:

$$x_1 = -1 - 8x_3 + 5x_4,$$

$$x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4.$$

Что и требовалось.

Замечание. Если положить, например, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то найдем одно из частных решений этой системы $x_1 = -1$, $x_2 = -3$.

Пример 17. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Шаг 1. (**Прямой ход**). Приведем систему к ступенчатому виду. Для этого

1). Умножим на -2 обе части первого уравнения и сложим почленно со вторым уравнением системы.

2). Умножим на -3 обе части первого уравнения и сложим почленно с третьим уравнением системы.

Получим эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = 0, \\ \qquad\quad -9x_3 = 1, \\ \quad -x_2 - 20x_3 = 2. \end{cases}$$

Поменяем местами второе и третье уравнение системы. Исходная система свелась к ступенчатой:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = 0, \\ \quad -x_2 - 20x_3 = 2, \\ \qquad\quad -9x_3 = 1. \end{cases}$$

Шаг 2. (**Обратный ход**). Из последней системы уравнений получим

$$x_3 = -\frac{1}{9},$$

$$x_2 = -2 - 20x_3 = -2 + 20 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9},$$

$$x_1 = -x_2 - 7x_3 = -\frac{2}{9} + 7 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Что и требовалось.

Пример 18. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 1, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 2, \\ 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Шаг 1. (**Прямой ход**). Приведем систему к ступенчатому виду.

1). Умножим на 3 обе части первого уравнения и сложим почленно со вторым уравнением системы. Получим эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 1, \\ 26x_2 + 13x_3 = 5, \\ 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

2). Умножим на $-\frac{3}{26}$ обе части второго уравнения и сложим почленно с третьим уравнением системы. Получим эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 1, \\ 26x_2 + 13x_3 = 5, \\ \frac{1}{2}x_3 = \frac{63}{26}. \end{cases}$$

Шаг 2. (**Обратный ход**). Из последней системы уравнений получим

$$x_3 = \frac{63}{13},$$

$$x_2 = \frac{1}{26}(5 - 13x_3) = \frac{1}{26}(5 - 13 \cdot \frac{63}{13}) = -\frac{29}{13},$$

$$x_1 = 1 - 7x_2 - 3x_3 = 1 - 7 \cdot (-\frac{29}{13}) - 3 \cdot \frac{63}{13} = \frac{27}{13}.$$

Что и требовалось.

4. Вопросы для самопроверки

1. Является ли A числовой матрицей?

   $A=1.$

2. Верно ли равенство? Дайте обоснование.

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 & 2\cdot 6 \\ 3\cdot 7 & 4\cdot 8 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить произведение матриц. Дайте обоснование.

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Является ли данная матрица невырожденной?

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Сформулируйте алгоритм поиска обратной матрицы.
6. Какая система линейных уравнений называется неопределенной.
7. Какая система линейных уравнений называется неоднородной.
8. Приведите пример, когда совместная система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений.
9. В чем состоит метод Крамера?
10. В чем состоит метод Гаусса?

5. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1.

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Найти определитель матрицы A.
2. Найти обратную матрицу для матрицы A.
3. Найти $A \cdot B^T$.
4. Используя правило Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

5. Используя метод Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 2.

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Найти определитель матрицы A
2. Найти обратную матрицу для матрицы A.
3. Найти $A \cdot B^T$.

4. Используя правило Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

5. Используя метод Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Вариант 3.

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Найти определитель матрицы A.
2. Найти обратную матрицу для матрицы A.
3. Найти $A \cdot B^T$.
4. Используя правило Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

5. Используя метод Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 4.

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&0&2&4\\1&4&0&3\\1&4&0&1\\3&2&1&0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\2&3&0&1\\1&2&0&3\\3&2&1&0\end{pmatrix}$.

1. Найти определитель матрицы A.
2. Найти обратную матрицу для матрицы A.
3. Найти $A\cdot B^T$.
4. Используя правило Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_3+4x_4=1,\\x_1+4x_2+3x_4=3,\\x_1+4x_2+x_4=2,\\3x_1+2x_2+x_3=1\end{cases}$$

5. Используя правило метод Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_3+4x_4=1,\\x_1+4x_2+3x_4=3,\\x_1+4x_2+x_4=2,\\3x_1+2x_2+x_3=1\end{cases}$$

Литература

1. Israel Kleiner. History of Linear Algebra // A History of Abstract Algebra. Boston: Birkhäuser, 2007. 168 p.

2. Бурбаки. Линейная и полилинейная алгебра // Очерки по истории математики / И. Г. Башмакова (перевод с французского). М: Издательство иностранной литературы, 1963. 292 с..

3. Креймер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.м., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для вузов. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. 439 с.

4. Шипачев В.С. Высшая математика: учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1996. 479 с.

5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.2. М.: Высшая школа, 1986. 416 с.

6. Барбаумов В.Е., Ермаков В.И., Кривенцова Н.Н. Справочник по математике для экономистов. М.: Высшая школа, 1997. 384 с.

7. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. В 2-х ч. Ч.1. М.: Высшая школа, 1982. 272 с.

8. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1986. 545 с.

9. Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия. М.: Физматлит, 2009. 512 с.

10. Шевцов Г.С. Линейная алгебра. Теория и прикладные аспекты. М.: Финансы и статистика, 2003. 576 с.

11. Шерстнева А.И., Янущик О.В., Пахомова Е.Г., Имас О.Н. Лекции по высшей алгебре. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. 88 с.

Александр Анатольевич **Федюков**

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.